Sborník
Hutisko-Solanec 2007

Háňa Bendová
Víťa Kala
Franta Konopecký
Jarda Hančl
Rasťo Oľhava
Pavel Paták
Zuzka Pôbišová
Michal „Kenny“ Rolínek
Michal Rušin
Martin Tancer
Zuzka Safernová
Pavel Šalom

editoři : Saša Kazda a Jakub „šnEk“ Opršal
vydání první, náklad 40 výtisků
listopad 2007
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Grafové úlohy

Jarda Hančl

Tento příspěvek jsem napsal pro dvě přednášky. První bude především teoretická (znalým ale klidně mohu zadat příklady) a v druhé se už můžete těšit na mnoho úloh, zejména těch z olympiád.

Základní definice

Definice. Graf G *je uspořádaná dvojice* $G = (V, E)$, *kde* V *je neprázdná množina a* E *je množina dvoubodových podmnožin množiny* V. *Jinak řečeno* V *je množina vrcholů a* E *je množina hran. Je-li* $e \in E$ *hrana grafu, pak* $e = \{u, v\}$, *kde* $u, v \in V$.

Definice. *Graf, ve které mezi každými dvěma vrcholy může vést libovolný počet hran, nazveme* multigraf. *Graf, ve kterém hrana není pouze dvojice, ale neuspořádaná* n*-tice se nazývá* hypergraf.

Definice. *Graf* $G' = (V', E')$ *se nazývá* podgrafem grafu G, *jestliže* $V' \subset V$ *a* $E' \subset E$.

A nyní si ještě popíšeme speciální případy grafů:

(i) *Úplný graf na* n *vrcholech* (K_n) je graf kde $E = \binom{V}{2}$, tedy graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojeny hranou.

(ii) *Úplný bipartitní graf na* m *a* n *vrcholech* ($K_{m,n}$) je graf kde $V = V_1 \cup V_2$, kde V_1, V_2 jsou disjunktní a $E = \{\{v_1, v_2\}; v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

(iii) *Cesta na* n *vrcholech* (P_n) je graf, kde $E = \{\{v_i, v_{i+1}\}; i = 1, \cdots, n-1\}$, tedy graf tvořený jednou „čárou“.

(iv) *Kružnice na* n *vrcholech* (C_n) je graf kde

$$E = \{\{v_1, v_n\}\} \cup \{\{v_i, v_{i+1}\}; i = 1, \dots, n-1\},$$

tedy graf tvořící „kružnici“.

Souvislé grafy

Definice. Sled *je posloupnost ne nutně různých vrcholů* $(v_0, v_1, \dots, v_n)$, *kde* $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, *tedy každé dva sousední vrcholy jsou propojeny hranou.* Tah *je sled, ve kterém se neopakují hrany, tj.* $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$ *pro* $i \neq j$. Cesta *je tah, ve kterém se neopakují vrcholy, tj.* $v_i \neq v_j$ *pro* $i \neq j$. Uzavřený tah, uzavřený sled a uzavřená cesta *jsou tah, sled a cesta, ve kterých* $v_0 = v_n$.

Definice. *Řekneme, že graf G je* souvislý, *jestliže mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje cesta.* Komponenta *grafu je maximální souvislý podgraf. Každý graf lze jednoznačně rozložit na komponenty.*

Definice. Stupněm vrcholu *nazveme počet hran, které jej obsahují a značíme $deg_G(v)$. Tedy jinak napsáno $deg_G(v) = |\{e; v \in e \in E\}|$.* Skóre grafu *$G$ je posloupnost stupňů všech jeho vrcholů.*

Věta. (Princip sudosti) *Pro každý graf G platí $\sum_{v\in V} deg_G(v) = 2|E|$.*

Rovinné grafy

Definice. Strom *je souvislý graf neobsahující kružnici.* List *je vrchol stupně jedna.* Kostrou *grafu G rozumíme každý strom T, pro který $T(E) \subseteq G(E)$ a $V(T) = V(G)$.*

Věta. *Pro každý strom $T = (V, E)$ platí $|E| = |V| - 1$.*

Definice. Rovinný graf *je graf G, který je možné nakreslit do roviny bez křížení hran. Potom* Stěnou *rovinného grafu G nazveme minimální část roviny ohraničenou hranami. Počet stěn grafu značíme $s(G)$.*

Věta. (Eulerova formule) *Pro každý rovinný graf G platí $|V| - |E| + s(G) = 2$.*

Důsledek 1. *Nechť graf G je rovinný a nechť $|V| \geq 3$. Pak $|E| \leq 3|V| - 6$, a tedy speciálně K_5 není rovinný.*

Důsledek 2. *Nechť graf G je rovinný, neobsahuje trojúhelník a nechť $|V| \geq 3$. Pak $|E| \leq 2|V| - 4$, a tedy speciálně $K_{3,3}$ není rovinný.*

Věta. (Kuratowski, 16 let) *Graf G je rovinný právě tehdy, když neobsahuje grafy $K_{3,3}$ nebo K_5 jako podgrafy.*

Příklady

A teď se naučíme využívat tuto teorii v praxi.

Příklad 1. (RUSSIA 2001) Je dán graf G na $2n + 1$ bodech takový, že pro každou množinu n bodů v G existuje další bod p z G, který je hranou spojen s každým bodem této množiny. Dokažte, že pak existuje bod se stupněm $n - 1$.

Příklad 2. (IMO 1964) Dokažte, že pro libovolné obarvení hran úplného grafu K_{17} třemi barvami najdeme v tomto grafu tři hrany, které jsou obarveny stejnou barvou a tvoří trojúhelník.

Příklad 3. (JAPAN 1997) Nechť G je graf na 9 vrcholech. Dále pro každou množinu pěti vrcholů v G existují alespoň dvě hrany z G, které začínají a končí v této množině. Určete minimální možný počet hran v grafu G.

Příklad 4. (VIETNAM 1998) Určete minimální k, pro které existuje graf na 25 vrcholech takový, že jednak každý vrchol je spojen hranou s právě k dalšími vrcholy a jednak pro každé dva vrcholy nespojené hranou existuje vrchol, se kterým jsou oba dva spojeny.

Příklad 5. (CZECH-SLOVAK MATCH 2) V uzavřené společnosti $N > 6$ lidí si každý člověk zatančil tučňáka(bohužel pouze ve dvou) s právě třemi dalšími členy této společnosti. Dokažte, že tato společnost může být rozdělena na dvě podspolečnosti tak, že každý člen má ve své podspolečnosti alespoň dva kamarády, se kterými někdy tančil tučňáka.

Příklad 6. (JAPAN 1998) Klub JASTIR má 2008 členů, kteří se buď znají, nebo neznají. Avšak platí, že mezi libovolnými třemi členy je dvojice, která se nezná. Kolik maximálně může v klubu JASTIR existovat známostí?

