

Mařenice

SBORNÍK, JARO 2026

NATÁLIA BÁTOROVÁ
KÁŤA DANILINA
ALICKA DOMÁNYOVÁ
VOJTA GAĐUREK
MATĚJ GAJDOŠ
VÍT HANIKA
PETR HLADÍK
MARKÉTA HONSEJKOVÁ
DAVID HROMÁDKA
ZDENĚK PEZLAR
LENKA POLJAKOVÁ
ONDŘEJ SEDLÁČEK
JOSEF SURAL
ANNA TRNKOVÁ
LUKÁŠ TROJAN
LUCKA ZŮNOVÁ

AUTOŘI: Natália Bátorová, Káťa Danilina, Alicka Dományová, Vojta Gaďurek, Matěj Gajdoš, Vít Hanika, Petr Hladík, Markéta Honsejková, David Hromádka, Zdeněk Pezlar, Lenka Poljaková, Ondřej Sedláček, Josef Sural, Anna Trnková, Lukáš Trojan, Lucka Zůnová

EDITOŘI: Káťa Danilina, Anna Trnková

vydání první, náklad 45 výtisků

březen 2026

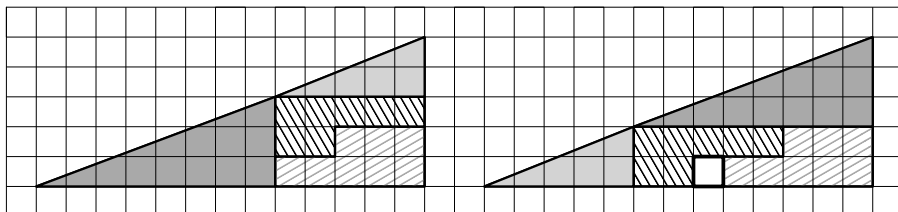
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Fibonacci

NATÁLIA BÁTOROVÁ

ABSTRAKT. Tento příspěvek se věnuje Fibonacciho posloupnosti, jedné z mnoha zajímavých číselných řad v matematice. Ukážeme si, že tato řada vzniká pomocí jednoduchého předpisu, kde každé další číslo získáme součtem dvou předchozích. Začneme u základních čísel 0 a 1 a podíváme se, jak se tato posloupnost postupně rozrůstá. Hlavním bodem bude vysvětlení, jak tato jednoduchá čísla souvisí s takzvaným zlatým řezem. Prozkoumáme, co se stane, když mezi sebou sousední čísla v posloupnosti dělíme a jak nás tento výpočet překvapivě dovede k jedné z nejdůležitějších konstant v matematice.

Úloha 1. (Motivační úloha) Co se stalo? Jak je možné, že druhý trojúhelník má v sobě díru 1×1 ?



Fibonacciho čísla

Definice. *Fibonacciho čísla* jsou posloupnost celých čísel definovaná následující rekurencí:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prvních několik Fibonacciho čísel je tedy: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Úloha 2. (Fibonacciho duchové) Jeden muž umístil jeden pár duchů do prostotu obehnaného ze všech stran kouzly, kterými žádní duchové neprojdou. Kolik párů duchů vznikne z tohoto páru, předpokládáme-li, že každý pár zplodí každý měsíc nový pár, který začne plodit potomky druhý měsíc po narození?

Úloha 3. Představme si, že chceme vyjít na strašidelné schodiště, které má n schodů. Přitom můžeme udělat krok o jeden děsivý schod nahoru a nebo krok natáhnout a postoupit o dva děsivé schody nahoru. Kolika způsoby se můžeme schodiště vyjít?

Úloha 4. Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $2 \times n$ pomocí dlaždic 1×2 ?

Úloha 5. Dokažte, že $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Úloha 6. Dokažte, že

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + \dots + F_{2n+1} &= F_{2n+2}, \\ 1 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} &= F_{2n+1}. \end{aligned}$$

Úloha 7. (Cassiniho identita) Dokažte, že $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Úloha 8. Dokažte, že $4n$ -té Fibonacciho číslo je dělitelné třemi.

Cvičení 9. Dokažte, že $F_k \mid F_{nk}$.

Úloha 10. (Zeckendorfova věta) Ukažte, že každé přirozené číslo n lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k$, kde pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $a_k \in \{0, 1\}$ a $a_k a_{k+1} = 0$. Jinými slovy, každé přirozené číslo se dá unikátně vyjádřit jako součet několika různých Fibonacciho čísel takových, že žádné dvě nejsou po sobě jdoucí.

Zlatý řez

Definice 11. Rozdělme úsečku na dvě části tak, že poměr delší části ke kratší části je stejný jako poměr celé úsečky k delší části. Tento poměr nazýváme *zlatý řez* (někdy též *zlaté číslo*) a značíme ho φ .

Příklad 12. Najděte hodnotu φ .

Řešení. Vyjdeme z definice. BÚNO nechť delší část úsečky má délku 1, délku celé úsečky označíme x . Tím dostaneme rovnici $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1}$. Tu upravíme do tvaru kvadratické rovnice $x^2 - x - 1 = 0$, která má dvě řešení: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Záporný kořen nás v tomto případě nezajímá (ale dále se ještě bude hodit, takže si ho označíme $\tilde{\varphi}$), takže dostáváme, že

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1,618.$$

Poznámka. Zlatý řez je často považován za nejkrásnější poměr. Proto ho využívají malíři při návrhu kompozice obrazů a také architekti jako poměr například mezi délkou a šířkou budov.

Úloha 13. Ukažte, že $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Úloha 14. Ukažte, že $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

Poznámka. Zlatý řez se někdy označuje jako nejiracionálnější číslo, protože ho díky předchozímu příkladu můžeme zapsat jako

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Úloha 15. *Zlatý obdélník* je obdélník, který má strany v poměru zlatého řezu. Co se stane, když zlatý obdélník rozdělíme na dvě části tak, aby jedna z nich byla čtverec?

Věta. (Binetova formule)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Důkaz. Pro důkaz stačí ověřit, že formule splňuje definici Fibonacciho čísel (tedy rekurzivní rovnost $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ a platnost pro F_0 a F_1). Podrobné rozepsání si můžete vyzkoušet jako cvičení. $\square$

Poznámka. Podobně jako zlatý řez můžeme definovat také *zlatý úhel*. Plný úhel rozdělíme na dvě části obdobně jako při definici zlatého řezu. Jako *zlatý úhel* se označuje menší z těchto dvou částí, která odpovídá přibližně $137,5^\circ$. Zajímavý je jeho výskyt v přírodě, například listy bývají na stonku často umístěny ve spirále s otočením právě o zlatý úhel.

Vztah Fibonacciho čísel a zlatého řezu

Pojďme nyní prozkoumat vztah Fibonacciho čísel a zlatého řezu. Definujme $\varphi_0 = 1$ a dále $\varphi_n = 1 + \frac{1}{\varphi_{n-1}}$.

Věta. (Vztah Fibonacciho čísel a zlatého řezu) *Poměr dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel se blíží zlatému řezu. Formálně*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi.$$

Důkaz. Limitu označíme L a upravujeme:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{L}.$$

Tím jsme dostali rovnici $L = 1 + \frac{1}{L}$, po úpravě $L^2 - L - 1 = 0$, což je přesně rovnice, kterou jsme měli při výpočtu zlatého řezu. Limita je zřejmě kladná, takže nás stejně jako v případě zlatého řezu zajímá pouze kladný z kořenů. $\square$

Úloha 16. Určete, k jakému číslu se blíží poměr $\frac{F_{n+2}}{F_n}$.

Návody

7. Vyjádři F_{n+1} rekurencí a použij indukci.
8. Předpokládej, že trojka dělí F_{4n} . Použij Cassiniho identitu a postupně se pro počítej na F_{4n+1} , F_{4n+2} , F_{4n+3} , $F_{4(n+1)}$ modulo 3.
9. Využij lemma, že $F_n = F_{k+1} \cdot F_{n-k} + F_k \cdot F_{n-k-1}$. Nebo zobecni předchozí příklad (který byl speciálním případem tohoto cvičení díky $F_4 = 3$).
10. Dokaž existenci takového vyjádření. Rozmysli si, že $\sum_{i=0}^m a_i F_i < F_{m+1}$. Využij to k důkazu jednoznačnosti vyjádření.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je z velké části převzat z příspěvku Fibonacciho čísla a zlatý řez od Michala Töpfera, který vychází z následujících příspěvků:

- [1] Starší příspěvky na podobné téma od Helči Svobodové, Aničky Doležalové a Adély Kostecké
- [2] Barbora Lišková: *Matematické zákonitosti v přírodě*
- [3] Vlasta Chmelíková: *Zlatý řez*
- [4] Ron Knott : *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
- [5] Richard Francisco: *Proof of the limit of the ratio of terms of the Fibonacci sequence*, <http://jwilson.coe.edu/EMAT6680Su07/Francisco/Assignment120/fibonacci.html>

Všem zmíněným tímto moc děkuji.

Bipartitní grafy

KÁŤA DANILINA

ABSTRAKT. V příspěvku se seznámíme se základními grafy a ukážeme si zajímavé vlastnosti bipartitních grafů. Také se seznámíme s Hallovou větou a procvičíme si ji na příkladech.

Definice. Graf G je dán množinou vrcholů V a množinou hran $E \subseteq \binom{V}{2}$. Hrany jsou tedy neuspořádané dvojice vrcholů. Skutečnost, že graf G má vrcholy V a hrany E značíme $G = (V, E)$.

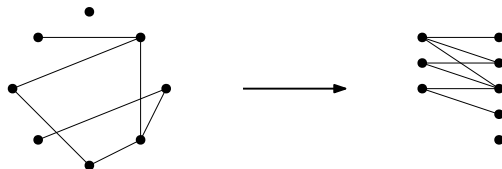
Definice. Vrchol $v \in V$ má stupeň $\deg(v) = d$, jestliže z něj vede právě d hran.

Lemma. (princip sudosti) Součet stupňů přes všechny vrcholy je roven dvojnásobku počtu hran neboli

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

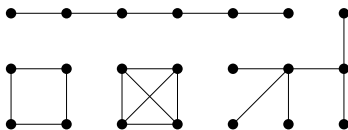
Důkaz. Každá hrana má dva koncové vrcholy, takže ji v součtu nalevo započítáme dvakrát. □

Definice. Graf $G = (V, E)$ je *bipartitní*, jestliže lze jeho vrcholy rozdělit na dvě disjunktní množiny A a B takové, že $A \cup B = V$ a navíc pro každou hranu $\{a, b\} \in E$ platí $a \in A, b \in B$.



Cvičení. Rozmyslete si, zda jsou následující grafy bipartitní.

- (1) Cesty.
- (2) Cykly.
- (3) Úplné grafy.
- (4) Stromy.



Definice. Graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E)$, jestliže $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$ a hrany E' mají oba koncové vrcholy ve V' .

Definice. Graf G je k -obarvitelný, jestliže lze jeho vrcholy obarvit k barvami tak, aby sousedící vrcholy měly různou barvu.

Cvičení. Nahlédni, že graf je bipartitní právě tehdy, když je 2-obarvitelný.

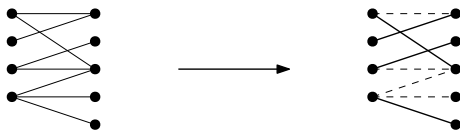
Věta. (charakterizace bipartitních grafů) Graf G je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichou kružnici jako podgraf.

Důkaz. Kružnice liché délky není bipartitní, určitě tedy není bipartitní ani graf, který ji obsahuje jako podgraf.

Předpokládejme, že graf G neobsahuje lichou kružnici. Hladově jej obarvíme dvěma barvami, čímž ukážeme, že je bipartitní. Začneme v libovolném vrcholu a obarvíme jej libovolně. Pak obarvíme jeho sousedy opačnou barvou. Potom jejich sousedy, kteří ještě nejsou obarvení, a tak dále. Stačí si rozmyslet, že takto dostaneme korektní obarvení. $\square$

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$, množina hran $M \subseteq E$ je *párování*, jestliže je každý vrchol obsažen v nejvýše jedné hraně z M .

Věta. (Hallova) Necht' G je bipartitní graf s partitami A a B . Párování obsahující všechny vrcholy z A existuje právě tehdy, když pro každou $X \subseteq A$ platí $|X| \leq |N(X)|$, kde $N(X)$ značí množinu sousedů vrcholů z X .



Seznámení s grafy

Pokud je tohle tvoje první setkání s grafy, doporučuji se podívat aspoň na některé z následujících úloh. Seznámíš se při tom s několika užitečnými pojmy z teorie grafů.

Definice. Graf je *souvislý*, jestliže v něm existuje cesta mezi libovolnou dvojicí vrcholů.

Úloha 1. Popište grafy $G = (V, E)$, kde pro všechny vrcholy $v \in V$ platí $\deg(v) \leq 2$.

Úloha 2. Dokažte, že se každé dvě nejdelší cesty v souvislém grafu protínají.

Definice. O grafu řekneme, že je *strom*, jestliže je souvislý a neobsahuje žádnou kružnici.

Úloha 3. Dokažte, že pro strom $T = (V, E)$ platí $|E| = |V| - 1$.

Úloha 4. Dokažte, že stromy jsou právě ty grafy, kde mezi každou dvojicí vrcholů existuje právě jedna cesta.

Úloha 5. Dokažte, že počet *listů* (vrcholů stupně 1) ve stromě $T = (V, E)$ je aspoň nejvyšší stupeň vrcholu $v \in V$.

Úloha 6. Dokažte, že všechny nejdelší cesty ve stromě mají společný vrchol.

Úloha 7. Dokažte, že graf, kde mají všechny vrcholy stupeň aspoň k , obsahuje cyklus délky aspoň $k + 1$.

Bipartitní grafy

Úloha 8. Ukažte, že všechny podgrafy bipartitního grafu jsou také bipartitní.

Úloha 9. Dokažte, že pro bipartitní graf s partitami A a B platí

$$\sum_{a \in A} \deg(a) = \sum_{b \in B} \deg(b).$$

Úloha 10. Dokažte, že libovolný graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní podgraf $B = (V, E')$ obsahující aspoň polovinu hran, tedy $|E'| \geq \frac{1}{2}|E|$.

Úloha 11. (Mantelova věta) Dokažte, že graf na n vrcholech bez trojúhelníků, který obsahuje největší možný počet hran, je bipartitní.

Úloha 12. Dokažte, že na nekonečnou šachovnici nelze umístit 2025 jezdců tak, aby každý ohrožoval právě 2 další.

Úloha 13. Mějme graf, kde mají všechny vrcholy stupeň nejvýše 2026. Dokažte, že lze jeho hrany obarvit 11 barvami tak, aby byly všechny jednobarevné podgrafy bipartitní.

Úloha 14. Mějme souvislý graf G . Když v G uvážíme libovolnou lichou kružnici a smažeme její hrany, G přestane být souvislý. Dokažte, že G je 4-obarvitelný.

(ARO 2010)

Úloha 15. Mějme graf, na kterém můžeme dělat následující operaci: z libovolného cyklu délky 4 odstraníme hranu. Určete, kolik nejméně hran musí na konci zůstat, jestliže začínáme s úplným grafem na n vrcholech.

(Shortlist 2004)

Hallova věta a párování

Definice. Graf G nazveme *regulární*, jestliže všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň.

Úloha 16. Dokažte, že každý regulární bipartitní graf obsahuje perfektní párování (párování obsahující všechny vrcholy).

Úloha 17. Necht jsou $S_1, \dots, S_n$ podmnožiny $\{1, \dots, n\}$ takové, že sjednocení libovolných k z nich obsahuje aspoň k různých čísel. Dokažte, že existuje permutace $a_1, \dots, a_n$ taková, že $a_i \in S_i$.

Úloha 18. Mějme bipartitní graf G s partitami A a B , kde mají všechny vrcholy stupeň aspoň 1. Pro každou jeho hranu $\{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$ platí $\deg(a) \geq \deg(b)$. Dokažte, že v G existuje párování obsahující všechny vrcholy z A .

Úloha 19. O tabulce $n \times n$ řekneme, že je *permutační*, jestliže v každém políčku obsahuje 0 nebo 1 a navíc má v každém řádku i sloupci právě jednu 1. Mějme tabulku $n \times n$ vyplněnou přirozenými čísly, která má v každém řádku i sloupci stejný součet. Dokažte, že ji umíme vyjádřit jako součet několika permutačních tabulek.

Úloha 20. Mějme tabulku M o rozměrech $n \times n$ vyplněnou čísly 0, 1 a -1 , která v každém řádku i sloupci obsahuje právě jednu 1 a právě jednu -1 . Dokažte, že umíme přeskádat řádky a sloupce M tak, abychom dostali $-M$. (Írán 1998)

Úloha 21. V PraSeStánu se vláda rozhodla zřídit 2026 okresů o stejné rozloze. Své návrhy na rozdělení podaly dvě politické strany. Dokažte, že lze vybudovat 2026 okresních úřadů tak, aby byl v každém okrese právě jeden, ať už vláda poté zvolí kteroukoli variantu. (MKS 36-5-8)

Úloha 22. Je dán graf G na lichém počtu vrcholů. Alice na nějaký vrchol umístí figurku. Bob ji posune do sousedního vrcholu, pak zase Alice, pak Bob a tak dále. Figurku nelze posunout do vrcholu, ve kterém už někdy dříve byla. Kdo nemá tah, prohrál. Dokažte, že Alice má vítěznou strategii.

Úloha 23. V místnosti je $2n$ lidí, z nichž některé dvojice se znají. Alice a Bob hrají hru. Alice začíná a vybere libovolného člověka. Následně se střídají v tazích a pokaždé vyberou někoho, kdo ještě nebyl vybraný a zná se s posledním vybraným člověkem. Kdo nemůže táhnout prohrál. Dokažte, že Bob má vyhrávající strategii právě tehdy, když můžeme lidi v místnosti rozdělit do dvojic, které se znají.

Úloha 24. Na planetě je 2^n zemí ($n \geq 4$). Všechny tyto země mají vlajku ve tvaru tabulky $n \times 1$, jejíž políčka jsou vybarvena žlutou a modrou barvou. Žádné dvě země nemají stejnou vlajku. Skupinu zemí nazveme *diverzní*, pokud z ní lze vybrat n různých zemí tak, abychom při poskládání jejich vlajek pod sebe v určitém pořadí dostali čtverec $n \times n$ s jednobarevnou hlavní diagonálou. Spočtete, kolik nejméně zemí musí ve skupině být, aby už byla určitě diverzní. (Shortlist 2010)

Úloha 25. Tabulka $3n \times 3n$ je obarvena třemi barvami (červeně, zeleně a modře). Políčko na souřadnicích x, y je obarveno podle zbytku $x + y$ po dělení třemi. Teď na tabulku umístíme $3n^2$ žetonů každé barvy tak, aby na každém políčku byl právě jeden. Předpokládejme, že je možné žetony přesunout tak, aby se každý posunul o vzdálenost nejvýše d a barvy byly cyklicky posunuté (červený žeton na zelenou, zelený na modrou a modrý na červenou). Dokažte, že můžeme žetony posunout tak, aby se každý posunul o vzdálenost nejvýše $d + 2$ a přitom skončil na políčku své barvy. (Shortlist 2012)

Návody

1. Je to sjednocení cest a cyklů.
2. Uvažuj dvě disjunktní nejdelší cesty a ukaž, že umíš najít delší.
3. Podívej se na počet komponent souvislosti.
4. Stačí ověřit definici stromu.
5. Každý strom obsahuje list, odstraň vrchol s nejvyšším stupněm.
6. Indukuj podle nejdelších cest. Nebo taky můžeš odebrat všechny listy.
7. Uvaž nejdelší cestu v grafu.
8. Rozdělení na partity necháme úplně stejné.
9. Všimni si, kolikrát započítáš každou hranu na levé a pravé straně.
10. Postupně přidávej vrcholy. Nebo jdi na pravděpodobnostní metodu ;-).
11. Postupuj indukcí podle n .
12. Najdi bipartitní graf, jehož vrcholy jsou jezdci.
13. Začni tím, že obarvíš vrcholy a odvoď si z něj obarvení hran.
14. Uvaž maximální bipartitní podgraf a dokaž, že partity jsou bipartitní.
15. Graf musí zůstat souvislý a nebipartitní.
16. Ověř Hallovu podmínku.
17. Převeď na graf, pak je to jasné.
18. Ověř Hallovu podmínku.
19. Postupuj indukcí podle součtu v řádcích a sloupcích.
20. Uvaž sjednocení obou párování.
21. Uvaž graf, který obsahuje hrany mezi dvojicemi překrývajících se okresů.
22. Najdi největší párování v G .
23. Uvaž největší párování.
24. Uvaž dva bipartitní grafy, jeden pro každou barvu zvlášť.
25. Rozděl tabulku na triomina 1×3 , to bude jedna partita. Druhá partita budou červené žetony.

Literatura a zdroje

Chtěla bych poděkovat Pepovi Minaříkovi od něhož jsem příspěvek s menšími úpravami přebrala.

- [1] Adrian Tang: *IMO Training 2008: Graph Theory*,
<http://web.mit.edu/yufeiz/www/imo2008/tang-graph.pdf>.
- [2] Viki Němeček: *Hallova věta*, Lipová-lázně, podzim 2016.

Obsahy

ALICKA DOMÁNYOVÁ

ABSTRAKT. Na této přednášce se seznámíme s některými tvrzeními o obsazích rovinných útvarů, hlavně mnohoúhelníků. Potom si je pořádně procvičíme. Budeme využívat délky, podobnost a tu a tam nějakou stejnolehlost.

Úmluva. Obsah trojúhelníku ABC , resp. čtyřúhelníku $ABCD$, budeme značit jako $[ABC]$, resp. $[ABCD]$.

Pomocná tvrzení

Na práci s obsahy budeme občas potřebovat několik lemmátek a tvrzeníček.

Lemma. *Nechť čtyři různé body A, B, C, D splňují $AB \parallel CD$. Potom $[ABC] = [ABD]$ a $[ACD] = [BCD]$.*

Úloha 1. Na stranách BC a DA rovnoběžníku $ABCD$ leží body E a F tak, že $|BE| = |DF|$. Navíc na straně CD leží bod K . Přímka EF protíná přímky AK a BK v bodech P a Q . Ukažte, že $[AFP] + [BQE] = [PKQ]$.

Tvrzení. *Přímky a a b se protínají v bodě O . Nechť ℓ_1 a ℓ_2 jsou dvě rovnoběžné přímky protínající a a b v bodech A_1 a B_1 , resp. A_2 a B_2 . Potom*

$$\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|}.$$

Lemma. *Nechť ABC a ABD jsou trojúhelníky. Označme průsečík AB a CD jako P . Pak*

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{|CP|}{|DP|}.$$

Úloha 2. (van Aubelova věta) V trojúhelníku ABC leží bod P . Označme průsečíky AP, BP, CP s BC, CA, AB jako D, E, F . Ukažte, že potom

$$\frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AP|}{|PD|}.$$

Tvrzení. Necht' body C a D leží na stejné straně od přímky AB a bod Q leží uvnitř úsečky CD . Označme si poměr $\frac{DQ}{DC}$ jako t . Potom

$$[ABQ] = t[ABC] + (1 - t)[ABD].$$

Úloha 3. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ si označíme středy diagonál AC a BD jako M a N a jejich průsečík jako E . Buď F takový bod, že $MENF$ je rovnoběžník. Dokažte, že $2[ABF] = [BCE] + [DAE]$.

Jednodušší příklady

Úloha 4. Necht' $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník a body K a L , resp. M a N , leží na straně AB , resp. CD , tak, že platí $AK = KL = LB$, resp. $CM = MN = ND$. Ukažte, že $3[KL MN] = [ABCD]$.

Úloha 5. Necht' M a N jsou středy stran AB a CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Úsečky AN a DM , resp. BN a CM , se protínají v bodě P , resp. Q . Ukažte, že $[APD] + [BQC] = [MPNQ]$. (MKS 35-4-5)

Úloha 6. Na stranách AC a AB trojúhelníka ABC leží body X a Y tak, že $\frac{|CX|}{|XA|} = \frac{|AY|}{|YB|}$. Označme si průsečík úseček CY a BX jako P . Ukažte, že $[XPYA] = [CXP]$.

Úloha 7. Necht' $ABCD$ je rovnoběžník, na jehož stranách AB a AD leží body E a F . Přímka EF protíná přímky CB a CD v bodech P a Q . Ukažte že $[PAQ] = [ECF]$.

Složitější příklady

Úloha 8. Necht' $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, jehož úhly u A a B se sečtou na 90° . Označme střed $|CD|$ jako M . V závislosti na délkách úseček AD a BC vyjádřete $[ABM] - [DAM] - [BCM]$.

Úloha 9. Necht' ABC je trojúhelník. Na polopřímce opačné k BC , resp. CA , resp. AB , leží bod X , resp. Y , resp. Z . Označme

$$x = \frac{|XB|}{|BC|}, \quad y = \frac{|YC|}{|CA|}, \quad z = \frac{|ZA|}{|AB|}.$$

Ukažte, že

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = (1 + x)(1 + y)(1 + z) - xyz.$$

Úloha 10. (Newtonova přímka) Ukažte, že v tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ leží středy úseček AC a BD na přímce procházející středem kružnice vepsané.

Úloha 11. Označme si jako K, L, M, N, O, P a Q postupně středy stran AB, BC, CD, DE, EF a FA konvexního šestiúhelníku. Dokažte, že pro všechny body X ležící ve vnitřku $ABCDEF$ je hodnota $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX]$ stejná.

Úloha 12. Na stranách AB a CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ leží body K a L tak, že $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LD|}$. Dokažte, že $[ALB] + [CKD] = [ABCD]$.

Úloha 13. Dokažte, že všechny přímký, které dělí obvod trojúhelníka ve stejném (nenulovém) poměru jako jeho obsah, procházejí jedním bodem. (MKS 30-7-8)

Úloha 14. Rado si nakreslil konvexní šestiúhelník. Všiml si, že pokud do něj nakreslí libovolnou z úseček spojující středy dvou protilehlých stran, rozdělí tato úsečka šestiúhelník na dva pětiúhelníky se stejným obsahem. Dokažte, že se tyto tři úsečky protínají v jednom bodě.

Úloha 15. Čtverec je rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části. Dokažte, že pokud tři z nich mají stejný obsah, pak už nutně mají stejný obsah všechny čtyři. (MKS 36-8-5b)

Úloha 16. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má obsah 6. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABC , BCD , CDE , DEF , EFA , FAB má obsah nanejvýš 1.

Návody

1. Místo trojúhelníku PKQ se podívejte na trojúhelník ABK . Místo zbylých dvou trojúhelníků se podívejte na lichoběžník $ABEF$. Použijte předchozí lemma.
2. Napiš si obsahy skoro všech trojúhelníků a poměřuj.
3. Dokresli střed MN a použij mnohokrát předchozí tvrzení.
4. Rozděl $KLMN$ na dva trojúhelníky. Jejich obsahy spočítej pomocí posledního tvrzení.
5. Ukaž, že $[ABN] = [ADM] + [BMC]$
6. Ze zadané rovnosti poměrů vyplývají rovnosti poměrů obsahů nějakých trojúhelníků. Tyto obsahy rozdělte na dva a počítejte.
7. K oběma obsahům přidej $[AEF]$, vhodně rozděl a využij rovnoběžností.
8. Dokresli si průsečík přímek AD a BC . Pak to prostě spočítej.
9. Rozděl si XYZ na 7 vhodných trojúhelníků. Z výsledku není těžké uhádnout které.
11. Je to vždy polovina obsahu šestiúhelníku.
12. Využij poslední tvrzení o obsahích, když známe poměr na úsečce
13. Je to vepsíště
14. Vyznač si průsečík dvou úseček. Kdybychom poslední úsečku "zlomili" a vedli přes tento průsečík, tak rozdělí šestiúhelník na stejné obsahy.
15. Otáčejí přímký kolem středu čtverce.

