Sborník

Dolní Mísečky 2008

Franta Konopecký

Jaroslav Hančl

Káťa Fišerová

Michal "Kenny" Rolínek

Michal Rušin

Michal Szabados

Pavel Šalom

Pavel Klavík

Rasťo Olhava

Tomáš Roskovec

Zuzka Pôbišová

editoři Pavel Klavík, Michal Szabados

vydání první, náklad 40 výtisků

duben 2008

Od základů k fatal nerovnostem

Franta Konopecký

Úvod

Přednáška bude rychlokurzem drsného použití AGéčka a jeho obdob, ukáže, jak ho vidět téměř všude. Několik příkladů bude též na konvexitu a Jensenovu nerovnost. Kdo u Franty ulpí – neprohloupí :).

Nerovnosti

Věta. (AG-nerovnost) *Pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}.$$

Rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Výraz na levé straně je aritmetický průměr, výraz na pravé geometrický průměr, proto AG-nerovnost.

Ukázka. AG-nerovnost pro dvě a tři kladná čísla:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}, \qquad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Věta. (vážená AG-nerovnost) *Nechť $w_1, w_2, \ldots, w_n$ jsou váhy, tedy platí pro ně $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$, a nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná reálná čísla. Potom platí nerovnost*

$$w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} a_2^{w_2} \ldots a_n^{w_n}.$$

Rovnost nastává při rovnosti $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ukázka. Použití váženého AG při důkazu $2a^3 + b^3 \geq 3a^2 b$:

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3 \geq \left(a^3\right)^{2/3} \left(b^3\right)^{1/3} = a^2 b.$$

Ukázka. Vážené AG na nerovnost $3a^6 + 2b^6 + c^6 \geq 6a^3 b^2 c$:

$$\frac{1}{2}a^6 + \frac{1}{3}b^6 + \frac{1}{6}c^6 \geq \left(a^6\right)^{1/2} \left(b^6\right)^{1/3} \left(c^6\right)^{1/6} = a^3 b^2 c.$$

Poznámka. Volbou $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \frac{1}{n}$ obdržíme z váženého AG normální AG-nerovnost.

Definice. (symetričnost) *Výraz je* symetrický *v proměnných a, b, c, pokud se jejich libovolnou záměnou nezmění.*

Definice. (cykličnost) *Výraz je* cyklický *v proměnných a, b, c, pokud se jejich cyklickou záměnou nezmění.*

Ukázka. Symetrický (a tedy i cyklický) výraz je

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}.$$

Ukázka. Nesymetrický, ale cyklický výraz je

$$\frac{a+b}{a}+\frac{b+c}{b}+\frac{c+a}{c}.$$

Definice. (homogenita) *Výraz je* homogenní*, pokud mají jeho členy stejný stupeň.*

Poznámka. Tato definice homogenity je velmi zjednodušená, přesněji je výraz $f(a,b,c)$ homogenní, pokud pro všechna $t\in\mathbb{R}$ platí $f(ta,tb,tc)=t\cdot f(a,b,c)$.

Ukázka. Homogenní výrazy jsou

$$a^2+bc,\qquad \frac{ab}{c}+\frac{c^3}{ab},\qquad \frac{1}{a^2+b^2}+\frac{c}{b^3}.$$

Ukázka. Nehomogenní výrazy jsou

$$a+b+c+1,\qquad \frac{a^2+b}{c}.$$

Věta. (Jensenova nerovnost) *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I a nechť v_1, v_2, …, v_n jsou váhy. Potom pro libovolná čísla $x_1,x_2,\ldots,x_n\in I$ platí*

$$f(v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_nx_n)\le v_1f(x_1)+v_2f(x_2)+\ldots+v_nf(x_n),$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Příklady

Ve všech příkladech jsou a, b, c kladná reálná čísla.

Lehké

Příklad 1. Dokažte
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Příklad 2. Dokažte, že jestliže $abc = 1$, pak
$$(ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 1.$$

Příklad 3. Dokažte
$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0.$$

Příklad 4. Dokažte
$$x^4 - 4x + 3 \geq 0.$$

Příklad 5. Dokažte
$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

Příklad 6. Dokažte
$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}.$$

Střední

Příklad 7. Dokažte
$$\frac{(a + b + c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

Příklad 8. Dokažte, že jestliže platí $abc = 1$, pak
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Příklad 9. Dokažte, že jestliže $a + b + c = 1$, pak
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Příklad 10. Dokažte, že jestliže $abcd = 1$, pak
$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

Příklad 11. Dokažte, že jestliže $abc = 1$, pak
$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Fatal Brutal

Příklad 12. Dokažte

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

Příklad 13. Dokažte, že jestliže $abc = 1$, pak

$$\frac{ab}{a^5+ab+b^5} + \frac{bc}{b^5+bc+c^5} + \frac{ca}{c^5+ca+a^5} \leq 1.$$

Příklad 14. Dokažte

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Příklad 15. Dokažte, že jestliže $a+b+c = 3$, pak

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2.$$

Příklad 16. Dokažte

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Příklad 17. Dokažte

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Příklad 18. Dokažte

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Příklad 19. Dokažte, jestliže platí $a+b+c = 2$, pak

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \leq 3.$$

Příklad 20. Dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Příklad 21. Dokažte

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Unlimited Evil

Příklad 22. Nechť $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Dokažte

$$\sum_{i,j=1}^{n} min\{a_i a_j, b_i b_j\} \leq \sum_{i,j=1}^{n} min\{a_i b_j, a_j b_i\}.$$

Zdroje

Na většinu z nejtěžších uvedených nerovností se lze proklikat přes internetové fórum `Mathlinks` na adrese `http://www.mathlinks.ro/Forum/index.php?f=32`. Články si seřaďte podle navštívenosti.

Křivky

Jaroslav Hančl

Přednáška bude povětšinou teoretická. Nejprve seznámím posluchače se základními pojmy týkající se křivek, v druhé části budeme studovat konkrétní křivky jako spirály, cykloidy, řetězovky apod. Neděste se však těchto pojmů, jejich vlastnosti Vás nadchnou natolik, že si je možná i zapamatujete.

Co je to křivka

Křivka se dá jednoduše laicky popsat jako čára, při níž nezvednete tužku z papíru. Trochu zamyšlení už vyžaduje následující formální definice:

Definice. *Mějme interval $I \subset \mathbb{R}$. Poté parametrizovanou křivku definujeme jako diferencovatelné zobrazení $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ Tuto křivku nazveme regulární, jestliže $\forall t \in I$ je $\varphi'(t) \neq 0$.*

Matematický zápis se dá provést třemi způsoby. Například jednotkovou kružnici jimi lze popsat jako

- množina bodů
$$\left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\},$$
- graf funkce
$$y = \sqrt{1 - x^2} \;\cup\; y = -\sqrt{1 - x^2},$$
- dráha bodu
$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } t \in [0, 2\pi].$$

My většinou budeme využívat parametrizaci křivky jakožto dráhy bodu nebo budeme znát rovnici ji popisující. V souvislosti s křivkami zavedeme ještě několik důležitých pojmů. Jejich formální definice jsou složité, a tak se je pokusíme popsat jejich geometrickou interpretací.

- *Tečna křivky v bodě x* je přímka, která se v daném bodě x křivky pouze dotýká.
- *Normála křivky v bodě x* je kolmice na tečnu procházející x.
- *Odchylka dvou křivek* je odchylka jejich tečen v bodě průniku.
- *Délku křivky* získáme, když křivým metrem změříme její délku.
- *Křivost křivky v bodě* znamená, jak moc křivka v bodě zatáčí.

Významné křivky

Křivek v rovině je spousta. V podstatě, když nakreslíte nějakou čáru a pak ji popíšete rovnicemi, můžete ji prohlásit za svou křivku. Připravené křivky jsem rozdělil do 4 skupinek:

Spirály

- *Archimédova spirála* je dráha bodu pohybujícího se rovnoměrně po polopřímce, která se rovnoměrně otáčí kolem svého počátečního bodu.
- *Logaritmická spirála* má rovnici $r = ac^t$, kde $t \in \mathbb{R}$, a, c jsou reálné parametry.
- *Fermatova spirála* je složením dvou křivek s rovnicemi $r = \pm\sqrt{t}$, $t \in \mathbb{R}$.
- *Hyperbolická spirála* je dána rovnicí $r = \frac{a}{t}$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- *Šroubovice* je prostorová křivka popsána parametricky vektorem

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Cykloidy

- *Cykloida* je křivka, kterou opisuje bod ležící na kružnici kutálející se po přímce.
- *Hypocykloida* je dráha, kterou opisuje bod na kružnici, která se valí po vnitřní stěně nějaké větší kružnice. Pro různé poměry poloměrů kružnic dostáváme křivky jménem *Asteroida* a *Deltoida.*
- *Epicykloida* je křivka, kterou opisuje bod na kružnici, která se valí po vnější stěně pevné kružnice. Jakožto speciální případ dostaneme *Kardioidu.*
- *Epitrochida* je křivka, kterou opisuje pevný bod uvnitř kružnice, která se valí po vnější stěně pevně zadané kružnice.

Zbytek

Tak jako parabola je složena z bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou ohnisek, *Cassiniho ovál* je množina bodů, které mají konstantní součin vzdáleností od dvou ohnisek. Jeho speciální případ je *Bernouliho Lemniskáta*, která má předpis

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Další používanou křivkou je *Řetězovka.* Tato křivka popisuje tvar lana prověšeného mezi dvěma pevnými body a je popsána rovnicí

$$y = cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

A nakonec se zmíníme ještě o jedné důležité křivce s názvem *Evolventa.* Evolventou křivky nazveme dráhu pevně zvoleného bodu na přímce, která se valí po dané křivce.

Zajímavé křivky

Zde jsou uvedeny jen křivky, které nemají nijaký valný význam, ale jejich grafy jsou pěkné.

- *Prvočíselná spirála,*
- *křivka Ampersand,*
- *Ďáblova křivka,*
- *Wattova křivka.*

Příklady

Příklad 1. Mějme dvě mince na sobě položené (dvě kružnice v rovině s vnějším dotykem). Jednu minci zafixujeme a druhou budeme valit po jejím povrchu. Kolikrát se pohybující se mince otočí, než se dostane do počáteční polohy?

Příklad 2. Tipněte si, kolik je délka asteroidy, která je vepsána do kružnice o poloměru R.

Příklad 3. Jak se bude měnit úhel, který svírá tečna šroubovice v bodě t s podstavou, bude-li bod t postupně probíhat celou šroubovici?

Příklad 4. Jaká křivka vznikne, budeme-li řezat torus (ringo kroužek) rovinou tak, aby se řez skládal ze dvou částí spojených jedním bodem?

Příklad 5. Jakou křivku představuje most Tower Bridge v Londýně?

Příklad 6. Jaký vztah má křivka s evolventou své evolventy?

Počítání v planimetrii

Michal "Kenny" Rolínek

Cílem této přednášky je obohatit vaše znalosti z planimetrie o nové metody, založené na algebraickém přístupu. Nebudeme ovšem sáhodlouze upravovat obrovské výrazy, jak by se mohlo zdát. Naopak si ukážeme příklady, v nichž nás trocha počítání dovede velmi přímočaře k řešení. Též se naučíme účinně používat několik šikovných tvrzení.

Pár příkladů na rozjezd

Příklad 1. Mějme rovnostranný trojúhelník a bod X uvnitř něho. Paty kolmic z bodu X na strany trojúhelníka označme P, Q a R. Ukažte, že součet

$$|XP| + |XQ| + |XR|$$

nezávisí na volbě bodu X.