Příklad 7. (IMO 1992) Uvažujme úplný graf K_9, jehož hrany jsou buď modré, červené nebo bílé. Dokažte, že pokud jsou právě tři hrany bílé, potom existuje trojúhelník, který má všechny hrany obarvené stejně.

Příklad 8. (AUSTRALIA 1992) Tanečního večeru se účastnilo 17 lidí. Zjistilo se, že každý člověk znal na večírku právě čtyři lidi. Dokažte, že pak existuje pár lidí, kteří nejsou známí a ani nemají společného známého.

Příklad 9. (BRITISH 1987) Mezinárodní konference se účastnilo 1985 vlaštovek. Je známo, že v každé skupině tří vlaštovek byly dvě, které uměly zazpívat stejnou písničku. Za předpokladu, že každá vlaštovka umí maximálně pět písniček dokažte, že alespoň 200 vlaštovek si může sborově zazpívat jednu písničku.

Příklad 10. (E1) Ve skupině n lidí platí, že každá podskupinka čtyř lidí vždy obsahuje člověka, který zná zbylé tři(znalost je vzájemná). Dokažte, že v této skupině existuje člověk, který zná všechny ostatní.

Příklad 11. (E2) Mějme šachovnici 3×3, na které jsou v dolních rozích dva bílí a v horních rozích dva černí koně. Určete nejmenší počet tahů, ve kterých si koně vymění pozice(tj. bílí koně budou nahoře a černí dole).

Příklad 12. (E3) Dokážete do pravidelného pětiúhelníku nakreslit triangulaci takovou, že každý vrchol má sudý stupeň?

Literatura

Nejprve bych chtěl poděkovat Jirkovi Finkovi, jehož příspěvek se stal předlohou pro tuto přednášku. Naleznete ho na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php` pod názvem Teorie grafů.

[1] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.

KAGH – nerovnosti v geometrii

Rasťo Oľhava

Predtým než sa začneme zaoberať samotnými KAGH-nerovnosťami, povieme si čo predstavujú jednotlivé písmenká v tomto podivnom názve.

Priemery

Definícia. Kvadratickým priemerom *čísel* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *nazývame číslo:*

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Definícia. Aritmetickým priemerom *čísel* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *nazývame číslo:*

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Definícia. Geometrickým priemerom *čísel* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *nazývame číslo:*

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Definícia. Harmonickým priemerom *čísel* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *nazývame číslo:*

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Veta. (KAGH-nerovnosti) *Pre* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *kladné platí:*

$$K \geq A \geq G \geq H$$

Na prednáške si ukážeme, ako dokázať toto tvrdenie pomocou jednoduchých geometrických obrazcov. V nich sa pokúsime nájsť úsečky odpovedajúce vyššie uvedeným priemerom a porovnať ich. Pri našom hľadaní sa nám zídu aj niektoré známe vety z geometrie:

Veta. (Euklidova o výške) *Nech* $\triangle ABC$ *je pravouhlý s preponou* AB. *Označme* v_c *veľkosť výšky spustenej z vrcholu* C *a* c_a, c_b *dĺžky úsekov vymedzených pätou tejto výšky na strane* AB. *Potom platí nasledujúci vzťah:*

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

Veta. (Pythagorova) *Nech* $\triangle ABC$ *je pravouhlý s preponou* AB. *Pri štandardnom označení strán platí:*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Zvyšný čas prednášky vyplníme podľa chuti. Napríklad rôznymi aritmetickými dôkazmi uvedených nerovností, definovaním mocninného priemeru rádu p.

Kruhová inverze

Michal Rolínek

Kruhová inverze je bezesporu jednou z nejzajímavějších partií rovinné geometrie. Není se čemu divit. Kdo by nebyl okouzlen tím, jak přímky přecházejí v kružnice a kružnice v přímky, jak se body přesouvají do nekonečna a zpátky a také tím, jak mocnou zbraní při řešení úloh může být toto exotické zobrazení. Než se naplno pustíme do tajů a krás kruhové inverze zavedeme si pár pojmů.

Definice. *Ke všem bodům roviny, které známe, přidáme ještě bod ∞ a tvrdíme, že jím procházejí všechny přímky.*

Najednou nemůžeme říct, že přímka nemá konec. Všimni si, že už tady se rozdíl mezi přímkou a kružnicí začíná stírat.

Úmluva. Aby se nám usnadnilo vyjadřování, budeme přímkám a kružnicím říkat souhrnně kruhové křivky.

Co je kruhová inverze?

Definice. *Kruhová inverze je zobrazení, které bodům roviny přiřazuje opět body roviny, a to následujícím způsobem. Nechť je dána kružnice $i(I, r)$, bodu X z naší roviny přiřadíme bod X' na polopřímce SX tak, aby platilo:*

$$|XI||X'I| = r^2$$

Speciálně $I \longrightarrow \infty, \infty \longrightarrow I$. Kružnici i budeme říkat inverzní kružnice a bodu I střed inverze.

Vlastnosti kruhové inverze

Pozorování. Body, které ležely uvnitř kružnice I se zobrazí ven a naopak.

Pozorování. Dvakrát provedená inverze podle stejné inverzní kružnice je identita.

Problém. Jak kružítkem a pravítkem zkonstruovat obraz bodu X v dané kruhové inverzi? (Nápověda: Vzpomeň si na Euklidovy věty)

Kruhová inverze není shodné ani podobné zobrazení. Přesto však je možné vyjádřit vzdálenost obrazů dvou bodů pomocí vzdálenosti vzorů a parametrů inverze.

Máme-li body X, Y a jejich obrazy X',Y' v kruhové inverzi podle $i(I,r)$. Platí

$$|X'Y'| = |XY|\frac{r^2}{|SX||SY|}$$

Tvrzení. (Nejdůležitější) Obrazem kruhové křivky je v kruhové inverzi opět kruhová křivka.

Poznámka. Pozor! Kruhová inverze sice docela často zobrazuje kružnice na kružnice, ovšem obecně neplatí, že by se na sebe zobrazily i jejich středy.

Cvičení. Určete množinu všech samodružných bodů, přímek a kružnic v kruhové inverzi.

Cvičení. Co se stane s rovnostranným trojúhelníkem, pokud ho zinvertujeme podle jeho opsané kružnice?

Cvičení. Co se stane se čtvercem zinvertujeme-li ho (i s úhlopříčkami) tentokrát podle kružnice vepsané?

Poznámka. Kruhová inverze také zachovává úhly mezi křivkami. Co přesně to znamená, si vysvětlíme na přednášce.

Konstrukční úlohy řešené pomocí kruhové inverze

Nyní si poprvé ukážeme, jak nám kruhová inverze může usnadnit práci v jinak obtížných či neřešitelných úlohách. Nejprve to budou úlohy konstrukční. S kruhovou inverzí nejvíce souvisí takzvané Apollóniovy úlohy. To jsou úlohy, ve kterých je úkolem zkonstruovat kružnici, která by se dotýkala tří zadaných prvků (mohou jimi být bod, přímka, či jiná kružnice). Například Apollóniova úloha bkk tedy zní: Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem a dotýká se dvou daných kružnic. Na přednášce všechny Apollóniovy úlohy vyřešíme (samozřejmě s využitím kruhové inverze).