Literatura a zdroje

Tato přednáška byla převzata od Rado Van Švarce, který ji přednášel na soustředění v Zásadě 2017.

Polynómy v N

ALICKA DOMÁNYOVÁ

ABSTRAKT. Na tejto prednáške si ukážeme základné vlastnosti polynómov, ktoré sa týkajú teórie čísel, deliteľnosti.

Definícia. *Polynóm n -tého stupňa* je výraz tvaru $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ pre $a_i \in \mathbb{R}$.

Definícia. *Monický polynóm* má navyše pri člene s najväčšou mocninou koeficient 1. Teda $a_n = 1$.

Často sa budeme na polynómy pozerat aj v trochu inom tvare, ako na súčin niekoľkých jednoduchších polynómov.

Definícia. *Koreň polynómu P* je číslo α také, že $P(\alpha) = 0$.

Tvrdenie. α je koreňom P práve vtedy, keď $x - \alpha \mid P(x)$.

Dôsledok. *Polynóm P stupňa $n \geq 0$ má najviac n koreňov.*

Tvrdenie. *Keď má polynóm P celočíselné koeficienty a $a, b \in \mathbb{Z}$, potom platí $a - b \mid P(a) - P(b)$.*

Tvrdenie. *Polynómy s celočíselnými koeficientami sú periodické (mod n) pre ľubovoľné prirodzené n , tj. $P(x + n) \equiv P(x) \pmod{n}$ pre celé x .*

Tvrdenie. (Rational Root Theorem) *Nech má polynóm*

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

celočíselné koeficienty. Potom pre každý jeho racionálny koreň $\frac{r}{s}$ (v základnom tvare) platí, že $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$.

Úlohy

Úloha 1. Nájdite polynóm, ktorý pre všetky celé čísla nadobúda celočíselné hodnoty a zároveň nemá všetky koeficienty celočíselné. (MKS 34–6–1)

Úloha 2. Nech P je polynóm s celočíselnými koeficientami. Dokáž, že ak je $P(n)$ deliteľné tromi pre nejaké tri po sebe idúce prirodzené čísla, tak je to deliteľné tromi pre všetky prirodzené čísla.

Úloha 3. Nájdite všetky polynómy P spĺňajúce $x \cdot P(x-1) = (x+1) \cdot P(x)$ pre všetky reálne x . (MKS 34–6–3)

Úloha 4. Majme polynóm P s celočíselnými koeficientami a $a \in \mathbb{Z}$. Ďalej platí, že $P(-a) < P(a) < a$. Dokážte, že $P(-a) < -a$.

Úloha 5. Existuje polynóm párneho (sudého) stupňa s nepárnymi (lichými) celočíselnými koeficientami, ktorý má racionálny koreň? (MKS 34–6–4)

Úloha 6. Dokáž, že keď má polynóm $ax^3 + bx^2 + cx + d$ s celočíselnými koeficientami tri rôzne korene a ad je nepárne, pričom bc je párne, tak nemôžu byť všetky korene tohto polynómu racionálne.

Úloha 7. Dokáž, že ak má polynóm P celočíselné koeficienty a zároveň $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tak $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ nastane jedine keď $a = b = c$.

Úloha 8. Majme P s celočíselnými koeficientami a stupňom aspoň dva. Ukážte, že potom existuje dvojica prirodzených čísel (m, n) taká, že kongruencia $P(x) \equiv m \pmod{n}$ nemá celočíselné riešenie.

Úloha 9. Ukážte, že pre ľubovoľný monický polynóm s celočíselnými koeficientami P so stupňom aspoň dva existuje nekonečná rastúca postupnosť celých čísel (x_n) taká, že $P(x_n) \mid P(x_{n+1})$.

Úloha 10. Nech $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$ je polynóm s nezápornými celočíselnými koeficientami, spĺňajúci navyše $a_i = a_{n-i}$ pre všetky i . Dokážte, že potom nekonečne veľa dvojíc celých čísel spĺňa $x < y$ s $x \mid P(y)$ a $y \mid P(x)$. (iKS 2–N5)

Úloha 11. Dokážte, že keď sú $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ aj $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ celé pre celé čísla a, b, c , tak musí platiť, že $|a| = |b| = |c|$.

Úloha 12. Definujme postupnosť (x_n) ako $x_0 = 0$, $x_{n+1} = P(x_n)$ pre polynóm P s celočíselnými koeficientami. Ukážte, že ak $x_n = 0$ pre nejaké $n > 0$, tak $x_1x_2 = 0$. (Putnam 2000)

Úloha 13. Definujme postupnosť (x_n) ako $x_0 = 0$, $x_{n+1} = P(x_n)$ pre polynóm P s celočíselnými koeficientami takú, že $P(n) > n$. Dokážte, že keď pre každé $m \in \mathbb{N}$ obsahuje táto postupnosť nejaký násobok m , tak platí $P(x) = x + 1$. (Írán TST 2004)

Úloha 14. Dokáž, že ak je polynóm P s celočíselnými koeficientami nekonštantný, potom polynóm $P^k(x) - x$ má najviac $\deg(P)$ koreňov (P^k značí k -násobné zloženie). (IMO 2006-5)

Úloha 15. Majme funkciu $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ takú, že $|f(n)| < P(n)$ pre nejaký polynóm P a $k - \ell \mid f(k) - f(\ell)$ pre všetky rôzne celé k, ℓ . Dokážte, že existuje polynóm Q (s reálnymi koeficientami) taký, že $f(k) = Q(k)$ pre všetky $k \in \mathbb{Z}$. (MKS 34–6–8)

Návody

1. Na vyriešenie nepotrebuješ žiadnu vetu. A naozaj taký polynóm existuje.
2. Vieme, že ak je $a - b$ deliteľné tromi, tak je aj $P(a) - P(b)$ deliteľné tromi.
3. Ukáž, že koreňom polynómu je každé prirodzené číslo. Prečo je to problém?
4. Vhodne použi vetu o polynómoch s celočíselnými koeficientami.
5. Aplikuj Rational Root Theorem.
6. Ukáž sporom pomocou Rational Root Theorem.
7. $a - b \mid P(a) - P(b)$.
8. Keby to tak nebolo, musí $P(x), \dots, P(x + n - 1)$ dávať rôzne zvyšky po delení n pre ľubovoľné x ; zvol $n = P(x + 1) - P(x) > 2$.
10. Ak funguje dvojica (x, y) , tak funguje aj $(y, \frac{P(x)}{y})$.
11. Vezmi polynóm s koreňmi $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ a aplikuj naň Rational Root Theorem.
12. $x - y \mid P(x) - P(y)$; vezmi najmenšie x_i .
13. $x - y \mid P(x) - P(y)$.
14. Ak sú x, y korene, tak platí $|x - y| = |P(x) - P(y)|$; alebo použi predošlú úlohu na to, aby stačilo vyriešiť len prípad $k = 2$.
15. Pomocou toho, že $\text{nsn}(n, n - 1, \dots, n - d) > kn^{d+1}$ pre nejakú konštantu $k > 0$, dokáž, že sa hodnoty f zhodujú s vhodným polynómom.

Literatura a zdroje

- [1] Danil Koževnikov: *Aritmetické vlastnosti polynomů*, Sklené, 2019.
- [2] Verča Hladíková: *Polynomy*, Meziměstí, 2022.

Nedeterministické počítání

VOJTA GAĐUREK

ABSTRAKT. Data, mraky dat. Dat je prostě moc, jak si při tom ale pamatovat co nejméně? To zodpoví tato přednáška na streaming algoritmy. Očekávejte pravděpodobnost. Použijeme Chernoffa a Chebycheva. Dozvíte se, co je to mediánový trik. Přiblížíme se velmi blízko otevřenému výzkumu.

Definice. *Cash-Register* model se skládá z univerza všech prvků U velikosti m a multimnožiny dvojic A velikosti n ve tvaru (u, c) , kde $u \in U$ a c je nějaké přirozené číslo. Dále platí, že k A nemáme plný přístup, máme pouze přístup k operaci NEXT, která nám vrátí nějaký prvek z A , který jsme ještě neviděli.

Modelů existuje více, ale nás bude zajímat tento. Budeme o něm taky občas hovořit jako o proudu dat.

Přirozená čísla jsou zrádná – do jednoho přirozeného čísla lze teoreticky uložit neomezeně informací.¹ Takovým věcem uděláme hned na začátku přítrž a řekneme, že hodnota čísla může být nejvýše $m \cdot n$. Všimněte si, že se nám pak dvojice (m, n) do daného čísla hezky vejde.²

Příklad. Určete nejčtenější prvek v proudu dat, ale pamatujte si co nejméně. Jde to s 1 číslem? Jde to s $\frac{n}{2}$ čísly, kde n je počet prvků? Nebo s $\frac{m}{2}$?

Řešení. Úloha je trochu chyták, ale poučný. Vždy budete potřebovat alespoň $m - 1$ čísel, kde m je počet různých prvků.

Příklad. Pro předchozí příklad si rozmyslete, za jakých podmínek by vám stačilo zapamatovat si jenom jedno číslo. Za jakých jen 4?

Řešení. Pokud je nejpočetnějšího prvku alespoň polovina. Vždy držíme jednu dvojici (prvek, počet). Přijde-li počet, který je v dvojici pak jej přičteme, pokud ne pak jej odečteme. Je-li počet nulový, pak prvek nahradíme prvkem, kterým jsme odečítali. Odečteme nejvíce $\frac{n}{2}$ -krát a na konci je počítadlo kladné. Tedy nalezený prvek musí být ten nejpočetnější.

¹Představte si, že máte nějakou posloupnost čísel $(a)_n$, pak můžeme všechna čísla převést do devítkové soustavy. Tím jsme získali volný symbol 9, který budeme používat jako mezeru. Pak posloupnosti $(a)_n$ může třeba odpovídat číslo $9a_1^9 9a_2^9 9 \dots$, kde a_i^9 je číslo a_i zapsané v devítkové soustavě.

²Rychlým skokem do informatiky – vyjádření takového čísla nás bude stát $\log(mn)$ bitů.

Pokud máme jistotu, že nejčtenější prvek má četnost větší o $\frac{n}{k}$ než druhý největší, pak nám opravdu bude stačit pamatovat si k čísel. Algoritmus drobně upravíme – když zpracováváme prvek, přičteme ho do dvojice se stejným prvkem, pokud taková není a máme plno, odečteme jedničku od všech paměťových míst.

Příklad. Rozmyslete si, že obecný případ pro předchozí úlohu opravdu funguje.

Už pro $k = 100$ algoritmus odhalí všechny prvky tvořící alespoň 0,01 ze všech. Algoritmus je známý jako Misra–Gries. Do budoucna se nám bude hodit definovat, že odhad $\hat{f}(u)$ je roven 0, pokud prvek nebyl algoritmem vybrán, a jinak se rovná počtu, který daný prvek měl na konci algoritmu.

Co když by nás ale nezajímalo nejčtenější prvek, ale chtěli bychom odhadnout frekvenci libovolného prvku? Obecně se takovému problému říká odhad frekvence.

Definice. (frekvence) Mějme model nad univerzem U s množinou A , pak definujeme *frekvenci* jako $f(u) := \sum_{(u,c) \in A} c$. Chybou pak míníme $\varepsilon = \max_u |\hat{f}(u) - f(u)|$, kde $\hat{f}(u)$ je náš odhad frekvence.

Příklad. Pokud vezmeme Misra–Gries algoritmus s k čísly a získáme odhad $\hat{f}(u)$, jaká je jeho chyba?

Řešení. Prvně si všimneme, že chyba je jednostranná – algoritmus vždycky podhodnocuje. Můžeme se zeptat, jaká je největší možná chyba? Můžeme odečítat nejvýše $\frac{n}{k}$ -krát, to je tedy naše největší chyba, což znamená,³ že $\varepsilon = \frac{n}{k}$.

Nyní použijeme randomizaci. Budeme mít speciální hašovací funkce, které budou fungovat následovně: pro funkci s ℓ hodnotami bude každá hodnota stejně pravděpodobná. Klíčová vlastnost je, že stejný prvek je vždy zobrazen na stejnou hodnotu.

Začneme tím, že si pořídíme dvě hašovací funkce. Jednu $g : U \rightarrow \{-1, 1\}$, kde obě hodnoty jsou stejně pravděpodobné. Druhou $h : U \rightarrow \{1, \dots, k\}$, kde každá hodnota odpovídá jiné přihrádce v našem poli součtů S (velikosti k).

Náš postup bude jednoduchý – pokud uvidíme prvek u , vyhodnotíme obě funkce a hodnotu $g(u)$ přičteme k součtu v přihrádce $S[h(u)]$. Jak přečteme výsledek? Pro každý prvek u se podíváme na součet v jeho přihrádce $S[h(u)]$ a náš odhad bude $\hat{f}(u) = S[h(u)] \cdot g(u)$.

Příklad. Jaká je chyba takového řešení?

Řešení. Prvně by nás mělo překvapit, že takové řešení vůbec dává správný odhad. Začneme tedy tím, že ukážeme, že střední hodnota našeho odhadu $\mathbb{E}[\hat{f}(c)]$ je opravdu přesně $f(c)$. Střední hodnota se počítá jako součet všech hodnot jevů a jejich pravděpodobností. Pokud tedy máme například kostku s pěti jedničkami a jednou šestkou. Pak pravděpodobnost, že padne 1 je $\frac{5}{6}$ a pravděpodobnost, že padne 6 je $\frac{1}{6}$, pak střední hodnota počtu ok na kostce je $\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$.

³Je k zamyšlení, jestli je taková chyba dobrá (Všimněte si, že může nastat, že odhad je 0. Na druhou stranu, pokud zvolíme $k = 100$, pak algoritmus správně určí, každý prvek s frekvencí větší jak 0,01)

Věta. (linearita střední hodnoty) *Platí, že $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.*

Náš součet v přihrádce se skládá ze správného prvku a „šumu“ z ostatních prvků:

$$S[h(c)] = g(c) f(c) + \sum_{\substack{a \in U, a \neq c \\ h(a) = h(c)}} g(a) f(a).$$

Když tento součet vynásobíme $g(c)$, získáme náš odhad:

$$\hat{f}(c) = g(c)^2 f(c) + \sum_{\substack{a \neq c \\ h(a) = h(c)}} g(a) g(c) f(a).$$

Jelikož $g(c)^2 = 1$ a z linearity střední hodnoty víme, že $\mathbb{E}[g(a)] = 0$, střední hodnota chybového šumu se vyruší a zbude nám $\mathbb{E}[\hat{f}(c)] = f(c)$.

Všimněme si, že takový odhad je v průměru správný. Jak ale kvantifikovat, jak moc se od průměru v průměru může odchýlit? K tomu potřebujeme pojem rozptylu.

Definice. Mějme náhodnou veličinu X . Její *rozptyl* (značíme $\text{var}(X)$) definujeme jako

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Věta. (Čebyševova nerovnost) *Pro každou náhodnou veličinu X s konečnou střední hodnotou $\mathbb{E}[X]$ a konečným rozptylem $\text{var}(X)$ a pro každé reálné číslo $a > 0$ platí:*

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{var}(X)}{a^2}.$$

Příklad. Odhadněte pravděpodobnost chyby Count-Sketch algoritmu s pamětí velikosti k .

Řešení. Náš odhad je $\hat{f}(c) = f(c) + Z$, kde šum je

$$Z = \sum_{\substack{a \neq c \\ h(a) = h(c)}} g(c) g(a) f(a).$$

Víme, že $\mathbb{E}[Z] = 0$. Spočítáme rozptyl $\text{var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2]$. Po umocnění sumy Z na druhou se smíšené členy (kde $a \neq b$) ve střední hodnotě vyruší, protože pro nezávislé hody platí $\mathbb{E}[g(a)g(b)] = \mathbb{E}[g(a)]\mathbb{E}[g(b)] = 0$. Zbudou jen členy pro $a = b$, kde $g(a)^2 = 1$.

$$\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{a \neq c} P(h(a) = h(c)) \cdot f(a)^2$$

Pravděpodobnost kolize $h(a) = h(c)$ je $\frac{1}{k}$. Tedy

$$\text{var}(Z) = \frac{1}{k} \sum_{a \neq c} f(a)^2 \leq \frac{\|f\|_2^2}{k},$$

kde $\|f\|_2^2 = \sum_{a \in U} f(a)^2$.

Nyní aplikujeme Čebyševovu nerovnost pro odchylku $\varepsilon \|f\|_2$:

$$P(|Z| \geq \varepsilon \|f\|_2) \leq \frac{\text{var}(Z)}{\varepsilon^2 \|f\|_2^2} \leq \frac{\|f\|_2^2/k}{\varepsilon^2 \|f\|_2^2} = \frac{1}{k \varepsilon^2}.$$

Všimněme si, že pokud bychom chtěli uspět s pravděpodobností $\frac{2}{3}$, stačí nám zvolit

$$k = \frac{3}{\varepsilon^2}.$$

Pravděpodobnost úspěchu lze dále zvýšit pomocí mediánového triku.

Věta. (Mediánový trik) *Bud' $Y_1, \dots, Y_t$ nezávislé jevy, z nichž každý nabývá hodnoty 1 s pravděpodobností $p > 1/2$ a hodnoty 0 jinak. Pak*

$$P\left(\sum_{i=1}^t Y_i \leq \frac{t}{2}\right) \leq e^{-c t}$$

pro nějakou konstantu $c > 0$ závisující na p .

Větu nebudeme dokazovat, ale dá se lehce dokázat z Chernoffovy nerovnosti:

Věta. (Chernoffova nerovnost) *Bud' $X_1, \dots, X_n \in \{0, 1\}$ nezávislé náhodné veličiny, $X = \sum_{i=1}^n X_i$ a $\mu = \mathbb{E}[X]$.*

Horní odhad: Pro libovolné $0 < \delta < 1$:

$$P(X \geq (1 + \delta) \mu) \leq e^{-\delta^2 \mu / 3}.$$

Dolní odhad: Pro libovolné $0 < \delta < 1$:

$$P(X \leq (1 - \delta) \mu) \leq e^{-\delta^2 \mu / 2}.$$

Nyní k čemu nám mediánový trik slouží. Vezmeme si t nezávislých instancí našeho algoritmu, jejich odhady seřadíme od nejmenšího po největší a jako výsledný odhad zvolíme medián. Všimněme si, že pokud více než $\frac{t}{2}$ instancí uspěje (tj. dá odhad s chybou menší než $\varepsilon \|f\|_2$), pak i medián bude mít chybu menší než $\varepsilon \|f\|_2$. Pravděpodobnost, že medián selže, tak klesá exponenciálně s počtem instancí t . Pro pravděpodobnost selhání nejvýše δ tedy stačí zvolit $t = O(\log(\frac{1}{\delta}))$.

Úlohy

K řešení úloh: ne všechny úlohy lze vyřešit deterministicky. Dobrým cílem bude řešení, které s nějakou fixní pravděpodobností vrátí řešení s nějakou chybou závislou na ε . Všimněte si, že pokud pravděpodobnost úspěchu bude větší jak $\frac{1}{2}$, můžete řešení pomocí mediánového triku zesílit na libovolnou pravděpodobnost úspěchu a budete potřebovat pouze $O(\log(\frac{1}{\delta}))$ instancí.

Úloha 1. Odhadněte počet různých prvků v proudu dat.

Úloha 2. Vyberte uniformně náhodně jeden prvek z proudu dat. Počet prvků předem neznáte.

Úloha 3. Vyberte uniformně náhodně k prvků z proudu dat. Počet prvků předem neznáte.

Úloha 4. Navrhněte, jak na prstech napočítat do více než 2^{10} .

Úloha 5. Rozhodněte, zda dva proudy dat obsahují stejné prvky (se stejnými četnostmi).

Úloha 6. Můžete si pamatovat pouze jedno číslo a dostanete posloupnost čísel. Právě jedno se vyskytuje právě jednou, ostatní dvakrát. Nalezněte dané číslo.

Úloha 7. Předpokládejte, že každý prvek se v proudu vyskytuje nejvýše jednou. Vezměte dva proudy a odhadněte, kolik prvků se objevilo v právě jednom z nich. Předpokládejte, že se oba proudy liší pouze málo.

Úloha 8. Předpokládejte, že každý prvek se v proudu vyskytuje nejvýše jednou. Vezměte dva proudy a zjistěte, jaké prvky se objevily v právě jednom z nich.

Návody

1. Hoď si magickou kostkou a udržuj si k nejmenších výsledků. Následně použij mediánový trik.
2. Stačí si pamatovat pouze jeden prvek. Řekni si, že právě přišlo n prvků – s jakou pravděpodobností bude $(n + 1)$ -ní prvek vybrán?
3. Stačí si pamatovat pouze k prvků.
4. Budeš muset obětovat přesnost a deterministicky to nebude.
5. Zkus přiřadit každému prvku nějaké číslo, které ho bude identifikovat.
6. Najdi operaci $\cdot$ takovou, že je $A \cdot B = B \cdot A$ a $B \cdot A \cdot A = B$.
7. Předchozí úloha Ti budiž nápoředou.

Sčítání

MATĚJ GAJDOŠ

ABSTRAKT. V příspěvku se podíváme na několik souvislostí mezi integrováním a obyčejným sčítáním. Spousta vlastností integrálů totiž vesměs analogicky platí pro sumy a této mezihry spojitého a diskrétního světa lze využít při řešení některých úloh. A hlavně je to pěkná matika, kterou stojí za to si ukázat.

Přeuspořádání

Definice. Necht' $(a_n)_{n=1}^\infty$ je reálná posloupnost. *Dopřednou diferencí* této posloupnosti rozumíme posloupnost $(\Delta_+ a_n)_{n=1}^\infty$ definovanou jako $\Delta_+ a_n = a_{n+1} - a_n$.

Tvrzení. Necht' $(a_n)_{n=1}^\infty$ a $(A_n)_{n=1}^\infty$ jsou reálné posloupnosti. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (1) Pro každé přirozené n platí $\Delta_+ A_n = a_n$.
- (2) Existuje reálné c takové, že pro každé přirozené n je

$$A_n = c + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Věta. (Per partes pro součty) Pro reálná čísla $a_1, \dots, a_{n+1}$ a $b_1, \dots, b_{n+1}$ platí

$$\sum_{j=1}^n a_j \Delta_+ b_j = (a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1) - \sum_{j=1}^n b_{j+1} \Delta_+ a_j.$$

Součtové per partes se dokáže dvojitým vyjádřením sumy $\sum_{j=1}^n \Delta_+(a_j b_j)$. Na jednu stranu je toto teleskopický součet, takže se suma rovná $a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1$, ale na stranu druhou pro dopřednou diferencí platí

$$\Delta_+(a_j b_j) = \Delta_+ a_j \cdot b_j + a_j \cdot \Delta_+ b_j + \Delta_+ a_j \cdot \Delta_+ b_j.$$

Úloha 1. Pomocí součtového per partes sečtěte $\sum_{j=0}^n 2^j$ a $\sum_{j=1}^n j \cdot 2^j$.

Úloha 2. Sečtěte $\sum_{j=1}^n j^2$.

Poznámka. Analogicky můžeme definovat *zpětnou diferenci* posloupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$ jako

$$\Delta_- a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Pro zpětnou diferenci pak platí analogický vztah per partes (i důkaz je obdobný):

$$\sum_{j=1}^n a_j \Delta_- b_j = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{j=1}^n b_{j-1} \Delta_- a_j.$$

Přitom A_n splňuje $\Delta_- A_n = a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ právě tehdy, když je A_n tvaru

$$A_n = c + a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

pro nějakou konstantu c .

Úloha 3. Nechť $a_1 \geq a_2 \geq \dots a_n > 0$ a necht' reálná čísla $b_1, \dots, b_n$ splňují

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Dokažte, že pak $\sum_{j=1}^n a_j^2 \leq \sum_{j=1}^n b_j^2$.

Věta. (Abelova nerovnost) Nechť $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$, S je kladné reálné a $a_1, \dots, a_n$ jsou reálná čísla splňující $\sum_{j=1}^k a_j \leq S$ pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$. Pak platí

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j \leq S \cdot b_1.$$

Obdobné znění platí pro odhad zdola.

Úloha 4. Dokažte pomocí součtového per partes Abelovu nerovnost.

Úloha 5. Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou reálná čísla splňující $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Nechť pro libovolné kladné $\varepsilon > 0$ nejvýše $\lfloor 1/\varepsilon \rfloor$ dvojic indexů (i, j) splňuje $|x_i - x_j| \geq \varepsilon$. Dokažte, že pak

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \frac{1}{n} \cdot \left(\max_{1 \leq j \leq n} x_j - \min_{1 \leq j \leq n} x_j \right).$$

Úloha 6. Nechť μ je kladné reálné číslo. Dokažte, že pak pro každé přirozené n platí

$$\lfloor n\mu \rfloor \geq \frac{\lfloor \mu \rfloor}{1} + \frac{\lfloor 2\mu \rfloor}{2} + \frac{\lfloor 3\mu \rfloor}{3} + \cdots + \frac{\lfloor n\mu \rfloor}{n},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část reálného čísla x , tj. to jediné celé číslo splňující $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Sčítat jde i integrálem

Definice. Dělením uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ rozumíme konečnou posloupnost $D = (x_j)_{j=0}^n$ splňující $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Normu tohoto dělení definujeme jako $\nu(D) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_{j-1}|$, tj. jako maximální vzdálenost dvou dělicích bodů.

Věta. (Limitní součty a integrál) *Nechť f je spojitá reálná funkce na $\langle a, b \rangle$. Pro přirozené n uvažujme dělení tohoto intervalu $D_n = (x_j^{(n)})_{j=0}^{\ell(n)}$. Necht' pro každé n máme body $t_j^{(n)}$ ležící v intervalech $\langle x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)} \rangle$, kde $j \in \{1, \dots, \ell(n)\}$. Pokud platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$, pak také platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) f(t_j^{(n)}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Příklad. Určete limitu výrazu $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 2^{j/n}$ pro $n \rightarrow \infty$.

Řešení. Označme $f(x) = 2^x$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a rozdělme tento interval body $x_j^{(n)} = j/n$ pro $j \in \{0, \dots, n\}$. Pak platí $0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} = 1$ a $x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)} = 1/n$, takže norma n -tého dělení je také $1/n$ a tyto normy konvergují k nule. Volme dále $t_j^{(n)} = x_j^{(n)} = j/n$. Pak lze zadaný výraz psát jako

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 2^{j/n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cdot 2^{t_j} = \sum_{j=1}^n (x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) f(t_j^{(n)}).$$

Podle předchozí věty a díky spojitosti f na $\langle 0, 1 \rangle$ tak máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 2^{j/n} = \int_0^1 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{1}{\ln 2}.$$

Úloha 7. Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(j+n)^2}{n^3}.$$

Úloha 8. Dokažte, že pro každé přirozené n platí

$$\sqrt{n} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{n}.$$

Úloha 9. Ukažte, že lze volbou velkého n libovolně přesně aproximovat π pomocí součtu

$$\frac{4n}{n^2 + 1} + \frac{4n}{n^2 + 4} + \frac{4n}{n^2 + 9} + \dots + \frac{4n}{n^2 + n^2}.$$

Úloha 10. Najděte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{j\sqrt{j}}{n^4 \cdot (\sqrt{j} + \sqrt{j-1})}.$$

Úloha 11. Ukažte, že existuje $n \geq 1$ takové, že

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{n} \sin \frac{j}{n} \right| < \frac{1}{2026}.$$

Věta. (Abelův vzorec) Necht' $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $a < b$ jsou reálná čísla a $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná. Definujme

$$X(t) = \sum_{1 \leq n \leq t} x_n, \quad t \geq 1$$

a pro $t < 1$ prázdnou sumu definujme jako $X(t) = 0$. Pak platí

$$\sum_{a < n \leq b} x_n \varphi(n) = X(b)\varphi(b) - X(a)\varphi(a) - \int_a^b X(t)\varphi'(t)dt.$$

Harmonická čísla

Definice. Necht' je n přirozené číslo, pak

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

nazýváme n -tým harmonickým číslem.