Příklad 2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o obsahu S a jeho vnitřní bod M. Označme po řadě A_1, B_1, C_1 ty body stran BC, CA a AB, pro něž platí $MA_1||AB$, $MB_1||BC$ a $MC1||CA$. Průsečíky os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Dokažte, že platí $S = 3T$.

Příklad 3. Je dána úsečka AC a na ní ležící bod B. Nad průměry AC a AB sestrojme kružnice. Těm sestrojme vnější společnou tečnu, která se jich dotkne v bodech P_1 a P_2. Dokažte, že platí

$$|P_1P_2|^2 = |AB||BC|.$$

Příklad 4. Označme a, b, c, d strany čtyřúhelníka $ABCD$. Ukažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka jsou kolmé právě tehdy, když platí

$$a^2 + c^2 = b^2 + c^2.$$

Pokud je navíc tento čtyřúhelník tečnový, dokažte, že platí $ac = bc$.

Příklad 5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Průměr kružnice jemu vepsané označíme d. Dokažte, že platí

$$a + d = b + c.$$

Příklad 6. Uvažme kružnici k a její průměr AB. Zvolme na AB bod X a na kružnici k libovolnou tětivu CD rovnoběžnou s AB. Dokažte

$$|XA|^2 + |XB|^2 = |XC|^2 + |XD|^2.$$

Příklad 7. Na straně AB rovnostranného trojúhelníka ABC zvolme bod D. Sestrojme rovnostranné trojúhelníky ADE a BDF tak, že body E a F leží v opačné polorovině určené přímkou AB než bod C. Dokažte, že středy trojúhelníků ABC, ADE a BDF tvoří rovnostranný trojúhelník.

Příklad 8. Buď ABC trojúhelník takový, že $|CA| \neq |AB|$. Potom přímka spojující střed T_a strany BC se středem I kružnice vepsané protíná výšku jdoucí vrcholem A v bodě, který má od tohoto vrcholu vzdálenost rovnou poloměru kružnice vepsané. Dokažte.

Příklad 9. V $\triangle ABC$ je I střed kružnice vepsané, M střed strany AC a N střed oblouku AC kružnice opsané (toho, co obsahuje B). Dokažte, že

$$|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|.$$

Příklad 10. (IMO 2005) Na stranách rovnostranného trojúhelníka ABC je zvoleno 6 bodů. Na straně a body A_1, A_2, na straně b body B_1, B_2 a na straně c body C_1 a C_2. Tyto body tvoří vrcholy konvexního šestiúhelníka jehož strany mají všechny stejnou délku. Dokažte, že přímky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 procházejí jedním bodem.

Počítání tečen

Tvrzení. *Trojúhelníku ABC vepišme kružnici, která se dotkne jeho stran a, b a c postupně v bodech D, E a F. Délky úseček BD, CE a AF umíme snadno pak snadno vyjádřit pomocí délek a, b a c. Obdobná tvrzení platí i pro kružnice připsané.*

Příklad 1. Trojúhelníku ABC připišme kružnici ke straně a. Ta se strany a dotkne v bodě D. Dokažte, že úsečka AD půlí obvod trojúhelníka.

Příklad 2. Na straně AB trojúhelníka ABC označme X bod dotyku s kružnicí vepsanou a Y bod dotyku s příslušnou kružnicí vepsanou. Ukažte, že střed úsečky XY je též středem úsečky AB.

Příklad 3. Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Ukažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a CDA mají vnější dotyk.

Příklad 4. Kružnice, která prochází vrcholy A a C trojúhelníku ABC protíná jeho strany BC a AB po řadě v bodech A_1 a C_1. Označme dále P průsečík přímek AA_1 a CC_1. Je-li čtyřúhelník PC_1BA_1 tečnový, je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Příklad 5. Čtyřúhelník $ABCD$ má kolmé úhlopříčky, které se protínají v bodě S. Označme po řadě I_a, I_b, I_c a I_d poloměry kružnic vepsaných trojúhelníků ASB, BSC, CSD a DSA. Dokažte, že $I_a+I_c = I_b+I_d$ právě tehdy, když lze čtyřúhelníku $ABCD$ vepsat kružnice.

Počítání v tětivovém čtyřúhelníku

Věta. (Ptolemaiova) *Pokud je $ABCD$ tětivový čtyřúhelník s běžně označenými stranami a úhlopříčkami e, f platí*

$$ac + bd = ef.$$

Cvičení. Dokažte opačnou implikaci.

Příklad 1. Na kratším oblouku BC kružnice opsané rovnoramennému ($|AB| = |AC|$) trojúhelníku ABC leží bod X. Dokažte, že platí

$$\frac{|AX|}{|BX| + |CX|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Příklad 2. Na kratším oblouku BC kružnice opsané čtverci $ABCD$ leží bod X. Ukažte, že podíl

$$\frac{|BX| + |CX|}{|AX| + |DX|}$$

nezávisí na volbě bodu X.

Příklad 3. Na kratším oblouku BC kružnice opsané čtverci $ABCD$ leží bod X. Ukažte, že platí

$$\frac{|AX| + |CX|}{|BX| + |DX|} = \frac{|DX|}{|AX|}.$$

Příklad 4. Na kratším oblouku BC kružnice opsané pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ leží bod X. Dokažte, že platí

$$|XA| + |XD| = |XB| + |XC| + |XE|.$$

Příklad 5. Na kratším oblouku BC kružnice opsané pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ leží bod X. Dokažte, že platí

$$|XE| + |XF| = |XA| + |XB| + |XC| + |XD|.$$

Příklad 6. Zobecněte předchozí úlohy na pravidelný n–úhelník.

Počítání v trojúhelníku

Příklad 1. V $\triangle ABC$ vyjádřete délku těžnice pomocí délek stran.

Příklad 2. Ukažte, že v každém trojúhelníku platí implikace $a > b \Rightarrow t_a < t_b$.

Příklad 3. Označme G těžiště trojúhelníku ABC. Dokažte

$$|AG|^2 + |BG|^2 + |CG|^2 = \frac{1}{3}(|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2).$$

Příklad 4. V $\triangle ABC$ vyjádřete délku výšky pomocí délek stran.

Věta. (Stewartova) *V $\triangle ABC$ zvolíme na AB bod D. Délku $|CD|$ označíme d a budeme ji chtít spočítat, víme-li délky úseků $|BD| = m$ a $|AD| = n$. To se nám podaří díky následujícímu vzorci*

$$a^2n + b^2m = c(d^2 + mn).$$

Cvičení. Spočítejte pomocí Stewartovy věty délky těžnic a os úhlů v trojúhelníku. Zkuste též spočítat délku spojnice vrcholu a třetiny protější strany.

Příklad 5. Ukažte, že součet čtverců délek stran rovnoběžníka je roven součtu čtverců jeho úhlopříček.

Příklad 6. Rozdělme přeponu AB pravoúhlého trojúhelníka ABC na třetiny AX, XY a YB. Dokažte, že platí

$$|CX|^2 + |CY|^2 = \frac{5}{9}|AB|^2.$$

Dá se úloha zobecnit na čtvrtiny, pětiny, …, n-tiny?

Příklad 7. (Pro počítavce) Nalezněte všechny trojúhelníky, jejichž délky stran tvoří aritmetickou posloupnost, a zároveň i délky jejich těžnic tvoří aritmetickou posloupnost.

Příklad 8. Buď ABC trojúhelník takový, že $|CA| \neq |AB|$. Potom přímka spojující střed T_a strany BC se středem I kružnice vepsané protíná výšku jdoucí vrcholem A v bodě, který má od tohoto vrcholu vzdálenost rovnou poloměru kružnice vepsané. Dokažte.

Specialitka na závěr

Věta. (Archimédova) *Na kružnici k s průměrem AB leží bod X. Na úsečce XB zvolme bod Y a veďme jím kolmici na XB, která protne k v bodě M. Pak platí, že M je střed oblouku AB právě tehdy, když $|XA| + |XY| = |YD|$.*

Příklad 1. Je dán $\triangle ABC$ a M střed strany BC. Na straně AB nalezněme bod N takový, že $|\sphericalangle MNA| = \frac{\beta}{2}$. Dokažte, že úsečka MN dělí obvod trojúhelníka ABC napůl.

Příklad 2. (Calábek) Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Na stranách AB a BC jsou zvoleny body M a N tak, že $MN||AC$ a zároveň platí

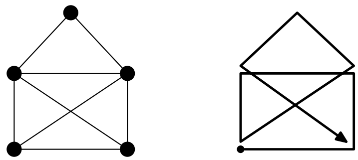
$$\frac{|CN|}{|NB|} = \frac{|AC|}{|BC|} = 2.$$

Označme O průsečík přímek CM a AN. Na úsečce ON zvolme bod K tak, že platí $|MO|+|OK| = |KN|$. Označme dále T průsečík kolmice k přímce ON procházející bodem K s osou úhlu ABC. Dokažte, že úhel MTB je pravý.

Jednoťažky

Michal Rušin

Určite ste sa už stretli s úlohou typu „nakresli tento obrázok jedným ťahom“. Niekedy sa to dá, inokedy nie. A o tom bude nasledujúci text.



Túto úlohu budeme riešiť pomocou grafov. Samozrejme, nie grafov funkcií. Pod pojmom *graf* máme na mysli obrázok v rovine, ktorý je tvorený z bodov (tie nazývame *vrcholy grafu*) spojených čiarami (tie nazývame *hrany grafu*), pričom každá hrana spája práve dva vrcholy. Označme množinu vrcholov $V(G)$ a množinu hrán $E(G)$, potom graf G je dvojica množín (V, E). Symbol uv znamená hranu medzi vrcholmi u, v. Definujme formálne.

Definícia. *Graf G je dvojica (V, E), kde V je ľubovoľná neprázdna konečná množina a E je nejaký systém dvojprvkových podmnožín V.*

Úlohu môžeme teda preformulovať. Nakreslite daný graf $G = (V, E)$ jedným ťahom tak, aby sa žiadna hrana neopakovala.

Definícia. Sled *je postupnosť vrcholov a hrán, ktorá začína aj končí vrcholom a v ktorej každé dve po sebe idúce hrany majú spoločný vrchol.*

Definícia. *Sled, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje, nazveme* ťah. *Ťah označíme $v_0v_1 \dots v_{k-1}v_k$.*

To znamená, že musíme zoradiť všetky hrany grafu do ťahu. Kreslenie jedným súvislým ťahom predpokladá tiež vlastnosť zvanú *súvislosť grafu*, tj. medzi každými dvoma vrcholmi sa musí dať prejsť po nejakých hranách tohto grafu. Počet hrán vedúcich do vrcholu v budeme nazývať *stupeň vrcholu v* a budeme značiť $\deg(v)$.

Definícia. Eulerovský graf *je graf, ktorého všetky vrcholy a hrany je možné zoradiť do ťahu, ktorý navyše začína a končí v tom istom vrchole. Taký ťah nazývame* eulerovský.

Veta. *Graf je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a stupeň každého vrcholu je párny.*

Dôsledok. *Graf je možné nakresliť jedným ťahom bez opakovania hrán, ak je súvislý, stupeň nanajvýš dvoch vrcholov je nepárny a stupeň ostatných vrcholov je párny.*

Ukážeme si algoritmus na nájdenie eulerovského ťahu. Ťah budeme na konci postupne predlžovať o ďalšie hrany. Ak by sme však nasledujúce hrany volili nesprávne, ľahko by sa mohlo stať, že by sme celý graf neprešli. Preto, ak je to možné, sa budeme snažit zvyšok grafu[1] ďalej nerozdeľovať na viac častí. Pokiaľ sme už do grafu začlenili všetky hrany, máme eulerovský ťah. Popíšme si celý algoritmus formálne.