Příklad. (Úloha navrhovaná na IMO 1985) Je dán $\triangle ABC$, zkonstruuj uvnitř ABC bod D, tak aby trojúhelníky ABD, ACD, BCD měly stejný obvod.

Důkazové úlohy řešené pomocí kruhové inverze

Dosud se kruhová inverze mohla zdát jako zajímavý, avšak ne moc užitečný výstřelek. Nyní si však kruhovou inverzi představíme jako silný nástroj při řešení úloh z geometrie podobných těm z MO. Její použití je často velmi nečekané. Není žádný univerzální návod, jak poznat, které úlohy se dají pomocí kruhové inverze řešit, pouze několik obecných doporučení, které si povíme na přednášce.

Příklad 1. Jsou dány kružnice k_1,k_2,k_3 a k_4 takové, že k_2 a k_4 se obě dotýkají k_1 i k_3. Dokažte, že body dotyku leží na jedné kružnici.

Příklad 2. Dokažte Ptolemaiovu nerovnost. Ta říká, že pro každý čtyřúhelník $ABCD$ (s obvykle značenými délkami stran a, b, c, d a úhlopříčkami e, f) platí $ac + bd \geq ef$ s rovností právě pro tětivový čtyřúhelník.

Příklad 3. (Rakousko-polské střetnutí 1998) Přímky p a q se protínají v bodě P. Přímka p je společnou tečnou kružnic k_1 a k_2, které mají vnější dotyk v bodě P a přímka q je společnou tečnou kružnic l_1 a l_2, které se též zvenčí dotýkají v bodě P. Dokažte, že zbylé průsečíky kružnic k_1, k_2, l_1 a l_2 leží na jedné kružnici, právě když $p \perp q$.

Příklad 4. (Úloha navrhovaná na IMO 2003) Mějme opět bod P jako vnější bod dotyku kružnic k_1 a k_3 a kružnic k_2 a k_4. Zbylé průsečíky kružnic ($k_1 \cap k_2$, $k_2 \cap k_3$ ...) označme po řadě A, B, C, D. Dokažte, že platí

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}.$$

Příklad 5. (IMO 1996) Nechť P je bod uvnitř $\triangle\ ABC$ takový, že $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že osy úhlů ABP a ACP protínají přímku AP v jednom bodě.

Příklad 6. Mějme půlkružnici k s průměrem PQ a kružnici l, která má vnitřní dotyk s k a dotýká se úsečky PQ v bodě C. Sestrojme tečnu ke kružnici l, která je kolmá na PQ a označme postupně A, B její průsečíky s k a s úsečkou CQ. Dokažte, že AC je osou úhlu PAB.

Příklad 7. Označme p polovinu obvodu $\triangle ABC$. Na přímce AB nalezneme body E, F, tak aby platilo $|CE| = |CF| = p$. Dokažte, že kružnice opsaná $\triangle EFC$ se dotýká kružnice připsané $\triangle ABC$ ke straně AB.

Příklad 8. Dokažte, že kružnice devíti bodů se dotýká kružnice vepsané i všech kružnic připsaných.

Příklad 9. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se dotýká stran AB, BC, CA postupně v bodech K, L a M. Dokažte, že střed kružnice opsané a střed kružnice vepsané $\triangle ABC$, ortocentrum $\triangle KLM$ leží v přímce.

Příklad 10. Máme dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod D uvnitř trojúhelníka takový, že platí $|AC||BD| = |AD||BC|$ a $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90^\circ$. Zjistěte hodnotu podílu

$$\frac{|AB||CD|}{|AC||BD|}.$$

Lehká teorie čísel na brutalitách

Franta Konopecký

Úvod

Tato přednáška je přepracovanou verzí Víťovy přednášky před dvěma lety doplněná o příklady, které mi přišly ke zvolenému tématu zajímavé, názorné a ne úplně jednoduché. Přednáška je nenáročná na předchozí znalosti, z hlediska příkladů, které na ní vyřešíme, bude však patřit k těžším. Takže kdo chcete s minimálními znalostmi řešit drsné úlohy, je vám přednášky brána otevřená.

Zavedeme si na úvod jeden důležitý pojem, ať máme odborné termíny z krku, a to pojem **kongruence**.

Kongruence

Definice. *Mějme celá čísla a a b a přirozené číslo n. Pokud $n|(a-b)$, řekneme, že čísla a a b jsou kongruentní podle modulu n (případně kongruentní modulo n), a píšeme $a \equiv b \pmod{n}$.*

Poznámka. Jednoduše bychom řekli, že čísla a, b jsou kongruentní modulo n, pokud dávají stejné zbytky po dělení číslem n.

S kongruencemi se dá pracovat skoro stejně jako s rovnicemi. K oběma stranám kongruence můžeme přičíst (nebo odečíst) libovolné celé číslo a můžeme je vynásobit jakýmkoli nenulovým číslem. Dělit je ale možné jen čísly nesoudělnými s modulem (tak se říká tomu číslu n z předchozí definice). Také můžeme sečíst, odečíst nebo vynásobit libovolné dvě kongruence podle stejného modulu.

O kongruencích platí několik zajímavých tvrzení, která si na přednášce pořádně vysvětlíme:

Věta. (malá Fermatova) *Mějme přirozené číslo a a prvočíslo p, které nedělí a. Potom platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Věta. (Bezoutova) *Nechť jsou a a b celá čísla, jejich největšího společného dělitele značme $d = (a, b)$. Potom existují celá čísla x a y taková, že $ax + by = d$. Speciálně pokud jsou a a b nesoudělná, existují čísla x, y taková, že $ax + by = 1$*

Věta. *Buď p libovolné prvočíslo p a a číslo s ním nesoudělné. Potom existuje mezi čísly 1, 2, ... , $p-1$ právě jedno číslo b, pro které $ab \equiv 1 \pmod{p}$.*

Eulerova funkce a Eulerova věta

Definice. (Eulerova funkce) *Ať je n přirozené číslo. Počet všech s n nesoudělných přirozených čísel, jež jsou menší nebo rovna n, značíme $\varphi(n)$. Této funkci říkáme Eulerova.*

Věta. *Ať je n přirozené číslo větší než 1 a ať je $n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\cdots{p_k}^{\alpha_k}$ jeho rozklad na součin prvočísel ($p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou po dvou různá prvočísla, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jsou přirozená čísla). Potom platí $\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$.*

Věta. (Eulerova) *Buďte a celé číslo a m přirozené číslo nesoudělné s a. Potom platí $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.*

Příklady

Nejdřív něco na kongruence:

Příklad 1. Dokažte, že druhá mocnina přirozeného čísla dává po dělení čtyřmi jen zbytky 0 a 1.