Úloha 12. Ukažte, že harmonická čísla lze spočítat jako

$$H_n = 1 + \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

Úloha 13. Dokažte, že existuje kladné reálné číslo γ (tzv. *Eulerova–Mascheroniho konstanta*) splňující

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n).$$

Úloha 14. Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{k}{j} = H_n \binom{n+1}{2} - \frac{1}{2} \binom{n}{2}.$$

Návody

1. Platí $\Delta_+ 2^j = 2^j$.
2. Zvol $a_j = j$ a $b_j = j^2$. Po použití per partes převed' hledanou sumu na stejnou stranu rovnice.
3. Per partes a Cauchyova–Schwarzova nerovnost.
4. Per partes převede sumu na novou sumu, v níž místo a_j budou vystupovat $A_j = a_1 + \dots + a_j$, pro něž máš odhad.
5. Podívej se na součet čtverců všech vzdáleností, tj. na $\sum_{i,j} (x_i - x_j)^2$. Ten vyjádři jednak pomocí $\sum_i x_i^2$, jednak jako součet tvaru „konkrétní vzdálenost na druhou krát počet bodů s takovou vzdáleností“. Na toto druhé vyjádření použij per partes.
6. Postupuj indukcí, označ $a_j = \lfloor j\mu \rfloor / j$ a použij per partes na $\sum_{j=1}^n a_j \cdot j$.
7. Použij $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.
8. Pomoz si funkcí¹ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, 1)$.
9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.
10. V sumě je spousta odmocnin, zkus podle toho zvolit vhodně dělení $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1$ intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Napovědět Ti může i to, že sčítáme n^2 členů.
11. Použij lichost sinu. Člen $(-1)^j$ pak lze zahrnout do chytré definice dělení intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.
12. Použij Abelův vzorec s $x_j = 1$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
13. Vyjádři H_n a $\ln n$ pomocí integrálů a ukaž, že pro $n \rightarrow \infty$ výsledný integrál konverguje. Hodí se vědět, že $1/x^2$ má na $\langle 1, \infty \rangle$ konečný integrál.
14. Per partes.

Literatura a zdroje

- [1] Evan Chen: *Summations*, <https://web.evanchen.cc/handouts/Summation/Summation.pdf>.
- [2] Kin Y. Li: *Mathematical Excalibur, Volume 11, Number 3*, https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/v11_n3.pdf.
- [3] Luboš Pick et al: *Matematická analýza*, https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza_pro_studenty_2025-06-28.pdf.

¹Interval zleva otevřený není moc košér. Lze si tím buď nelámat hlavu, nebo být opatrnější a pracovat na intervalech $\langle \delta, 1 \rangle$ pro $\delta > 0$ malé, a nakonec provést přechod $\delta \rightarrow 0$.

Interpolace

VÍT HANIKA

ABSTRAKT. Ukážeme si, jak dané funkční hodnoty proložit polynomem a jak tuto interpolaci využít například k zabezpečení sdíleného tajemství.

Věta. (Lagrangeova interpolace) *Mějme navzájem různá $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ a libovolná $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Pak mezi polynomy s koeficienty z $\mathbb{R}$ stupně nanejvýš n existuje právě jeden, který splňuje $f(x_i) = y_i$ pro $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, a je to konkrétně*

$$f(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (\heartsuit)$$

Úmluva. Polynom na pravé straně v $(\heartsuit)$ budeme nazývat (*Lagrangeovým*) *interpolacním polynomem* (skrz body $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$).

Cvičení. Na reálných číslech není nic speciálního – rozmyslete si, že interpolace funguje i nad $\mathbb{Q}$, nad $\mathbb{C}$ nebo nad konečnými tělesy $\mathbb{Z}_p$ pro prvočísla p . (Obecně bychom ji tedy mohli zformulovat nad obecným *tělesem*.)

Hodnoty v bodech

Úloha 1. Najděte reálný polynom $f(x)$ stupně dva splňující $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ a $f(2) = 9$.

Cvičení 2. Všimněte si, že $\prod_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{k\}} \frac{n+1-j}{k-j} = (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k}$.

Úloha 3. Reálný polynom f stupně nanejvýš n splňuje $f(k) = 2^k$ pro všechna $k = 0, 1, \dots, n$. Spočtete $f(n+1)$.

Cvičení 4. Všimněte si, že polynom z předchozí úlohy má stupeň přesně n .

Úloha 5. Reálný polynom f stupně nanejvýš n splňuje $f(k) = \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$ pro všechna $k = 0, 1, \dots, n$. Určete $f(n+1)$.

Úloha 6. (těžká) Ať F_i značí i -té Fibonacciho číslo, tedy $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a dále $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Pokud polynom f stupně 990 splňuje $f(k) = F_k$ pro $k \in \{992, \dots, 1982\}$, dokažte, že $f(1983) = F_{1983} - 1$. (IMO SL 1983)

Koeficienty

Tvrzení. Je-li f polynom stupně nanejvýš n a jsou-li $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ navzájem různá, pak je

$$\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

rovno koeficientu u x^n v f .

Úloha 7. Buď a_n koeficient u x^n v reálném polynomu f stupně nanejvýš n . Dokažte, že potom platí

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i) = n! a_n.$$

Úloha 8. Buď f polynom s celočíselnými koeficienty stupně d a buď p prvočíslo. Dokažte, že pokud $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dává $f(n)$ po dělení p zbytek 0 nebo 1, potom $d \geq p - 1$. (IMO SL 1997)

Nerovnosti

Idea. Vezmeme libovolný „Lagrangeovský výraz“, který se dosud objevil v příspěvku, a pláceme na něj absolutní hodnoty a trojúhelníkovou nerovnost.

Úloha 9. Reálný polynom f stupně nanejvýš n splňuje na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ nerovnost $|f(x)| \leq 1$. Dokažte, že $|f(-1/n)| \leq 2^{n+1} - 1$.

Úloha 10. Je dán monický reálný polynom f a celá čísla $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Dokažte, že pro nějaké $0 \leq i \leq n$ nastane $|f(x_i)| \geq \frac{n!}{2^n}$. (Crux Mathematicorum)

Sdílení tajemství a kódování zpráv

Příklad 11. Hradní pán chce navrhnout bezpečný systém pro autorizovaný přístup k pokladnici. Povězme, že klíč do pokladnice má podobu přirozeného čísla t . Chtěl by navrhnout systém, ve kterém každému ze svých n tajemníků sdělí nějakou informaci tak, aby

- (i) dovedlo libovolných 7 tajemníků spojit své informace a zjistit z nich t , ale
- (ii) libovolných 6 nebo méně tajemníků nedovedlo ze svých informací zjistit o t vůbec nic (např. ani žádný omezený interval, v němž musí t ležet).

Jak toho může docílit?

Řešení. K řešení samozřejmě využijeme polynomy. Hradní pán si vymyslí náhodný polynom stupně 6, jehož konstantní člen bude t . Poté tajemníkům rozdává hodnoty polynomu v po dvou různých bodech (řekne jim v jakých bodech). Nyní vskutku 7

tajemníků může interpolovat své hodnoty a zjistit z nich hodnotu v nule (neboli konstantní člen), zato 6 tajemníků o t nemůže říct vůbec nic (teoreticky může být úplně jakákoliv). Tomuto schématu se říká *Shamirovo schéma sdílení tajemství* a obvykle se z praktických důvodů neprovádí s reálnými čísly, ale třeba nad $\mathbb{Z}_p$.

Úloha 12. Jsi účastníkem Shamirova schématu sdílení tajemství, v němž jsou potřeba 2 lidé ke zjištění klíče k pokladnici. Ty víš, že hodnota v jedničce je 1, spolupracovník že hodnota ve trojce je 3. Jaká je hodnota tajemství?

Úloha 13. Upravte schéma tak, aby pokladnici mohlo otevřít buď 7 tajemníků nebo pan místodržící spolu s dvěma tajemníky.

Úloha 14. Někteří tajemníci jsou blondatí, jiní černovlasí. Vymyslete schéma, ve kterém může pokladnici otevřít jen 7 lidí, z nichž aspoň 3 jsou černovlasí.

Příklad 15. Hradní pán chce poslat zprávu $m = (m_0, m_1, \dots, m_k)$ sestávající se z k celých čísel svému spojenci o hrad vedle. Zpráva se ovšem při přenosu občas trochu poškodí a některá čísla nejdou přečíst, nebo dokonce vypadají jako jiná čísla. Hradní pán tedy musí zprávu nějak chytře zakódovat, aby i po poškození šla rozluštit.

Řešení. Ze zprávy si udělá polynom $P(x) = m_k x^k + m_{k-1} x^{k-1} \dots m_0$ a jako zprávu odešle za sebou hodnoty $P(1), P(2), \dots, P(n)$, kde $n > m + 1$. Příjemce zprávy si poté pro každou $(k+1)$ -tici bodů interpoluje polynom procházející těmito $k+1$ body. V závislosti na tom, o kolik bylo n větší než $k+1$, poté umí příjemce buď poznat, jestli bylo určité množství čísel ve zprávě pozměněno, nebo dokonce jisté množství takových chyb opravit (pokud je množství chyb dostatečně malé a n dostatečně velké, příjemce ví, že pokud interpoluje všechny $(k+1)$ -tice a z takto získaných polynomů vybere ten nejčastější, získá původní polynom). Z této myšlenky vznikl běžně používaný *Reed–Solomonův* kód.

Úlohy na procvičení

Úloha 16. Buď $F : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ zcela libovolná funkce. Nahlédněte, že ji lze zapsat polynomem s koeficienty ze $\mathbb{Z}_p$.

Úloha 17. Reálný polynom f stupně nanejvýš n nabývá celočíselných hodnot v bodech $0, 1, \dots, n$. Nahlédněte, že potom už musí nabývat celočíselných hodnot na celém $\mathbb{Z}$.

Úloha 18. Dokažte, že pro navzájem různá $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{i=0}^n \frac{x_i^{n+1}}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^n x_i.$$

Úloha 19. Dokažte, že každý monický reálný polynom stupně n lze zapsat jako aritmetický průměr dvou reálných polynomů stupně n , z nichž každý má n různých reálných kořenů.

(USAMO 2002)

Úloha 20. Mějme celé číslo $n \geq 3$ a reálné polynomy f, g takové, že body $(f(i), g(i))$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou vrcholy pravidelného n -úhelníku v rovině (čtené v kladném směru). Dokažte, že alespoň jeden z f, g má stupeň alespoň $n - 1$.
(Putnam 2008)

Úloha 21. (těžká) Reálný polynom f stupně nanejvýš 2020 splňuje $f(k^2) = k$ pro $k = 0, 1, \dots, 2020$. Určete $f(2021^2)$.
(HMMT 2020)

Návody

1. Interpoluj v bodech $x = 1, x = 2, x = 3$. Anebo to samozřejmě tipni :)
3. Dosad' do interpolačního polynomu a uprav směrem k binomické větě.
4. Pokud by měl menší stupeň, pak bude mít v některém dostatečně velkém k jinou hodnotu.
5. V interpolačním polynomu zmizí kombinační čísla.
6. Využij, že $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (\bar{\varphi})^n)$, kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Rozděl sumu, ke které se prointerpoluješ, na část s φ a $\bar{\varphi}$.
7. V kterých bodech se tu objevují hodnoty f ? Takže skrz co asi chceš interpolovat?
8. Interpoluj nad $\mathbb{Z}_p$ a vyjádři koeficient u x^{p-1} .
9. Interpoluj skrz $x_i = \frac{i}{n}$.
10. Využij celočíselnost k odhadu $\prod_{i \neq j} |x_i - x_j|$.
12. Odpověď je 0, protože polynom je patrně lineární polynom $f(x) = x$.
13. Někteří zúčastnění mohou znát více hodnot než jiní zúčastnění.
14. Udělej prostě dvě schémata přes sebe, tj. polynom stupně 6 pro všechny tajemníky, pro černovlasé navíc ještě polynom stupně 2.
16. Interpoluj skrz všechny body.
17. Interpretuj každý člen v interpolačním polynomu pomocí kombinačních čísel.
18. Čteš koeficient, ale stupeň je moc velký – zmodul.
19. Jeden polynom zinterpoluj tak, aby byl hoooodně rozkmitaný, druhý dopočítej tak, aby vyšel průměr.
20. Interpoluj jeden komplexní polynom. Vhodné BÚNO situaci zjednoduší.
21. Interpolace dá děsivou sumu, ale jde to ubít. $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k}$ jde spočítat!

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je z většiny založen na přednášce Matěje Doležálka na totéž téma, jsemu tímto děkuji.

- [1] Matěj Doležálka: *Interpolace*, Mamutov, 2023.
- [2] Jakub Löwit: *Lagrangeova interpolace*, sborník iKS, 2018.
- [3] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2008.

Šoupání

VÍT HANIKA

ABSTRAKT. Ideou přednášky je dívat se na reálná čísla jako na body na reálné ose, se kterými se dá šoupat různými směry. Bude se nám to hodit hlavně u nerovností, ale objeví se i jiné příklady.

Příklad. (AG nerovnost) Pro kladná reálná čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Řešení. Všimněme si, že pro $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ nastane rovnost, a ukážeme, že každý jiný případ je „horší“. Uvažme, že existují $a_i > a_j$ takové, že a_i je větší než aritmetický průměr všech čísel a a_j menší. Co se stane, když a_i, a_j k sobě přiblížíme (o stejný kousek, tedy tak, abychom zachovali součet)? Tedy když místo a_i, a_j uvážíme $a_i - \varepsilon, a_j + \varepsilon$ pro malé $\varepsilon > 0$. Pak

$$(a_i - \varepsilon)(a_j + \varepsilon) = a_i a_j + \varepsilon(a_i - a_j) - \varepsilon^2.$$

Pokud tedy (a_i, a_j) posuneme o $\varepsilon < a_i - a_j$, nový výraz bude větší než původní součin $a_i a_j$. Zvolíme pak $\varepsilon = a_i - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > 0$, čímž získáme novou n -tici, kde přibude alespoň jedno číslo rovno průměru všech. A po nejvýše n krocích si budou jistě všechna a_i rovna a v takovém případě již nerovnost platí triviálně.

Proč to dokazuje úlohu? Pokud by pro nějakou n -tici úloha neplatila, můžeme takovýmto vyhlazováním získat n -tici stejných čísel, pro kterou úloha neplatí, což je samozřejmě spor.

Šoupat s body lze mnoha různými způsoby, mezi možná šoupání může patřit:

- Šoupat všechny body stejným směrem stejnou rychlostí, neboli přičíst reálné číslo t .
- Šoupat body směrem k nule vynásobením číslem $t < 1$.
- Šoupat tak, aby nějaký bod šel k nekonečnu (a třeba tedy nějaký výraz byl zanedbatelně malý).
- Šoupat dvěma (či více) body k sobě, dokud není splněna nějaká podmínka (tak jako v úvodním příkladu).
- Šoupnout nějaké dva body do jejich aritmetického (či jiného) průměru.

K posledním dvěma typům šoupání se často může hodit Jensenova nerovnost, která nám říká, že při šoupání bodů směrem k sobě se nám hodnota funkce změní tím správným směrem.

Tvrzení. (Jensenova nerovnost) *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I . Potom pro libovolná $x_1, \dots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ taková, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, platí*

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Pro konkávní funkci platí obrácená nerovnost.

Interpretace je taková, že λ_i jsou váhy, kterými body navážíme a výraz $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ je výsledný vážený průměr. Z konvexity pak lehce vyplýne, že hodnota v tomto bodě je menší než vážený průměr funkčních hodnot. Detaily si ukážeme na přednášce.

Příklad. Pro $a, b, c \geq 0$ dokažte $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 4(a-b)(b-c)(c-a)$.

Řešení. (nástin) Zapišeme nerovnost jako $(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 8(a-b)(b-c)(c-a)$, načež si všimneme, že můžeme všechny proměnné šoupnout o konstantu k nule tak, aby některá z nich se stala nulová, čímž se levá strana jen zmenší a pravá zůstane stejná. Poté už jednoduše dokážeme jednodušší nerovnost $a^3 + b^3 \geq 4ab(b-a)$, protože pravou stranu můžeme odhadnout buď AG nerovností nebo opět šoupnutím a do $\frac{b}{2}$ jako $4ab(b-a) \leq b^3 \leq b^3 + a^3$.

Šoupeme

Úloha 1. Součet tří kladných celých čísel je 100. Jaká je největší možná hodnota jejich součinu? Co když součet bude 101?

Úloha 2. Mějme čtverec o straně jedna. Ukažte, že pokud leží trojúhelník v tomto čtverci, má obsah nejvýše $\frac{1}{2}$. (PraSe 43-4-3)

Úloha 3. Kladná reálná čísla a, b, c splňují $a + b + c = 300$ a rozdíl libovolných dvou z nich je alespoň 3. Jaká je maximální možná hodnota abc ?

Úloha 4. Nezáporná reálná čísla a, b, c splňují $a + b + c = \frac{3}{2}$ a každé je nejvýše 1. Jaká je maximální možná hodnota $a^2 + b^2 + c^2$?

Úloha 5. Máme 1000 koulí a 27 krabic. Jak rozdělit koule do krabic tak, abychom minimalizovali počet dvojic koulí ležících ve stejných krabicích?

Úloha 6. Pro nezáporná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_{83}$ dokažte

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{83} \leq 82 + b_1 b_2 \dots b_{83},$$

kde $b_i = \max(1, a_i)$ pro $i = 1, \dots, 83$. (KMS 15/16-Z3-6)

Úloha 7. Dokažte, že pro $a, b, c \geq 0$ a $k = 4$ platí

$$(a + b + c)^3 \geq k|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Úloha 8. (těžší) Dokažte předchozí úlohu pro $k = 6\sqrt{3}$.

Úloha 9. Součet několika přirozených čísel je 2026. Jaká je největší možná hodnota jejich součinu?

Úloha 10. (varovná) Máme 32 čísel v intervalu $\langle 6, 9 \rangle$, jejichž součet je 250. Ukažte, že součet jejich čtverců je nejvýše 2022. (MO 73-2-4)

Úloha 11. Nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ splňují $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Jaká je maximální možná hodnota $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$?

Úloha 12. Mějme n přepínačů v řadě. Každý je otočený buď na sever, západ, jih, nebo východ. Pokud tři po sobě jdoucí přepínače ukazují různými směry, můžeme je otočit do čtvrtého směru. Ukažte, že se proces zastaví. (BAMO 2006-5)

Těžší šoupání

Úloha 13. Uvažme $n \geq 3$ a čísla $0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1$. Dokažte, že

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Úloha 14. Pro kladná reálná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 = 75$ a dva ze tří součtů $x + y, y + z, z + x$ jsou aspoň 10. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu zbývajících součtů. (MO 75-3-1)

Úloha 15. Jak uspořádat čísla $1, 2, \dots, n$ do kruhu tak, aby součet součinů dvojic sousedů byl i) co nejmenší ii) co největší?

Úloha 16. Nechť reálná čísla $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 0$ a $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_\ell \geq 0$ splňují $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^\ell b_i$. Dokažte, že platí

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 + \sum_{i=1}^\ell b_i^2 \leq (k + \ell)a_1b_1.$$

Úloha 17. Nechť $u_1, \dots, u_{2019}$ jsou reálná čísla splňující $u_1 + \dots + u_{2019} = 0$, $u_1^2 + \dots + u_{2019}^2 = 1$. Označme $a = \min\{u_1, \dots, u_{2019}\}$ a $b = \max\{u_1, \dots, u_{2019}\}$. Dokažte, že $ab \leq -\frac{1}{2019}$. (Shortlist 2019 A2)

Úloha 18. Ukažte, že pro libovolná nezáporná $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4.$$

Zjistěte, kdy nastává rovnost. (IMO 1999-2)

Úloha 19. Ukažte, že nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

platí pro všechna reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$. (IMO 2021/2)

Návody

1. Šoupej k sobě čísla, která jsou vzdálena více než 2.
2. Šoupej nejdřív tak, aby všechny vrcholy ležely na straně čtverce a poté šoupej jednotlivé vrcholy tak, aby ležely ve třech ze čtyř vrcholů.
3. Šoupej nejdřív spodní dvě k sobě, dokud není jejich rozdíl přesně 3, poté je šoupej k tomu největšímu, které zároveň šoupej dolů dvojnásobnou rychlostí. Výsledná pozice je jednoznačně určena.
4. Šoupej od sebe. Když už nejde šoupat, některé bude určitě 0, některé 1 a zbylé tudíž musí být 0,5.
5. Šoupej koule z krabic s velkým počtem koulí do těch s menším.
6. Šoupni do jedničky nejdříve všechno větší než 1, následně všechno menší než 1.
7. Šoupni vše směrem k nule tak, aby se jedna z neznámých vynulovala.
8. Šoupni tak jako v minulém příkladu, načež naškáluj tak, aby bylo $b = 1$, poté vyřeš kubickou rovnici.
9. Udělej ze všeho dvojky a trojky, poté ze tří dvojek dělej dvě trojky.
10. Šoupej od sebe dvě čísla, která nejsou 6 ani 9, dokud nenarazíš.
11. Šoupej váhu z nějakého čísla, které má malé sousedy, do čísla, které má větší sousedy. Na konci budou jen dvě čísla s nenulovou vahou.
12. Dvojice sousedních přepínačů, které jsou stejně otočeny, se při procesu šoupou k sobě.
13. Šoupej postupně každé x_i buď do 1, nebo do 0 tak, abys zvětšoval hodnotu výrazu.
14. Šoupej k sobě pro maximální součet, dvě největší neznámé musí být stejné, pak už je maximum určitě v $(5, 5, 5)$. Šoupej dvě největší čísla od sebe pro minimální součet tak, aby $x^2 + y^2 + z^2$ zůstalo stejné. Minimum bude v $(\frac{25}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.
15. Šoupej tak, aby byla čísla lokálně dobře seřazená.
16. Šoupej od sebe.
17. Šoupej od sebe čísla, která nejsou ani a , ani b , dokud jedno z nich nedosáhne a nebo b .
18. Šoupni nejdříve vynásobením vhodnou konstantou všechny neznámé tak, aby $\sum x_i = 1$, poté přeuspořádej nerovnost do $\sum (x_i^3 - x_i^4) \leq \frac{1}{8}$. Pak šoupej od sebe dvojici s dostatečně malým součtem, dokud nezbydou již jen dvě nenulová čísla. Pro ně se to ověří jednoduše.
19. Šoupej tak, aby levá strana byla konstantní. Díky konkávnosti bude pravá strana minimalizovaná v některém z konečné mnoha bodů, což už se rozebere.

Literatura a zdroje

Děkuji Zdeňkovi Pezlarovi za pomoc s výběrem příkladů.

- [1] Pham Kim Hung: *The entirely mixing variables method*, 2014.
- [2] Vít Hanika, Zdeněk Pezlar: *Matematický klub*, 2026.

Úlohy s tabulkami

PETR HLADÍK

ABSTRAKT. Seznámíme se s několika technikami, jak řešit úlohy v tabulce. Budeme se věnovat zejména barvení a převádění na úlohy v grafu. Kromě toho se nám určitě budou hodit i jiné klasické kombinatorické techniky jako třeba počítání dvěma způsoby, paritní argumenty nebo indukce.

Pro začátek ukážeme klasickou tabulkovou úlohu.

Příklad. Dokažte, že šachovnici 8×8 , které chybí dva protější rohy, nelze pokrýt dominy.

Řešení. Všimneme si, že každé domino pokryje právě jedno bílé a právě jedno černé políčko. Šachovnice bez protějších rohů ovšem neobsahuje stejný počet černých a bílých políček, takže nelze pokrýt dominy.

Následně ukážeme tvrzení, které sice není úplně tabulkové, ale jde na něm hezky demonstrovat techniky, které budeme později využívat.

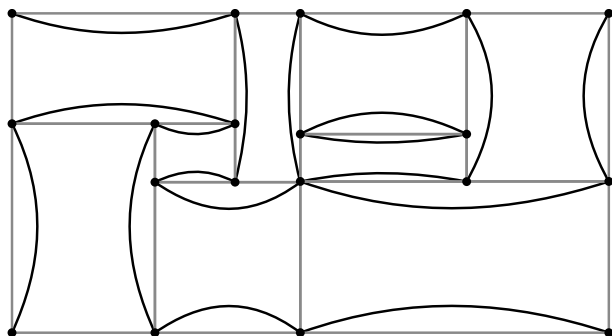
Tvrzení. (Rectangle Tiling Theorem) *Jestliže lze obdélník rozdělit na několik menších obdélníků tak, že všechny mají aspoň jednu stranu celočíselné délky, má i původní obdélník aspoň jednu stranu celočíselné délky.*

Tohle tvrzení dokážeme hned několika způsoby. Ve sborníku si důkazy jenom nastíníme, na přednášce tvrzení dokážeme pořádně.

Důkaz. (barvící) Obdélník označme R a umístěme jej do počátku souřadnicové soustavy. Rovinu obarvíme šachovnicově se čtverečky velikosti $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Nyní si všimneme, že obdélník, který má jednu stranu celočíselnou, pokrývá stejně velkou černou a bílou plochu. To ale znamená, že i náš obdélník R musí pokrývat stejně velkou bílou i černou plochu. Uvažme obdélník R' , jehož délky stran budou zlomkové části délek stran původního obdélníku R . Obdélník R' musí také zakrývat stejně velkou bílou a černou plochu. Pro něj už snadno vidíme, že jedna z jeho stran musí být celočíselná. $\square$

Důkaz. (grafový) Uvažíme graf, jehož vrcholy budou rohy obdélníků. Dále pro každý obdélník kromě R uvažíme dvojici protilehlých stran celočíselné délky (i kdyby měl obdélník všechny strany celočíselné délky, vezmeme jenom jednu dvojici), to bu-

dou hrany našeho grafu. Rohy obdélníku R mají stupeň 1, všechny ostatní vrcholy mají stupeň 2 nebo 4. Teď začneme v libovolném rohu R a hladově půjdeme po hranách tak daleko, jak to půjde, aniž bychom šli po nějaké hraně dvakrát. Nutně skončíme v nějakém jiném rohu R , čímž je tvrzení dokázáno, protože jsme chodili jenom po hranách celočíselné délky. $\square$



Poslední důkaz ukážeme za pomoci komplexní analýzy. Určitě se nelekejte, pokud vám tento důkaz připadá BuBuBu, je tu hlavně pro zajímavost a ve zbytku přednášky ho vůbec nepotřebujeme.

Důkaz. (komplexní) Mějme obdélník, jehož levý dolní a pravý horní vrchol mají souřadnice $[a, c]$ a $[b, d]$. Uvažme integrál

$$\int_a^b \int_c^d e^{2i\pi(x+y)} dx dy = \int_a^b e^{2i\pi x} dx \int_c^d e^{2i\pi y} dy.$$

Ukážeme, že tento integrál je nulový právě tehdy, když je některá strana obdélníku celočíselná. Z toho už bude snadno plynout dokazované tvrzení. Pomocí pár úprav ukážeme

$$\int_a^b e^{2i\pi x} dx = 0 \iff e^{2i\pi a} = e^{2i\pi b},$$

což je ekvivalentní $a - b \in \mathbb{Z}$. $\square$

Barvení

Úloha 1. Lze tabulku 10×10 vyplnit T-tetrominy?

Úloha 2. Schodištěm velikosti n nazveme část šachovnice $n \times n$, která je součástí hlavní diagonály nebo je dole od ní. Kolik nejméně cest je potřeba na pokrytí schodiště? Cesta je posloupnost políček sdílejících stranu.

Úloha 3. Je možné tabulku 2027×2027 vydláždit vodorovnými obdélníky 2×1 a svislými 1×3 ?

Úloha 4. Tabulka $m \times n$ je vyplněna dlaždicemi 2×2 a 1×4 . Dokažte, že nemůžeme jednu dlaždici 2×2 nahradit dlaždicí 1×4 , ani když ostatní dlaždice libovolně přeskládáme.