Algoritmus. Nech $G = (V, E)$ je súvislý a stupeň každého vrcholu je párny. Zvoľ si ľubovoľný počiatočný vrchol $v_0 \in V$ a polož $i := 0$, ktoré znamená dĺžku zatiaľ nájdeného ťahu.

(i) Ťah predĺžime o hranu $e_{i+1} \in E \setminus \{v_0v_1, \ldots, v_{i-1}v_i\}$ takú, že vedie z vrcholu v_i a navyše, ak je to možné, grafy $(V, E \setminus \{v_0v_1, \ldots, v_{i-1}v_i\})$ a $(V, E \setminus \{v_0v_1, \ldots, v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\})$ majú rovnaký počet súvislých častí[2].
(ii) Ak $i = |E|$, máme postupnosť hrán, ktorá je eulerovským ťahom; v opačnom prípade polož $i := i + 1$ a urob znovu krok (i).

Príklad. Mesto Kaliningrad na území Ruska leží na rieke Pregole, ktorá vytvára dva ostrovy, ktoré boli so zvyškom mesta spojené siedmimi mostami (dnes ich je už menej). Otázka znie, či bolo možné prejsť všetkých sedem mostov tak, aby sme po každom prešli len raz.

Modifikácie úlohy

Prvou modifikáciou sú tzv. *náhodne eulerovské grafy*. Náhodne eulerovský graf je taký, že nech sa na každom „rázcestí“ rozhodneme pokračovať akoukoľvek hranou, nakoniec aj tak prejdeme celý graf. Formálne:

Definícia. *Náhodne eulerovský graf pre vrchol v je taký, že každý ťah z tohto vrcholu, ktorý sa nedá predĺžiť, prejde celý graf.*

Druhou je úloha pre *orientovaný graf*. V orientovanom grafe máme namiesto hrán orientované hrany (šípky), tj. hrana z vrcholu v_1 do vrcholu v_2 a hrana z vcholu v_2 do vrcholu v_1 sú dve rôzne veci. Pri ťahu potom môžeme použiť len hranu v smere šípky, čiže hľadáme ťah $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_0$. Takisto musíme upraviť definíciu stupňa vrcholu na *vstupný stupeň vrcholu*, čo je počet šípok vedúcich do vrcholu, a *výstupný stupeň vrcholu*, čo je počet šípok vedúcich z vrcholu.

Veta. *Orientovaný graf je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a pre každý vrchol platí, že jeho vstupný a výstupný stupeň sa rovnajú.*

[1] Bez hrán, ktoré sme už začlenili do ťahu.
[2] Súvislým častiam grafu hovoríme *komponenty súvislosti.*

Treťou modifikáciou je úloha typu nakreslite daný graf jedným ťahom tak, aby sa žiadny vrchol neopakoval[3]. Tento typ úloh je podstatou mnohých problémov v logistike, tj. napríklad pri hľadaní optimálnej cesty pri dodávkach tovaru. Úlohu prevedieme na problém nájdenia hamiltonovskej kružnice v grafe:

Definícia. *Kružnica je uzavretý (tj. začína a končí v tom istom vrchole) sled, v ktorom sa neopakujú vrcholy.*

Definícia. *Hamiltonovská kružnica v grafe G je kružnica prechádzajúca všetkými vrcholmi grafu G.*

Poznamenajme, že aj keď hľadanie eulerovského ťahu a hamiltonovskej kružnice je zdanlivo podobný problém, nájsť eulerovský ťah je jednoduché, zatiaľ čo hamiltonovskú kružnicu nikto rýchlo nájsť nevie a je to veľmi ťažký problém[4].

Literatúra

Príspevok vychádza zo staršieho príspevku Davida Stanovského, ktorý nájdete na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/library/JednotazkyDS/JednotazkyDS.ps` v knižnici Prasátka, a tiež zo skrípt prof. Nešetřila a prof. Matouška Kapitoly z diskrétní matematiky.

[3] Potom sa pochopiteľne nemôže opakovať ani žiadna hrana.

[4] Ak by sa niekomu podarilo nájsť rýchle riešenie, alebo naopak dokázať, že neexistuje, vyriešil by jeden z najväčších problémov matematiky a dostal by odmenu milión dolárov.

Tetivové štvoruholníky

Michal Szabados

Úvod

Veta. (Základná veta geometrie) *Geometria je pekná.*

Dôkaz. Nechávame na čitateľa ako ľahké cvičenie.

Orientovaný uhol

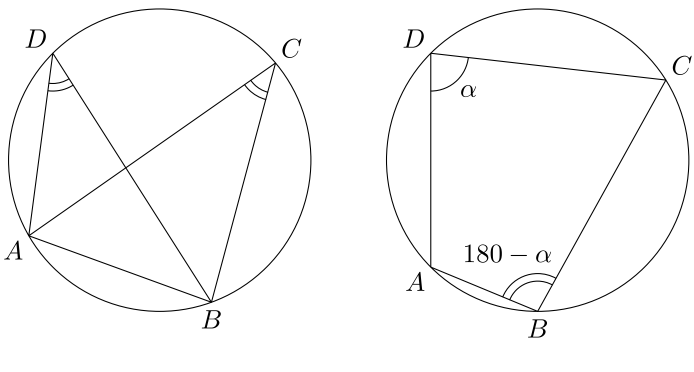
Pri používaní „obyčajných“ uhlov niekedy narazíme na problém, že treba rozoberať veľa prípadov na základe toho, aká je vzájomná poloha bodov. Orientované uhly tento problém riešia.

Definícia. *Majme v rovine body $A \neq B \neq C$. Orientovaným uhlom $\widehat{ABC}$ chápeme uhol, o ktorý by sa v danom smere muselo otočiť rameno BA aby splynulo s ramenom BC.*

Ten smer si musíme zvoliť a potom stále používať rovnako. Ja budem celý čas používať smer proti pohybu hodinových ručičiek.

Príklad 1. Dokážte vetu o stredovom a obvodovom uhle.

Príklad 2. Dokážte, že tetivový štvoruholník má súčet protiľahlých uhlov 180°. Platí opačná implikácia?



Tetivové štvoruholníky

Definícia. *Tetivový štvoruholník je taký štvoruholník, ktorého vrcholy ležia na spoločnej kružnici.*

V posledných rokoch sa v olympiáde veľmi často vyskytujú úlohy o tetivových štvoruholníkoch. Je to asi tým, že prepájajú polohu bodov s tvrdeniami o uhloch. Hlavné dve vlastnosti týchto štvoruholníkov sú v príklade 1 a 2. Z príkladu 1 vyplýva ešte jedna dôležitá geometrická vlastnosť, a síce že dva uhly nad jednou tetivou v danej kružnici sú rovnaké. Teda my máme špeciálne:

Tvrdenie. *Majme tetivový štvoruholník $ABCD$ s týmto poradím bodov na kružnici. Potom $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.*

Príklad 3. Majme trojuholník ABC. Os uhla $\sphericalangle BAC$ pretína kružnicu opísanú $\triangle ABC$ v bode $M \neq A$. Dokážte, že M je stred oblúka $\widehat{BC}$ (ktorý neobsahuje bod A).

Príklad 4. Nech M je ľubovoľný vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC. Označme S, S_1 a S_2 stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ABC, AMC a BMC. Dokážte, že body M, C, S_1, S_2 a S ležia na jednej kružnici.

Príklad 5. Majme trojuholník ABC s priesečníkom výšok O. Dokážte, že obrazy O v osových súmernostiach so stranami ABC ležia na kružnici opísanej ABC.

Príklad 6. Označme D, E a F päty výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Dokážte, že výšky $\triangle ABC$ sú osami uhlov $\triangle DEF$.

Pokročilé cvičenia

Príklad 7. Kružnica vpísaná danému trojuholníku ABC sa dotýka strán BC, CA a AB postupne v bodoch K, L a M. Označme P priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s priamkou MK. Dokážte, že priamky AP a LK sú rovnobežné.

Príklad 8. Majme ostrouhlý trojuholník ABC s uhlom $60°$ pri vrchole C. Dokážte, že body A, B, stred vpísanej kružnice, stred opísanej kružnice a ortocentrum ABC ležia na jednej kružnici.

Príklad 9. Daný je trojuholník ABC. Na priamke AC sú dané body M, N tak, že $|MA| = |AB|$, $|NC| = |CB|$ (pričom body ležia na priamke v poradí M, A, C a N). Nech BK je spoločná tetiva kružníc opísaných trojuholníkom MCB a NAB. Dokážte, že BK je osou uhla ABC.

Príklad 10. Nech M je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Oznacme P a R priesečníky priamky AM postupne s úsečkami BD a CD a podobne Q a S priesečníky priamky BM s úsečkami AC a DC. Dokážte, že priamky PS a QR sú navzájom kolmé.

Príklad 11. Kružnica vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka jeho strán AB a BC v bodoch P, Q. Priamka PQ pretína os uhla BAC v bode S. Dokážte, že priamky AS a SC sú navzájom kolmé.

Príklad 12. Majme dva podobné trojuholníky ABC a $AB'C'$, ktoré sú rovnako orientované ($\widehat{ABC} = \widehat{AB'C'}$). Označme D a E priesečníky priamok porade BC s $B'C'$ a BB' s CC'. Dokážte, že ak body D, A, E ležia na jednej priamke, tak body B, B', C a C' ležia na jednej kružnici.

Príklad 13. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech D, E a F sú päty jeho výšok spustených postupne z vrcholov A, B a C. Priamka prechádzajúca bodom D a rovnobežná s EF pretína priamky AC a AB postupne v bodoch Q a R. Priamky EF a BC sa pretínajú v bode P. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku PQR prechádza stredom strany BC.

Referencie

Príklady som vyberal z rôznych kôl olympiády a tiež som použil nejaké známe tvrdenia. Ak hľadáš nejaké ďalšie, stačí si otvoriť ľubovoľnú olympiádu a s 50 % pravdepodobnosťou v nej bude príklad na tetivové štvoruholníky.

[1] `http://kms.sk/mo`

[2] Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind: *Challenging Problems in Geometry*, Unabridged Dover 1996.

Gaussove prvočísla

Michal Szabados

Úvod

Táto prednáška bude o komplexných celých číslach. Komplexné celé číslo je jednoducho číslo tvaru $a + bi$, kde a a b sú celé. Čiže sú to akoby mrežové body roviny. Keďže komplexná rovina sa nazýva Gaussova, aj tieto čísla sa nazývajú ako Gaussove celé čísla. Nás budú zaujímať vlastnosti týkajúce sa násobenia a delenia, aby sme mohli definovať prvočísla. A nakoniec ich všetky nájdeme..

Základy

Komplexné číslo je číslo tvaru $a+bi$, kde i je imaginárna jednotka s vlastnosťou $i^2 = -1$. Taktiež sa dá zapísať v tvare $re^{i\alpha}$, kde r je jeho absolútna hodnota a α uhol, ktorý zviera s reálnou osou. Pre násobenie dvoch komplexných čísel platia nasledujúce vzťahy:

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd) + (ad+bc)i \\
re^{i\alpha} \cdot se^{i\beta} &= (rs)e^{i(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

Absolútna hodnota komplexného čísla $z = a+bi$ je definovaná ako $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, čo je geometricky vzdialenosť od nuly. Tiež sa používa pojem komplexne združeného čísla $\overline{z} = a - bi$.

Tvrdenie. *Pre ľubovoľné komplexné čísla z_1, z_2, z platí*

(1) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
(2) $|z| = z \cdot \overline{z}$.