Příklad 2. (Kanada 1973) Ukažte, že jestliže jsou čísla p a $p+2$ obě prvočísla, tak potom buď $p = 3$ nebo $6|(p+1)$.

Příklad 3. Transformací čísla budeme rozumět jeho nahrazení vlastním ciferným součtem. Začněme s 2007^{2007} a udělejme čtyři transformace. Jaký dostaneme výsledek? (Kanada 1989)

Příklad 4. (Brazílie 1989) n je přirozené číslo takové, že $\frac{n(n+1)}{3}$ je čtverec. Ukažte, že pak n je násobek tří a čísla $n+1$ a $\frac{n}{3}$ jsou též čtverce.

Příklad 5. (Prasátko, 24. ročník, 5. série) Buď p dané prvočíslo. Najděte všechna celá čísla a, b splňující $a^2 \equiv b^3 \pmod{p}$.

Tady už hledejte použití malé Fermatovy a Eulerovy věty:

Příklad 6. (Irsko 2000) Definujme $f(n) = 5n^{13} + 13n^5 + 9kn$. Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že je $f(n)$ dělitelné 65 pro všechna n.

Příklad 7. (Irsko 1996) Ukažte, že číslo $2^p + 3^p$ nemůže být n-tá mocnina ($n > 1$) pro p prvočíslo.

Příklad 8. Ukažte, že pro každé prvočíslo p můžeme najít nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že p dělí výraz $2^n - n$. (Kanada 1983)

Příklad 9. Existuje přirozené číslo N dělitelné přesně 2007 různými prvočísly (prvočísla mohou vystupovat v N v různých mocninách) takové, že N dělí $2^N - 2$?

(když vám to k něčemu bude, můžete předpokládat, že prvočísel ve tvaru $4k + 3$ je aspoň 3000).

Příklad 10. (Prasátko, 24. ročník, 5.série) Nechť n je přirozené číslo a p prvočíslo takové, že $p|n^2 + n + 1$. Dokažte, že $p \equiv 1 \pmod 6$ nebo $p = 3$.

Příklad 11. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \dots$ definovanou vztahem $a_n = 2^n + +3^n + 6^n - 1$. Určete všechna přirozená čísla, která jsou nesoudělná s každým členem této posloupnosti. Nápověda: jediné nesoudělné číslo se všemi členy posloupnosti je číslo 1. (IMO 2005)

Příklad 12. Číslo nazvěme pruhované, pokud jsou jeho číslice střídavě liché a sudé. Ukažte, že všechna čísla n nesoudělná s 10 mají nějaký pruhovaný násobek. Upgrade: ukažte, že všechna čísla nedělitelná dvaceti mají pruhovaný násobek. (IMO 2004)

Příklad 13. (Brazílie 1992) Dokažte, že existuje přirozené číslo n takové, že prvních 1992 číslic z n^{1992} jsou jedničky.

Příklad 14. (IMO 2000) Můžeme najít číslo N dělitelné právě 2000 různými prvočísly (v libovolných mocninách) takové, že N dělí $2^N + 1$?

Matematická indukce

Háňa Bendová

Úvod

V této přednášce si budeme povídat o matematické indukci, což je věc nadmíru užitečná; bude se vám jistě ještě mnohokrát hodit, až budete dumat nad záludnými úlohami z PraSátka či matematické olympiády nebo zkrátka až budete mít neodbytnou touhu dokázat něco pěkného.

Princip matematické indukce

Matematická indukce je jedna ze základních důkazových metod, která se obvykle používá, chceme-li dokázat, že nějaké tvrzení či matematická věta platí pro všechna přirozená čísla.

Důkaz matematickou indukcí spočívá v tom, že nejprve ukážeme, že tvrzení $T(n)$ platí pro nejmenší číslo n (většinou $n = 1$), a následně dokážeme, že jestliže tvrzení $T(n)$ platí pro všechna $n \leq k$ (tomu se obvykle říká indukční předpoklad), pak platí i $T(k+1)$. Můžeš si snadno rozmyslet, že takovýto důkaz opravdu funguje.

Ukážeme si jednoduchý příklad, který nám přiblíží, jak že se tedy v praxi důkazy matematickou indukcí provádějí.

Vzorový příklad. Ukážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Vzorové řešení vzorového příkladu.
První krok: Tvrzení $T(1)$ vypadá jako $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, což jistě platí.
Druhý krok: Předpokládejme, že platí $T(n)$ pro všechna $n \leq k$ (číslo k nám zadává „nepřítel“). Chceme ukázat, že $T(k+1)$ je pravda. Můžeme si vypomoci tvrzením $T(k)$, které zní:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Přičteme tedy na obě strany této rovnosti číslo $k+1$ a upravujme:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}.$$

Ale to je přesně tvrzení $T(k+1)$. Jsme tedy hotovi.

Cvičení

Příklad 1. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)\,.$$

Příklad 2. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2\,.$$

Příklad 3. Mějme n přímek v rovině. Dokaž, že tyto přímky dělí rovinu nejvýše na $\frac{1}{2}n\,(n+1) + 1$ oblastí.

Příklad 4. Mějme kruh a n bodů, které leží na jeho obvodu. Každé dva body spojme úsečkou. Na kolik částí tím rozdělíme kruh?

Příklad 5. Dokaž, že oblasti v rovinné mapě, která je tvořena n kružnicemi, z nichž každá protíná všechny ostatní, lze obarvit dvěma barvami tak, že spolu nesousedí žádné dvě oblasti stejné barvy.

Příklad 6. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1.$$

Příklad 7. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\left(1 + 1^{-3}\right)\left(1 + 2^{-3}\right) \cdots \left(1 + n^{-3}\right) < 3.$$

Příklad 8. Dokaž, že mezi každými 2^{n+1} čísly lze najít 2^n čísel takových, že jejich součet je dělitelný 2^n.

Příklad 9. Dokažte, že nerovnost
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$
platí pro všechna $n \geq 2$.

Příklad 10. Dokaž, že výraz $1 + 2^{4n+2} + 3^{4n+2} + 4^{4n+2} + 5^{4n+2} + 6^{4n+2}$ je pro všechna $n \geq 0$ dělitelný třinácti.

Příklad 11. Dokaž, že pro každých n kladných reálných čísel platí
$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
(nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem).

Při psaní příspěvku jsem využila loňský úvod ke čtvrté sérii, který napsal Saša Kazda.

Metoda obsahů

Pavel Šalom

Cílem přednášky je dokázat některé zajímavé věty tzv. metodou obsahů, ukázat použití těchto vět a vyřešit několik příkladů, které chytře využívají vlastností obsahů nebo se jich jiným způsobem týkají.

Spokojíme se s intuitivní představou obsahu a bohatě si vystačíme s jedinou definicí, a sice, že obdélník se stranami délek a, b má obsah $S = ab$.