Úloha 5. Na nekonečnou tabulku položíme 2025 čtverců $n \times n$, mohou se překrývat. Dokažte, že počet políček zakrytých lichým počtem čtverců je aspoň n^2 .

Úloha 6. Nechť lze tabulku $m \times n$ pokrýt kostkami $1 \times k$. Dokažte, že potom k dělí m nebo n .

Úloha 7. Mějme nekonečnou šachovnici a v ní nějaký útvar P skládající se z několika políček, který lze vydláždit S-tetrominy. Dokažte, že když P vydláždíme S a Z-tetrominy, musíme použít sudý počet Z-tetromin. (Shortlist 2014 C4)

Grafy

Úloha 8. Je na nekonečnou šachovnici možné umístit 2025 jezdců tak, aby každý ohrožoval právě 2 jiné?

Úloha 9. Mějme čtvercovou budovu obsahující 2025×2025 místností, mezi místnostmi sdílejícími stěnu mohou být dveře. Je možné, aby každá místnost obsahovala právě dvoje dveře?

Úloha 10. V tabulce $n \times n$ je $2n$ políček červených. Dokažte, že existuje posloupnost červených políček $P_1, \dots, P_k$ taková, že úsečka $P_i P_{i+1}$ (cyklicky, tedy $P_{k+1} = P_1$) je střídavě svislá a vodorovná.

Úloha 11. V tabulce $m \times n$ jsou vybraná některá políčka. Dokažte, že lze vybraná políčka obarvit červeně a modře tak, aby byl v každém sloupci i řádku rozdíl počtu červených a modrých políček nejvýše 1.

Úloha 12. Tabulka $m \times n$ je vyplněna nezápornými reálnými čísly, přičemž v každém řádku i sloupci je aspoň jedno kladné číslo. Dále platí, že pokud je v nějakém políčku kladné číslo, je součet čísel v odpovídajícím řádku a sloupci stejný. Dokažte, že $m = n$.

Úloha 13. Nechť je m a n liché, tabulka $m \times n$ je rozdělena na domina, jedno rohové políčko zbývá volné. Domina můžeme posouvat, pak dokažte, že lze prázdné políčko dostat do libovolného rohu.

Úloha 14. Určete nejmenší k , pro které lze obarvit k políček tabulky $2n \times 2n$ červeně tak, aby platilo následující. Existuje právě jedno vydláždění dominy takové, že žádné domino neobsahuje dvě červená políčka. (Shortlist 2016 C8)

Další úlohy

Úloha 15. Na šachovnici 2026×2026 je umístěno 2026 šachových dam tak, že se žádné dvě navzájem neohrožují. Ukažte, že se v každém z rohových čtverců 1013×1013 nachází alespoň jedna dáma.

Úloha 16. Alice a Bob hrají hru na šachovnici $n \times n$, na začátku jsou všechna políčka bílá, jenom levé dolní je černé a stojí na něm věž. Alice a Bob v každém tahu pohnou věží na bílé políčko a obarví jej na černé. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii, jestliže začíná Alice?

Úloha 17. Dokaž, že tabulku $2^n \times 2^n$ s jedním chybějícím políčkem lze vydláždit L-triominy.

Úloha 18. Tabulka 6×6 je vydlážďena dominy. Dokažte, že je možné ji rozříznout svisle nebo vodorovně tak, aby nebylo porušeno žádné domino.

Úloha 19. Šachovnice 8×8 je vydlážďena dominy. Dokažte, že počet vodorovných domin, jejichž levé políčko je bílé, je stejný jako počet domin, jejichž pravé políčko je bílé.

Úloha 20. Na šachovnici 2025×2025 stálo 2025 věží tak, že se žádné dvě neo-
hrožovaly. Všechny se proměnily v jezdce, udělaly jeden tah a změnily se zpátky na věže. Dokažte, že se už nějaké dvě nutně musí ohrožovat.

Úloha 21. Tabulka 100×100 je obarvena černě a bíle. Všechna políčka na okraji jsou černá a navíc žádný čtverec 2×2 není jednobarevný. Dokažte, že existuje čtverec 2×2 , který je obarvený šachovnicově. (Rusko 2017)

Úloha 22. V tabulce $n \times n$ je $n - 1$ nakažených políček. V každém kroku se nakazí všechna políčka, která sousedí s aspoň dvěma nakaženými. Dokažte, že aspoň jedno políčko zůstane zdravé.

Úloha 23. Tabulka $n \times n$ je vyplněna čísly 1 až n , každé je v ní n -krát. Dokažte, že existuje řádek nebo sloupec, který obsahuje aspoň $\sqrt{n}$ různých čísel.

Návody

1. Nejde to, použijeme klasické šachovnicové obarvení a tetromin tam musí být 25.
2. Konstrukce na $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ je triviální, optimalita plyne z šachovnicového obarvení.
3. Obarvi řádky třemi barvami.
4. Děravé šachovnicové obarvení.
5. Použij n^2 barev tak, aby každý čtverec obsahoval právě jedno políčko od každé barvy.
6. Použij jediné tvrzení z přednášky nebo obarvi diagonály nebo zvol komplexní odmocniny z jedničky jako váhy.
7. Najdi vhodné diagonální a sloupcové obarvení.
8. Najdi graf a využij obarvení.
9. Uvaž graf, jehož vrcholy jsou místnosti, a obarvi vrcholy šachovnicově.
10. Uvaž bipartitní graf, jehož vrcholy jsou sloupce a řádky.
11. Najdi graf, odstraň z něj cykly a pak to vyřeš pro strom.
12. Najdi ohodnocený graf a dokaž to po komponentách.
13. Uvaž graf, jehož vrcholy jsou políčka s oběma lichými souřadnicemi, hrana vede mezi políčky, mezi kterými je domino. Je to strom.
14. Odpověď je $2n$. Najdeme kouzelný graf, vrcholy budou políčka. Hrany budou domina a jejich obrazy podle hlavní diagonály. Uvaž cykly protínající hlavní diagonálu.
15. Dámy musí být v protilehlých čtvercích, potom máme málo diagonál.
16. Záleží na paritě n , políčka popárujeme.
17. Indukce.
18. Může nějaký řez protnout jenom jedno domino?
19. Stejná myšlenka jako v předchozí úloze, přidá se šachovnicové obarvení.
20. Sečti souřadnice všech věží.
21. Spočítej hrany oddělující černé a bílé políčko.
22. Obvod.
23. AH nerovnost.

Literatura a zdroje

- [1] Pepa Minařík: Přednáška úlohy s tabulkami ze soustředění 2020j.
- [2] Matthew Brennan: *Grids and Related Problems*, Canadian IMO Training, 2018.
- [3] Stan Wagon: *Fourteen Proofs of a Result About Tiling a Rectangle*, The American Mathematical Monthly, 1987.

Spirální podobnost

MARKÉTA HONSEJKOVÁ

ABSTRAKT. Na přednášce si ukážeme, co je to spirální podobnost, seznámíme se s jejími vlastnostmi a nakonec tyto epické znalosti využijeme v olympiádních úložkách.

Spirální podobnost je nejobecnější přímé podobné zobrazení roviny. Při správném úhlu pohledu umí elegantně vyřešit i spoustu těžších, těžkopádnějších problémů. My se ji v této přednášce naučíme hledat a nacházet.

Definice. *Spirální podobnost* je geometrické zobrazení vzniklé složením otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určeno středem spirální podobnosti O , orientovaným úhlem otočení $\vec{\omega}$ a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, k)$.

Vlastnosti spirální podobnosti

Tvrzení 1. (základní vlastnosti) Pro spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, k)$ platí:

- (i) *Spirální podobnost je podobné zobrazení – obrazem přímky je přímka, obrazem čtverce je čtverec, obrazem středu úsečky je střed obrazu úsečky, obecně obrazem útvaru je jemu podobný útvar.*
- (ii) *Úhel mezi přímkou a jejím obrazem je úhel otočení $\vec{\omega}$.*
- (iii) *Poměr délky úsečky a jejího obrazu je roven koeficientu stejnolehlosti k .*

Tvrzení 2. (speciální případy) Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, k)$ se při speciálních hodnotách $\vec{\omega}$ a k redukuje následovně:

- (i) Pro $\vec{\omega} = 0$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem k .
- (ii) Pro $\vec{\omega} = 180^\circ$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem $-k$.
- (iii) Pro $k = 1$ dostáváme otočení kolem O o úhel $\vec{\omega}$.
- (iv) Pro $k = 1$ a $\vec{\omega} = 180^\circ$ dostáváme středovou souměrnost se středem O .
- (v) Žádná kombinace $O, \vec{\omega}, k$ nám nedá posunutí nebo nepřímé zobrazení.

Tvrzení 3. (spirální podobnosti chodí po dvou) Nechť spirální podobnost se středem O převádí $A \mapsto C$ a $B \mapsto D$. Pak jednoznačně určená spirální podobnost, která převádí $A \mapsto B$ a $C \mapsto D$, má též střed v O . Úhel otočení a koeficient se může lišit.

Tvrzení 4. (existence a jednoznačnost) V rovině jsou dány body A, B, C, D takové, že $ABDC$ (v tomto pořadí!) není rovnoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí $A \mapsto C, B \mapsto D$.

Lemma 5. (spirální podobnost jednoznačně určená trojúhelníkem OAA') Buď $S(O, \vec{\omega}, k)$ spirální podobnost zobrazující bod A na A' . Potom platí následující:

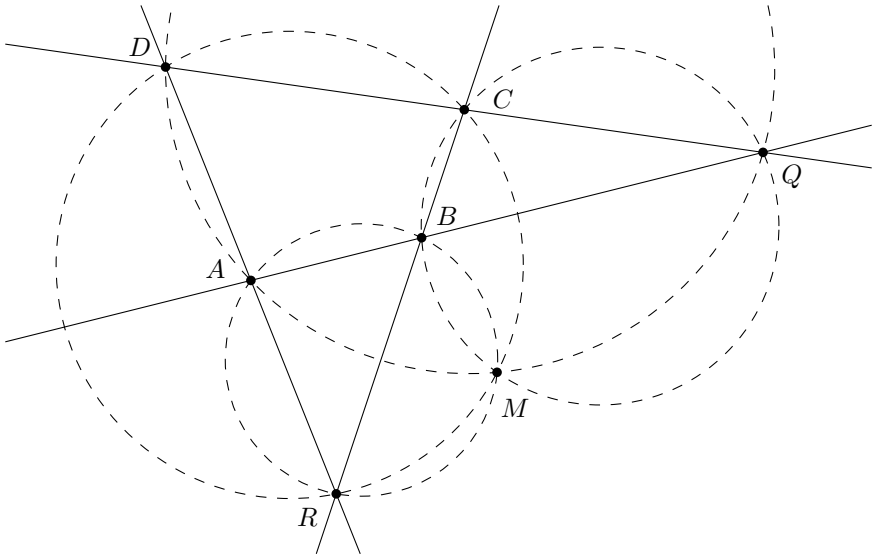
- (i) Pro různé body A jsou všechny trojúhelníky OAA' podobné.
- (ii) Libovolný trojúhelník OAA' zpětně jednoznačně určuje spirální podobnost $S(O, \vec{\omega}, k)$.

Tvrzení 6. (konstrukce středu a existence) Buď $ABB'A'$ čtyřúhelník takový, že se přímky AB a $A'B'$ protínají v bodě Q . Potom druhý průsečík O kružnic opsaných trojúhelníkům QAA' a QBB' je střed spirální podobnosti

$$S\left(O, \overrightarrow{AOA'}, \frac{|AB|}{|A'B'|}\right),$$

která zobrazuje $A \mapsto A', B \mapsto B'$.

Tvrzení 7. (průsečík čtyř kružnic) Buď $ABCD$ čtyřúhelník s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a CD označme Q , průsečík přímek AD a BC označme R . Potom střed spirální podobnosti M , která zobrazuje $A \mapsto D$ a $B \mapsto C$, je průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům ADQ, BCQ, ABR a CDR .



Bod M z tvrzení 7 se pak označuje jako *Miquelův bod* čtyřúhelníku $ABCD$. Má spoustu zajímavých vlastností, ale k jeho pečlivějšímu prozkoumání bychom potřebovali další přednášku.

A jde se na to!

Úloha 1. V rovině jsou dány různě velké, stejně orientované, podobné trojúhelníky ABC a $A_0B_0C_0$. Středů úseček AA_0 , BB_0 , CC_0 označme po řadě A_1 , B_1 , C_1 . Ukažte, že i trojúhelník $A_1B_1C_1$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

Úloha 2. (klouzání) Po třech různoběžných přímkách se pohybují rovnoměrně body A , B a C . Dokažte, že pokud jsou ve dvou různých časech trojúhelníky ABC podobné, pak jsou podobné v každém okamžiku.

Úloha 3. V rovině jsou dané dva čtverce $ABCD$ a $A_0B_0C_0D_0$. Označme A_1 , B_1 , C_1 a D_1 postupně středy úseček AA_0 , BB_0 , CC_0 a DD_0 . Dokažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je čtverec.

Úloha 4. Je dán trojúhelník ABC a bod P ležící na tom oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , na kterém neleží vrchol A . Paty kolmic z bodu P ke stranám BC a AC označme po řadě X a Y . Je-li M střed úsečky AB a N střed úsečky XY , dokažte, že platí $\angle MNP = 90^\circ$.

Úloha 5. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, ve kterém $\angle CAB = \angle CDA$ a $\angle BCA = \angle ACD$. Dále nechť M značí střed úsečky AB . Dokažte, že $\angle BCM = \angle DBA$. (Itálie 2010)

Úloha 6. (Ptolemaiova věta) Nechť $ABCD$ je tětíkový čtyřúhelník. Označíme-li délky jeho stran AB , BC , CD , DA po řadě a , b , c , d a délky úhlopříček AC , BD po řadě e , f , pak platí $ac + bd = ef$.

Úloha 7. (Simsonova přímka) Buď $ABCD$ tětíkový čtyřúhelník. Označme paty kolmic z D postupně na přímky AB , AC , BC jako P , Q a R . Dokažte, že P , Q a R leží na jedné přímce.

Úloha 8. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a nechť E , F jsou body postupně na stranách AD , BC takové, že dělí strany ve stejném poměru, tedy $|AE| : |ED| = |BF| : |FC|$. Přímka EF protíná přímky BA a CD postupně v bodech S a T . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE , SBF , TCF a TDE mají společný bod. (USAMO 2006)

Úloha 9. Nechť je ABC ostroúhlý trojúhelník s výškou AD . Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že body X , D , Y leží na jedné přímce a body X , D , Y , B jsou po dvou různé. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY . Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé. (PraSe 27–3–8)

Úloha 10. Stranám AB a BC trojúhelníka ABC připíšeme zvenčí podobné pravoúhelníky¹ $BKLC$ a $MNBA$. Ukažte, že přímky NC , ML a AK procházejí jedním bodem.

¹Pravoúhelník je obdélník nebo čtverec.

Úloha 11. Úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P . Označme O_1 a O_2 středy kružnic opsaných trojúhelníkům ADP a CBP . Body M , N a O jsou postupně středy úseček AC , BD a O_1O_2 . Ukažte, že O je střed kružnice opsané PMN .

Úloha 12. Je dán pětiúhelník $ABCDE$ takový, že jsou si trojúhelníky ABC , ACD , ADE podobné. Označme T průsečík přímk BD a CE . Ukažte, že přímka AT je kolmá na spojnici středů S_1 a S_2 kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE .

Úloha 13. Buď $ABCDE$ konvexní pětiúhelník takový, že jsou si trojúhelníky ABC , ACD , ADE podobné. Úhlopříčky BD a CE se protínají v T . Ukažte, že přímka AT půlí stranu CD . (IMO Shortlist 2006)

Úloha 14. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C . Označme M střed přepony a D takový bod odvěsny BC , že platí $|CD| = |CM|$. Nechť dále P značí průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům CMB a BDA , $P \neq B$. Ukažte, že přímka BP je osou úhlu ABC . (iKS 7-G1)

Úloha 15. Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník, P je průsečík jeho úhlopříček a body E , F jsou po řadě paty kolmic z bodu P na strany AB , CD . Nechť bod K je střed strany BC a L střed AD . Dokažte, že přímky EF a KL jsou kolmé. (USA TST 2000)

Úloha 16. Střed kružnice opsané tětiovému čtyřúhelníku $ABCD$ označme O . Úhlopříčky AC a BD se protínají v bodě P . Kružnice opsané trojúhelníkům ABP a CDP se protínají v bodech P a Q . Předpokládejme, že jsou body O , P a Q různé. Dokažte, že $|\angle OQP| = 90^\circ$. (Čína 1992)

Úloha 17. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\angle PAB| = |\angle BCA|$ a $|\angle CAQ| = |\angle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ , přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN . Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC . (IMO 2014/4)

Úloha 18. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník takový, ve kterém $|\angle ABC| + |\angle CDE| + |\angle EFA| = 360^\circ$ a

$$\frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FA|} = 1.$$

Dokažte

$$\frac{|BC|}{|CA|} \cdot \frac{|AE|}{|EF|} \cdot \frac{|FD|}{|DB|} = 1.$$

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 19. Rovnoběžník $ABCD$ splňuje $|\angle DAB| < 90^\circ$. Nechť $E \neq B$ a $F \neq D$ jsou body postupně na přímkách BC a CD takové, že $|AE| = |AB|$ a $|AF| = |AD|$. Kružnice opsaná trojúhelníku CEF protíná přímky AE a AF podruhé v bodech P a Q . Dokažte, že A , obraz P podle DE a obraz Q podle BF leží na jedné přímce. (MEMO 2022)

Úloha 20. Na stranách a , b , c trojúhelníka ABC zvolíme postupně body A_1 , B_1 , C_1 . Kružnice opsané trojúhelníkům AB_1C_1 , BC_1A_1 , CA_1B_1 protnou kružnici opsanou podruhé v bodech A_2 , B_2 , C_2 . Body A_3 , B_3 , C_3 jsou středovými obrazy bodů A_1 , B_1 , C_1 postupně podle středů stran a , b , c . Ukažte, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ je podobný trojúhelníku $A_3B_3C_3$. (IMO Shortlist 2006)

Úloha 21. Nechť I je střed kružnice vepsané ostroúhlého trojúhelníku ABC . Body dotyku kružnice vepsané se stranami BC , CA a AB postupně označíme D , E a F . Přímka EF protíná kružnici opsanou ABC v bodech P a Q tak, že F leží mezi E a P . Dokažte, že $|\angle DPA| + |\angle AQD| = |\angle QIP|$. (IMO Shortlist 2019)

Návody

1. Dokresli střed spirálky, která na sebe ty trojúhelníky zobrazuje. Spirálka chodí po dvou a těžnice se v podobnosti zobrazí na těžnici.
2. Zobecnění předchozí úlohy.
3. Najdi střed spirální podobnosti O , který na sebe čtverce převádí. Dokaž, že je to střed spirální podobnosti i pro $A_1B_1C_1D_1$.
4. Najdi vhodnou spirální podobnost a využij fakt, že chodí po dvou.
5. Najdi spirální podobnost a doúhli.
6. Přikresli si bod P na úhlopříčce BD tak, aby $|\angle BAP| = |\angle CAD|$. Vyjádři si poměry podobných trojúhelníků.
7. Existuje spirální podobnost se středem v D , která zobrazí AC na PR . Dokaž, že Q leží na přímce PR .
8. Najdi spirální podobnost zobrazující $A \mapsto B$ a $D \mapsto C$ a využij tvrzení o konstrukci středu.
9. Najdi vhodnou spirální podobnost a využij Thaletovy kružnice ze zadání.
10. Vezmi vhodnou spirální podobnost a zobraz na sebe kružnice opsané našim pravoúhelníkům.
11. Vzpomeň si na první motivační příklad.
12. Vezmi spirální podobnost, která zobrazuje $\triangle ABC$ na $\triangle ADE$.
13. Označme Q průsečík BD a AC , R průsečík DA a EC . Díky *Cevově větě* stačí ukázat $|AQ| : |QC| = |AR| : |RD|$. Čtýřúhelníky $ABCD$ a $ACDE$ si odpovídají ve

spirální podobnosti, tedy i jejich průsečíky úhlopříček, a jsou tak zachovány potřebné poměry.

14. Ukaž shodnost $\triangle CPD$ a $\triangle MPA$.

15. Zobraz bod P v osově souměrnosti podle CD a urči vhodnou spirální podobnost. Z vlastností podobných zobrazení lze uvažovat vhodný deltoid.

16. Dokresli body S_1 a S_2 , středy úhlopříček AC a BD .

17. Uvaž trojúhelník AB_1C_1 takový, že strana BC je jeho střední příčkou. Trojúhelník ANC je spirálně podobný s BB_1M s úhlem otočení $|\angle BAC| - 180^\circ$.

18. Dokresli bod X tak, aby dvojice trojúhelníků EDX , EFA a CDX , CBA byly podobné. Spirálka chodí po dvou.

19. Bod A bude střed nějaké spirálky. Jak ho zkonstruuješ?

20. Postupně:

- (i) Pomocí znalosti průniku kružnic jako středu spirální podobnosti ukaž, že $\triangle A_2BC \sim \triangle A_2C_1B_1$.
- (ii) Označ středy úseček b , c , AA_2 postupně S_b , S_c , S_{AA_2} . Ukaž $\triangle S_{AA_2}S_cS_b \sim \triangle A_2BC$.
- (iii) Pomocí tvrzení odůvodni $\triangle A_2C_1B_1 \sim \triangle S_{AA_2}S_cS_b \sim \triangle AC_3B_3$.
- (iv) Ukaž shodnost odpovídajících úhlů v $\triangle A_2B_2C_2$ a $\triangle A_3B_3C_3$.

21. Najdi střed spirálky zobrazující EF na BC , označ ho S . Chceš ukázat, že SPI a SDQ jsou podobné. Ukaž, že SD prochází A -Švrkem (angle bisector theorem). Dokresli průsečík SI s EF (K) a s kružnicí opsanou ABC (L) a hledej rovnoběžky (spirálka pomůže). Ukaž, že SPK a SMQ jsou podobné.

Literatura a zdroje

Děkuji Ádě za krásný příspěvek :)

- [1] Adéla Karolína Žáčková: *Spirální podobnost*, Meziměstí, 2022.
- [2] Magdaléna Mišinová: *Podobnosti spirální i jiné*, sborník iKS, 2024.

Mřížky a geometrie čísel

DAVID HROMÁDKA

ABSTRAKT. Teorie čísel a geometrie. Že spolu pramálo souvisí? Omyl! Prozkoumáme geometrické vlastnosti mřížových bodů a ukážeme, jak s jejich pomocí rozlousknout některé oříšky z teorie čísel. Cesta nás provede mlhavým trojmezím geometrie, teorie čísel a kombinatoriky s občasnou odbočkou do vysokoškolské algebry.

Na začátek pár poznatků, které se budou hodit v celé přednášce.

Definice. (kanonická mřížka) Bod (a, b) v rovině nazveme *mřížovým*, pokud jsou obě jeho souřadnice a, b celá čísla. Množinu všech mřížových bodů budeme nazývat *kanonickou mřížkou*.

Pozorování. (středový trik) Pokud úsečka spojuje dva mřížové body, jejichž souřadnice mají stejné parity, pak je střed této úsečky opět mřížový bod.

Cvičení. Mějme úsečku spojující mřížové body $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$. Pak na této úsečce kromě krajních bodů leží ještě dalších $\text{NSD}(a_2 - a_1, b_2 - b_1) - 1$ mřížových bodů.

Pickův vzorec

Všichni jistě rádi počítáme obsahy. Nejsnáze se to dělá u jednoduchých tvarů, úplně nejlépe u těch pravidelných. Zde si však ukážeme, že výpočet je celkem snadný i u divokých komplikovaných mnohoúhelníků, dokud jsou jejich vrcholy mřížové body.

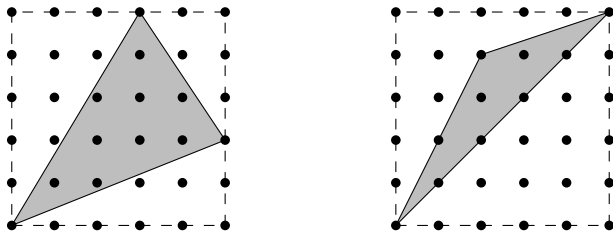
Úmluva. Není-li řečeno jinak, uvažujeme pouze mnohoúhelníky, které samy sebe neprotínají a nemají díry.

Definice. Mnohoúhelník zveme *mřížovým*, je-li každý jeho vrchol mřížový bod.

Věta. (Pick) *Mřížový mnohoúhelník s i mřížovými body ve svém vnitřku a b mřížovými body na svém obvodu má obsah $i + \frac{b}{2} - 1$.*

Osnova důkazu. Rozmyslíme v několika krocích:

- (1) Mnohoúhelníky, pro něž věta platí, můžeme „slepovat“ k sobě a věta bude stále platit. Stejně tak můžeme mnohoúhelníky, kde věta platí, „odřezávat“.
- (2) Věta platí pro obdélníky a (hezky orientované) pravoúhlé trojúhelníky.
- (3) Věta platí pro všechny trojúhelníky.
- (4) Každý mnohoúhelník se dá rozřezat na trojúhelníky. □



Úloha 1. Uvažujeme mřížový trojúhelník, jehož strany neobsahují kromě samotných vrcholů žádné mřížové body a který ve svém vnitřku obsahuje právě jeden mřížový bod. Nahlédněte, že tento vnitřní mřížový bod musí být těžištěm trojúhelníku.

Úloha 2. Duch ze strašidelného hradu si chce pořídit lucernu na noční strašení za 2022 stříbrných mincí. K dispozici má neomezenou zásobu mincí v hodnotách 1, 2 a 3. Kolika různými způsoby může zaplatit? Způsoby zaplacení, které se liší jen pořadím mincí, nepovažujeme za různé.

Úloha 3. (Eulerův vzorec) Uvažujeme rovinné nakreslení grafu, ve kterém jsou všechny vrcholy mřížové body a všechny hrany jsou úsečky. Jsou-li v , e , s po řadě počty vrcholů, hran a stěn v tomto nakreslení, dokažte s pomocí Pickova vzorce rovnost $v - e + s = 2$.

Úloha 4. (Pick pro děravé mnohoúhelníky) Mějme v rovině mnohoúhelník P s h dírami. Formálně: necht P vznikne odebráním navzájem disjunktních mřížových mnohoúhelníků $P_1, \dots, P_h$ od mřížového mnohoúhelníku P_0 , přičemž obvody jednotlivých P_i jsou disjunktní s obvodem P_0 i spolu navzájem. Dokažte, že pokud P obsahuje ve svém vnitřku a na svých obvorech po řadě i a b mřížových bodů, pak má obsah $i + \frac{b}{2} + h - 1$.

Úloha 5. *Půlbodem* nazveme libovolný bod tvaru $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ pro celá čísla a, b . Nahlédněte, že libovolný půlbod ležící ostře uvnitř mřížového mnohoúhelníku lze vyjádřit jako střed úsečky spojující dva mřížové body ležící uvnitř nebo na obvodu tohoto mnohoúhelníku.

Pozorování. Má-li mřížový mnohoúhelník obsah S , pak je $2S$ celé číslo.

Úloha 6. Existuje rovnostranný trojúhelník s vrcholy v bodech kanonické mřížky?

Úloha 7. Dokažte, že pro liché $n \geq 5$ neexistuje pravidelný n -úhelník s vrcholy v bodech kanonické mřížky.

Úloha 8. Nahlédněte, že Pickovu větu nelze nijak přímočaře zobecnit do vyšších dimenzí. K tomu naleznete v prostoru dva mnohostěny, které pokrývají svými vnitřky, stranami, hranami apod. vždy stejné počty mřížových bodů, ale přesto mají různé objemy.