Úloha 1. Dostali sme štvorčekovú sieť. Aké je maximálne $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré existuje kružnica so stredom v niektorom mrežovom bode, na ktorej leží n mrežových bodov?

Gaussove prvočísla

Definícia. (Neformálna) *Gaussove prvočíslo je také komplexné celé číslo, ktorého jediný deliteľ až na násobenie jednotkou je ono samo. Pritom jednotkou chápeme čísla* 1, i, -1 *a* $-i$, *ale tieto čísla spolu s nulou ako prvočísla nepočítame.*

Úloha 2. Dokážte, že ak je z prvočíslo, tak aj $\overline{z}$ je prvočíslo.

Úloha 3. Dokážte, že reálne prvočísla tvaru $4k+3$ sú aj komplexnými prvočíslami.

Ďalej sa budeme snažiť dokázať, že rozklad čísla na komplexné prvočísla je až na symetrie (násobenie jednotkami a pod.) jednoznačný. Z toho nám potom vyplynie návod, ako nájsť všetky komplexné prvočísla. Na niektoré tvrdenia budeme potrebovať malú Fermatovu vetu:

Veta. (Malá Fermatova) *Pokiaľ celé číslo a nie je deliteľné prvočíslom p, tak a^p dáva zvyšok 1 po delení p. Teda*

$$a^p \equiv 1 \pmod{p}.$$

Tvrdenie. *Súčin dvoch čísel, z ktorých sú obe súčtom dvoch štvorcov, je tiež súčet dvoch štvorcov.*

Tvrdenie. *Ak číslo $n = a^2 + b^2$ je deliteľné prvočíslom $p = x^2 + y^2$, tak $\frac{n}{p}$ je tiež súčtom dvoch štvorcov.*

Tvrdenie. *Ak číslo tvaru $a^2 + b^2$ je deliteľné číslom, ktoré nie je súčtom dvoch štvorcov, tak ich podiel je deliteľný číslom, ktoré tiež nie je súčtom dvoch štvorcov.*

Tvrdenie. *Nech a, b sú dve nesúdeliteľné čísla. Potom každý deliteľ čísla $a^2 + b^2$ je súčtom dvoch štvorcov.*

Tvrdenie. (Fermat) *Nepárne prvočíslo p sa dá zapísať ako súčet dvoch štvorcov práve vtedy, keď $p \equiv 1 \pmod{4}$.*

Úloha 4. Ak pre prvočíslo p tvaru $4k + 3$ platí $p \mid (a^2 + b^2)$, tak $p \mid a$ a zároveň $p \mid b$. Dokážte.

Zagierov dôkaz na jednu vetu

Tento dôkaz Fermatovho tvrdenia som pre zaujímavosť našiel na wikipédii.

Definícia. *Majme množinu S s konečným počtom prvkov. Involúcia je taká funkcia $f : S \mapsto S$, ktorá je samoinverzná. T.j. $f(f(x)) = x$ pre $x \in S$.*

Úloha 5. Počet pevných bodov ($x \in S$ takých, že $f(x) = x$) každej involúcie na danej množine má rovnakú paritu.

Dôkaz. (Fermatovho tvrdenia) Zostrojme množinu S usporiadaných trojíc (x, y, z) takých, že $p = x^2 + 4xy$. Tá má zrejme involúciu $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$. Iná menej zrejmá involúcia je

$$(x,\ y,\ z) \longmapsto \begin{cases} (x + 2z,\ z,\ y - x - z), & \text{ak } x < y - z, \\ (2y - x,\ y,\ x - y + z), & \text{ak } y - z < x < 2y, \\ (x - 2y,\ x - y + z,\ y), & \text{ak } x > 2y. \end{cases}$$

Tá má len jeden pevný bod $(1, 1, k)$. Keďže počet pevných bodov involúcií na tej istej množine má rovnakú paritu, prvá involúcia musí mať nejaký pevný bod. Takže p sa dá napísať ako $x^2 + 4y^2$.

Pravděpodobnost

Pavel Klavík

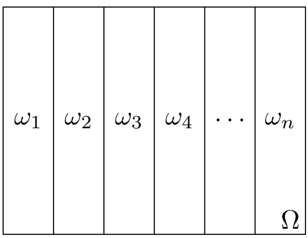
Pravděpodobnostní prostor

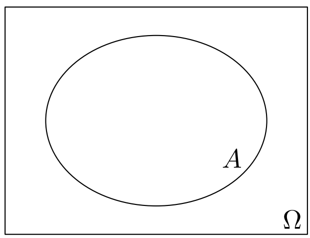
Formálně definovat pravděpodobnost není vůbec jednoduché. Pokusme se tedy s pravděpodobností pracovat více intuitivně. Pravděpodobnostní prostor je jakýsi model, ve kterém máme jevy a k nim příslušné pravděpodobnosti. *Elementární jev* ω je základní jev modelu, který již nejde dělit. Zároveň by mělo být snadné určit jeho pravděpodobnost. Množina všech elementárních jevů se označuje Ω.

Pokud však počítáme pravděpodobnost jevu, zřídkakdy je elementární. Proto bude náš prostor obsahovat *další jevy*, které se obvykle značí velkými písmeny (A, B, ...). Každý jev je nějaká množina elementárních jevů. Všechny jevy prostoru se obvykle značí $\mathcal{A}$. Jestliže máme v prostoru jev A, pak také máme opačný jev A^c, který nastane právě tehdy, když A nenastane. Také jestliže máme jevy A a B, pak uvažujeme i jev $A \cup B$.

Samotná *pravděpodobnost* P je funkce, která každému jevu $A \in \mathcal{A}$ přiřadí číslo z intervalu $[0;1]$. Ta má několik pěkných vlastností. $P(\Omega) = 1$, a jestliže dva jevy A a B nemohou nastat současně[1], $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Na pravděpodobnost můžeme nahlížet geometricky. Pravděpodobnost jevu A potom bude tak velká, jak velkou část prostoru zaujímá. Snadno nahlédneme, že takto definovaná pravděpodobnost výše uvedené vlastnosti splňuje. Tento pohled nám umožní snadněji chápat vztahy níže uvedené. Nenechte se zaleknout mnohdy nepěkně vypadajícími vzorci, většinou jsou jednodušší, než by se mohlo zdát.





Klasická pravděpodobnost

S klasickou pravděpodobností[2] se setkáte na střední škole. Její model je nejjednodušší, avšak to není na škodu, snadno nám umožní pochopit základní principy

[1] Říkáme, že jev A je *neslučitelný* s jevem B

[2] Dříve se tak pravděpodobnost definovala, dnes je její definice mnohem obecnější.

pravděpodobnosti. Množina elementárních jevů je konečná, máme tedy pouze jevy $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Pro ně platí

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Množina $\mathcal{A}$ je množina všech podmnožin Ω, tedy uvažujeme všechny možné kombinace elementárních jevů. Pro libovolný jev A je pravděpodobnost $P(A) = \frac{|A|}{n}$.

Cvičení 1. Hráč pokeru dostane 5 karet z obyčejné dobře promíchané[3] sady 32 hracích karet. S jakou pravděpodobností budou čtyři z nich esa?

Cvičení 2. Máme šest druhů vína. Na láhve nalepíme etikety náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že

a) se trefíme,
b) čtyři druhy označíme správně a dva nesprávně,
c) alespoň jeden druh označíme správně?

Cvičení 3. Představme si, že kočky se rodí buď bílé, nebo černé, obojí s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Máme tři kočky a víme, že alespoň dvě z nich jsou černé. S jakou pravděpodobností jsou všechny černé.

Cvičení 4. Na zakoupeném stíracím losu je 10 políček. Většina z nich je prázdná, dvě z nich obsahují obrázek výhry a další dvě nápis ZAP[4]. Postupně odkrýváme v námi určeném pořadí políčka, pokud se nám podaří nalézt oba obrázky výhry před odkrytím prvního ZAP, pak jsme vyhráli. S jakou pravděpodobností vyhrajeme, jestliže jsou políčka na losu rozmístěna náhodně?

Diskrétní pravděpodobnost

Mít pouze konečnou množinu elementárních jevů se brzo ukáže jako velice limitující. Mějme tedy stejně jevů jako přirozených čísel, označme si je $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Podobně jejich pravděpodobnosti nemusí být stejné. Platí však, že součet pravděpodobností elementárních jevů je 1, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1,$$

neboť právě jeden z nich musí vždy nastat.

Příkladem diskrétní pravděpodobnosti je geometrické rozdělení, o kterém bude řeč později. Typická situace je například tato. Opakovaně házíme mincí, dokud poprvé nepadne líc. Elementárním jevem pak bude počet hodů nutných k získání prvního líce.

3 Pro každá pětici karet je stejně pravděpodobné, že ji hráč dostane.

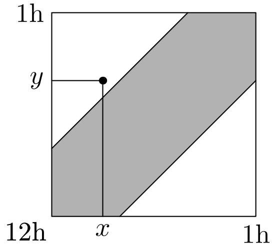
4 Americký slangový výraz, odpovídá českému „prásk“.

Geometrická pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost je rovna poměru délek nebo obsahů. Zde množina Ω je nějaká část roviny, tedy nějaká množina bodů, a ω jsou její jednotlivé body. Potom jev A je nějaká jiná množina bodů a pravděpodobnost $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$ je rovna poměru obsahů. Nejsnáze si to vysvětlíme na následujícím příkladě.

Příklad 5. Dva přátelé Adam a Bedřich se domluví, že se sejdou na smluveném místě někdy mezi polednem a jednou hodinou odpoledne. Oba dorazí náhodně, rovnoměrně v časovém intervalu. S jakou pravděpodobností se setkají, jestliže každý je ochotný čekat na druhého nejvýše 20 minut?

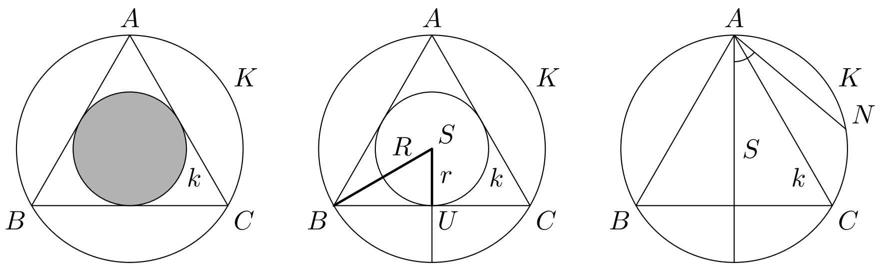
Řešení. Nechť čas příchodu Adama určuje x-ovou souřadnici ve čtverci a čas příchodu Bedřicha určuje y-ovou souřadnici. Potom libovolný z bodů čtverce má stejnou pravděpodobnost. Vyznačená oblast jsou ty body, ve kterých se skutečně setkají. Proto pravděpodobnost setkání je $\frac{5}{9}$.



Jiná velice známá úloha byla pro svůj překvapivý výsledek nazývána *Bertrandův paradox.*

Příklad 6. (Bertrandův paradox) Nechť K je kružnice. Zvolme v ní náhodně tětivu. Jaká je pravděpodobnost, že tětiva je další než strana rovnostranného trojúhelníka, který je vepsaný kružnici K?

Řešení. Úlohu lze spočítat alespoň třemi různými způsoby a pokaždé dostáváme jiný výsledek. Pro poměr obsahů máme $P = \frac{1}{4}$, pro poměr délek $P = \frac{1}{2}$ a pro poměr velikostí úhlů máme $P = \frac{1}{3}$.



Cvičení 7. S jakou pravděpodobností přijde Adam z příkladu 6 později než Bedřich, jestliže nedorazí dříve než ve 12.30?