Tvrzení, která si na přednášce ukážeme:

(1) **Kosinová věta:** Při standardním značení v trojúheníku platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$

Poznámka. Volbou $\gamma = 90°$ dostaneme tzv. Pythagorovu větu (Pythagoras žil 580–500 př. n. l.).

(2) **Sinová věta:** Při standardním značení v trojúhelníku platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

(3) Buď S obsah trojúhelníku, ϱ poloměr kružnice vepsané a s polovina jeho obvodu (tedy $s = \frac{a+b+c}{2}$), potom platí $S = \varrho s$.

(4) **Heronův vzorec (asi 60 n. l.; 10–70 n. l.):** Obsah trojúhelníku lze vyjádřit pomocí jeho stran jako

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

(5) Jednoduché, netýká se obsahů, ale překvapivě velmi užitečné. Pro $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

(6) **Cevova věta (1678; 1647–1734):** [čévova] V trojúhelníku $\triangle ABC$ buďte X, Y, Z po řadě body na stranách a, b, c. Přímky AX, BY, CZ se protínají v jednom bodě právě když

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|BY|} = 1.$$

(7) **Menelaova věta (70–140 n. l.):** Mějme trojúhelník $\triangle ABC$ a buďte X, Y, Z po řadě body na přímkách určených stranami a, b, c. Body X, Y, Z leží na přímce právě když

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|BY|} = 1.$$

(8) **van Aubelova věta (1830–1906):** V trojúhelníku $\triangle ABC$ buďte X, Y, Z po řadě body stranách a, b, c tak, že přímky AX, BY, CZ se protínají v jediném bodě M. Potom

$$\frac{|CM|}{|ZM|} = \frac{|CY|}{|AY|} + \frac{|CX|}{|BX|}$$

nebo též ekvivalentně

$$\frac{|CM|}{|CZ|} + \frac{|BM|}{|BY|} + \frac{|AM|}{|AX|} = 2.$$

(9) Je dán $\triangle ABC$ a uvažujme takové body P, že trojúhelníky $\triangle APC$ a $\triangle BPC$ mají stejný obsah. Množina všech takových bodů je přímka, na níž leží těznice na stranu c.

Zobecnění: Je-li navíc dán poměr $\lambda \in \mathbb{R}^+$, množina všech bodů P takových, že $\frac{S(\triangle APC)}{S(\triangle BPC)} = \lambda$, je přímka (v předchozím tvrzení je pro $\lambda = 1$ touto přímkou těžnice).

(10) Je dán čtyřúhelník $ABCD$ a obsah $S_0 \in \mathbb{R}^+$. Množina všech bodů P takových, že $S(\triangle ABP) + S(\triangle CDP) = S_0$ je přímka.

Příklady

Na přednášce si ukážeme následující hrst úloh:

Příklad 1. (IMO 1987, úloha 2) Je dán ostroúhlý trojúhelník $\triangle ABC$. Osa úhlu procházející vrcholem A protne stranu BC v bodě L a kružnici opsanou v bodě N. Z bodu L veďme kolmice na strany AB, AC a jejich paty označme po řadě K, M. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku $AKMN$ je stejný jako obsah trojúhelníku $\triangle ABC$.

Příklad 2. Je dán obvod trojúhelníka. Jak máme zvolit jeho strany, aby měl co největší obsah?

Příklad 3. (MO 54. ročník, úloha 3) V lichoběžníku $ABCD$ ($AB||CD$) označme E střed strany BC. Jsou-li oba čtyřúhelníky $ABED$ a $AECD$ těčnové, splňují délky stran lichoběžníku $ABCD$ označené obvyklým způsobem rovnosti

$$a + c = \frac{b}{3} + d \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{b}.$$

Příklad 4. Buď $ABCDE$ konvexní pětiúhelník takový, že úhly při vrcholech B, E jsou pravé a navíc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EAD$. Buď O průsečík BD a CE. Dokažte, že AO a BE jsou kolmé.

Příklad 5. Je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a body M_1, M_2 na straně BC. Nechť jsou dále X_1, X_2 body na straně AB takové, že $M_iX_i \,||\, AC$ a Y_1, Y_2 body na straně AC takové, že $M_iY_i \,||\, AB$ pro $i = 1, 2$. Dokažte, že potom body A, P, R leží na přímce.

Příklad 6. (PraSe 23. ročník, 5. série, úloha 4) Je dán trojúhelník $\triangle ABC$, označme T jeho těžiště. Přímka rovnoběžná s BC procházející bodem T protíná stranu AB v bodě B' a stranu AC v bodě C'. Nechť A'' je střed strany BC, C'' průsečík BC' a CT, B'' průsečík $B'C$ a BT. Dokažte, že trojúhelník $\triangle A''B''C''$ je podobný trojúhelníku $\triangle ABC$.

Příklad 7. V $\triangle ABC$ označme D, E, F po řadě ty body, ve kterých se kružnice vepsaná dotýká stran BC, CA, AB. Na stranách EF, FD, DE jsou po řadě zvoleny body M, N, P. Dokažte, že přímky DM, EN, FP se protínají právě tehdy, když se protínají přímky AM, BN, CP.

Příklad 8. (PraSe 24. ročník, 2. série, úloha 6) Nechť H je střed kružnice vepsané $\triangle ABC$ a D průsečík osy úhlu $\sphericalangle ACB$ se stranou AB. V závislosti na délkách stran $\triangle ABC$ vyjádřete poměr $|CH| : |DH|$.

Příklad 9. Je dána kružnice k se středm S a přímka AB dotýkající se k v bodě B. Po otočení přímky AB kolem středu S označme obrazy bodů A, B po řadě A', B'. Dokažte, že přímka AA' půlí úsečku BB'.

Příklad 10. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, který není rovnoběžník. Nechť P, Q značí po řadě středy jeho úhlopříček AC, BD a přímka PQ protíná stranu BC v bodě R. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků $\triangle ABR$ a $\triangle CDR$ je roven obsahu trojúhelníku $\triangle ARD$.

Příklad 11. (IMO 2006, úloha 6) Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který leží celý v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven než dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku P.

Náhodné příklady z pravděpodobnosti

Martin Tancer

Přednáška se bude týkat některých témat z pravděpodobnosti. Nebude cílem si tu formálně zavést, co to pravděpodobnost je – budeme se spoléhat spíš na intuici. Mělo by se jednat o méně náročnou přednášku (po matematické stránce).

Přednáška bude příkladová, ale nebude se jednat o klasické typy příkladů jako z matematické olympiády (beztak pravděpodobnost na olympiádě nebývá). Spíš se bude jednat o příklady, které mají nějaký zajímavý a občas i nečekaný výsledek. Zde si můžeš přečíst příklady, kterými se na přednášce budeme zabývat – ke každému si vždy ještě řekneme nějaké obecnější pozadí.