Ve vyšších dimenzích tedy nemáme použitelnou obdobu Pickovy věty. Podobnou informaci však kóduje *Ehrhartova věta*, kterou uvedeme bez důkazu:

Věta. (Ehrhart) *Buď M (uzavřený) mřížový mnohostěn v d -rozměrném prostoru a necht' tM pro $t > 0$ označuje obraz M ve stejnolehlosti se středem v počátku a koeficientem t . Potom existuje polynom f_M takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ pokrývá nM přesně $f_M(n)$ mřížových bodů.*

Úloha 9. Odvoďte pro mnohoúhelníky v rovině explicitní tvar Ehrhartova polynomu na základě Pickova vzorce.

Fareyovy zlomky

Vyzbrojeni Pickovým vzorcem zkusme prozkoumat třídu krásných tvrzení, která vzejdou, začneme-li zlomky nahlížet jako mřížové body v rovině.

Definice. Budiž dáno přirozené n . *Fareyovou posloupností řádu n* rozumíme posloupnost všech těch zlomků z intervalu $(0, 1)$, jejichž jmenovatel v základním tvaru nepřevyšuje n , seřazených vzestupně a značíme ji $\mathcal{F}_n$.

Lemma. *Rovnoběžník s vrcholy $(0, 0)$, (a, b) , (c, d) a $(a+c, b+d)$ má obsah $|ad-bc|$.*

Toto lemma je jen speciálním případem obecného faktu, že objem rovnoběžnostěnu je až na znaménko roven determinantu matice složené z vektorů jeho hran. Ale k tomu se ještě dostaneme.

Úloha 10. (Farey–Cauchy) Jsou-li $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sousední zlomky v $\mathcal{F}_n$, pak $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$. Naopak pokud $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ splňují $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$, pak spolu sousedí v nějakém $\mathcal{F}_n$.

Úloha 11. (Dirichletova věta o diofantických aproximacích) Je dáno iracionální $\alpha \in (0, 1)$. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ v základním tvaru, které splňují $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

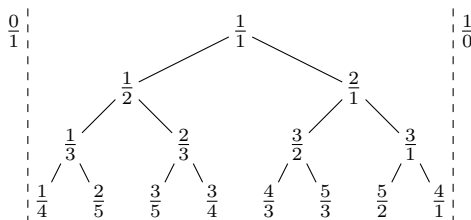
Definice. *Mediantem* zlomků $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ rozumíme zlomek $\frac{a+c}{b+d}$.

Úloha 12. Uvažujme tři po sobě jdoucí Fareyovy zlomky. Nahlédněte, že ten prostřední je mediantem zbylých dvou (uvažovaných v základním tvaru).

Úloha 13. (Fordovy kružnice) Pro zlomek $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$ v základním tvaru nakresleme kružnici s průměrem $\frac{1}{q^2}$, která se dotýká reálné osy v bodě $\frac{p}{q}$ a nachází se nad ní. Dokažte, že dvě takové kružnice se dotýkají právě tehdy, když spolu odpovídající zlomky sousedí v některém $\mathcal{F}_n$.

Definice. (Sternův–Brocotův strom) Sestrojme nekonečný binární strom následovně. Na počátku mějme v kořeni zlomek $\frac{1}{1}$, od něhož se v dále po řadě nalevo a napravo vznášá „zlomky“ $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{0}$. Tyto „zlomky“ v dále nebudou mít žádné potomky, zatímco počínaje kořenem $\frac{1}{1}$ bude mít každý jiný zlomek dva potomky: levého, který bude mediantem tohoto zlomku s nejbližším nižším zlomkem na této

nebo vyšší úrovni, a pravého, který bude mediantem tohoto zlomku s nejbližším vyšším zlomkem na této nebo vyšší úrovni.



Úloha 14. Nahlédněte, že Sternův–Brocotův strom obsahuje všechna kladná racionální čísla, a to dokonce v základním tvaru.

Úloha 15. Definujme *jednoduchost* zlomku $\frac{p}{q}$ jako $j(\frac{p}{q}) = \frac{1}{pq}$. Určete součet jednoduchostí všech 2^n zlomků v n -tém řádku Sternova–Brocotova stromu.

Úloha 16. Uvažujme pro $n \geq 5$ navzájem různé mřížové body $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ v rovině, které splňují $|a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i| = 1$ pro každé $1 \leq i \leq n$, přičemž uvažujeme $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_1, b_1)$. Dokažte, že $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$ je splněno i pro nějakou dvojici nesousedních indexů i, j . (Korean TST)

Nutná dávka analyticko-geometrických (ne)definic

Další na jídelníčku je Minkowského věta. K jejímu náležitému strávení si však nejdřív potřebujeme osvojit nějaké ošklivější technické koncepty v čele s (obecnou) mřížkou. Nebude to samo o sobě moc zábava, ale je to potřeba ...

S objemem budeme pracovat pouze v intuitivním pojetí. Abychom ctěného čtenáře ušetřili od pojmů jako *měřitelná množina*, budeme ty množiny bodů, u kterých dává smysl hovořit o objemu, nazývat *útvary*. Intuitivně si račte představovat libovolnou slušně vychovanou hroudu.

Nedefinice. *Objem* útvaru U je nějaké nezáporné číslo, jež značíme $\text{Vol } U$. Pro jeho počítání platí:

- (i) Má-li d -rozměrný „hranol“ $(d-1)$ -rozměrnou podstavu s objemem S a na ní kolmou výšku h , pak je objem hranolu roven $h \cdot S$.
- (ii) Má-li d -rozměrný „kužel“ $(d-1)$ -rozměrnou podstavu s objemem S a na ní kolmou výšku h , pak je objem kužele roven $\frac{1}{d} \cdot h \cdot S$.
- (iii) Pro disjunktní útvary U_1, U_2 platí $\text{Vol}(U_1 \cup U_2) = \text{Vol } U_1 + \text{Vol } U_2$.
- (iv) Je-li U' obrazem U v posunutí (či obecněji nějakém shodném zobrazení), pak $\text{Vol } U' = \text{Vol } U$.
- (v) d -rozměrná koule s poloměrem R má objem $C_d R^d$, kde C_d je nějaká konstanta. Pro C_d existuje (komplikovaný) explicitní předpis, nám však postačí prvních pár hodnot:

$$C_1 = 2, \quad C_2 = \pi, \quad C_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad C_4 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Dále se nám bude hodit umět počítat objemy rovnoběžnostěnů. K tomu, bohužel, musíme zaběhnout k *maticím*. Co že to matice je? Račte si vybrat: obdélníček plný čísel, sloupcové vektory zapsané vedle sebe, řádkové vektory zapsané pod sebou, pro fajnšmekry jenom reprezentace nějakého lineárního zobrazení.

Matice a objemy propojuje koncept *determinantu*. Opět si k němu dovolíme zaměřet „tu korektní“ definici a místo toho pragmaticky popsat, jak s tím pracovat.

Nedefinice. *Determinant* čtvercové $d \times d$ matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_d)$$

je nějaké číslo, jež značíme $\det A$. Pro jeho počítání platí:

- (i) Rozvoj podle sloupce: kdykoliv zvolíme $1 \leq j \leq d$, pak platí

$$\det A = \sum_{i=1}^d (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

kde A_{xy} značí matici $(d-1) \times (d-1)$, která vznikne z A vyškrtnutím x -tého řádku a y -tého sloupce.

- (ii) Přičítání sloupců k jiným nemění determinant: Je-li $\mathbf{u}$ vektor, který leží v nadrovině určené sloupcovými vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_d$, pak

$$\det(\mathbf{a}_1 | \cdots | (\mathbf{a}_j + \mathbf{u}) | \cdots | \mathbf{a}_d) = \det A.$$

- (iii) Determinant diagonální matice: Pokud je A *diagonální*, tzn. všechny její prvky vyjma $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{dd}$ jsou nulové, pak $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{dd}$.

Pravidla (i) a (ii) platí i tehdy, když zaměníme sloupce a řádky.

Hned si také rozmysleme cvičení, které dává intuitivní představu za determinan-tem a osvětluje některé jeho vlastnosti. Zdůrazníme, že tohle je celý důvod, proč se o determinanty vůbec staráme – chceme počítat *nějaké* objemy.

Cvičení. Rozmyslete si, že objem d -rozměrného rovnoběžnostěnu, jehož hrany odpovídají vektorům $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$, je roven $|\det(\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_d)|$. K tomu pomohou následující pozorování:

- (1) Je-li matice v diagonálním tvaru, objem i determinant jsou si rovny.
- (2) Sloupcové úpravy, které zachovávají determinant, zachovávají i objem.

Definice. *Mřížkou* v $\mathbb{R}^d$ rozumíme množinu $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, pokud není podmnožinou žádné nadroviny¹ a lze ji pro nějakou d -tici vektorů $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ vyjádřit přesně jako množinu všech součtů $t_1\mathbf{b}_1 + \dots + t_d\mathbf{b}_d$ pro celá čísla $t_1, \dots, t_d$. Takovou d -tici $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ nazýváme *bází mřížky* Λ .

Definice. Je-li $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ báze mřížky Λ , pak *determinantem* Λ (značíme $\det \Lambda$) označujeme absolutní hodnotu determinantu matice $(\mathbf{b}_1 \mid \dots \mid \mathbf{b}_d)$.

Bystří mohou namítat, že bázi mřížky by mohlo být mnoho – co když každá z nich dává jiný determinant? Bez obav:

Tvrzení. $\det \Lambda$ *nezávisí na volbě konkrétní báze.*

Vzpomíná si ještě čtený čtenář na objemovou interpretaci determinantu? Pak jej jistě nepřekvapí následující:

Pozorování. Je-li $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ nějaká báze mřížky $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, pak je $\det \Lambda$ objem tzv. *fundamentálního rovnoběžnostěnu* $\{t_1\mathbf{b}_1 + \dots + t_d\mathbf{b}_d \mid t_1, \dots, t_d \in \langle 0, 1 \rangle\}$.

Cvičení. Rozmyslete si, že Pickova věta platí i pro obecnou mřížku v $\mathbb{R}^2$, pokud výsledný obsah vynásobíme $\det \Lambda$.

Úloha 17. Reálná čísla a, b, c splňují $a, c > 0$ a zároveň $D = 4ac - b^2 > 0$. Dokažte, že nerovnost $ax^2 + bxy + cy^2 < R^2$ určuje v rovině elipsu s obsahem $\frac{2\pi}{\sqrt{D}} R^2$.

Pro počítání objemů se nám také občas bude hodit poznat kolmé vektory, oprášíme proto základní vlastnosti skalárního součinu. Pro ty z vás, kdo vidíte skalární součin poprvé, vezte, že není třeba se s tím příliš trápit :-).

Definice. *Skalární součin* vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ definujeme jako $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \dots + u_dv_d$.

Ne zcela očividná geometrická interpretace skalárního součinu je, že promítneme $\mathbf{u}$ na přímku určenou $\mathbf{v}$ a (orientovanou) délku této projekce znásobíme s délkou $\mathbf{v}$. S tímto pohledem pak nepřekvapí:

Cvičení. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ jsou kolmé, právě když $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

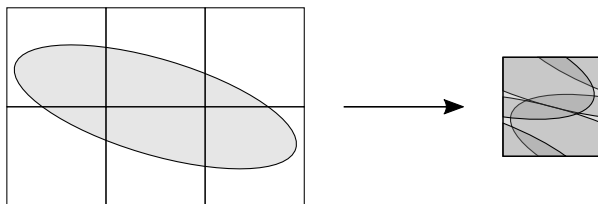
Minkowského věta

Jako předskokana pana Minkowského nejprve představme pana Blichfeldta:

Věta. (Blichfeldt) *Mějme v d -rozměrném prostoru útvar s objemem V . Potom lze tento útvar posunout tak, aby obsahoval alespoň $[V]$ bodů kanonické mřížky.*

Důkaz. Rozřezme daný útvar podél jednotkových krychliček kanonické mřížky a tyto rozřezané dílky přeložme přes sebe. Pokud se v některém bodě jednotkové krychličky překryje alespoň $[V]$ různých dílků, vyhráli jsme. Pokud ne, pak je objem roven nanejvýš $[V] - 1 < V$, což je spor. $\square$

¹Jinými slovy: Λ je „roztážená po celém $\mathbb{R}^{d'}$ “. Pouze zakazujeme to, aby Λ degenerovaně ležela jen v nějakém menším podprostoru.



Cvičení. Pro obecnou mřížku Λ se věta zobecní zohledněním determinantu – náš útvar bude v nějakém posunutí obsahovat alespoň $\left\lceil \frac{V}{\det \Lambda} \right\rceil$ bodů z Λ .

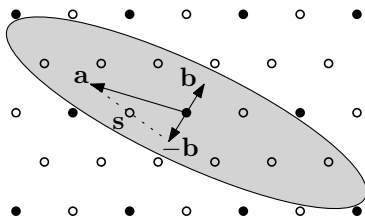
K samotné Minkowského větě zbývá ještě jedna stěžejní definice:

Definice. Množinu M bodů v d -rozměrném prostoru nazveme *konvexní*, pokud pro libovolné body $A, B \in M$ je i celá úsečka AB obsažena v M .

Sami se přesvědčte (ale nedokazujte formálně), že např. koule, kvádry, válce či rovnoběžnostěny jsou konvexní. Mnohoúhelníky jsou obecně konvexní právě tehdy, mají-li všechny vnitřní úhly menší než 180° .

Věta. (Minkowski) *Budťe v d -rozměrném prostoru dány mřížka Λ a útvar C , který je konvexní a středově souměrný podle počátku. Pokud $\text{Vol } C > 2^d \det \Lambda$, pak v C leží nějaký nenulový bod z Λ .*

Důkaz. Uvažme dvojnásobně nafouknutou mřížku 2Λ , ta má determinant $2^d \det \Lambda$, což je méně než $\text{Vol } C$. Podle předchozího cvičení pak jde C posunout tak, aby obsahovala alespoň dva různé body z 2Λ . To znamená, že nějaké dva různé body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ splňují $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in 2\Lambda$. Ze středové souměrnosti ale C obsahuje i bod $-\mathbf{b}$ a z konvexnosti také střed $\mathbf{s}$ úsečky spojující $\mathbf{a}$ s $-\mathbf{b}$. Máme tak $0 \neq \mathbf{s} \in C$, ale díky $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in 2\Lambda$ taky $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + (-\mathbf{b})}{2} \in \Lambda$, jak jsme chtěli. $\square$



Úloha 18. (německý lesík) V poloměru $R > 0$ od počátku se rozkládá džungle. V každém mřížovém bodě uvnitř tohoto kruhu vyjma počátku roste strom s jistým pevně daným poloměrem $r > 0$. V počátku stojí pirát. Nahlédněte, že pokud je R dostatečně velké, pirát nevidí z džungle ven.

Cvičení. Nechť je v předchozí úloze naopak pevně dáno $R > 1$. Vytvořte co nejlepší dolní odhad pro hodnotu r , při které ještě pirát v některém směru vidí z džungle ven.

Lemma. *Mějme prvočíslo $p \equiv 1 \pmod{4}$. Pak existuje c takové, že $c^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.*

Úloha 19. (Fermatova věta o dvou čtvercích) Prvočíslo $p \equiv 1 \pmod{4}$ lze vyjádřit jako $p = x^2 + y^2$ pro celá čísla x, y .

Lemma. *Je-li p prvočíslo, pak lze zvolit celá čísla x, y tak, že $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.*

Úloha 20. (Lagrangeova věta o čtyřech čtvercích) Každé prvočíslo p lze vyjádřit jako $p = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ pro celá čísla x, y, z, w .

Úloha 21. Jsou dána přirozená čísla a, b, c splňující $ac = b^2 + b + 1$. Dokažte, že rovnice $ax^2 - (2b + 1)xy + cy^2 = 1$ má celočíselné řešení. (Polská MO)

Úloha 22. (Pick z Minkowského) Dokažte pomocí Minkowského věty, že trojúhelník, který má vrcholy v bodech kanonické mřížky a kromě nich neobsahuje žádné další mřížové body, musí mít obsah $\frac{1}{2}$.

Úloha 23. (opět Dirichletova věta o diofantických aproximacích) Budiž dáno reálné číslo α a přirozené N . Dokažte, že existuje nějaký zlomek $\frac{p}{q}$ s $1 \leq q \leq N$ splňující $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}$.

Úloha 24. (simultánní aproximace) Buďte dána přirozená čísla k, N a reálná $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Dokažte, že lze zvolit celá čísla $p_1, \dots, p_k$ a přirozené $1 \leq q \leq N$ tak, aby bylo pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ splněno $\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{q\sqrt[k]{N}}$.

Úloha 25. Nahlédněte, že mřížka $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ musí obsahovat nějaký nenulový vektor $\mathbf{v}$ velikosti $|\mathbf{v}| \leq \sqrt{d} \cdot \sqrt[d]{\det \Lambda}$.

Další úlohy

Úloha 26. Dvě nekonečné posloupnosti celých čísel $a_1, a_2, \dots$ a $b_1, b_2, \dots$ splňují

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0$$

pro všechna $n > 2$. Dokažte, že pro nějaký index k je splněno $a_k = a_{k+2016}$.

(iKS 5–A5)

Úloha 27. (jednoznačnost dvou čtverců) Už víme, že $p = x^2 + y^2$ má pro prvočíslo $p \equiv 1 \pmod{4}$ řešení. Dokažte, že toto řešení je dokonce jednoznačné až na změnu znamének a pořadí.

Úloha 28. V rovině je dán konvexní mřížový pětiúhelník. Dokažte, že (uzavřený) pětiúhelník, který vytínají úhlopříčky původního pětiúhelníku, obsahuje mřížový bod.

Úloha 29. Pro přirozené n nechť $f(n)$ značí počet způsobů, jak zaplatit částku n pomocí mincí v hodnotách všech mocnin dvojky. Všechny druhů mincí přitom máme neomezené množství a způsoby zaplacení, které se liší jen pořadím mincí, nepovažujeme za různé. Dokažte, že pro $n \geq 3$ platí $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$. (IMO 1997)

Úloha 30. Buď dána konečná množina $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ prvočísel. Pro $x \in \mathbb{R}$ nechť $f(S, x)$ je počet těch přirozených čísel nepřevyšujících x , která mají všechny své prvočíselné dělitele v S . Nahlédněte, že $f(S, x) \approx \frac{(\log x)^n}{n! \log p_1 \cdots \log p_n}$, resp. formálně $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(S, x)}{(\log x)^n} = \frac{1}{n! \log p_1 \cdots \log p_n}$.

Úloha 31. Budiž dáno přirozené číslo $m \geq 2$, potom nazvěme mřížový bod v rovině m -mřížovým, pokud jsou obě jeho souřadnice násobky m . Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ s vlastností: kdykoliv mřížový trojúhelník v rovině obsahuje právě jeden m -mřížový bod, pak má obsah nanejvýš cm^3 . (China TST 2021)

Úloha 32. Buďte dána C , d a r . Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ délky 1 nazvěme (C, r) -žůžovým, pokud pro každý nenulový mřížový vektor $\mathbf{z}$ splňuje vztah $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}| \geq \frac{C}{|\mathbf{z}|^r}$, kde $\cdot$ je skalární součin a $|\mathbf{z}|$ značí délku vektoru $\mathbf{z}$. Dokažte, že:

- (a) Pro $r < d - 1$ nikdy neexistuje žádný (C, r) -žůžový vektor.
- (b)** Pro $r > d - 1$ lze zvolit C tak, aby existoval nějaký (C, r) -žůžový vektor.

Na úplný závěr zabít úloha s hlubokými souvislostmi v algebraické teorii čísel – jedná se o jistou podobu tzv. *Minkowského meze*:

Úloha 33. Buď $f(x)$ monický polynom stupně n s celočíselnými koeficienty, který je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$ a má n reálných kořenů $r_1, \dots, r_n$. Potom platí

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |r_i - r_j| \geq \frac{n^n}{n!}.$$

Návody

1. Těžiště se pozná tak, že dělí trojúhelník na tři menší s navzájem rovnými obsahy.
2. Jedničky lze vždy jednoznačně doplnit. Interpretuj validní způsoby zaplacení jako mřížové body překryté jistým trojúhelníkem.
3. Spočítej obsah „celého grafu“, tzn. doplnku vnější stěny, dvěma způsoby: jednou přímo a podruhé posčítáním všech vnitřních stěn.
4. Jednoduše odečti Pickovské obsahy děr.
5. Středově zobraz mnohoúhelník podle půlbodu a počítej obsahy. Pozor, mohou vzniknout díry!
6. Čtverec vzdálenosti dvou mřížových bodů je celé číslo ...
7. Trik: nafoukni dvakrát a vezmi středy nejdelsích úhlopříček. Jako mnohem techničtější alternativa jde taky zkoumat racionalitu jistých hodnot goniometrických funkcí.

8. Možností je mnoho. Jednou z těch přímočařejších jsou tzv. *Reeveovy čtyřstěny*: zafixuj půlčtverečkovou podstavu a poté lhybej výškou čtyřstěnu.
9. Ve stejnolehlosti se snadno předvídatelně chovají obsah mnohoúhelníku a počet mřížových bodů na hranici. Body uvnitř dopočítej z Pickova vzorce.
10. Interpretuj zlomky jako mřížové body a rozmysli si, co dovedeš říct o trojúhelnících, které určují. V opačném směru stačí vzít $n = \max\{b, d\}$.
11. Pro libovolné n spadne α mezi nějaké dva Fareyovy zlomky.
12. Zapiš si vztah z Fareyovy–Cauchyovy věty pro obě sousedící dvojice.
13. Prostě to spočítej a použij Fareyovu–Cauchyovu větu.
14. Půlky Sternova–Brocotova stromu jsou hezky souměrné a levou tvoří Fareyovy zlomky. Potomci mají vždy větší jmenovatele, takže každý mediant tvoří nový Fareyův zlomek, který už bude v základním tvaru.
15. $j\left(\frac{p+q}{q}\right) + j\left(\frac{p}{p+q}\right) = j\left(\frac{p}{q}\right)$. Tyto zlomky se vždy najdou na následujícím řádku, protože operace $\frac{p}{q} \mapsto \frac{p+q}{q}$ a $\frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{p+q}$ se k Sternovu–Brocotovu stromu chovají hezky.
16. Podívej se na (ve vhodném smyslu) „největší“ vektor.
17. Přenásobením vhodnou maticí získáš kružnici $x^2 + y^2 < R^2$, obsah se mění s determinantem.
18. Pouprav si pohled: místo stromů s poloměrem a paprsků světla bez šířky uvažuj bodové stromy a paprsek světla s šířkou.
19. Jako množinu ber (otevřenou) kouli s poloměrem $\sqrt{2p}$. Mřížku vyrob z vektorů $(1, c)$ a $(0, p)$.
20. Použij podobnou strategii jako u dvou čtverců: volbou mřížky zajisti, aby všechny její body měly čtverec vzdálenosti od počátku 0 (mod p), volbou množiny pak zajisti, že to nemůže být $2p$ či víc.
21. Díky zadané podmínce má výraz nalevo malý diskriminant – to odpovídá velkému obsahu elipsy.
22. Vyrob z několika kopií trojúhelníku větší rovnoběžník se středem v mřížovém bodě.
23. Interpretuj $\frac{p}{q}$ jako mřížový bod (p, q) . Trošičku uprav kýžené podmínky, aby dávaly symetrickou konvexní množinu a spočítej objem.
24. Přímochaře rozšiř konstrukci z předchozí úlohy. Věci, co potřebuješ počítat, vypadají fakt hezky – podstavy jsou obdélníky/kvádry.
25. Koule by možná dala lepší konstantu, nicméně postačí krychle.
26. Kolmé vektory.
27. Je-li k kružnice $x^2 + y^2 = p$ a Λ mřížka vyrobená z vektorů $(1, c)$, $(0, p)$, chceš dokázat $|k \cap \Lambda| = 4$. Pick pomůže.
28. Tady žádná věta nepomůže! Použij středový trik, připrav se na rozebrání případů a neboj se opřít o indukci!

29. Počet mřížových bodů $\approx$ objem. V dokazovaném odhadu je spousta místa, stačí rozumně odhadnout chybu.

30. Souřadnice v $\mathbb{R}^n$ interpretuj jako exponenty v prvočíselném rozkladu. Rozdíl objemu a počtu pokrytých mřížových bodů je nanejvýš úměrný povrchu, takže celkem malý.

31. Zkombinuj dvě možnosti, jak zkonstruovat další m -mřížový bod: buďto $(m+1)$ -násobně stejnolehli z některého vrcholu, anebo najdi dost velký rovnoběžník zacentrováný v onom jednom m -mřížovém bodě, jehož (alespoň) půlka leží uvnitř trojúhelníku.

32. (a) Je-li dáno $\mathbf{w}$, najdi $\mathbf{z}$, které ho rozbije, pomocí Minkowského věty. Množina daná touto vlastností není konvexní, ale dovedeš v ní najít válec libovolně velkého objemu. (b) Je-li dáno $\mathbf{z}$, spočti, jak velkou část jednotkové sféry toto $\mathbf{z}$ zakazuje, a nahlédni, že součet konverguje, takže pro dost malé C nebude zakázaná celá sféra. Možná narazíš na to, že s povrchy se blbě pracuje – vypořádej se s tím nějak.

33. Račte se posadit a připoutat, bude to jízda:

- (1) Levá strana je determinant mřížky s báзовými vektory $(1, r_i, r_i^2, \dots, r_i^{n-1})$.
- (2) Do Minkowského věty chceš použít množinu $\{|x_1| + \dots + |x_n| < n\}$. Proč?
- (3) Protože AGčko!
- (4) Pro body $\mathbf{z}$ mřížky ale z Viětových vztahů musí být $x_1 \cdots x_n$ celé číslo.
- (5) Profit.

Literatura a zdroje

Tímto bych chtěl poděkovat Matěji Doležálkovi, od kterého jsem tento příspěvek bez větších změn převzal.

- [1] Matěj Doležálek: *Mřížky a geometrie čísel*, Meziměstí, 2022
- [2] Jakub Löwit: *Čísla a čtverečky*, sborník iKS, 2017.
- [3] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2008.
- [4] Jiří Matoušek: *Introduction to Discrete Geometry*, KAM MFF UK, kam.mff.cuni.cz/~matousek/kvg1-tb.pdf.
- [5] Martin Klazar: *Úvod do teorie čísel*, KAM MFF UK, kam.mff.cuni.cz/~klazar/ln_UTC.pdf.
- [6] Keith Conrad: *Sums of two squares and lattices*, kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Picksumofsqs.pdf.

Mixtilineární kružnice

ZDENĚK PEZLAR

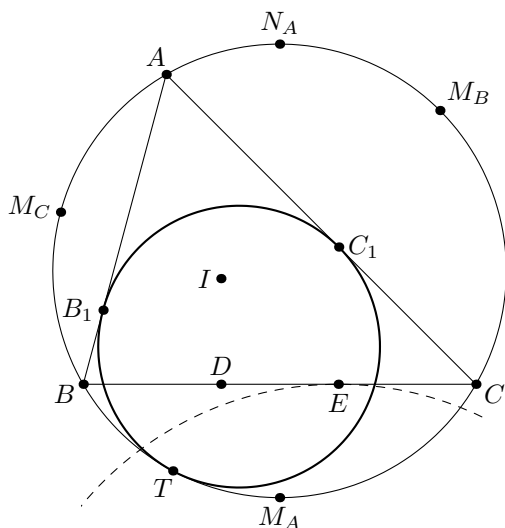
ABSTRAKT. V celé této přednášce budeme upřeně zírat na jeden obrázek ohledně takové lepší kružnici vepsané.

Definice. Mějme ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Ω . Označme ω_A kružnici, jež se dotýká stran AB a AC a s kružnicí Ω má vnitřní dotyk. Tuto kružnici nazveme *A-mixtilineární kružnicí*. Bod dotyku kružnic označíme T .

Úmluva. Označíme I střed kružnice vepsané, D, E po řadě body dotyku strany BC s kružnicí vepsanou a přípsanou straně BC . Označme M_A, M_B a M_C příslušné švrky. Označme B_1, C_1 body dotyku ω_A se stranami po řadě AB, AC .