Cvičení 8. V rovině jsou narýsovány rovnoběžky od sebe vzdálené střídavě 15 a 80. Kruh s poloměrem 25 je vržen náhodně do roviny. S jakou pravděpodobností neprotíná žádnou rovnoběžku?

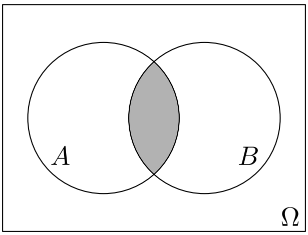
Cvičení 9. Na úsečce o délce l jsou náhodně zvoleny dva různé body, která ji rozdělí na tři úsečky. S jakou pravděpodobností z nich lze vytvořit trojúhelník.

Závislost, nezávislost a podmíněná pravděpodobnost

Pravděpodobnost, že jev A nastane, jestliže nastal jev B (neboli jev A nastane v závislosti na B), se značí $P(A|B)$ a platí pro ni

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dva jevy A a B jsou nezávislé, právě když platí $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Z dvou předchozích vzorců lze odvodit $P(A|B) = P(A) = P(A|B^c)$. Pokud jsou jevy A a B nezávislé, pak to, zda nastal či nenastal jev B, vůbec neovlivní pravděpodobnost výskytu jevu A.



Cvičení 10. Alois a Bartoloměj rozhodně nejsou dobří počtáři. Alois má pravděpodobnost $\frac{1}{8}$, že vyřeší příklad správně, Bartoloměj dokonce jenom $\frac{1}{12}$. Jestliže však oba počítali špatně, pak dojdou ke stejnému výsledku jenom s pravděpodobností $\frac{1}{1001}$. Jestliže oba získali stejný výsledek, s jakou pravděpodobností je správný?

Cvičení 11. Roztržitý profesor matematiky zapomíná v obchodě deštník s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Vyšel z domu s deštníkem a navštívil tři obchody. S jakou pravděpodobnostní se s ním vrátil zpět domů? S jakou pravděpodobností ho zapomněl v jednotlivých obchodech, jestliže ho při cestě domů už neměl?

Cvičení 12. Házíme dvěma hracími kostkami, modrou a červenou. Jev A znamená, že na modré kostce padlo liché číslo, jev B znamená, že na červené padlo sudé číslo, jev C znamená, že součet obou hodů je lichý. Jsou jevy A, B a C nezávislé? Jsou jevy po dvou nezávislé?

Cvičení 13. Kenny, Franta a Jarda se rozhodli, že si zahrají tenis. Kenny se s nimi vsadil o kilo čokolády, že ve třech hrách dokáže vyhrát dvě po sobě. Může si vybrat ze dvou možností: buď bude hrát nejprve s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou, nebo nejprve s Jardou, pak s Frantou a nakonec s Jardou. Kterou z možností si má zvolit, jestliže ví, že Jarda hraje podstatně lépe než Franta, aby zvýšil svoji šanci na výhru?

Základní věty

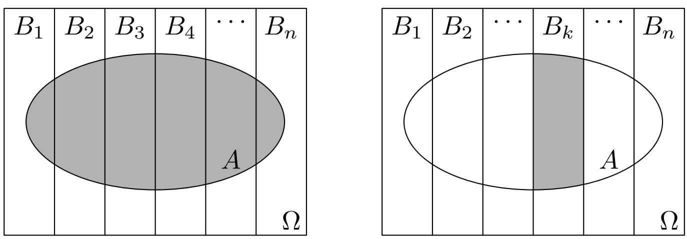
Popišme si dvě věty, které mohou na první pohled působit složitě, ale co říkají je velice jednoduché. Bez *věty o úplné pravděpodobnosti* se při výpočtu většiny složitějších úloh neobejdeme. *Bayesova věta* je hrozně důležitá například při stanovování lékařských diagnóz. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou možné nemoci, kterými může pacient trpět. Známe pravděpodobnosti výskytu těchto nemocí $P(B_k)$ a dále jestliže má pacient příznaky A, potom umíme určit, s jakou pravděpodobností trpí nemocí B_k, tedy $P(B_k|A)$. Vzorec nám umožňuje spočítat, s jakou pravděpodobností trpí jednotlivými nemocemi v závislosti na příznacích A.

Věta 1. (O úplné pravděpodobnosti) *Nechť $B_1, B_2, \ldots, B_n$ je úplný systém jevů*[5]. *Jestliže jsou všechny pravděpodobnosti $P(B_k)$ kladné, pak pravděpodobnost libovolného jevu A lze spočítat podle vzorce*

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k) \cdot P(B_k).$$

Věta 2. (Bayes) *Nechť A je náhodný jev a nechť $B_1, B_2, \ldots, B_n$ je úplný systém jevů. Jestliže jsou všechny pravděpodobnosti $P(B_k)$ kladné, pak pravděpodobnost $P(B_k|A)$ lze spočítat pomocí vzorce*

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}.$$



[5] Jsou to disjunktní množiny, jejichž sjednocením je Ω

Cvičení 14. Hráč A hraje s hráčem B skořápky. Pod jednou z nich leží hledaná mince, pro libovolnou skořápku máme tedy pravděpodobnost $\frac{1}{3}$, že se trefíme. Hráč A ukázal na jednu ze skořápek, poté hráč B otočil jinou a ukázal, že pod ní mince není. Může si hráč A změnou volby zvýšit šanci?

Cvičení 15. Žalářník dá vězni poslední šanci se zachránit, dá mu dvě urny, 12 bílých a 12 černých kuliček. Vězeň musí všechny kuličky do uren nějak umístit. Ráno přijde kat, vybere si náhodně jednu urnu a z ní jednu kuličku. Pokud je bílá, vězně propustí, pokud je černá, tak ho popraví. Jak má vězeň rozmístit kuličky, aby měl co největší šanci na záchranu?

Cvičení 16. Dny mohou být buď slunečné, nebo zamračené. Počasí zítra bude stejné jako dnes s pravděpodobností p a jiné s pravděpodobností $1-p$. Vypočtěte pravděpodobnost $P(S_n)$, že n-tý den ode dneška bude stejné počasí jako je dnes.

Náhodné veličiny a střední hodnota

Definice 3. (Náhodná veličina) *Nechť je každému prvku $\omega \in \Omega$ přiřazeno nějaké reálné číslo. Potom dostáváme funkci $X : \Omega \to R$. Jestliže má X některé pěkné vlastnosti, pak se nazývá náhodná veličina.*

Definice 4. (Střední hodnota) *Jeden z ukazatelů náhodné veličiny je střední hodnota, můžeme si ji představit jako vážený průměr hodnot podle jejich pravděpodobností. Vypočte se podle vztahu*

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega).$$

Věta 5. (O úplné střední hodnotě) *Podobně jako věta o úplné pravděpodobnosti, stejně tak platí věta o úplné střední hodnotě. Ta říká, že jestliže máme úplný systém jevů, pak můžeme spočítat střední hodnotu EX, pokud známe střední hodnoty, jestliže nastal jev B_k pomocí.*

$$EX = \sum E(X|B_j)P(B_j).$$

Cvičení 17. Máme dvě kostky, červenou a modrou. Nechť X je náhodná veličina vyjadřující součet na obou kostkách. Jaká je její střední hodnota? A co když započítáme číslo na modré kostce dvakrát?

Cvičení 18. Jak se změní střední hodnota, pokud si v předchozí úloze ještě hodím mincí? Pokud mi padne rub, počítám první variantu (součet hodů na obou kostkách), pokud líc, započítám modrou dvakrát.

Cvičení 19. Hodím si n falešnými mincemi, které mají postupně pravděpodobnosti

$$P(A_1) = \frac{1}{3}, P(A_2) = \frac{1}{5}, \ldots, P(A_n) = \frac{1}{2n+1},$$

že padne líc. Jaká je střední hodnota počtu padlých líců?

Náhodné procházky

Příklad 20. Hráči Alois a Bohouš hrají sérii partii. Předpokládejme, že nemůže dojít k remíze a že Alois vyhraje s pravděpodobností p, tedy Bohouš vyhraje s pravděpodobností $q = 1 - p$. Výsledky jednotlivých partii jsou nezávislé, Alois má na začátku z korun, Bohouš $a - z$. Hráč, který vyhraje, získá od druhého jednu korunu. Hra končí, pokud byl jeden hráč zruinován. Vyjádřete pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů. Jaká je střední hodnota počtu partií? Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí n-tou partií?

Zadanou úlohu si lze představit i jinak. Částice chová takzvanou *náhodnou procházku* na přímce v celočíselných bodech, vždy s pravděpodobností p se posune o jedna doprava, s pravděpodobností q o jedna doleva. V bodech 0 a a jsou takzvané *absorbční bariéry*, které částici zachytí a již nepustí. Procházka tedy končí v okamžiku, kdy se částice dostane do nějaké bariéry a je zachycena.

Řešení. Označme si pravděpodobnost q_z, že Alois bude zruinován, jestliže má někdy během hry z korun. Podle věty o úplné pravděpodobnosti dostáváme pro $0 < z < a$ vztah

$$q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}.$$

Dále zjevně platí $q_0 = 1$ a $q_a = 0$. Z výše uvedených diferenčních rovnic již lze odvodit pravděpodobnost $q_z = 1 - \frac{z}{a}$. Podobně jestliže p_z je pravděpodobnost, že Bohouš bude zruinován, pak platí $p_z = \frac{z}{a}$. Platí $p_z + q_z = 1$, tedy hra jednou skončí.

Podobně označme D_z střední hodnotu počtu odehraných partii, jestliže se právě částice nachází v bodě z. Podle věty o úplné střední hodnotě dostáváme pro $0 < z < a$

$$D_z = (1 + D_{z+1})p + (1 + D_{z-1})q,$$

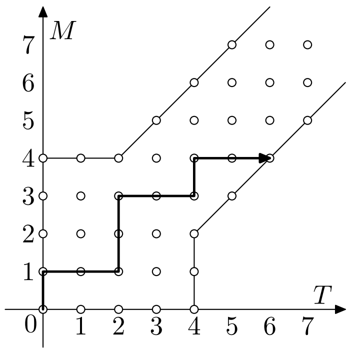
pro krajní hodnoty platí $D_0 = D_a = 0$. Například jestliže je $p = q = \frac{1}{2}$, pak dostáváme $D_z = z(a - z)$.

Cvičení 21. Uvažujme hru, při níž si dva hráči mezi sebe náhodně rozdají karty s čísly od $1, 2, \ldots, 2n$, každý dostane polovinu z nich. Jedna partie se dá popsat tak, že se náhodně vybere jedno z čísel $1, 2, \ldots, 2n$, pravděpodobnost pro výběr libovolného z nich je stejná. Hráč, který má tuto kartu, ji předá svému protihráči.

Hra končí ve chvíli, kdy žádný hráč nemá žádné karty. Jaká je střední hodnota délky hry? Při výpočtu stačí rekurentní vztah.

Cvičení 22. Pan Podivný žije v domku, který má přední a zadní dveře, k oběma si umístil n různých párů střevíců. Když chce jít na procházku, náhodně si vybere dveře a u nich se obuje do střevíců. Když se vrací zpět, opět si náhodně vybere dveře a tam si střevíce zuje. Jaká je střední hodnota počtu vykonaných procházek, než poprvé dorazí ke dveřím, kde nebude mít žádné boty?

Cvičení 23. V tenise vyhraje ten, kdo získá čtyř bodů a zároveň má o dva body více než jeho soupeř. Pro lepší představu se podívejte na obrázek. Dva přátelé Michal a Tomáš spolu hrají tenis. Michal získá nad Tomášem bod s pravděpodobností p, Tomáš s pravděpodobností $1 - p$. S jakou pravděpodobností vyhrají jednotlivý hráči? Jaká je střední hodnota počtu odehraných bodů?