Příklad. Krtečci hrají „Krtečku nezlob se!" s poměrně neobvyklou hrací kostkou. Má dvě stěny s jedním obrázkem krtečka a po jedné stěně postupně se třemi, čtyřmi, pěti, šesti a sedmi obrázky krtečka. Určete pravděpodobnost, že při hodu dvěma takovými kostkami padne dohromady sedm krtečků.

Příklad. V noře je 23 krtečků. Jaká je pravděpodobnost, že jsou mezi nimi dva, co mají narozeniny ve stejný den.

Příklad. Někteří krtečci trpí zákeřnou krtčí žížalovkou. Touto chorobou trpí 0,01% krtčí populace. Na žížalovku existuje test s následující úspěšností: pokud krteček žížalovkou netrpí, tak mu test na 98% odpoví, že chorobu nemá (a na 2%, že má), pokud chorobou trpí, tak mu na 90% odpoví, že chorobu má (a na 10%, že nemá). Jeden krteček si zašel nechat udělat test, a ten mu odpověděl, že chorobu má. Určete pravděpodobnost, že chorobu opravdu má.

Příklad. Krteček kope tunel. V každém kroku si náhodně vybere, jestli bude kopat šikmo doprava dopředu nebo šikmo doleva dopředu. Drobný háček je v tom, že napravo i nalevo od krtečka je nekonečně dlouhá skála (která je ve vzdálenosti 2 od počáteční polohy krtečka). Určete pravděpodobnost, že krteček prvně narazí do skály napravo, a pravděpodobnost, že prvně narazí do skály nalevo. Jak dlouho bude v průměru trvat, než narazí do nějaké skály?

Příklad. Krtček má 40 krtčích korun. Jeho cílem je v kasinu hrát tak, aby měl 50 korun. Vždy si vybere nějakou částku, kterou vsadí – a vyhraje s pravděpodobností $p < \frac{1}{2}$. Doporučte krtečkovi nějakou strategii, aby měl co největší šanci 50 korun získat. Spočítejte pravděpodobnost, že je získá.

Pentomino

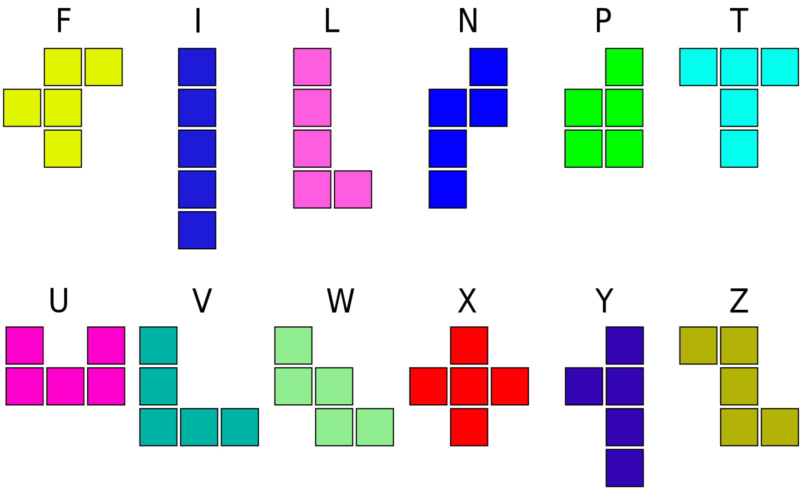
Michal Rušin

Úvod

Pojmom pentomino sa označuje skupina dvanástich rovinných útvarov, pričom každý z nich je zložený z piatich zhodných štvorcov. Ako pentomino sa často označujú tiež jednotlivé útvary zo skupiny či súbor rôznych úloh, hlavolamov a hier, ktoré sa k tejto skupine vzťahujú.

Pentominové útvary

Päť štvorcov v jednotlivých útvaroch sa nesmie nijako prekrývať a musia na seba naväzovať celými stranami. Dva útvary, ktoré vzniknú jeden z druhého otočením alebo zobrazením v osovej súmernosti (teda zrkadlovým prevrátením) nie sú považované za rôzne. Pentomina tak trochu pripomínajú niektoré písmená, preto sú označované veľkými tlačenými písmenami. Jednotlivé pentomina sú na obrázku:

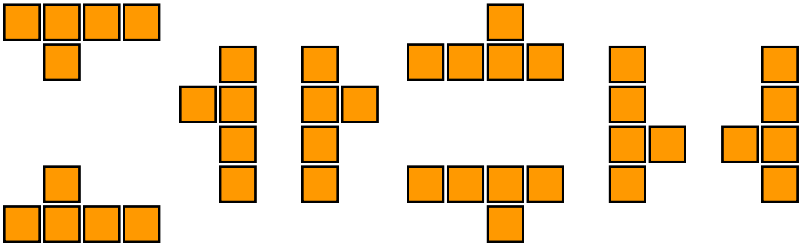


Keby sme zrkadlové obrazy považovali za rôzne pentomina, dva rôzne útvary by existovali len pre F, L, N, P, Y a Z, pretože I, T, U, V, W, a X sú osovo súmerné a ich zrkadlový obraz je zhodný. Takže ich počet by bol 18. Ak budeme považovať za rôzne naviac aj útvary, ktoré vzniknú jeden z druhého otočením, dostaneme tieto počty útvarov:

- 8 pre L, N, P, F, Y – 4 otáčaním a ďalšie 4 otáčaním zrkadlového obrazu

- 4 pre Z – 2 otáčaním a 2 otáčaním zrkadlového obrazu
- 4 pre T, U, V, W – otáčaním
- 2 pre I – otáčaním
- 1 pre X

Príklad pre pentomino Y je vidieť na nasledujúcom obrázku:



Hlavolamy

Sada dvanástich pentomin sa skladá zo 60 štvorcov. S týmto počtom súvisí hlavolam:

Úloha. Pokryjte dvanástimi pentominovými útvarmi obdĺžnik zložený z 3×20 (4×15, 5×12, 6×10) štvorčekov tak, aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky štvorčeky.

Príklady riešení sú na obrázku na ďalšej strane.

Ak budeme o jednotlivých pentominach uvažovať ako o priestorových útvaroch, teda ako o hranoloch, ktoré majú základňu v tvare niektorého pentomina a výšku rovnakú, ako je strana štvorčekov, z ktorých sú pentomina zložené, dostaneme dvanásť útvarov, ktoré sú zložené spolu zo 60 kociek. Takto dostaneme analogický hlavolam:

Úloha. Vyplňte dvanástimi pentominovými útvarmi kváder zložený z $2 \times 3 \times 10$ ($2 \times 5 \times 6$, $3 \times 4 \times 5$) kociek tak, aby bol vyplnený bez dier a pentomina sa neprekrývali.