Úloha. V tomto obrázku najdete co nejvíce „náhod“. Za náhodu bereme například:

- (1) Tři body ležící na přímce,
- (2) čtyři body ležící na kružnici,
- (3) netriviální dvojice shodných úhlů.



Vlastnosti konfigurace

Pro řešení dané úlohy se můžou (a teda budou) hodit některé předchozí úlohy. Připravte tužky, pravítka a kružítko, bude to scary. Úlohy s dýkou (†) vyžadují nějaké pokročilejší znalosti, například projektivní nebo inverzivní řešení.

Úloha 1. Dokažte, že body T , B_1 a M_C leží na přímce. Analogicky body T , C_1 a M_B leží na přímce.

Úloha 2. (†) Odvoďte, že $\sqrt{bc}$ -inverze prohazuje ω_A a kružnici připsanou k BC .

Úloha 3. (†) Ukažte, že bod I je střed úsečky B_1C_1 .

Úloha 4. Dokažte, že platí $|\angle B_1TA| = |\angle C_1TI|$.

Úloha 5. Dokažte, že přímka TI prochází bodem N_A . (Írán 2002/24)

Úloha 6. Dokažte, že čtveřice bodů B, B_1, I, T leží na kružnici a že přímka CI je k ní tečná. Analogické tvrzení platí na druhé straně.

Úloha 7. (†) Inverze skrz A s poloměrem r prohazuje ω_A a kružnici vepsanou. Jaká je hodnota r ?

Úloha 8. Dokažte, že se přímky AE a TI protínají na ω_A . Zkuste najít ještě jeden takový pár.

Úloha 9. (†) Dokažte, že platí $|\angle BAT| = |\angle CAE|$. (vesměs EGMO 2013/5)

Úloha 10. Ukažte, že přímka TD prochází obrazem A podle osy úsečky BC . Speciálně pak $|\angle ATB| = |\angle CTD|$.

Úloha 11. Buď K pata osy úhlu z A . Dokažte, že body K, D, M_A a T leží na kružnici.

Úloha 12. (†) Ukažte, že přímky BC , TM_A a B_1C_1 prochází jedním bodem.

Označme bod z předchozí úlohy P .

Úloha 13. Dokažte, že body P, T, D a I leží na kružnici tečné k AI .

Úloha 14. Dokažte, že T je I -Dumpty¹ v trojúhelníku AID .

Z této úlohy speciálně plyne, že přímka N_AI je symediánou v trojúhelníku AID , jelikož Dumpty leží na symediáně.

Úloha 15. (†) Označme si R průsečík N_AT s BC . Dokažte, že $(P, R; B, C) = -1$.

Návod. Označ si průsečík S_AR s (ABC) .

Zkuste si promítnutím této čtveřice najít zajímavý harmonický čtyřúhelník. Dále si můžeme rozmyslet, že R je střed spirální podobnosti převádějící B_1C_1 na BC .

¹Bod D je A -Dumptyho bod v ABC , pokud platí $DAB \sim DCA$. Tento bod je navíc patou kolmice z opsiště na A -symediánu.

Úlohy ze života

Jak jednou pravili nějací moudří lidé, stačilo. Stačilo zkoumání konfigurace, pojďme rozbít nějaké úlohy. Nepřekvapivě, bude se hodit mít na paměti většinu minulé sekce. Dobrou chuť!

Úloha 16. Zkonstruuje A -mixtilineární kružnici jen pomocí kružítko a pravítka.

Úloha 17. Označme M střed oblouku BC kružnice opsané obsahujícího bod A a I střed kružnice vepsané. Průsečík AI a BC budiž L a druhý průsečík MI a kružnice opsané je K . Kružnice opsaná (KLA) protne podruhé BC v P . Dokažte, že $PI \parallel AM$.
(Peru TST 2015)

Úloha 18. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané, D , E body dotyku vepsané a připsané kružnice ke straně BC a T bod dotyku ω_A s (ABC) . Označme S průsečík přímk AE a TD . Dokažte, že SI je osa úhlu $\sphericalangle ASD$.

Úloha 19. Označme M střed strany BC a P patu osy úhlu $\sphericalangle BAC$ a D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC . Dokažte, že $|\sphericalangle TID| = |\sphericalangle PIM|$.

Úloha 20. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané, E patu osy úhlu $\sphericalangle BAC$, D bod dotyku kružnice vepsané s BC . Dále označme M střed oblouku BC na (ABC) obsahujícího A a konečně buď F průsečík přímk DI a AM . Dokažte, že přímka MI půlí úsečku EF .
(Rumunsko JBMO TST 2019/3)

Úloha 21. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané, S_B , S_C po řadě B a C -švrky a A -antišvrka označme N_A . Kružnice ω_B se dotýká strany AB a kružnice (ABC) zevnitř v bodě S_B . Analogicky definujme kružnici ω_C . Dokažte, že přímka S_BS_C prochází body dotyků kružnic ω_B , ω_C s příslušnými stranami.

Úloha 22. (†) V úloze výše dokažte, že se chordála kružnic ω_B a ω_C protíná s přímkou N_AI na kružnici opsané trojúhelníku ABC .
(EGMO 2023/6)

Úloha 23. (†) V trojúhelníku ABC se ω_A se středem S dotýká kružnice (ABC) v bodě K a dále stran AB , AC . Kružnice s průměrem AS protíná kružnici (ABC) podruhé v bodě T . Označme O střed kružnice (ABC) . Dokažte, že kružnice (KTO) půlí úsečku BC .
(Korea Winter Practice Test 2018/5)

Úloha 24. (†) V trojúhelníku ABC se středem kružnice vepsané I jsou D , E , F po řadě body na stranách BC , AC , AB tak, že $ID \perp BC$ a $IE \perp AI \perp IF$. Kružnice (AEF) protne kružnici (ABC) podruhé v bodě X . Dokažte, že se přímky XD a AM protínají na kružnici (ABC) .
(IMO Shortlist 2016/G2)

Návody

1. Stejnolehlost, jaká je tečna v M_C ?
2. Rozmysli si, co se stane s tečnými body pod inverzí.
3. $\sqrt{bc}$ -inverze nebo Pascal, bububu.
4. No, I je střed B_1C_1 , co je A ?
5. Z předchozí izogonality ti stačí jen dokázat rovnost dvou oblouků.
6. Vyúhli s pomocí předchozí úlohy.
7. Kam se zobrazí B_1 ?
8. Dvě stejnoolehlosti, vou.
9. Inverze v A .
10. Překlop podle osy úsečky BC .
11. Využij předchozí úlohu a vyúhli to.
12. Inverze v A .
13. Najdi hodně pravých úhlů.
14. Z předchozí úlohy stačí dokázat už jen jednu tečnu.
15. Najdi ortocentrum a pak tvrzení dvě ze tří (nebo harmonický čtyřúhelník).
16. Každý z tečných bodů zkonstruuj pomocí známých bodů.
17. Dokresli si švrka.
18. Využij mnoho vlastností konfigurace a najdi další osu.
19. Máš jednu symedíanu, stačí říct, že to druhé je těžnice.
20. Těžnice v jednom trojúhelníku je symedíana v druhém.
21. Stejnolehlost.
22. A na té chordále leží. Najdi harmonický čtyřúhelník, například promítáním skrz I .
23. $\sqrt{bc}$ -inverze ti najde harmonický čtyřúhelník. To využij k nalezení dalšího bodu na hledané kružnici.
24. Dá se promítat skrz D a získat dva (shodné) harmonické čtyřúhelníky.

Literatura a zdroje

- [1] Radek Olšák: *Mixtilinear incircles*, iKS 2021.
- [2] i3435: 'Muricaaaaaaaa.
- [3] Evan Chen: *A Guessing Game: Mixtilinear Incircles*, <https://web.evanchen.cc/handouts/Mixt-GeoGuessr/Mixt-GeoGuessr.pdf>
- [4] CutTheKnot: *Construction and Properties of Mixtilinear Incircles*, <https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/MixtilinearConstruction.shtml>

Projektivní geometrie

ZDENĚK PEZLAR

ABSTRAKT. Co najdeme v typické geometrické úloze? Protínání náhodných přímek a kružnic mezi sebou. Cool. Jaké vlastnosti se zachovají, když mezi takovými objekty promítáme a prostřelujeme? Poměry ne. Ale čtyřpoměry ano!

Úmluva. Každému směru přímek definujeme *bod v nekonečnu* a řekněme, že se každé dvě rovnoběžné přímky protnou v příslušném bodě v nekonečnu. Dále řekněme, že tyto *nevlastní body* leží všechny na jedné *nevlastní přímce*.

Okolo naší běžné roviny si tedy přidáme takový „kruh“ nevlastních bodů, který ji obklopuje. Výhodou takové konstrukce je, že se v takovéto *projektivní rovině* protnou libovolné dvě přímky v právě jednom (pro rovnoběžné přímky nevlastním) bodě a každými dvěma body prochází právě jedna přímka.

Definice. Pro vlastní body A, B, C ležící na jedné přímce definujeme *orientovaný poměr* (dělicí poměr) $\frac{AB}{BC} = \pm \frac{|AB|}{|BC|}$, kde „+“ bereme v případě, že B leží na úsečce AC . Je-li B nevlastní, definujeme $\frac{AB}{BC} = -1$.

Uvažme dvě přímky ℓ, m a tři body $X, Y, Z \in \ell$. Pokud uvažíme body $X', Y', Z' \in m$ tak, že $XX' \parallel YY' \parallel ZZ'$, tak poměry u bodů X, Y, Z jsou shodné jako u bodů X', Y', Z' . Avšak bohužel to v divočině moc často nepotkáme. Mnohem příjemnější by pro nás byly *projekce*, tedy, že bychom uvažili nějaký bod P mimo ℓ a prostřelovali skrz P , tedy protínali přímky PX, PY a PZ s m . Smutná zpráva: takovéto zobrazení nezachovává dělicí poměry. Dobrá zpráva: ne vše je ztraceno.

Definice. Pro čtyři různé body A, B, C, D na přímce definujeme jejich *čtyřpoměr* $(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$, kde poměry bereme orientované.

Cvičení 1. Pro body A, B, C, D na přímce platí $(A, B; C, D) = (C, D; A, B) = (A, B; D, C)^{-1}$.

Cvičení. Pro čtyři body A, B, C, D na přímce a P bod mimo ní si rozmyslete, že platí $(A, B; C, D) = \pm \frac{\sin \angle CPA}{\sin \angle CPB} : \frac{\sin \angle DPA}{\sin \angle DPB}$. Jak volíme znamínko?

Pravděpodobně nejdůležitější vlastností je právě to, že projekce zachovají čtyřpoměr, proto projektivní.

Věta. (projekce je projektivní zobrazení) *Nechť body A, B, C, D leží na přímce a body A', B', C', D' leží též na přímce tak, že přímky AA', BB', CC' a DD' prochází jedním bodem. Pak $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.*

Poznámka. Tato věta díky zamyšlení na začátku platí i pokud průsečík daných přímek je nevlastní.

Nechť P je ten bod, ve kterém se čtyři přímky z předchozí věty protínají. Pak říkáme, že přímky (PA, PB, PC, PD) tvoří *svazek*.

Věta. (jednoznačnost čtyřpoměru) *Dejme tomu, že pro pět bodů A, B, C, D, D' na přímce platí $(A, B; C, D) = (A, B; C, D')$. Pak $D = D'$.*

Díky sinové verzi navíc můžeme zobecnit čtyřpoměr i pro body ležící na jedné kružnici.

Definice. Nechť A, B, C, D jsou body ležící na kružnici. Pak definujeme čtyřpoměr tak, že $(A, B; C, D) = \pm \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$, kde znaménko je kladné, pokud se úsečky AB a CD neprotínají, záporné jinak.

Poznámka. Buď P bod na téže kružnici. Díky sinové větě si snadno odvodíme, že můžeme též definovat čtyřpoměr pomocí sinů úhlu při P (což je nezávislé od P). Problémy se znamínky řeší definicí skrz komplexní čísla, což my tu neděláme.

Stejně jako v předchozí větě, pokud zafixujeme tři z bodů na kružnici, volba čtvrtého už jednoznačně určí čtyřpoměr. Ekvivalentní definice pomocí sinů úhlů opět snadno ukáže, že je čtyřpoměr zachován promítáním. K tomu slouží následující dvě cvičení.

Cvičení. Nechť A, B, C, D a P jsou body ležící na kružnici ω a ℓ je přímka neprotínající ω . Dokažte, že platí $(PA \cap \ell, PB \cap \ell; PC \cap \ell, PD \cap \ell) = (A, B; C, D)$. Pokud by bylo $P = A$, definujeme AA jako tečnu k ω v A .¹

Cvičení. Nechť A, B, C, D jsou body ležící na kružnici ω a P bod neležící na ω . Dokažte, že platí $(PA \cap \omega, PB \cap \omega; PC \cap \omega, PD \cap \omega) = (A, B; C, D)$, kde v prvním čtyřpoměru bereme druhé průsečíky přímek.

Možná jste slyšeli o *angle chasingu*, tj. úhlení, kde nějaké úlohy řešíme tak, že přenášíme úhly sem a tam, dokud úloha není pokořena. Díky projektivním vlastnostem čtyřpoměru můžeme v některých úlohách využívat *cross ratio*² *chasing*, tj. promítat a prostřelovat čtyřpoměry mezi kružnicemi a přímkami, dokud nezískáme nové informace o bodech v úloze.

Význačné hodnoty čtyřpoměru jsou ± 1 , díky cvičení 1 totiž pokud platí rovnost $(A, B; C, D) = \pm 1$, tak i $(A, B; C, D) = (A, B; D, C)$.

Hodnota čtyřpoměru $+1$, jistě uznáte, není příliš světoborná, to nastane tehdy, když platí buď $A = B$ a nebo $C = D$. Pokud je ale čtyřpoměr roven -1 , otevřeme brány novému světu.

¹Rozmysli si, co se děje s přímkou AP , jak se P blíží do A po ω .

²Čtyřpoměr anglicky je cross ratio.

Harmonické čtveřice

Definice. Ať čtyři body A, B, C, D leží na přímce tak, že $(A, B; C, D) = -1$. Pak řekneme, že tvoří *harmonickou čtveřici*. Podobně o čtyřech bodech A, B, C, D na kružnici splňujících $(A, B; C, D) = -1$ řekneme, že tvoří *harmonický čtyřúhelník*.

Úloha 2. (velmi důležitá) V kartézské soustavě souřadnic jsou dané body $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (m, 0)$ pro $m \in \mathbb{R}$. Jaké souřadnice má bod D takový, že $(A, B; C, D) = -1$? Co když $m = \frac{1}{2}$?

Jak takovou harmonickou čtveřici poznat? Určitě na soutěži nebudeme jenom tak počítat poměry jak diví. Máme totiž pár situací, které tou harmonií trochu smrdí. Jedna vychází z kompletního čtyřúhelníka, druhá z Apolloniovy kružnice.

Cvičení. (Ceva–Menelaos) Nechť ABC je trojúhelník, v němž D, E, F leží po řadě na stranách BC, AC a AB . Označme X průsečík přímek EF a BC , Y průsečík přímek BE a CF a konečně Z průsečík přímek AZ a BC . Pak $(X, Z; B, C) = -1$.

Věta. (dvě ze tří) Ať A, B, C, D leží na přímce v tomto pořadí a T je bod mimo tuto přímku. Pak pokud platí dvě z následujících tří tvrzení, platí i to třetí:

- (1) Přímka TC je osa úhlu $\sphericalangle BTD$,
- (2) $\sphericalangle ATC = 90^\circ$,
- (3) $(A, C; B, D) = -1$.

Teď jsme trochu nahlédli do toho, jak poznat v přírodě harmonickou čtveřici na přímce. Jak ale poznat harmonické čtyřúhelníky? Podobně jako v případě s kompletním čtyřúhelníkem, i nyní vychází z poměrně přirozené konfigurace.

Úloha 3. (Symediány a harmonické čtveřice) Nechť čtyřúhelník $ABCD$ je vepsaný do kružnice ω . Dokažte, že následující vlastnosti jsou si navzájem ekvivalentní:

- (1) $ABCD$ je harmonický,
- (2) přímka AC je symediánou v trojúhelníku ABD ,
- (3) přímka BD je symediánou v trojúhelníku ABC .

(Rumunsko TST 2006)

Úloha 4. Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník. Dokažte, že je harmonický právě tehdy, když $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$.

Navíc si můžeme rozmyslet ze sinové věty, že pak čtyřúhelník už je harmonický právě tehdy, když se osy úhlů $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle BDC$ protínají na úsečce BC .

Věta. (Pascalova věta) Nechť $ABCDEF$ je tětiový šestiúhelník. Pak (případně nevlastní) body $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ a $CD \cap FA$ leží na jedné přímce.

Úloha 5. (Inverze je projektivní zobrazení) Nechť A, B, C, D jsou čtyři body na kružnici nebo přímce a Ψ je libovolná kruhová inverze. Dokažte, že platí rovnost čtyřpoměrů $(\Psi(A), \Psi(B); \Psi(C), \Psi(D)) = (A, B; C, D)$.

Úlohy

Úloha 6. V trojúhelníku ABC označme D patu osy úhlu $\sphericalangle BAC$, I střed kružnice vepsané a I_A střed kružnice připsané straně BC . Dokažte, že platí $(A, D; I, I_A) = -1$.

Úloha 7. (Blanchet theorem) V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z A a uvažme nějaký bod P na úsečce AD . Přímký BP a CP protínají strany AC a AB po řadě v bodech Q a R . Dokažte, že přímka AD je osa úhlu $\sphericalangle QDR$.

Úloha 8. V trojúhelníku ABC označme P průsečík tečen ke kružnici opsané v bodech B a C a K průsečík přímky AP se stranou BC . Dále označme L průsečík tečny ke kružnici opsané v A s přímkou BC . Dokažte, že $(B, C; K, L) = -1$.

Úloha 9. Je daný nerovnoramenný trojúhelník ABC , jehož kružnice vepsaná se středem I se dotýká stran BC , AC a AB po řadě v bodech D , E , F . Přímký EF a BC se protnou v K . Dokažte, že $IK \perp AD$.

Úloha 10. Je daný nerovnoramenný trojúhelník ABC , jehož kružnice vepsaná se středem I se dotýká strany BC v bodě D , pata z I na přímkou AD buď P . Dokažte, že $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle DPC|$. (ELMO Shortlist 2013)

Úloha 11. Kružnice vepsaná rovnoramenného trojúhelníka ABC se základnou BC se dotýká ramene AC v E . Přímka různá od BE vedená bodem B protíná kružnici vepsanou v bodech F, G . Přímka EF a EG protnou přímkou BC v bodech K a L . Dokažte, že $|BK| = |CL|$. (MEMO 2008/I3)

Úloha 12. Body A, B, C, D, E leží na kružnici ω a bod P vně ní tak, že

- (1) Přímka PB a PD jsou tečné k ω ,
- (2) body P, A, C leží na přímce,
- (3) $DE \parallel AC$.

Dokažte, že přímka BE půlí úsečku AC . (USAJMO 2011/5)

Úloha 13. V trojúhelníku ABC označme D patu osy úhlu $\sphericalangle BAC$ a I_B, I_C po řadě středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABD , resp. ACD .

- (1) Je-li $Q = I_B I_C \cap BC$, dokažte, že $AQ \perp AD$. (Sharygin 2013/7)
- (2) Přímka $I_B I_C$ dále protíná strany AB a AC po řadě v bodech M a N . Dokažte, že se přímky BN a CM protnou na AD .

Úloha 14. Na straně BC trojúhelníka ABC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle ACB|$ a $|\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle ABC|$. Necht body M, N jsou takové, že Q a P jsou po řadě středy úseček AM a AN . Dokažte, že se přímky BN a CM protínají na kružnici (ABC) . (IMO 2014/4)

Úloha 15. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsaný do kružnice ω tak, že existuje bod P na prodloužení úhlopříčky AC takový, že PB a PD jsou tečny k ω . Tečna v C protne

PD v Q a přímkou AD v R . Konečně označme E druhý průsečík přímky AQ s ω . Dokažte, že body B, E a R leží na přímce. (APMO 2013/5)

Úloha 16. (těžší) V trojúhelníku ABC se kružnice ω připsaná straně BC dotýká stran BC , AC a AB po řadě v bodech D, E a F . Kružnice (AEF) protíná přímkou BC v bodech P a Q . Označme M střed úsečky AD . Dokažte, že kružnice (MPQ) je tečná ke kružnici ω . (Shortlist 2017/G4)

Návody

5. Využij přepočítávací lemma.
6. Dvě ze tří.
7. Asi je jasné, kde chceme mít harmonický svazek. Prodluž stranu a využij jedno z tvrzení.
8. Máš tam harmonický čtyřúhelník, promítni ho.
9. Najdi a promítni harmonický čtyřúhelník.
10. Využij předchozí úlohu.
11. Najdi harmonický čtyřúhelník a promítni ho.
12. Promítni harmonický čtyřúhelník. Jak ukázat, že bod je střed úsečky?
13. Pro první část využij tvrzení dvě ze tří. Pro druhé si rozmysli, že hledaný průsečík bude perspektivní bod nějakých harmonických čtveřic.
14. Střed y Ti dají harmonické čtveřice. Ty chceš promítat, co ti řeknou úhlové podmínky?
15. Protni tečny v A a C . Pak cross ratio chasuj.
16. Dokresli si vrchol harmonického čtyřúhelníka a příslušný průsečík tečen, tímhle bodem prochází hodně přímek. Pak mocni se středy.

Literatura a zdroje

- [1] Evan Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, MAA Problem books, 2016.
- [2] Tonda Češík: *Harmonické čtveřice*, Branná, 2019.

Simsonova přímka

LENKA POLJAKOVÁ

ABSTRAKT. Tento příspěvek obsahuje některé vlastnosti Simsonovy přímky a řadu úloh, k jejichž řešení lze Simsonovu přímku využít.

Věta. (Simsonova přímka) Označme P_a, P_b, P_c paty kolmic vedených z bodu P na strany trojúhelníka BC, CA, AB trojúhelníka ABC . Pak body P_a, P_b, P_c leží na jedné přímce právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Této přímce se říká *Simsonova přímka* bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC .

Cvičení. Simsonovou přímkou vrcholu trojúhelníka je výška na protější stranu.

Cvičení. Simsonovou přímkou bodu naproti vrcholu na kružnici opsané je protější strana.

Úmluva. Zachováme značení z první věty a předpokládáme, že P leží na kružnici opsané.

Tvrzení. Je-li H ortocentrum, označíme průsečík přímky HA se Simsonovou přímkou bodu P jako Q . Nyní platí, že $HQPP_a$ je rovnoběžník.

Důsledek. Simsonova přímka bodu P půlí úsečku PH .

Věta. (Steinerova přímka) Označme P'_a, P'_b, P'_c obrazy bodu P podle stran trojúhelníka BC, CA, AB . Leží-li P na kružnici opsané trojúhelníku ABC , pak body P'_a, P'_b, P'_c leží na jedné přímce. Tato přímka navíc prochází ortocentrem.

Tvrzení. Je-li O střed kružnice opsané, pak Simsonovy přímky bodů P a Q svírají úhel $\frac{1}{2}|\angle POQ|$.

Důsledek. Simsonovy přímky protějších bodů na kružnici jsou na sebe kolmé a protínají se na Feuerbachově kružnici.¹

Důsledek. Mají-li dva trojúhelníky společnou kružnici opsanou, pak úhel Simsonových přímek bodu P vzhledem k těmto trojúhelníkům nezávisí na volbě bodu P .

¹Více se o Feuerbachově kružnici můžete dozvědět v tomto příspěvku: <https://prase.cz/library/FeuerbachEulerHR/FeuerbachEulerHR.pdf>.

Úlohy

Úloha 1. V trojúhelníku ABC protne výška z vrcholu A kružnici opsanou podruhé v bodě P . Ukažte, že Simsonova přímka bodu P je rovnoběžná s tečnou ke kružnici opsané v bodě A .

Úloha 2. Pro bod P na kružnici opsané trojúhelníku ABC platí, že obrazy přímk PA , PB , PC v osových souměrnostech postupně podle os úhlů $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle ACB$ jsou rovnoběžné a navíc jsou kolmé na Simsonovu přímku bodu P .

Úloha 3. V trojúhelníku ABC jsou D, E, F postupně paty výšek na strany BC , CA , AB . Paty kolmic z bodu D na přímky AB , BE , CF a AC označíme postupně P , Q , R a S . Dokažte, že body P , Q , R a S leží na jedné přímce. (BMO1 2015, 5)

Úloha 4. Necht kružnice vepsaná trojúhelníku ABC má střed I a protíná strany BC , CA , AB postupně v bodech D , E , F . Necht dále M je střed strany BC . Pak se přímky EF , DI a AM protínají v jednom bodě.

Úloha 5. Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P . Paty kolmic z bodu P na přímky AB , AC a BD označíme postupně K , L a M . Ukažte, že úhel $\sphericalangle LKM$ má velikost 45° , právě když $ABCD$ je čtverec. (MO 58–III–2)

Úloha 6. (Miquelův bod) Mějme čtyři přímky v obecné poloze (žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě). Každá trojice z nich definuje trojúhelník. Uvážíme-li kružnice opsané těmito čtyřem trojúhelníkům, protínají se v jednom bodě.

Úloha 7. Na přímce jsou dány body A , B , C a mimo ni bod P . Dokažte, že bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku tvořenému středy kružnic opsaných trojúhelníků ABP , BCP , ACP .

Úloha 8. V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu $\sphericalangle BAC$ protější stranu v bodě D . Označme P , Q paty kolmic z bodu D na strany AB , AC . Kolmice na BC z bodu D protne PQ v bodě X . Ukažte, že X leží na těžnici z bodu A .

Úloha 9. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je bod P pata výšky na stranu AC z bodu B . Označíme si D , E postupně středy stran AB , AC . Bod Q je obraz bodu P podle přímky DE . Dokažte, že BQ prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Úloha 10. Necht ABC je ostroúhlý trojúhelník a na kratším oblouku BC jeho kružnice opsané si zvolíme bod X . Body P a Q budou paty z X postupně na přímky CA a CB . Bod R je průsečík přímky PQ a výšky na stranu AC z bodu B . Přímka ℓ prochází bodem P a je rovnoběžná s XR . Dokažte, že ℓ prochází pevným bodem nezávislým na poloze X . (USA TST 2014, 1)

Úloha 11. Na kružnici opsané trojúhelníku ABC leží body P, Q tak, aby $PQ \parallel BC$. Paty kolmic z bodů P a Q na AB , respektive AC , označme postupně P_1, Q_1 , respektive P_2, Q_2 . Dokažte, že přímky P_1P_2 a Q_1Q_2 se protínají na výšce na stranu BC .