Geometrické rozdělení

Představme si, že provádíme opakovaně určitý pokus, dokud poprvé neuspějeme. Pokus uspěje s pravděpodobností p a neuspěje s pravděpodobností $q = 1-p$. Zajímá nás, jak dlouho bude trvat, než poprvé uspějeme. Vypočítejme si pravděpodobnost p_k, že nastane k neúspěchů a následující pokus bude úspěšný. Dostáváme jednoduchý vztah

$$p_k = pq^k.$$

Po úpravách dostáváme, že střední hodnota počtu neúspěchů do prvního úspěchu (to bude veličina X) je $EX = \frac{q}{p}$, není moc obtížné si to odvodit. Poslední velice zajímavý vzorec je tento. Nechť m je přirozené číslo, pravděpodobnost, že bude alespoň m pokusů neúspěšných, je

$$P(X \geq m) = q^m.$$

Charakteristickou vlastností geometrické pravděpodobnosti je to, že je *bez paměti*. To znamená, že předchozí vývoj pokusů vůbec neovlivní vývoj následující.

Zkusme si do geometrické rozdělení dosadit nějaká konkrétní čísla. Nechť $p = 0,01$. Potom dostáváme $EX = \frac{q}{p} = \frac{0{,}99}{0{,}01} = 99$. Tedy budeme v průměru mít 99 pokusů neúspěšných pokusů. Když ale za m dosadíme 69, potom dostáváme $P(X \geq 69) \approx \frac{1}{2}$. To tedy znamená, že přibližně v polovině případů nás potká úspěch ještě před 69. pokusem. Avšak s kladnou pravděpodobností může nastat i velice dlouhá série neúspěchů, proto je střední hodnota tak veliká.

Cvičení 24. Jak dlouho musíme průměrně házet šestistěnnou kostkou, než nám padne poprvé 6?

Cvičení 25. Dva hráči A a B střídavě dělají nezávislé pokusy a vyhrává ten, kdo první uspěje. Začíná hráč A a pokus uspěje s pravděpodobností p. Vypočtěte pravděpodobnost $P(A)$ a $P(B)$, že vyhraje hráč A a hráč B.

Cvičení 26. Výše uvedená hra rozhodně není pro hráče B spravedlivá. Jak moc by se musela změnit jeho pravděpodobnost úspěchu, aby hra spravedlivá byla?

Cvičení 27. Nechť n hráčů hraje následující hru. Vyhodí najednou každý minci do vzduchu. Pokud jedna z nich je otočena na jednu stranu a ostatní na druhou, vyhrává hráč, jehož mince byla otočena jinak, dostane mince ostatních hráčů a peníze z banku. V opačném případě všechny mince putují do banku. Vypočtěte střední hodnotu výhry.

Cvičení 28. Pan Podivný má n stejně vypadajících klíčů, ale pouze jeden z nich otevře dveře od jeho domu. Postupuje tedy tak, že si vybere náhodný klíč a zkusí ho. Pokud se mu s ním dveře nepovede otevřít, vrátí klíč zpět k ostatním a znovu vybírá z původních n klíčů. Jaká je střední hodnota počtu pokusů potřebných k otevření dveří?

Cvičení 29. Co kdyby pan Podivný nefunkční klíče zpět nevracel, tedy pokaždé by vybíral z méně klíčů?

Cvičení 30. V jednom podniku pracuje m přátel, kteří chodí pravidelně na oběd. Vždy vyberou náhodně jednoho z nich, který za všechny zaplatí. S jakou pravděpodobností se při k-tém obědě poprvé stane, že jeden z pánů bude muset zaplatit podruhé? Jaká je střední hodnota počtu obědů, než se tak stane?

Cvičení 31. Výrobce bonboniér dává do každé z nich náhodně jednu z 20 fotografií. Jaká je střední hodnota počtu bonboniér, které si bude muset sběratel koupit, pokud chce všechny získat?

Úlohy týkající se optimalizace

Předveďme si několik zajímavých úloh týkajících se optimalizace. Jde nám tedy o nalezení nejlepšího řešení.

Příklad 32. Řekněme, že má dojít k hlasování. Hlasují tři osoby A, B a C. Předpokládejme, že A hlasuje správně s pravděpodobností p_1, B s pravděpodobností p_2 a C s pravděpodobností p_3. Jaká je pravděpodobnost, že výbor složený z A, B a C dojde ke správnému výsledku (schválí ho nadpoloviční většina? Co když se C po čase rozhodne, že hlasuje nejčastěji špatně a bude hlasovat stejně jako méně omylný B? Co když se C rozhodne škodit a bude hlasovat záměrně špatně?

Řešení. Výpočet proveďme pro konkrétní hodnoty $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,8$ a $p_3 = 0,75$. Dostáváme pravděpodobnost správného rozhodnutí $P = 0,915$, což je více, než kdyby se rozhodoval sám kterýkoliv člen.

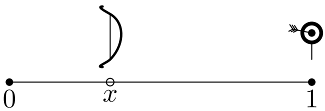
Pokud C začne jednat stejně jako B, ztratí výbor nezávislost a pravděpodobnost správného rozhodnutí bude jen $Q = 0,8$. Pokud by například C založil své rozhodování na obyčejném hodu mincí, byla by pravděpodobnost $\bar{Q} = 0,85$, tedy překvapivě $Q < \bar{Q}$.

Kdyby se C rozhodl naschvál hlasovat obráceně, potom dostaneme pravděpodobnost $R = 0,785$, která se o moc neliší od Q. Vidíme tedy, jak je při hlasování nezávislost důležitá.

Cvičení 33. Tři kovbojové se účastní souboje, stojí v trojúhelníku. První z nich zasáhne s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, druhý zasáhne s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a poslední s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Aby souboj byl spravedlivý, střílí kovbojové v pořadí od nejhoršího po nejlepšího, pořád dokola, dokud není na živu jenom jeden. Každý kovboj si vždycky vybere jednoho z přeživších kovbojů, zkusí na něj vystřelit, nebo může vystřelit do vzduchu. Jaká je optimální strategie nejhoršího kovboje?

Cvičení 34. Hráči Andy, Bert a Colin se umístili v šachovém turnaji na prvním místě. Má se mezi nimi vybrat absolutní vítěz. Provede se to tak, že každý s každým si zahraje dodatečnou partii. Pokud některý z nich získá více bodů, než ostatní, vyhrává. Jinak hráči s nejvíce body postupují dál a hrají další odvetná utkání. Andy hraje šachy opatrně, ani s Bertem, ani s Colinem nikdy neprohraje. Ale Berta porazí jenom s pravděpodobností $0,1$ a Colina s pravděpodobností $0,2$. Utkání mezi Bertem a Colinem je dobrodružství a nikdy neskončí remízou. Bert takovou partii vyhrává s pravděpodobností $0,6$, Colin s pravděpodobností $0,4$. Předpokládejte, že výsledky partii jsou na sobě nezávislé. Porovnejte šance na výhru jednotlivých hráčů?

Cvičení 35. Dva lukostřelci Ostříš a Slepýš kráčí spolu po úsečce $[0,1]$. Vyjdou z bodu $x = 0$ a snaží se zasáhnout terč umístěný v $x = 1$. Každý z nich má jenom jeden šíp a může si vybrat, kdy vystřelí. Ostříš zasáhne cíl z bodu x s pravděpodobností $O(x) = x$. Slepýš je mnohem horší střelec[6], a proto zasáhne terč jenom s pravděpodobností $S(x) = x^2$. Vyhrává ten, kdo zasáhne terč první, pokud zasáhnou oba, dojde k remíze. Navrhněte optimální strategii pro oba lukostřelce, aby si maximalizovali svoji šanci na výhru.



Cvičení 36. Kostky mají již velice dlouhou tradici. Jednou se Zuzka se Jardačem rozhodli, že si zahrají následující hru. Zuzka dostane tři prázdné šestistěnné kostky. Může si je libovolně popsat čísly 1 až 6, poté z nich dá vybrat Jardáčovi. Ze zbývajících dvou si pak Zuzka jednu zvolí. Poté každý hodí kostkou a komu padne větší číslo, vyhrál. Nerozhodný výsledek se nepočítá a hází se znovu. Může Zuzka nějakým vhodným způsobem popsat kostky, aby zvýšila svoji šanci na výhru?

Cvičení 37. Mějme n míst uspořádaných do kruhu. V jednom místě stojí vlk, který koná náhodnou procházku, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ se pohne vlevo a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ vpravo. Jestliže dorazí na místo, kde ještě nebyl, najde tam ovečku a sní ji. Kam se má postavit chytrá ovečka[7], aby byla s největší pravděpodobností sežrána naposledy, tedy na jaké místo přijde vlk s největší pravděpodobností naposledy?

Literatura

Při přípravě této přednášky mi byla velikou pomocí vynikající kniha [1], což je vynikající sbírka zajímavých řešených příkladů z pravděpodobnosti. Další příklady jsem čerpal z knihy [2]. Velice zajímavé taky mohou být kapitoly *Pravděpodobnostní důkazy* a *Vytvořující funkce* ze knížky [3].

[1] Jiří Anděl, *Matematika náhody*, MatfyzPress, 2000.
[2] Karel Zvára, Josef Štěpán, *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress, 2001.
[3] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, 2000.

[6] Patrně kvůli zrakovým problémům.
[7] Která zná dobře pravděpodobnost.

Komplexní čísla

Pavel Šalom

Komplexní čísla zůstávají pro obyčejné smrtelníky stále zahalena podivuhodným tajemstvím. Co to je, když to není reálné? Jak si to mám představit? Přesto se ale ukazuje, že i takto zvláštní objekt má neuvěřitelně mnoho opravdu praktických využití. Zkusíme se podívat alespoň na některá z nich.

Začneme trochu nezáživně definicemi, které se neodvážím vynechat.

Definice. *Dvojici reálných čísel* (a, b) *nazveme komplexním číslem.*

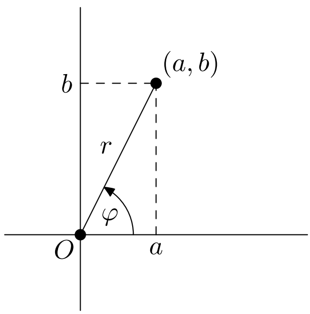
Definice. *Pro komplexní čísla* $(a, b), (c, d)$ *definujeme operaci* $\oplus$ *a operaci* $\odot$ *následujícím neobvyklým způsobem (především druhá z nich vypadá naprosto nepřirozeně)*

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Samozřejmě dále budeme značit operaci $\oplus$ znakem $+$ a operaci $\odot$ znakem $\cdot$. V definici jsem pouze chtěl zdůraznit, že to je úplně nová, dosud nepoznaná, operace – totiž operace s dvojicemi reálných čísel.

Kdykoliv se zabýváme dvojicemi čísel, můžeme si je kreslit jako body do roviny. Otázkou je, jestli potom operace $\oplus$, $\odot$ budou mít nějakou rozumnou interpretaci, nebo zda budou jen dvěma bodům přiřazovat „náhodně“ třetí bod. Právě k této představě budeme dále směřovat.