Príklady riešení sú v nasledujúcich schémach, kde sú jednotlivé kvádre zobrazené „po vrstvách“:

$2 \times 3 \times 10$

P	P	F	N	N	W	T	U	X	U
P	P	F	F	W	W	T	X	X	X
P	F	F	W	W	T	T	T	X	L

V	V	V	Z	N	N	N	U	U	U
V	Z	Z	Z	Y	I	I	I	I	I
V	Z	Y	Y	Y	Y	L	L	L	L

$2 \times 5 \times 6$

P	P	P	N	N	N
Y	W	N	N	X	U
Y	W	W	X	X	X
Y	Y	W	W	X	U
Y	I	I	I	I	I

P	P	L	L	L	L
F	F	L	Z	Z	U
V	F	F	Z	T	U
V	F	Z	Z	T	U
V	V	V	T	T	T

$3 \times 4 \times 5$

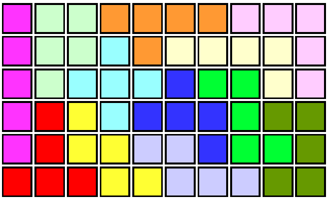
F	F	V	V	V
X	N	N	N	V
N	N	Z	Z	V

X	F	F	P	T
X	L	T	T	T
X	W	W	Z	T

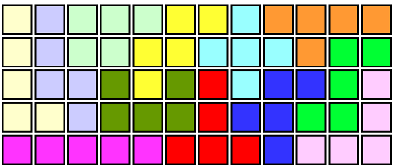
U	F	U	P	P
X	L	L	L	L
W	W	Y	Z	Z

U	U	U	P	P
I	I	I	I	I
W	Y	Y	Y	Y

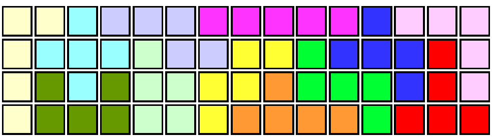
Riešení prvého hlavolamu:



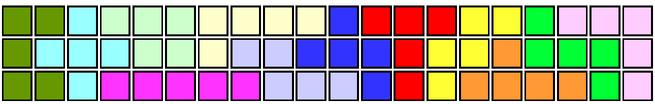
6 x 10



5 x 12



4 x 15



3 x 20

Hra pentomino

Hru pentomino hrajú dvaja hráči na šachovnici (8×8 štvorcov). Obaja striedavo kladú na šachovnicu pentomina tak, aby ich strany splývali so stranami štvorcov šachovnice (nesmie sa teda klásť naprieč poľami šachovnice). Zároveň sa žiadne dve položené pentomina nesmú prekrývať a nesmú ani vyčnievať von zo šachovnice.

Vyhráva ten hráč, ktorý položí pentomino na šachovnicu tak, že súper už nemôže pridať žiadne zo zostávajúcich pentomin. Teoreticky hra môže skončiť remízou, ak na šachovnicu budú položené všetky pentomina (počet ich štvorcov je 60, počet štvorcov šachovnice je 64), ale je to veľmi nepravdepodobné a bez dohodnutej spolupráce protihráčov v podstate nemožné.

Poznámka. Pre túto hru bola objavená vyhrávajúca stratégia pre začínajúceho hráča, tj. ak začínajúci hráč hrá správne, nemôže prehrať. Pri bežnej hre bez pomoci počítača je ale prakticky nemožné si túto stratégiu zapamätať a dodržať, takže hra nestráca na zaujímavosti. Z dôvodu znalosti víťaznej stratégie sa však hra hráva aj v iných variantoch – u niektorých z nich nebola vyhrávajúca stratégia zatiaľ objavená.

Varianty hry

Viac hráčov – hru môžu hrať aj traja hráči, prípadne štyria, ale v tomto prípade sa do značnej miery prejavuje vplyv poradia a náhody

Viacero skupín pentomin – hru je možné hrať v základnej verzii s jednou skupinou pentomin (tj. s dvanástimi) spoločnou pre všetkých hráčov, alebo tiež tak, že každý hráč má svoju skupinu pentomin

Prísnejšie pravidlá pre ukladanie – pravidlá sa dá obmedziť tak, že položené pentomina sa nesmú dotýkať stranou (ako napríklad v hre scrabble) alebo dokonca tak, že sa nesmú dotýkať ani rohom niektorého štvorca

Väčšia alebo nepravidelná šachovnica – najmä v prípade, ak je k dispozícii viacero skupín pentomin a sú používané prísnejšie pravidlá pre ukladanie, je zaujímavé použiť tiež väčšiu šachovnicu, napríklad 12×12 pre hru go. Samozrejme je tu tiež možnosť náhodne vyškrtať niekoľko štvorcov šachovnice, na ktoré sa počas hry nesmie pentomino umiestniť.

Zdroj príspevku a obrazkov: `http://cs.wikipedia.org`

Ramseyovy věty

Pavel Paták

Úvod

Snaž se jakkoli, absolutní bordel neuděláš. A o tom si budeme povídat.

Dirichletův princip

Ať už budeme dělat s oblečením ve skříni cokoli, vždy bude platit:

Tvrzení. (Dirichletův princip)

(1) Dáme-li $n+1$ košil na pouhých n ramínek, pak na alespoň jednom ramínku budou viset alespoň dvě košile.
(2) Dáme-li $kn+1$ ponožek do n přihrádek, alespoň v jedné jich bude alespoň $k+1$.

To jsou hranice nepořádku, které nepřekročíme.

Pár grafových pojmů

Nyní budeme chtít uvedený princip trošku zevšeobecnit. Ale k tomu si musíme nejprve říct pár pojmů.

Definice. Grafem (V, E) *budeme rozumět libovolnou množinu* V vrcholů *grafu a podmnožinu dvojice vrcholů z* E*. Dvojice z* E *budeme nazývat* hrany*.*

Definice. Úplný graf K_n *je graf, který má* n *vrcholů* $\{1, 2, 3, \ldots n\}$*, jež jsou všechny spojeny hranou (tj.* E *je množina všech dvojic z* V*).*

Definice. Obarvení *hran grafu* k *barvami je nějaké zobrazení z* E *do* $\{1, 2, \ldots k\}$

Definice. Podgrafem *grafu* (V, E) *je graf, jehož vrcholy* V' *jsou některé vrcholy z* V *a hrany jsou všechny hrany původního grafu, které obsahovaly jen body z* V'*.*

V předchozí kapitolce jsme se dívali na jednotlivé objekty, zkusme se nyní více zaměřit na vztahy mezi nimi a vyslovit slibovanou větu o tom, že ani tady nebude bordel tak úplně libovolný.

Věta. (Ramseyova věta pro grafy) *Pro každé* n *a* r *přirozené existuje* $N \in \mathbb{N}$ *tak, že při libovolném obarvení hran úplného grafu* K_N *pomocí* r *barev existuje podgraf tohoto grafu na* n *vrcholech* K_n*, jehož všechny hrany mají stejnou barvu.*

Toto tvrzení lze ještě trošku zevšeobecňovat. Např. můžeme chtít, abychom nalezli K_{n_1} obarvený celý první barvou, či K_{n_2} obarvený druhou barvou, ...