Úloha 12. Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice se středem O a průměrem AB . Označme P, Q, R, S postupně paty kolmic z bodu Y na přímky AX, BX, AZ, BZ . Dokažte, že velikost ostrého úhlu, který svírají přímky PQ a RS , je rovna $\frac{1}{2}|\angle XOZ|$. (USAMO 2010, 1)

Úloha 13. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je H pata výšky z A . Na kružnici opsané ABC jsou body P, Q tak, že $|AP| = |PH|$ a $|AQ| = |QH|$. Průsečíky tečen ke kružnici opsané v P a Q se stranou AB , respektive AC označíme E_1, E_2 , respektive F_1, F_2 . Dokažte, že poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům AE_1F_1 a AE_2F_2 jsou stejné a že přímka procházející jejich středy je rovnoběžná s tečnou ke kružnici opsané ABC v bodě A . (USA TSTST 2018, 5)

Úloha 14. Uvažujme pět bodů A, B, C, D, E takových, že $ABCD$ je rovnoběžník a $BCED$ je tětíkový čtyřúhelník. Přímka ℓ , která prochází bodem A , protíná úsečku DC v jejím vnitřním bodě F a přímku BC v bodě G . Platí-li $|EF| = |EG| = |EC|$, ukažte, že ℓ je osou úhlu $\angle DAB$. (IMO 2007, 2)

Úloha 15. Označme H ortocentrum ostroúhlého trojúhelníka ABC a Ω jeho kružnici opsanou. Přímka procházející bodem H protne kratší oblouky AC, BC kružnice Ω postupně v bodech M, P . Rovnoběžka se Simsonovou přímkou bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC vedená bodem M protne Ω v bodě K . Rovnoběžka s BC vedená bodem P protne Ω podruhé v bodě Q . Označme J průsečík BC a KQ . Dokažte, že trojúhelník KJM je rovnoramenný. (China TST 2011)

Návody

1. Vyúhli pomocí obvodového a úsekového úhlu.
2. Pro kolmost obrazu přímky PA uvaž tětivotý čtyřúhelník PP_bAP_c .
3. Hledej tětivoté čtyřúhelníky.
4. Za pomoci Simsonovy věty ukaž, že body A , M a průsečík DI a EF leží na jedné přímce.
5. Dokresli paty kolmic z P na AD a BC . Najdi Simsonovy přímky a uvědom si, že $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle APB|$.
6. Protni dvě z kružnic v bodě P a uvědom si, že paty kolmic v jednotlivých trojúhelnících definují stejné přímky.
7. Použij Simsonovu přímku bodu P vůči trojúhelníku ze středů.
8. Dokresli trojúhelník tak, aby Simsonova přímka bodu D vůči němu byla PQ .
9. Využij Steinerovu přímku vůči trojúhelníku ze středních příček.
10. Hledaným bodem je ortocentrum. Najdi rovnoběžníky.
11. Dokresli paty kolmic z P , Q na BC a najdi rovnoběžníky.
12. Všimni si, že PQ a RS se protínají na AB .
13. Dokaž, že střed kružnice opsané ABC leží na obou kružnicích.
14. Uvaž Simsonovu přímku bodu E vzhledem k trojúhelníku BCD . Pomocí stejnolehlosti si rozmysli, že pata z E je středem BD .
15. Označ $S = MP \cap BC$ a dokaž, že $KSJM$ je tětivotý. Dokaž, že MP je Steinerova přímka bodu K .

Literatura a zdroje

Mockrát děkuji Káti Danilině za přednášku na toto téma ze soustředění v Mamutově v roce 2023 a Martinu Raškovi, z jehož materiálů tento příspěvek z velké části vychází, a který už dříve věnoval podobné poděkování Štěpánu Šimsovi.

- [1] Káťa Danilina: *Simsonova přímka*, Mamutov, 2023.
- [2] www.artofproblemsolving.com.

Algebraické triky

ONDŘEJ SEDLÁČEK

ABSTRAKT. Příspěvek obsahuje řadu algebraických triků, které se hodí při řešení úloh nebo jejich částí. Velkým zdrojem triků, které člověk více či méně často použije, bývají nerovnosti a velkým zdrojem k řešení nerovností je zase seriál MKS od Michala Rolínka a Pavla Šaloma, který najdete na našich stránkách². Ten tedy doporučuji přečíst každému, kdo má pocit, že se potřebuje v algebraických manipulacích zlepšit.

Poznámka. (Symetrie a cykličnost) Výraz v několika proměnných je symetrický, pokud se nezmění prohozením libovolných dvou z nich. Pak můžeme BÚNO předpokládat, že proměnné jsou v námi vybraném pořadí (např. od největší po nejmenší).

Výraz je cyklický, pokud se nezmění po cyklické záměně (např. x za y , y za z a zároveň z za x). Poté můžeme BÚNO předpokládat například to, že jedna z proměnných je největší. Tyto úvahy často zkrátí sepsování řešení alespoň na polovinu.

Dosazení

Máme-li soustavu rovnic, často stačí jednu proměnnou vyjádřit a dosadit.

Úloha 1. Součin reálných čísel x, y, z je jedna. Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}.$$

Úloha 2. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí

$$a^2 - b^2 = bc, \quad b^2 - c^2 = ca.$$

Ukažte, že pak platí i $a^2 - c^2 = ab$.

Rozklady na součin

Mají-li se v úloze najít všechna prvočísla určitého tvaru, zpravidla se snažíme příslušný výraz rozložit na součin, protože pak je snadné říci, kdy půjde o prvočísla (jen jeden z činitelů je různý od ± 1). Ale umět rozkládat na součin se hodí i jindy.

²<http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf>

Úloha 3. Najděte dvě čtyřmístná čísla, jejichž součinem je $4^8 + 6^8 + 9^8$.

Úloha 4. Najděte všechna celá čísla n , pro něž je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo.

(MO 61-III-1)

Úloha 5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel a takových, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není $n^4 + a$ prvočíslo.

(IMO 1969)

Úloha 6. Najděte nejmenší trojciferné číslo n , pro něž má soustava

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 &= n, \\x^2 + y^2 + x + y &= n + 1\end{aligned}$$

pouze celočíselná řešení.

Substituce $xyz = 1$

Máme-li na proměnné podmínku $xyz = 1$, často pomůže substituce

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad z = \frac{c}{a}.$$

Cvičení. Rozmyslete si, že tuto substituci opravdu můžeme použít, tedy že pro každá x, y, z splňující tuto podmínku existují vhodná a, b, c .

Úloha 7. Opět vyřešte Úlohu 1.

Úloha 8. Kladná čísla a, b, c splňují $abc = 1$. Dokažte

$$\frac{1 + a^2c}{c(b + c)} + \frac{1 + b^2a}{a(c + a)} + \frac{1 + c^2b}{b(a + b)} \geq 3.$$

Úloha 9. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(MO 52-III-6)

Substituce $x' = x + c$

Ještě jednodušší substituce je pouhý posun všech proměnných o konstantu, často ale vyřeší celou úlohu.

Úloha 10. Najděte všechna reálná x splňující

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 7x + 12) + 24 = 0.$$

Úloha 11. Jsou dána reálná čísla x, y, z , která splňují

$$x + y + z = 12, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Ukažte, že alespoň jedno z čísel x, y, z je nejvýše rovno třem a alespoň jedno je větší nebo rovno pěti.

(MO 60-III-3)

Linearita proměnné

Máme-li výraz, který je v některé proměnné lineární, pak bude nabývat svých extrémů pro její krajní hodnoty. To úlohu mnohdy velmi zjednoduší nebo úplně vyřeší.

Úloha 12. Jsou dána čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Ukažte nerovnosti

$$6 \geq 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + a + b + c \geq 1.$$

(MKS 28-7-6)

Úloha 13. Nalezněte minimum a maximum výrazu

$$a(1-b) + b(1-c) + c(1-a),$$

v němž a, b, c jsou z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Úloha 14. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ a $z \in \langle -2, 2 \rangle$ ukažte nerovnost $x^2 + y^2 \geq xyz$.

Homogenita

Definice. (homogenita) Výraz $V(a, b, c)$ nazveme homogenní stupně α , pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t > 0$ platí

$$V(ta, tb, tc) = t^\alpha V(a, b, c).$$

Máme-li homogenní nerovnost, můžeme si pomoci tím, že si přidáme nějakou podmínku (jejíž splnění můžeme zaručit právě pomocí t v předchozí definici).

Úloha 15. Pro $a, b \geq 0$ a nezáporné $s \geq r$ dokažte

$$(a^r + b^r)^{\frac{1}{r}} \geq (a^s + b^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Úloha 16. Pro $a, b > 0$ ukažte

$$a^4 + 2b^4 \geq a^2b^2 + 2ab^3.$$

Úloha 17. Dokažte Cauchyho–Schwarzovu nerovnost: $n \in \mathbb{N}$, dále $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ a $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2.$$

(Ne)rovnost

Máme-li nějakou rovnici nebo soustavu rovnic, můžeme si někdy pomoci tím, že ukážeme, že jedna strana je větší než druhá, a využijeme, že víme, kdy v námi použité nerovnosti nastává rovnost.

Úloha 18. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\z^4 + x^2 + 4 &= 5xy.\end{aligned}$$

Polynomy

(MO 61-III-6)

Úloha 19. Mějme reálná čísla x, y, z , pro která platí

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0, \\xy + yz + zx &= 0.\end{aligned}$$

Dokažte, že $x = y = z = 0$.

Úloha 20. Ukažte, že pokud pro nenulová reálná čísla a, b, c platí rovnost

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = 0,$$

tak se dvě z těchto tří čísel rovnají.

Úloha 21. Jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(a-b)(c-b)}$$

pro všechny možné trojice po dvou různých reálných čísel a, b, c ?

(Výběrové soustředění 2013)

Úloha 22. Celá čísla x, y, z splňují vztah

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = xyz.$$

Dokažte, že výraz $x^3 + y^3 + z^3$ je dělitelný $x + y + z + 6$.

Návody

1. Dosad' $z = \frac{1}{xy}$ a zlomky zjednoduř a sečtět.
2. Z první rovnice dosad' za c do druhé a třetí. Nyní má z druhé rovnice plynout třetí. Všimni si, že druhou rovnici lze vydělit a , a potom ji vytkni ze třetí rovnice.
3. Přičti 6^8 , využij vzorečku, a pak ho opět odečti a využij jiného vzorečku. Ověř čtyřmístnost obou čísel.
4. Přičti a odečti $9n^2$ a s pomocí dvou vzorečků rozlož na součin.

5. Zvol $a = 4m^4$ pro $m > 1$ a rozlož na součin.
6. Označ $a = x^2 + y^2$, $b = x + y$, odvoď $a = n$, $b = 1$. Vyřeš kvadratickou rovnici a odvoď, v jakém tvaru musí být n . Výsledek by měl být 113.
7. Tady se fakt nedá nic nového radit :D. Udělej substituci a uprav (sečti zlomky).
8. Udělej substituci a použij AG-nerovnost (jde to i rovnou bez substituce, ale po substituci je to lépe vidět).
9. Po substituci nerovnost vynásob třemi a rozlož ji na součet tří cyklických AG-nerovností.
10. Rozlož kvadratické trojčleny na součin, zvol $y = x - 1$ a následně $z = y^2$. Vyřeš kubickou rovnici v z natipováním kořenů.
11. Pro první část uvaž $x = a + 3$, $y = b + 3$, $z = c + 3$. Pro druhou $x = 5 - a$ atd. Potom už stačí říct, že je jedno z a , b , c nekladné.
12. Stačí rozebrat osm možností, kdy $a, b, c \in \{0, 1\}$. Díky symetrii výrazu můžeš navíc předpokládat $a \geq b \geq c$ a rozebírat jen čtyři možnosti.
14. Díky linearitě v proměnné z stačí rozebrat případy $z = \pm 2$.
15. BÚNO předpokládej $a^r + b^r = 1$. Pak $1 \geq a, b \geq 0$, a tedy $a^r \geq a^s$ a $b^r \geq b^s$.
16. BÚNO předpokládej $b = 1$ a polynom rozlož na součin tipováním kořenů.
17. Nejprve z homogenosti v $u_1, \dots, u_n$ BÚNO předpokládej $u_1^2 + \dots + u_n^2 = 1$, pak ještě stejnou úvahu zopakuj pro $v_1, \dots, v_n$. Nakonec využij odhady $\frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2 \geq u_i v_i \geq -(\frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2)$.
18. Využij odhad $4x^2 \leq x^4 + 4$ a jeho cyklické záměny a získané nerovnosti sečteš.
19. Uvaž polynom třetího stupně s kořeny x , y , z a pomocí Viètových vztahů odvoď, že je tvaru $t^3 + c = 0$.
20. Vynásob abc a uvažuj jako polynom v a . Dokaž, že se rovná polynomu $(b - c)(a - b)(a - c)$.
21. Označ výraz ze zadání jako výraz $V(a)$ v neznámé a s parametry b , c . Uvaž polynom $P(a) = V(a)(a - b)(b - c)(c - a)$, ukaž, že je druhého stupně a b i c jsou jeho kořeny (pozor, to není jasné, protože $V(a)$ není polynom!). Stejně jako v předchozí úloze rozlož polynom $P(a)$, když znáš jeho kořeny.
22. Využij vzoreček $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Literatura a zdroje

Obrovský dík patří *Fílovi Čermákovi*, od něhož byl příspěvek převzat.

- [1] Fíla Čermák: *Algebraické triky neboli... φgle*, Mrtník, 2023
- [2] Štěpán Šimsa: *Algebraické triky*, Lipová-lázně, 2016.
- [3] Michal „Kenny“ Rolínek: *Algebraické legrácky*, Blansko-Obůrka, 2011.
- [4] Michal „Kenny“ Rolínek, Pavel Šalom: *Zdolávání nerovností*, <http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf>.

Náboj

Úloha. Mějme tři reálná čísla x, y, z taková, že $x = 6 - y$ a $z^2 = xy - 9$. Dokažte, že $x = y$.

Ano.

Dosadíme do druhé rovnice za x a dostaneme $z^2 = -(y - 3)^2$, což se může rovnat jen pokud je obojí nula, tedy $y = 3$ a $x = 3$.

Úloha. Vypočítejte:

$$\frac{2016^3 - 1010^3 - 1006^3}{2016 \cdot 1010 \cdot 1006}.$$

3.

Označme $a = 1010$ a $b = 1006$, pak se zlomek rovná $\frac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{(a+b)ab} = \frac{3a^2b + 3ab^2}{(a+b)ab} = 3$.

Úloha. Nalezněte všechna prvočísla tvaru $n^4 + 4m^4$, kde $m, n \in \mathbb{N}$.

5.

Rozložíme $n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2nm + 2m^2)(n^2 - 2nm + 2m^2)$. Obě závorky jsou kladné a první je větší než druhá, o prvočíslo tedy půjde jen pokud je druhá rovna 1. Tedy $(n - m)^2 = 1 - m^2$ a aby byla pravá strana nezáporná, musí být $m = 1$ a aby se pak strany rovnaly, tak $n = m$. Dosazením $n = m = 1$ dostaneme prvočíslo 5.

Úloha. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3.$$

Platí.

Provedeme substituci $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ a upravíme nerovnost do tvaru

$$\frac{y(x+z)}{z(x+y)} + \frac{z(y+x)}{x(y+z)} + \frac{x(z+y)}{y(z+x)} \geq 1.$$

Nyní stačí použít AG-nerovnost.

Úloha. Dokažte, že $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ je racionální číslo.

Je.

Označme sčítance jako a a b . Pak $ab = -1$ a $a^3 + b^3 = 4$. To upravíme na $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3) = (a+b)((a+b)^2 + 3)$. Po další substituci $x = a + b$ máme $x(x^2 + 3) = 4$, což upravíme na $(x-1)(x+2)^2 = 0$ a vidíme, že $x = a + b$ je opravdu racionální.

Úloha. Vypočítejte:

$$\frac{2016^3 - 1010^3 - 1006^3}{2016 \cdot 1010 \cdot 1006}.$$

3.

Označme $a = 1010$ a $b = 1006$, pak se zlomek rovná $\frac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{(a+b)ab} = \frac{3a^2b + 3ab^2}{(a+b)ab} = 3$.

Úloha. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3.$$

Platí.

Provedeme substituci $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ a upravíme nerovnost do tvaru

$$\frac{y(x+z)}{z(x+y)} + \frac{z(y+x)}{x(y+z)} + \frac{x(z+y)}{y(z+x)} \geq 1.$$

Nyní stačí použít AG-nerovnost.

Goniometrické funkce a substituce

JOSEF SORAL

ABSTRAKT. Na přednášce se skamarádíme s goniometrickými funkcemi, probádáme některé jejich vlastnosti a ukážeme si, že „dosazením“ těchto funkcí lze pokořit (či alespoň značně zjednodušit) některé jinak nepříjemné algebraické úlohy.

Na začátek si zopakujme, co o nejběžněji užívaných goniometrických funkcích – sinus, kosinus, tangens a kotangens – víme.

Sinus a kosinus

Tvrzení. Pro funkce $\sin$ a $\cos$ a libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

- (i) Definiční obor obou funkcí jsou všechna reálná čísla.
- (ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- (iii) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
- (iv) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.
- (v) Pokud $0 < x < 1$ (v radiánech), pak $0 < x \cdot \cos x < \sin x < x$.

Poznámka. Dvojice $\sin, \cos$ je ve skutečnosti jediná dvojice funkcí splňující všech pět vlastností výše, pomocí Tvrzení výše tedy můžeme tyto funkce definovat.

Cvičení. (na procvičení algebraické manipulace)

Užitím Tvrzení výše postupně dokažte, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

- (i) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- (ii) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
- (iii) $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.
- (iv) Funkce sinus je lichá, funkce kosinus je sudá.
- (v) $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x$.
- (vi) $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- (vii) $\sin x \pm \sin y = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$.
- (viii) $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
- (ix) $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

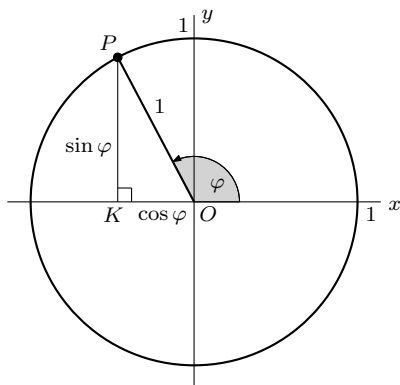
Definice. Číslem π rozumíme nejmenší kladné reálné číslo takové, že $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Tvrzení. Dále lze dokázat, že pro funkce $\sin$ a $\cos$ a pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí:

- (i) Funkce $\sin, \cos$ jsou spojité (dokonce hladké).
- (ii) Oborem hodnot obou funkcí je (celý) interval $\langle -1, 1 \rangle$.
- (iii) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
- (iv) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.
- (v) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$.
- (vi) Funkce $\sin, \cos$ jsou 2π -periodické.
- (vii) Sinus je na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ rostoucí a na $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ klesající.
- (viii) Kosinus je na $\langle -\pi, 0 \rangle$ rostoucí a na $\langle 0, \pi \rangle$ klesající.
- (ix) Funkce $\sin$ je na $\langle -\pi, 0 \rangle$ konvexní, na $\langle 0, \pi \rangle$ konkávní.
- (x) Funkce $\cos$ je na $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ konvexní, na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ konkávní.

Sinus, kosinus a jednotková kružnice

Při řešení úloh často potřebujeme najít nějaké význačné body či „oblasti“ – např. chceme vědět, pro která $x \in \mathbb{R}$ je sinus větší než kosinus. V takových případech je výhodné namísto kartézského grafu funkcí užít pohled pomocí jednotkové kružnice:



Do roviny si nakreslíme kružnici o poloměru jedna se středem v počátku O . Na kružnici si vyznačíme bod P tak, aby polopřímka OP svírala s kladnou x -ovou poloosou náš zkoumaný (orientovaný) úhel. Definujme bod K jako patu kolmice k ose x procházející bodem P . Tím přirozeně dostaneme pravoúhlý trojúhelník OPK (pravý úhel $\sphericalangle PKO$) s délkou přepony jedna.

Sinus zkoumaného úhlu pak přesně odpovídá y -ové souřadnici bodu P (tedy délce $|PK|$, kde bereme v potaz i znaménko), kosinus x -ové souřadnici bodu P (délce $|OK|$ včetně znaménka). Následným „hýbáním“ zkoumaného úhlu tedy můžeme současně a přehledně sledovat vývoj obou funkcí – hodnota funkce sinus se „vykreslí“ na osu y , hodnota kosinus na osu x .

Tangens a kotangens

Funkce *tangens* a *kotangens* jsou pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má příslušný výraz

smysl, definovány jako

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Tvrzení. Pro funkce tangens a kotangens platí:

- (i) Definiční obor funkce tangens je $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ a funkce kotangens $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- (ii) Obor hodnot obou funkcí jsou všechna reálná čísla.
- (iii) Obě funkce jsou π -periodické.
- (iv) Obě funkce jsou liché.
- (v) Tangens je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rostoucí.
- (vi) Kotangens je na intervalu $(0, \pi)$ klesající.

A pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, pro která mají dané výrazy smysl (tj. nedělíme nulou) platí:

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}.$$

Občas se hodí umět vyjádřit hodnotu jedné goniometrické funkce pomocí funkce jiné, aniž bychom jako mezikrok vyčíslovali příslušný úhel.

Cvičení. Ukažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž mají obě strany rovnosti smysl, platí:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}.$$

Poznámka. Vzorců pro goniometrické funkce existuje ještě mnohem, mnohem více, vypsát je zde všechny ale není cílem přednášky. Lze je dohledat na internetu, případně je samostatně odvodit.

Úlohy na rozjezd

Následující úlohy jsou poměrně jednoduché a přímočaré – stačí najít vhodnou substituci a úloha se vzdává.

Poznámka. Ve (skoro) každé úloze, kde k vyřešení použijeme goniometrické substituce, musíme odůvodnit, že touto parametrizací nevynecháme žádné možné hodnoty proměnných (jinak řešení není kompletní). Budeme-li například substituovat za proměnnou, která může nabývat všech reálných hodnot, nemůžeme zjevně použít sinus ani kosinus, neboť jejich obor hodnot je příliš malý.

Příklad. Bububáček si zvolil reálná čísla B a U taková, že $B^2 + U^2 = 1$. Jaká je největší a nejmenší možná hodnota součinu BU ?

Řešení. Z podmínky vidíme, že $B \in \langle -1, 1 \rangle$, a proto všechny možné hodnoty B můžeme vyjádřit jako $\cos \alpha$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Z goniometrické jedničky pak plyne

$U^2 = \sin^2 \alpha$, BÚNO tedy (jinak místo α vezmeme $-\alpha$) platí $U = \sin \alpha$. Pak ale $BU = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, z čehož vidíme, že největší možná hodnota je $\frac{1}{2}$ a nejmenší hodnota je $-\frac{1}{2}$.

Úloha 1. Bílá paní si vymyslela čtyři navzájem různá reálná čísla z intervalu $(0, 1)$. Ukažte, že Anička si z nich mohla vybrat dvě čísla x, y taková, že

$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

Úloha 2. Vlkodláček chtěl dát své mamince jako dárek 100-prvkovou množinu reálných čísel S s tou vlastností, že když x patří do S , tak i číslo $2x^2 - 1$ patří do S . Mohl na nějakou takovou narazit, nebo takové množiny neexistují?

Úloha 3. Casper dostal za domácí úkol najít všechny reálné kořeny rovnice

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Pomůžete mu?

Úloha 4. Chrastivec se rozhodl pro libovolné reálné číslo a definovat posloupnost vztahem $x_1 = a$ a $x_{n+1} = 1/(1-x_n) - 1/(1+x_n)$. Posloupnost vytvářel až do chvíle, kdy pro nějaké k poprvé nastalo $x_k = \pm 1$. Číslo k potom nazval *délkou* posloupnosti. Kolik existuje posloupností délky osm?

Úloha 5. Dokažte, že rekurentně zadaná posloupnost zadaná podmínkou $x_1 \in \mathbb{N}$ a vztahem

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}$$

je dobře definovaná a – stejně jako fáze luny – periodická.

Úloha 6. Pomozte Kostimrázovi nalézt všechna reálná řešení rovnice

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{4}} = x^2 - \frac{1}{2}.$$

Úloha 7. Strašákové Baf a Lek se hádali o tom, zda mezi každými pěti reálnými čísly existují dvě taková čísla x, y splňující

$$|xy + 1| > |x - y|.$$

Existují, nebo ne? Jako cvičení navíc se můžete zamyslet, kolik nejméně čísel je nezbytně nutných pro splnění uvedené vlastnosti.

Nerovnosti

Goniometrické substituce lze využít i při dokazování některých nerovností. Substituce ale bývá jen začátkem – následně bývá třeba využít nějakou další zbraň, typicky

AG nerovnost nebo Jensenovu nerovnost. Tu budeme na přednášce používat (bez důkazu) v následujícím znění:

Tvrzení. (Jensenova nerovnost)

Buď f konvexní funkce na intervalu I , $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ takové, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Pak

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Pro konkávní funkci platí opačná nerovnost.

Pomocí Jensenovy nerovnosti a ryzích algebraických úprav lze odvodit následující čtyři tvrzení, která budeme při goniometrických substitucích občas používat.

Tvrzení. Mějme trojúhelník s vnitřními úhly a, b, c , potom platí:

$$\sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Tvrzení. Mějme ostroúhlý trojúhelník s vnitřními úhly a, b, c , potom platí:

$$\cos a + \cos b + \cos c \leq \frac{3}{2}.$$

Tvrzení. Necht' jsou čísla $a, b, c \in (0, \frac{\pi}{2})$, pak a, b, c jsou úhly (ostroúhlého) trojúhelníka právě tehdy, když platí následující rovnost:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

Tvrzení. Uvažme čísla $a, b, c \in (0, \pi)$, pak a, b, c jsou úhly trojúhelníka právě tehdy, když platí následující rovnost:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} + \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} + \operatorname{tg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} = 1.$$

Další úlohy, se kterými potřebují strašidla pomoci

Úloha 8. Mějme kladná reálná čísla x, y, z splňující $x + y + z = xyz$. Dokažte, že potom platí:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 9. Mějme kladná reálná čísla x, y, z splňující $x + y + z = xyz$. Dokažte, že potom platí:

$$\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \geq 3\sqrt{3}.$$

Úloha 10. Mějme kladná reálná čísla x, y, z taková, že platí $x + y + z = xyz$. Ukažte:

$$xy + yz + xz \geq 3 + \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + z^2}.$$

Úloha 11. Necht x, y, z, w jsou kladná reálná čísla taková, že

$$\frac{1}{1 + x^4} + \frac{1}{1 + y^4} + \frac{1}{1 + z^4} + \frac{1}{1 + w^4} = 1.$$

Dokažte, že $xyzw \geq 3$.

(Lotyšsko 2002)

Úloha 12. Mějme kladná reálná čísla x, y, z taková, že $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$. Dokažte, že $x + y + z \leq 3$

Úloha 13. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$3(x^2 + 1)yz = 4(y^2 + 1)xz = 5(z^2 + 1)xy,$$

kde platí $xy + yz + xz = 1$.

Návody

1. Parametrizuj kosiny, součet vzdáleností přesáhne délku intervalu parametrizace.
3. Kosinus trojnásobného úhlu.
5. Parametrizuj kotagensem, a to i konstantu $\sqrt{3}$. Pro „definovanost“ využij toho, že π je iracionální.
6. Substituu kosinem, vyřeš kvadratickou rovnici.
7. Vyděl a poté kotangens.
9. $\cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ a poté Jensen.
10. Substituu tangensem. Vzorec pro součin tangensů odvoď ze součtového vzorce pro kosiny – součet dvou úhlů v trojúhelníku je doplněk třetího do přímého úhlu. Nakonec užij $(A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2 \geq 0$ pro všechna $A, B, C \in \mathbb{R}$.
11. Substituu $x^2 = \tg \alpha$, převed' na nerovnost pro siny a užij AG nerovnost.
12. Pro úhly α, β, γ platí $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$ právě tehdy, když jsou to úhly v trojúhelníku.
13. Nejprve předpokládej kladnost všech proměnných, substituu tangensem polovičního úhlu. Uvaž rovnice po dvou a vyděl, abys izoloval proměnné. Užij sinovou větu (odvoď $\sin \alpha, \cos \alpha$) a pomocí nich vyjádři tangens polovičního úhlu. Nakonec rozeber případy kdy předpoklad kladnosti neplatí.

Literatura a zdroje

Tímto děkuji *Martinu Sýkorovi*, jehož příspěvek jsem mírně upravil a trochu rozšířil.

- [1] Martin Sýkora: *Goniometrické substituce*, Meziměstí, 2017.

Ciferné součty

ANNA TRNKOVÁ

ABSTRAKT. V příspěvku se seznámíme s různými typy úloh na ciferné součty a ukážeme si nejčastější techniky, které nám pomůžou se s nimi poprat.