Tvrzení. (Chápej jako tvrzení nesouvisející s tématem) *Uvažujme body v rovině, ve které máme zvolený počátek a kartézský systém souřadnic, popsané pomocí dvojic reálných čísel* (a, b)*. Potom lze body ekvivalentně popisovat pomocí jiných dvou čísel* $r \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ *symbolizujících vzdálenost od počátku a jistý úhel. Ekvivalentním popisem máme na mysli to, že staré dvojice si jednoznačně odpovídají s novými dvojicemi čísel* r, φ*. Jaký úhel se přesně myslí snad dostatečně vysvětlí obrázek.*



Nyní si už můžeme komplexní čísla představovat jako body v rovině popsané hned dvěma způsoby:

(i) pomocí (uspořádané) dvojice (a, b).
(ii) pomocí dvou čísel r, φ, přičemž zvolíme $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ a φ tak, aby $(a, b) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

Tuto znalost majíc se můžeme vrhnout na nejdůležitější větu přednášky, která právě hovoří o tom, že se operace $\odot$ chová rozumě.

Věta. (Nejdůležitější) *Mějme dvě komplexní čísla* $(a, b) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ *a* $(c, d) = (q\cos\beta, q\sin\beta)$. *Potom platí*

$$(a, b) \odot (c, d) = (qr\cos(\alpha + \beta), qr\sin(\alpha + \beta)).$$

Důkaz. Zvolíme přístup pomocí součtových vzorců.

Úmyslně až teď se dohodneme na konvencích používaných běžně ve světě.

Konvence 1. Komplexní číslo $\overline{z} = (a, -b)$ nazveme číslem komplexně sdruženým k číslu $z = (a, b)$.

Konvence 2. Číslo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazveme velikostí komplexního čísla (a, b).

Poznámka. (Komplexní čísla s operacemi $\oplus, \odot$ jsou jen rozšířením reálných čísel s operacemi $+, \cdot$) Pokud máme komplexní čísla $(a, 0), (b, 0)$, potom

$$(a, 0) \oplus (b, 0) = (a + b, 0) \qquad \text{a} \qquad (a, 0) \odot (b, 0) = (ab, 0).$$

Když tedy čísla tohoto tvaru $(?, 0)$ ztotožníme s reálnými čísly, operace $\oplus$ a $\odot$ opravdu nedělají nic jiného než běžné operace $+$ a $\cdot$. Pro tato čísla tedy můžeme místo $\oplus$ a $\odot$ psát rovnou $+$ a $\cdot$, aniž by došlo k nedorozumění. Je však zvykem psát místo $\oplus$ a $\odot$ rovnou $+$ a $\cdot$ u všech komplexních čísel.

Konvence 3. Místo komplexního čísla ve tvaru $(a, 0)$, které ma jenom reálnou část, budeme psát pouze reálné číslo a.

Konvence 4. Komplexní číslo (0,1) budeme značit jen symbolem i. Pozorujeme, že

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

podle definice nebo též podle nejdůležitější věty.

Konvence 5. Komplexní číslo (a, b) budeme značit symboly $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ve skutečnosti tím máme na mysli

$$a + bi = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) \oplus (0, b).$$

Poznámka. Všimneme si, že pokud bychom hledali reálné x takové, že $x^2+1=0$, tak se nám to nepodaří, ovšem kdybychom připustili i komplexní x, pak jsme právě našli číslo $i=(0,1)$, které je kořenem této rovnice.

Poznámka. Poznámka výše v nás vzbuzuje dojem, že kdybychom se zajímali o komplexní čísla, tak už by každý polynom mohl mít kořen. Tento dojem se ukazuje být správný. Mějme libovolný polynom $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, kde $a_n,\ldots,a_0\in\mathbb{R}$. Pak komplexní číslo x takové, že $P(x)=0$, je kořenem tohoto polynomu. Tzv. *základní věta algebry* říká, že každý polynom má komplexní kořen.

Poznámka. Samozřejmě bychom mohli postupovat v přednášce úplně opačně. Nejdřív zadefinovat komplexní jednotku i tak, že $i^2=-1$. Jako komplexní čísla bychom mohli značit „něco divného“ $a+bi$ a s těmito výrazy pracovat jako s dvojčleny, tedy

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac-bd+(ad+bc)i.$$

Potom bychom zavedli komplexní rovinu, v ní přešli ke druhému vyjádření komplexních čísel a nakonec z toho odvodili nejdůležitější větu. Tento postup se běžně ukazuje na středních školách, mně ale přijde nepřehledný. Je to však ekvivalentní definice.

Dost bylo obsáhlého úvodu a vrhneme se na použití tohoto prapodivného objektu.

Příklad 1. Ukažte, že velikost komplexního čísla z lze vyjádřit také jako $r=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$.

Věta. (de Moivre[1]) *Pro každé $n\in\mathbb{Z}$ platí*

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha).$$

Důkaz. Je to jen snadný důsledek nejdůležitější věty.

Tvrzení. *Buď $P(x)$ polynom s reálnými koeficienty. Potom $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$ pro každé $z\in\mathbb{C}$. To nám především říká, že komplexní kořeny reálného polynomu přicházejí po dvojicích (je-li λ kořen, je i $\overline{\lambda}$ kořen).*

Příklad 2. Nechť f,g jsou nenulové reálné polynomy takové, že $f(x^2+x+1)=f(x)g(x)$. Dokažte, že f má sudý stupeň.

[1] Abraham de Moivre, 1667 - 1754

Příklad 3. Nechť $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, kde $n > 1$ je celé číslo. Dokažte, že polynom f nemůže být vyjádřen jako součin dvou polynomů s celočíselnými koeficienty stupně alespoň 1.

Příklad 4. Najděte číslo n, pro které platí

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Pomocí komplexních čísel se dají sčítat jinak těžko sčítatelné součty. Pokud bude čas nebo zájem, ukážeme si například tyto.

Příklad 5. Sečtěte

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

Příklad 6. Sečtěte

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$$

Příklad 7. Sečtěte

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin k\alpha.$$

Příklad 8. Sečtěte délky všech úhlopříček v pravidelném n-úhelníku vedoucích z jednoho vrcholu.

Geometrické úlohy

Už se ti komplexní čísla začínají líbit? Jestli stále ne, tak věř, že je to mnohdy účinná zbraň při řešení geometrických úloh, se kterými si už nevíš rady. Tím se budeme zabývat po zbytek přednášky.

Jak ale v komplexních číslech vyjádřit těžiště nebo ortocentrum trojúhelníku? A co geometrická zobrazení jako osová souměrnost, otočení či spirální podobnost?

Pozorování 1. Ortocentrum lze vyjádřit jako $H = A + B + C$, pokud zvolíme počátek ve středu kružnice opsané.

Pozorování 2. Těžiště lze vyjádřit jako $T = \frac{A+B+C}{3}$.

Pozorování 3. Osová souměrnost podle reálné osy znamená, že bodu $z \in \mathbb{C}$ přiřadíme bod $\overline{z}$.

Pozorování 4. Otočení kolem počátku je násobení číslem $c \in \mathbb{C}$ takovým, že $|c| = 1$.

Pozorování 5. Spirální podobnost se středem v počátku je násobení číslem $c \in \mathbb{C}$.

Příklad 9. Dokažte, že $\triangle A_1A_2A_3$ je rovnostranný, právě když

$$A_1 + \lambda A_2 + \lambda^2 A_3 = 0,$$

kde $\lambda = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$, respektive $\lambda = \cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi$.

Příklad 10. (Napoleonův trojúhelník) Mějme $\triangle ABC$. K jeho stranám přikreslíme vně rovnostranné trojúhelníky ABD, BCE a CAF, jejichž těžiště označíme postupně G, H, a I. Dokažte, že $\triangle GHI$ je rovnostranný.

Příklad 11. V rovině je dán $\triangle A_1A_2A_3$ a bod P_0. Definujeme $A_s = A_{s-3}$ pro $s \geq 4$. Pro $k \geq 0$ definujeme P_{k+1} jako obraz bodu P_k při rotaci kolem středu A_k o $120°$ ve směru hodinových ručiček. Dokažte, že pokud $P_{1986} = P_0$, pak už nutně je $\triangle A_1A_2A_3$ rovnostranný.

Příklad 12. Uvažujme $\triangle ABC$ a jeho kružnici opsanou k. Zobrazíme k postupně ve třech osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA. Dokažte, že tři nové kružnice mají společný bod.

Příklad 13. (Simsonova přímka[2]) Mějme $\triangle XYZ$ a W bod na jeho kružnici opsané. Nechť P, Q a R jsou po řadě paty výšek vedených z bodu W na strany XY, YZ a ZX. Dokažte, že P, Q a R leží na přímce.

Příklad 14. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník a P, Q a R jsou paty výšek z bodu D po řadě na strany BC, CA a AB. Dokažte, že $|PQ| = |QR|$, právě když se osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle ADC$ protnou na úhlopříčce AC.

Příklad 15. Dokažte, že existuje konvexní 1990-úhelník takový, že všechny jeho vnitřní úhly jsou stejné a přitom délky stran jsou v nějakém pořadí rovny číslům $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$.

[2] Robert Simson, 1687 - 1768

Permutace

Tomáš Roskovec

Definice. *Prosté zobrazení* $\Pi : M \to M$ *nazýváme* permutací na množině M.

Poznámka. Prosté zobrazení konečné množiny M na sebe samu je zřejmě také surjektivní. Proto budou permutace na konečných množinách bijekcemi.

Poznámka. (O prvním způsobu zápisu) Permutaci Π lze zapsat jako tabulku. Nejjednodušší formou zápisu je takzvaný *základní tvar*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \end{pmatrix},$$

kde $\Pi(i) = r_i$.

Poznámka. Kvůli zpřehlednění zápisu může být v některých případech vhodnější přerovnat množinu M. Zvolíme $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ libovolné pořadí prvků množiny M a zapíšeme v takzvaném *obecném tvaru*

$$\Pi = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \end{pmatrix},$$

kde $\Pi(s_i) = t_i$.

Věta. *Na množině* $M = (1, 2...n)$ *lze najít právě* $n!$ *různých permutací.*

Důkaz. Indukcí podle n.

Definice. Samodružným prvkem permutace *rozumíme prvek* z*, pro který platí* $\Pi(z) = z$.

Definice. *Permutaci, jejíž všechny prvky jsou samodružné, nazýváme* identickou permutací Id *nebo také* jednotkovou permutací.

Definice. Inverzní permutací *k permutaci*

$$\Pi = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_k \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_k \end{pmatrix}$$

rozumíme permutaci

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_k \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_k \end{pmatrix}.$$

Definice. *Jsou-li permutace* Π_1 *a* Π_2 *na množině* M,

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_k \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_k \end{pmatrix}, \qquad \Pi_2 = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_k \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_k \end{pmatrix},$$

pak součinem permutací Π_1 a Π_2 *rozumíme permutaci*

$$\Pi = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_k \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_k \end{pmatrix}.$$

Tento vztah zapisujeme jako $\Pi = \Pi_2 \circ \Pi_1$, *někdy zkráceně jako* $\Pi_2\Pi_1$.

Poznámka. Narozdíl od obvyklého součinu[1] není součin permutací komutativní. Tedy rozhodně neplatí, že $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1$.

Definice. *Buď* $C = \{r_1 r_2 r_3 \dots r_k\}$, *kde* $k > 1$, *podmnožina množiny* M. *Pak* cyklem *rozumíme permutaci* Π *takovou, která splňuje*

$$\Pi(r_1) = r_2, \Pi(r_2) = r_3, \dots, \Pi(r_{k-1}) = r_k, \Pi(r_k) = r_1, \Pi(s) = s \text{ pro } \forall s \notin C.$$

Cyklus budeme nadále značit $(r_1 r_2 r_3 \dots r_k)$.

Definice. Délkou cyklu *rozumíme počet prvků* k. *Cyklus délky* 2 *nazýváme* transpozicí[2].