Obecná Ramseyova věta

Zkusme nyní zkoumat vztahy nejen mezi dvojicemi, ale i mezi trojicemi, čtveřicemi, ... Tak tohle už je opravdu jen pro šílence. Nejprve si zavedeme pár pojmů.

Definice. *Mějme libovolnou množinu K a libovolné obarvení jejích n-prvkových podmnožin pomocí r barev. Podmnožinu $L \subseteq K$ nazvu* homogenní *při daném obarvení, pokud každá její n-prvková podmnožina je obarvena stejnou barvou.*

Je dobré si uvědomit, že nebarvíme jednotlivé prvky, ale celé množiny, takže se klidně může stát, že např. tříprvková množina $\{1, 2, 3\}$ bude obarvena žlutě a $\{2, 3, 4\}$ červeně.

Definice. *Symbol $k \rightarrow (l)_r^m$ znamená, že pokud máme množinu velikosti k a libovolné obarvení jejích podmnožin pomocí r barev, vždy najdeme homogenní podmnožinu v tomto obarvení, která má velikost alespoň l.*

Věta. (Obecná Ramseyova) *Pro každá $l, m, r \in \mathbb{N}$ platí, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k \rightarrow (l)_r^m$.*

I toto tvrzení lze stejně jako Ramseyovu větu pro grafy zevšeobecnit. Nádherným případem je $*$-ramseyova věta.

A co na to nekonečno?

To už je podstatně zajímavější. Ne všechny Ramseyovy věty lze rozšířit i na nekonečné množiny. Tam může být nepořádek mnohem, mnohem větší.

Stereometria bez počítania

Zuzka Pôbišová

Definícia. *Stereometria je geometria v priestore.*

V škole si sa možno so stereometriou stretol, keď ste počítali nejaké povrchy a objemy alebo rezali kocku, prípadne iné telesá. A kedže teraz nič počítať nebudeme, budeme sa uberať skôr tou druhou cestou.

Definícia. *Rez telesa je prienik telesa s reznou rovinou. Obrysom rezu je rovinná krivka.*

Príklad 1. Čo môže byť rezom kocky?

Definícia. *Mnohosten je teleso ohraničené niekoľkými rovinami (ich časťami).*

Príklad 2. Čo môže byť rezom všeobecného mnohostenu?

Poznáme ale aj iné telesá, nie len hranaté. Napríklad guľu, valec, kužeľ. Pri týchto telesách si už s rovinami nevystačíme. Možno si už počul slovné spojenia guľová plocha, valcová plocha, kužeľová plocha, ... Plochu si môžeš predstaviť ako „pokrivenú" rovinu. Spomínané plochy nie sú zďaleka jediné, existuje niekoľko druhov plôch:

(i) rotačné plochy – sú určené osou rotácie o a rovinnou krivkou k (hlavný meridián), ktoré ležia v jednej rovine; rotačná plocha vznikne rotáciou k okolo o; príkladom rotačnej plochy je guľa, valec, kužeľ, rotačný elipsoid, anuloid, paraboloid, hyperboloid ...

(ii) translačné plochy – sú určené dvomi rovinnými krivkami k a l ktoré majú spoločný bod; translačná plocha vznikne posúvaním k po l; príkladom translačnej plochy je rovina, valec, hyperbolický paraboloid, ...

(iii) skrutkové plochy (česky šroubové) – sú určené skrutkovým pohybom (os a výška závitu) a krivkou k; skrutková plocha vznikne skrutkovaním k; príkladom skrutkovej plochy je rovina dotyčníc skrutkovice, Archimedova serpentína, ...

(iv) priamkové plochy, konoidy a kvadratické priamkové plochy[1]

(v) všeobecné

Príklad 3. Aká plocha vznikne rotáciou priamky k okolo osi o, ak k je mimobežná s o?

Vráťme sa teda k definícii telesa.

[1] Neboj sa všetkých tých krkolomných názvov, budeme sa zaoberať hlavne jednoduchšími plochami, tie ostatné uvádzam len pre zaujímavosť.

Definícia. *Teleso je ohraničené plochami, alebo ich časťami (rovina je špeciálny prípad plochy).*

Napríklad kužeľ je ohraničený rotačnou kužeľovou plochou a podstavnou rovinou. Rezom kužeľa sú kužeľosečky alebo ich časti. Pre nás sú zaujímavé hlavne regulárne kužeľosečky.

(i) parabola – vznikne keď kužeľovú plochu režeme rovinou, ktorá zviera s rovinou podstavy uhol δ, ktorý je rovanako veľký ako uhol β, ktorý zvierajú povrchové priamky kužeľovej plochy s rovinou podstavy
(ii) hyperbola – vznikne, keď $\delta > \beta$
(iii) elipsa – vznikne, keď $\delta < \beta$

Príklad 4. Čo môže byť rezom valca? Dokáž.

Príklad 5. Čo môže byť rezom rotačného elipsoidu? Dokáž.

Doteraz sme sa zaoberali len rezmi, ktoré teleso naozaj rezali. Vynechali sme pripady, keď sa rezová rovina telesa len dotýka. Napríklad singulárne kužeľosečky, rovina dotýkajúca sa rohu kocky, ... Takéto roviny by sme asi intuitívne nazvali dotyčnicové (česky tečné), keď sa dotýkajú. Ako ale neskôr zistíš, takáto intuitívna definícia by určite nefungovala, lebo nie každá rovina, ktorá sa telesa dotýka je dotyčnicová a nie každá dotyčnicová rovina sa telesa len dotýka. Dotyčnicovú rovinu vždy určujeme k ploche a v jednom konkrétnom bode.

Definícia. *Dotyčnicová rovina plochy v bode X je rovina*[2] *dotyčníc ku všetkým povrchovým krivkám plochy prechádzajúcim bodom X.*

Takže napríklad keď si vezmeme rovinu a dve priamky v nej ležiace, ich dotyčnice sú s nimi totožné, teda dotyčnicová rovina k rovine je rovina s ňou totožná. To znamená, že dotyčnicová rovina kocky je jedine rovina niektorej jej steny a nie rovina, ktorá sa len dotýka vrcholu alebo hrany. Povrchové krivky gule sú kružnice a ich dotyčnice sú kolmé na priemer gule, preto aj dotyčnicová rovina gule je kolmá na jej priemer.

Príklad 6. Anuloid je rotačná plocha určená osou o a kružnicou k; o nepretína k; o a k ležia v jednej rovine. Ako vyzerá dotyčnicová rovina k anuloidu v bode, ktorý je najbližšie k osi?

Príklad 7. Aké telesá majú dotyčnicové roviny, ktoré ich režú?

[2]Takto by sa dotyčnicová rovina určovala ťažko, preto sa vždy zvolia dve vhodné povrchové priamky a ich dotyčnicami je už rovina jednoznačne určená.

Obsah