Definice. *Řekneme, že dva* cykly $(s_1 s_2 s_3 \dots s_k)$ a $(r_1 r_2 r_3 \dots r_l)$ *jsou* nezávislé, *jestliže*

$$s_i \neq r_j, \forall i, j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l.$$

Poznámka. Při součinu dvou nezávislých cyklů nezáleží na pořadí.

Věta. *Každou permutaci* Π *lze rozložit na součin nezávislých cyklů. Tento rozklad je až na pořadí jednoznačný.*

Věta. *Každou permutaci* Π *lze rozložit v součin transpozic. Je-li speciálně* $\Pi = (r_1 r_2 \dots r_k)$ *cyklus, je* $\Pi = (r_1 r_k)(r_1 r_{k-1}) \dots (r_1 r_2)$.

Věta. *Buď* $T_1 T_2 \dots T_k = S_1 S_2 \dots S_l = \Pi$ *dva různé rozklady permutace na součin transpozic. Pak čísla* k *a* l *mají stejnou paritu.*

Definice. *O permutaci* Π *řekneme, že je* sudá, *jestliže ji lze rozložit na součin sudého počtu transpozic. O permutaci* Π *řekneme, že je* lichá, *jestliže ji lze rozložit*

[1] Například při součinu dvou reálných čísel se $a \cdot b = b \cdot a$.

[2] Jedná se totiž o prohození dvou prvků.

na součin lichého počtu transpozic. Znaménko permutace $\operatorname{sgn}\Pi$ *definujeme jako* $\operatorname{sgn}\Pi = 1$ *pro sudou a* $\operatorname{sgn}\Pi = -1$ *pro lichou permutaci.*

Věta. *Pro permutace* Π_1, Π_2 *na stejné množině* M *platí*

(i) $\operatorname{sgn}(\Pi_1\Pi_2) = \operatorname{sgn}\Pi_1 \cdot \operatorname{sgn}\Pi_2$,
(ii) $\operatorname{sgn}\Pi_1^{-1} = \operatorname{sgn}\Pi_1$.

Definice. *Inverzí na množině* M *rozumíme dvojici* $i, j \in M$, *pro kterou platí* $i < j$ *a* $\Pi(i) > \Pi(j)$.

Poznámka. Znaménko permutace lze také spočítat jako $\operatorname{sgn}\Pi = (-1)^k$, kde za k dosadíme buď počet cyklů sudé délky v rozkladu Π nebo počet inverzí permutace.

Definice. Řádem permutace *rozumíme nejmenší* $k \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\Pi^k = \mathrm{Id}$.

Příklad. Spočtěte znaménko permutace

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 7 & 17 & 3 & 13 & 4 & 15 & 6 & 11 & 14 & 1 & 5 & 12 & 16 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad. Určete řád permutace

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 7 & 17 & 3 & 13 & 4 & 15 & 6 & 11 & 14 & 1 & 5 & 12 & 16 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad. Dokažte, že existují

(i) sudé permutace sudého řádu,
(ii) sudé permutace lichého řádu,
(iii) liché permutace sudého řádu a
(iv) liché permutace lichého řádu.

Příklad. Kolik existuje permutací s n prvky, které jsou cyklem.

Příklad. Kolik nejvýše inverzí může být v permutaci s n prvky.

Příklad. Kolik minimálně transpozic potřebujeme na vytvoření libovolné permutace s n prvky.

Příklad. Určete počet inverzí permutace

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k \end{pmatrix},$$

známe-li počet inverzí permutace

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Nalieváreň z geometrie

Káťa Fišerová & Rasťo Olňava

Úvod

Geometria je neoddeliteľnou a krásnou súčasťou matematiky. Jej krása spočíva v tom, že na vyriešenie väčšiny úloh stačí poznať pár základných myšlienok. Napriek tomu je často postrachom riešiteľov. Riešenie úloh z geometrie nie je činnosť, ktorá sa dá naučiť, ale dá sa dostatočne precvičiť, a preto Vám prinášame našu nalieváreň z geometrie. Na našej prednáške, ktorá bude vlastne cvičením, sa síce nedozviete nič nové, ale za to si budete môcť dôkladne precvičiť riešenie úloh z planimetrie.

Trojuholník obyčajný

Veta 1. (kosínusová alebo špeciálne Pythagorova) *V trojuholníku s klasickým značením platí*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Veta 2. (Menelaova) *Daný je trojuholník ABC a priamka p, ktorá neprechádza žiadnym jeho vrcholom, ale pretína priamky AB, BC, AC postupne v bodoch K, L, M. Potom platí*

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Veta 3. (Cevova) *Daný je trojuholník ABC a na jeho stranách AB, BC, CA sú po rade body K, L, M a zároveň platí*

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Potom priamky CK, AL, BM prechádzajú jedným bodom.

Trojuholník pravouhlý

Opäť používame klasické označenie, pričom pravý uhol je pri vrchole C.

Veta 4. (Tálesova) *V strede prepony leží stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku.*

Veta 5. (Euklidove) *Označme S pätu výšky spustenej z vrcholu C, potom platí*

$$|SC|^2 = |SA| \cdot |SB|,$$
$$|BC|^2 = |AB| \cdot |SB|,$$
$$|AC|^2 = |AB| \cdot |SA|.$$

Takto by sme mohli pokračovať ešte dlho, pretože toto bola iba vzorka vedomostí, ktoré sa využívajú pri riešení klasických úloh z planimetrie. Pre úplnosť ešte spomenieme ďalšie objekty a myšlienky, ktoré sa často využívajú a je dobré čo to o nich vedieť. Sú to kružnice vpísané, opísané, pripísané, Feuerbachové, Simpsonová priamka, Eulerová priamka, podobnosť a zhodnosť trojuholníkov, obvodové a stredové uhly, súmernosti, zobrazenia a ich skladanie (osová s., stredová s., rotácia, posunutie, rovnoľahlosť), tetivový štvoruholník, dotyčnicový štvoruholník.

Rady

- Kresli si *veľké obrázky.*
- Neboj sa *tipnúť si výsledok* a over si ho viacerými *presnými obrázkami.*
- Odmeriavaj, *hľadaj rovnaké uhly a úsečky.*
- Dvakrát premysli, až potom píš.
- Uvedom si, čo chceš a čo si zo zadania *ešte nepoužil.*

Úlohy

A na záver vzorka úloh, s ktorými sa stretnete na cvičení:

Úloha 1. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblúk AC kružnice, ktorej stred leží na strane AB, pretína stranu CD v bode M. Dokážte, že priamky AM a BD sú navzájom kolmé.

Úloha 2. V rovine je daný tupý uhol AKS. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby jeho strana BC ležala na priamke KS, aby bod S bol jej stredom a bod K jej priesečníkom s osou protiľahlého uhla BAC.

Úloha 3. Majme štvoruholník $ABCD$ s na seba kolmými uhlopriečkami. Označme stredy Feuerbachových kružníc trojuholníkov ABD, ABC, BCD a CDA po rade E, F, G a H. Ukážte, že priesečník uhlopriečok štvoruholníka $EFGH$ leží v ťažisku štvoruholníka $ABCD$.

Moving Sofa Problem

Zuzka Pôbišová

Každý, kto sa niekedy sťahoval, si vie predstaviť, aké problémy môže spôsobiť kus nábytku, ktorý je príliš veľký a nezmestí sa cez dvere alebo sa nedá vyniesť po schodoch. Preto je veľmi užitočné, vedieť to dopredu vypočítať. Podobné úlohy o sťahovaní nábytku matematici nazývajú podľa najznámejšej z nich Moving Sofa Problem.

Sťahovanie nábytku je síce problém v priestore, ale pre účely tejto prednášky si ju transformujeme na úlohu v rovine.

Moving Ladder Problem

Moving Ladder Problem je jednoduchšia verzia úlohy, keďže s rebríkom sa dá počítať ako s úsečkou nulovej šírky. Táto úloha má množstvo ďalších variant.

Príklad 1. Aký najdlhší rebrík môžeme preniesť chodbou v tvare písmena L, ktorá má obe ramená široké 1 m?

Príklad 2. Aký najdlhší rebrík môžeme preniesť chodbou v tvare písmena L, ktorá má obe ramená široké 1 m? Rebrík nemusí byť priamy.

Príklad 3. Aký najdlhší rebrík môžeme preniesť chodbou v tvare písmena L, ktorá má jedno rameno široké 1 m a druhé 2 m?

Príklad 4. Aký najdlhší rebrík môžeme preniesť chodbou v tvare písmena L, ktorá má obe ramená široké 1 m a zvierajú uhol 60?

Príklad 5. Aká najdlhšia môže byť posteľ široká 90cm, aby sme ju mohli preniesť chodbou v tvare písmena L, ktorá má obe ramená široké 1 m?

Príklad 6. Aký najväčší obsah môže mať polkruhová sedačka, aby sme ju mohli preniesť chodbou v tvare písmena L, ktorá má obe ramená široké 1 m?

Príklad 7. Aký najväčší obsah može mať obdĺžniková posteľ, aby sme ju mohli preniesť zakrivenou chodbou s polomerom zakrivenia r, ktorá je široká 1 m?

Keď úsečku nahradíme obdĺžnikom a začneme zamieňať obdĺžnik za iné geometrické tvary, u ktorých sa budeme snažiť maximalizovať obsah, je to už len krok k všeobecnejšej úlohe.

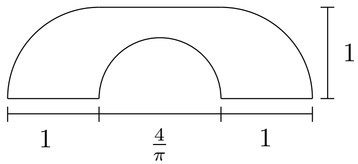
Moving Sofa Problem

Moving Sofa Problem je najznámejšia z úloh o sťahovaní nábytku asi hlavne preto, že sa jedná o otvorený matematický problém. Úlohu sformuloval Leo Moser v roku 1966 a odvtedy sa ju nikomu nepodarilo vyriešiť.

Príklad 8. (Moving Sofa Problem) Akú najväčšiu sedačku (s najväčším obsahom) môžeme preniesť chodbou v tvare písmena L, ktorá má obe ramená široké 1 m? Sedačka môže mať ľubovoľný tvar a nemusí vychádzať z tvaru nijakej skutočnej sedačky.

Predpokladá sa, že maximálny obsah sedačky by mal byť okolo $2,22\,\mathrm{m}^2$. Nikomu sa ale nepodarilo dokázať, že je to naozaj maximum a že väčšie sedačky už chodbou neprejdú. Podarilo sa ale nájsť niekoľko útvarov, ktoré sa k tejto ploche približujú.

Riešenie 1. Pomerne jednoducho tvarovanú sedačku, ktorá má obsah blízky najlepšiemu známemu riešeniu, našiel matematik Hammersley.



Ľahko si môžete dopočítať, že plocha sedačky je

$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} = 2,2074m^2$$

a tiež si možete vyskúšať, ako prejde chodbou.

Riešenie 2. Lepšie riešenie sa podarilo nájsť pánovi Gerverovi. Jeho sedačka má plochu

$$S = 2,21953166887197\,m^2.$$

Je to veľmi zložitý útvar, ktorý sa údajne skladá z 18 kružnicových oblúkov.

Pán Gerver ho našiel pomocou komplikovaného výpočtu, ktorý tu samozrejme uvádzať nebudem. Pokud by to ale někoho opravdu zajímalo, lze ho nalézt na adrese `http://mathworld.wolfram.com/MovingSofaProblem.html`. Ani Gerverovi sa ale nepodarilo dokázať, že jeho riešnie je maximálne. Jeho argumenty ale ukazujú, že buď to maximálne riešenie naozaj je, alebo sa od neho líši len minimálne.

Obsah sborníku