Ciferné součty se v olympiádních úlohách neobjevují často, ale jednou za čas je v nějaké úloze najdete. Obecně není mnoho typů úloh, které lze na ciferné součty vymyslet, a tak tady (až na ty nejbrutálnější) projdeme téměř všechny.

Úmluva. Není-li řečeno jinak, n je přirozené číslo.

Nejprve ale přiblížíme, co přesně znamená ciferný součet a jak ho v tomto příspěvku budeme značit.

Definice. *Ciferným součtem* čísla n rozumíme číslo, které dostaneme sečtením všech cifer čísla n v jeho desítkovém zápise. Tedy, pokud desítkový zápis čísla n je $\overline{a_n \dots a_0}$, tj. $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$, pak jeho ciferný součet je $a_k + a_{k-1} + \dots + a_0$.

Ciferný součet čísla n budeme značit $S(n)$.

Úloha 1. Nechť d je počet cifer v desítkovém zápise čísla n . Pokud označíme n_k číslo, které vznikne smazáním posledních k cifer z čísla n , dokažte vztah

$$n = S(n) + 9n_1 + 9n_2 + \dots + 9n_{d-1}.$$

(APMO 2001)

Písemné sčítání, přechod přes desítku

Většina technik, které budeme používat, je poměrně intuitivní a my začneme tou nejintuitivnější – sčítáním pod sebou. Velmi často nám při řešení stačí si pořádně rozmyslet, co se stane s ciferným součtem, když během klasického písemného sčítání přejdeme přes desítku.

Úloha 2. Najděte číslo n , pro které jsou $S(n)$ i $S(n+1)$ dělitelná sedmi.

(PraSe 36–7–3)

Úloha 3. Mějme dáno přirozené číslo n , jehož cifry jsou ostře rostoucí zleva doprava. Určete ciferný součet čísla $9n$.

(PraSe 23–6–2)

Úloha 4. Skripta MFF jsou číslována šesticifernými čísly, přičemž jsou povoleny nuly na začátku. *Šťastnými* nazveme ta z nich, která mají stejný ciferný součet prvních tří a posledních tří cifer. Dokažte, že součet označení všech šťastných skript je dělitelný sedmi. (PraSe 23–6–3)

Úloha 5. Dokažte, že mezi 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly můžeme vždy najít nějaké, jehož ciferný součet je dělitelný 11. (PraSe 43–2–3)

Úloha 6. Najděte přirozená čísla a, b, c taková, že

$$S(a+b) < 5, \quad S(b+c) < 5, \quad S(c+a) < 5, \quad S(a+b+c) > 50.$$

(PraSe 32–1–6)

Úloha 7. Nechť m, n jsou přirozená čísla a navíc m má d cifer a $d < n$. Vypočítejte ciferný součet $(10^n - 1)m$.

Úloha 8. Vypočítejte ciferný součet $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdots (10^{2^n} - 1)$ v závislosti na n .

Úloha 9. Ciferný součet čísla N je 100, ciferný součet čísla $5N$ je 50. Dokažte, že N je sudé.

Nerovnosti

Můžeme nahlédnout následující rovnost, druhou nerovnost dokázat pomocí sčítání pod sebe a třetí nerovnost dokázat pro malá čísla a pak odvodit z předchozích.

Tvrzení 10. Pro $a, b \in \mathbb{N}$ platí:

- (1) $S(10a) = S(a)$,
- (2) $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$,
- (3) $S(ab) \leq S(a)S(b)$.

Úloha 11. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n).$$

(PraSe 23–6–1)

Úloha 12. Najděte největší možnou hodnotu poměru $\frac{S(n)}{S(16n)}$, kde n je přirozené. (PraSe 35–2–8)

Kritéria dělitelnosti

Ciferné součty se dají občas použít jako jednoduchá kritéria dělitelnosti. Určitě všichni znáte například kritérium dělitelnosti devíti. Číslo n je dělitelné devíti právě tehdy, když je dělitelné devíti číslo $S(n)$. Co už není tak známé, je, že toto kritérium můžeme jednoduše rozšířit na všechny zbytky:

Tvrzení 13. Pro přirozené n platí $S(n) \equiv n \pmod{9}$.

Samozřejmě co platí pro devítku, platí taky pro všechny její dělitele, v tomto případě pro trojku, takže $S(n) \equiv n \pmod{3}$.

Devítku jsme ale nevybrali jen tak náhodou. Tato kongruence platí právě proto, že základ naší soustavy (desítka) je kongruentní s 1 modulo 9. Takže pokud budeme pracovat s cifernými součty v jiné soustavě, například o základu q , pak naše kongruence bude platit pro $q - 1$.

Úloha 14. Vezmeme přirozená čísla od jedné do bilionu a každé z nich postupně zredukujeme na jednociferné číslo tak, že jej opakovaně nahradíme jeho ciferným součtem. Dostaneme víc jedniček nebo dvojek? (Sovětská MO 1964)

Úloha 15. Existuje přirozené číslo n takové, že $S(2^n) = S(2^{n+1})$?

Úloha 16. Je možné najít 19 různých přirozených čísel takových, že jejich součet je 1999 a všechna mají stejný ciferný součet? (Ruská MO 1999)

Úloha 17. Najděte všechny možné hodnoty ciferného součtu druhých mocnin přirozených čísel. (domácí kolo MO 1993)

Úloha 18. Najděte všechna přirozená čísla d taková, že libovolné přirozené číslo dělitelné d zapsané ve 2023-kové soustavě má ciferný součet dělitelný d . (PraSe 23–6–4)

Maximální ciferný součet

Principem této techniky je poznatek, že ze všech n -ciferných čísel má největší ciferný součet číslo $\underbrace{999 \dots 9}_n$. Můžeme tedy jednoduše shora omezit ciferný součet velkých čísel číslem $9(\lfloor \log n \rfloor + 1)$.

Úloha 19. Na tabuli je napsané číslo 2018^{2018} . Když jej 2018-krát nahradíme jeho ciferným součtem, jaké číslo nám na tabuli zbude?

Úloha 20. Určete hodnotu výrazu $S(S(S(4444^{4444})))$. (IMO 1975)

Úloha 21. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$. (PraSe 44–5–5)

Další všemožné úlohy

Úloha 22. Nalezněte číslo n , které je dělitelné $S(n) + 2017$. (PraSe 36–7–1)

Úloha 23. Mějme dáno přirozené číslo n takové, že $S(n) = 100$ a $S(44n) = 800$. Najděte hodnotu $S(3n)$. (Ruská MO 1999)

Úloha 24. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho čísel n takových, že

$$S(n) > 2018 \cdot S(3n).$$

Úloha 25. Nechť $f_1(n) = [S(n)]^2$ a $f_{k+1}(n) = f_1(f_k(n))$. Určete hodnotu výrazu $f_{1991}(2^{1990})$. (IMO Shortlist 1990)

Úloha 26. Necht $f(n) = S(n) + n$. Existuje číslo takové, že $f(n) = 1980$? Dokažte, že pro každé přirozené číslo m můžeme najít číslo n takové, že buď $f(n) = m$ nebo $f(n) = m + 1$. (Sovětská MO 1980)

Úloha 27. Je dán polynom $P(n)$ s celočíselnými koeficienty. Označíme s_n ciferný součet čísla $|P(n)|$. Dokažte, že alespoň jedna hodnota se v posloupnosti s_n vyskytuje nekonečně mnohokrát. (Polská MO 1987)

Unique [Ja:'ni:k] Puzzlíky

Úloha 28. Číslo 2^{29} obsahuje všech 10 cifer kromě jedné. Jaká to je?

Úloha 29. Najdi tři cifry a, b, c takové, že pro ně platí $28a + 30b + 31c = 365$.

Úloha 30. Jsou právě tři 8 ciferná čísla pro něž platí, že součet 8. mocnin jejich cifer je roven tomuto číslu. Dvě z nich jsou 24678051 a 88593477. Urči to třetí.

Návody

1. Použij definici ciferného součtu.
2. O kolik se $S(n + 1)$ sníží oproti $S(n) + 1$ s každou cifrou, která při přičtení jedničky přejde přes desítku?
3. Všimni si, že $9n = 10n - n$.
4. Jaký tvar mají šťastná čísla? Co nějaké párování?
5. Přechody přes 10 se chovají hezky. Přechodů přes větší řády je málo.
6. Uvažovat $x = a + b$, $y = b + c$ a $z = a + c$ je možná jednodušší.
7. Prostě to spočítej jako na základce.
8. Indukce.
9. $5N = \frac{10N}{2}$ a pak už zase dělení pod sebou.
11. Pro druhou nerovnost: co je $S(10n)$?
12. Co je $S(10000n)$?
14. Uvažuj mod 9.
15. Uvažuj mod 3.
16. Uvažuj mod 9 a pak zkus nejmenší varianty.
17. Uvažuj mod 9. Při hledání konstrukce se vyplatí zkoumat čísla, která se skládají (skoro) celá z trojek.
18. Hleď čísla, která ve 2023-kové soustavě dávají kritérium dělitelnosti ciferného součtu.
19. Kolik maximálně cifer má 2018^{2018} ? Jakou nejvyšší hodnotu tak může mít $S(2018^{2018})$? Zkus mod 9.
20. Uvažuj horní odhad každého z ciferných součtů. Použij mod 9.

- 21. Jak rychle roste ciferný součet? Jak rychle roste počet cifer?
- 22. Nech $S(n) + 2017$ být mocninou desíti.
- 23. Uvažuj přechod přes desítku při násobení.
- 24. Najdi jedno a násob ho deseti. Abys ho našel, zkus vydělit velké číslo s malým ciferným součtem třemi.
- 25. Najdi $f_{1998}(11)$. (Což byla mimochodem úloha na AIME 1988.)
- 26. Při přechodu přes desítku se $f(n)$ zmenší, ale přesto se dostane libovolně vysoko.
- 27. Pro polynom s kladnými koeficienty je to jednoduché. Zkus z obecného polynomu nějak dostat polynom, který se bude chovat stejně hezky.
- 28. Zkus mod 9.
- 29. Zkus $29a + 30b + 31c = 366$.
- 30. To určitě. :D

Literatura a zdroje

Příspěvek je založen na stejnojmenném příspěvku od Fíly Čermáka na soustředění v Mamutově 2023, který sám navazoval na přednášku Jáchyma Solečkého z Horních Lysečín 2018, který se zase inspiroval příspěvkem Lenky Slavíkové z Dobré Vody 2010. Tímto jim všem moc děkuji.

Catalanova čísla

LUKÁŠ TROJAN

ABSTRAKT. Catalanova čísla jsou vedle kombinačních čísel jednou z nejčastěji se vyskytujících posloupností čísel v kombinatorice. V tomto příspěvku si ukážeme jejich nejklašičtější vyjádření a některé z více než 65 úloh, které řeší.

Definice. Symbolem C_n značíme n -té *Catalanovo číslo*.

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

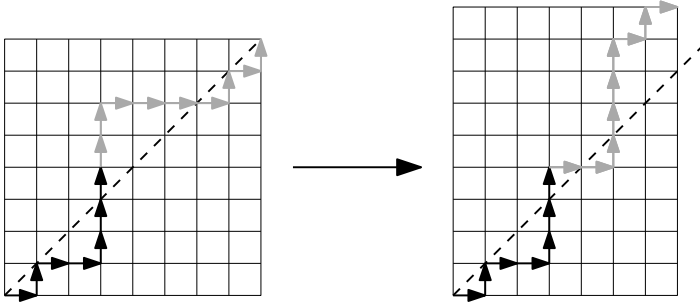
Poznámka. Často se definuje i $C_0 = 1$. Prvních několik Catalanových čísel je postupně 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ...

Definice. *Obdélníkem* $m \times n$ rozumíme obdélník ve čtvercové mřížce, který je m políček vysoký a n políček široký. *Cestou* v obdélníku pak nazýváme trasu z levého dolního do pravého horního rohu, která vede po hranách mřížky, a to pouze doprava a nahoru. *Úhlopříčkou* ve čtverci $n \times n$ nazveme úsečku spojující levý dolní roh s pravým horním.

Věta. Počet cest ve čtverci $n \times n$, které jsou celé pod úhlopříčkou, je C_n .

Důkaz. Uvážíme všechny cesty ve čtverci $n \times n$. Každá cesta se skládá z $2n$ pohybů, a jelikož se cesty skládají pouze z pohybů doprava a nahoru, každou cestu lze jednoznačně určit výběrem n pohybů nahoru z celkových $2n$ pohybů. Cest je tak celkem $\binom{2n}{n}$. Ne všechny cesty jsou ale pod úhlopříčkou.

Spočítáme tak počet cest, které překračují úhlopříčku, a poté tento počet odečteme od celkového počtu. Uvažme libovolnou nevyhovující cestu c . Tato cesta v nějakou chvíli překročí úhlopříčku směrem nahoru. Podíváme se na ní po tomto kroku. Protože se nachází o 1 krok nad úhlopříčkou, tak jsme museli udělat o jeden pohyb nahoru více, než doprava. Když nyní zbytek této cesty převrátíme – tedy z pohybů doprava se stanou pohyby nahoru a obráceně, tak dostaneme cestu c' , která obsahuje $n+1$ pohybů nahoru a $n-1$ pohybů doprava.



Dvě různé c_1 a c_2 cesty se nám nemohou zobrazit na stejnou cestu c' , takže je toto převrácení prosté.

Zároveň pokud máme nějakou cestu v obdélníku $(n+1) \times (n-1)$, tak pokud ji převrátíme poprvé, když počet pohybů nahoru bude větší než počet pohybů doprava, tak dostaneme cestu v obdélníku $n \times n$, která přesahuje úhlopříčku a tedy toto převrácení je bijekce, a tedy počet cest přesahujících úhlopříčku je stejně jako cest v obdélníku $(n+1) \times (n-1)$.

A protože cest v obdélníku $(n+1) \times (n-1)$ je $\binom{2n}{n+1}$ (opět pouze vybereme, které pohyby jdou nahoru) a počet cest pod úhlopříčkou je $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = C_n$. $\square$

Rekurentní vzorec

Tvrzení. Mějme posloupnost $(a_n)_{n \geq 0}$ splňující vztahy

$$a_0 = 1, \quad a_n = \sum_{i=1}^n a_{i-1} a_{n-i},$$

pak $a_n = C_n$.

Důkaz. Pro a_0 je rovnost jasná. Pro $n \geq 1$ si dokážeme, že a_n je rovno počtu cest pod úhlopříčkou čtverce $n \times n$ a tedy i C_n . Budeme postupovat indukcí.

Pro $n = 1$ je rovnost jasná. Pro $n > 1$ předpokládáme, že tvrzení platí pro každé $m < n$. Poté pro každou cestu vezmeme bod, kde se poprvé cesta „dotkla“ úhlopříčky (to se musí stát alespoň na konci, počátek nepočítáme). Nyní budeme pracovat v souřadnicích, kde první bod (levý dolní roh) je $(0, 0)$ a poslední (pravý horní roh) (n, n) . Poté si první bod dotyku s úhlopříčkou označíme (k, k) . Víme, že cesta musela projít body $(0, 1)$ (protože kdyby byl první pohyb nahoru, tak jsme protli úhlopříčku) a $(k-1, k)$ (jinak bychom se nemohli dostat do bodu (k, k)) a na tomto úseku jsme se nemohli dotknout úhlopříčky (jinak by (k, k) nebyl první dotek).

Tedy pokud vezmeme čtverec z bodu $(0, 1)$ do $(k-1, k)$, a čtverec z bodu (k, k) do bodu (n, n) , tak všechny cesty pod úhlopříčkou v obdélníku $n \times n$ s prvním dotykem s úhlopříčkou v bodě (k, k) odpovídají právě cestám pod úhlopříčkami ve čtvercích od $(0, 1)$ do $(k-1, k)$ a od (k, k) do (n, n) a těch je z indukčního předpokladu $a_{k-1} a_{n-k}$. Když poté vezmeme součet přes všechny k dostaneme tvrzení. $\square$

Úlohy

Úloha 1. Kolik existuje korektních uzávorkování n párů závorek?

Úloha 2. Kolik existuje různých triangulací konvexního n -úhelníka¹?

Úloha 3. Radeček skáče po ose přirozených čísel. Začíná v bodě 1 a v každém z deseti kroků buď skočí o 1 číslo vpřed, o 1 číslo vzad (pokud již nestojí v bodě 1), nebo se mu nikam nechce a zůstane stát. Po 10 krocích byl Radeček v bodě 1. Kolika různými způsoby mohl Radeček v 10 krocích skákat a lenořit na ose, když se nikdy nemohl dostat pod číslo 1?

Úloha 4. Matěj nakreslil na papír N tramvajových zastávek (bodů) na centrální lince (přímce) s pravidelnými rozestupy 1. Následně do obrázku dokreslil několik tras tramvajových linek (úseček, bod není úsečka) tak, že každá začíná a končí v některých vyznačených bodech. Navíc pro každé dvě tramvajové trasy (úsečky) a , b platilo, že pokud je jejich průnik nějaká úsečka c , pak $a = c$ nebo $b = c$. Pro dané N Matěj nakreslil největší možný počet linek. Kolika způsoby mohl to mohl v závislosti na N udělat?

Úloha 5. Nechť n je přirozené číslo. Kolik existuje cest v kartézské soustavě souřadnic, které vedou z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2n, 0)$, takových, že z libovolného bodu (x, y) cesta pokračuje buď do bodu $(x + 1, y + 1)$, nebo do bodu $(x + 1, y - 1)$? Kolik z těchto cest nikdy neklesne pod osu x ?

Úloha 6. Kolik existuje posloupností přirozených čísel délky n splňujících $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ a navíc $a_i \leq i$?

Úloha 7. Kolika způsoby si může $2n$ lidí podat ruce přes stůl tak, aby se žádné dva páry rukou nekřížily (každý člověk podává právě jednu ruku jinému člověku)?

Úloha 8. Kolik existuje úplných binárních stromů s $n + 1$ listy? Rozlišujeme „pravé“ a „levé“ syny.

Úloha 9. Kolika způsoby lze vyplnit tabulku $2 \times n$ čísly 1 až $2n$ tak, aby čísla v obou řádcích i ve všech sloupcích byla rostoucí?

Úloha 10. Kolik existuje binárních stromů na n vrcholech? Rozlišujeme „pravé“ a „levé“ syny.

Úloha 11. Množinu přirozených čísel větších než 2 nazveme *hezkou*, pokud obsahuje pouze čísla složená jen z prvních mocnin prvočísel, přičemž pro každé číslo v této množině obsahuje i všechny jeho dělitele. Zvolíme si n různých prvočísel. Kolik existuje hezkých množin takových, že obsahují právě našich n prvočísel a žádná jiná prvočísla neobsahují.

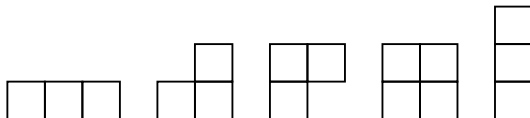
¹Rozdělení na $n - 2$ trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou vrcholy původního n -úhelníka.

Úloha 12. Kolika způsoby je možno postavit schodiště² o n schodech pomocí n obdélníků? (Obdélníky nemusí být tvaru $k \times 1$.)

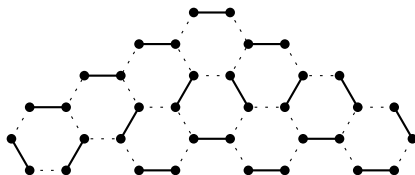
Úloha 13. Kolik je permutací množiny $\{1, \dots, n\}$, které neobsahují klesající podposloupnost délky větší než 2? (Označíme-li permutaci p , pak neexistují $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $i < j < k$ a zároveň $p(i) > p(j) > p(k)$.)

Úloha 14. Pro která n je C_n liché?

Úloha 15. Polyomino³ nazveme *neklesající*, pokud je každý jeho sloupec souvislý (tj. není rozdělen na více částí oddělených prázdnými čtverečky), pozice horního čtverečku v každém sloupci se zleva doprava nesnižuje a obdobně se v každém sloupci nesnižuje pozice nejnižšího čtverečku zleva doprava. Kolik existuje neklesajících polyomin s obvodem délky $2n$?



Úloha 16. Kolik existuje úplných párování vrcholů na šestiúhelníkové pyramidě šířky n ? Úplné párování na šestiúhelníkové pyramidě šířky 4 může vypadat například takto:



²Výška a šířka každého schodu je 1.

³Útvar vzniklý sloučením několika jednotkových čtverců dotýkajících se hranou.

Návody

1. Převed' na počet cest pod diagonálou nebo rekurzi podle první korektní podposloupnosti.
3. Rozmysli si, že v každou chvíli měl Radeček za sebou alespoň tolik skoků vpřed, jako vzad.
4. Převed' centrální linku na n -úhelník.
5. Převed' na cesty pod diagonálou.
6. Převed' na hledání cest pod diagonálou - dívej se na vodorovné hrany.
7. Převed' na uzávorkování.
8. Převed' na uzávorkování.
9. Bijekce na cesty pod diagonálou. Pořadí pohybu danými směry.
10. Použij rekurzivní vztah.
11. Rekurze, první součin dvou prvočísel, který není v množině.
12. Dvě různá políčka na úhlopříčce nemůžou být ve stejném obdélníku. Použij rekurzi.
13. Zaznač si permutaci to tabulky $n \times n$ a najdi pomocí ní cestu nad/pod diagonálou.
14. Použij rekurentní vztah a indukci.
15. Koukni se na horní a dolní trasu z levého dolního do pravého horního rohu polyomina. Poskládej pomocí nich trasu pod diagonálou čtverce.
16. Otoč si obrázek o 150° po směru hodinových ručiček. V každé vrstvě svislých hran je na párování použita právě jedna hrana. Po otočení jde vidět přirozená bijekce mezi volbou těchto hran a hledání cest pod úhlopříčkou.

Literatura a zdroje

- [1] Klárka Grinerová, *Catalanova čísla*, Mrtník, 2023.
- [2] Martin Raška, *Catalanova čísla*, Branná, 2019.
- [3] BRKOS team: *Pomocný text k 3. sérii – Catalanova čísla*, <https://brkos.math.muni.cz/files/povidani/povidani273.pdf>.

Vězni, domorodci a kouzelníci

LUCKA ZŮNOVÁ

ABSTRAKT. Příspěvek sestává z hromady pěkných a často i notně trikových úloh na pomezí logiky a kombinatoriky, jejichž sjednocující myšlenkou je „kdo může co vědět“.

Budeme z různých úhlů zkoumat, co znamená „něco vědět“. Přesněji, bude nás zajímat, v čem všem může být skrytá šikovná informace – a to buď sama od sebe, nebo díky vychytralé domluvě.

Rozhovory

Začneme několika logickými úlohami, které jsou velmi dynamické. Rozmyslet si, co kdo ve kterou chvíli může vědět, totiž vůbec nemusí být triviální. Motto:

Tři logici přijdou do hospody.

„Dáte si všichni tři pivo?“

„Nevím ...“

„Nevím ...“

„Ano.“

Úloha 1. Albert a Bernard se snaží zjistit, kdy má Cheryl narozeniny. Už vědí, že je to některý z následujících deseti dnů: 15. květen, 16. květen, 19. květen, 17. červen, 18. červen, 14. červenec, 16. červenec, 14. srpen, 15. srpen, 17. srpen.

Když se všichni sešli, Cheryl pošeptala Albertovi, který měsíc je ten správný. Potom pošeptala Bernardovi správný den.

Cheryl: „Už víte?“

Albert: „Ne, neví to ani jeden z nás!“

Bernard: „Teď už to ale vím!“

Albert: „Tak já teda taky.“

Kdy má Cheryl narozeniny?

Úloha 2. V kruhu sedělo dvanáct bystrých mužů a každému z nich byla náhodně rozdána jedna z dvanácti karet – devíti prázdných a tří význačných označených jako J , Q a K . Každý z mužů se podíval na svou kartu a poté ji poslal sousedovi

po pravé ruce. Takto se pokračovalo dále, přičemž po každém zhlédnutí karty byli všichni v jeden okamžik vyzváni, aby se přihlásili, pokud vědí, kdo právě drží kterou význačnou kartu. V prvních čtyřech kolech se nepřihlásil nikdo a po spatření páté karty zvedl ruku jeden člověk. Kolik lidí se přihlásilo po spatření šesté karty? A kolik po spatření sedmé? (Náboj)

Úloha 3. Mirek pověděl oběma, Kennymu a Pavlovi, jedno přirozené číslo. Dále jim sdělil, že jejich čísla jsou různá a jejich součtem je dvojciferné číslo. Pak se mezi Kennym a Pavlem odehrála následující konverzace:

Kenny: „Nedovedu určit, kdo z nás má větší číslo.“

Pavel: „Ani já to nedovedu určit, ale prozradím, že moje číslo je dělitelné 17.“

Kenny: „Aha, tak teď už umím jednoznačně určit, jaký je součet našich čísel.“

Určete součet jejich čísel. (Náboj)

Úloha 4. Anna má číslo a , Bill má číslo b , přičemž a , b jsou přirozená čísla lišící se o 1.

Anna: „Neznám tvé číslo.“

Bill: „Já taky ne.“

Anna: „Já už ano.“

Bill: „Já také.“

Najděte číslo, které některý z nich měl.

Úloha 5. Anna, Bill a Cath mají na čelech přilepené karty s přirozenými čísly. Přitom vědí, že součet dvou z těchto čísel dává číslo třetí.

Anna: „Neznám své číslo.“

Bill: „Já taky ne.“

Cath: „Já taky ne.“

Anna: „Ha, moje číslo je 50.“

Jaká jsou ta zbylá dvě?

Úloha 6. Je známo, že a , b jsou přirozená čísla splňující $1 < a < b$, navíc $a + b \leq 100$. Pavel zná součin ab a Sára součet $a + b$.

Pavel: „Neznám ta původní čísla.“

Sára: „Věděla jsem, že je neznáš.“

Pavel: „Už je znám.“

Sára: „Já už taky.“

Úloha 7. V jihoafrickém kmenu Bongo-bongo má každý domorodec na čele modrou, nebo červenou tečku. Tisíciletá tradice praví, že kdykoli někdo zjistí barvu své tečky, musí si následující den vzít život. Jednou přijde do vesnice cizinec a na veřejném shromáždění sdělí všem svůj objev: „Někdo má na čele modrou tečku.“ Ukažte, že tím odstartuje vlnu sebevražd, která skončí smrtí úplně všech domorodců.

(folklor)

Vězni

Vězňům vždy zadáme na první pohled skoro nemožný úkol. Oproti předchozím úlohám je tu ale jeden velký rozdíl: vychytralí vězni si předem mohou domluvit strategii. Mají šanci?

Úloha 8. Sto vězňů stojí v řadě. Každý má na hlavě klobouk, který je buď černý, nebo bílý, a vidí všechny před sebou. Kat jde postupně odzadu a ptá se na barvu klobouku. Když řekne vězeň svou, přežije, jinak je popraven. Všichni slyší odpovědi všech ostatních i jejich osudy. Navrhněte taktiku, při které co nejpravděpodobněji přežije co nejvíce vězňů, pokud se na ní mohou domluvit předem.

(folklor)

Úloha 9. Řešte předchozí příklad pro klobouky, které mají n barev.

Úloha 10. Deset vězňů sedí v kruhu a každý má na čele napsané číslo od 1 do 10 (ne nutně každý jiné). Každý vidí čísla všech ostatních. Na povel všichni současně vykřiknou číslo. Pokud někdo vykřikne to své, jsou všichni osvobozeni. Navrhněte taktiku, při které budou vězni jistě osvobozeni, pokud se mohou domluvit předem.

(folklor)

Úloha 11. Ve vězení sedí 100 vězňů. Ředitel věznice se rozhodl, že jim dá šanci na svobodu. Do 100 očíslovaných šuplíků ve své obrovské kanceláři proto náhodně umístil jména vězňů, do každého šuplíku právě jedno. Vězni budou jeden po druhém chodit do kanceláře. Každý z nich se může postupně podívat do 50 šuplíků. Pokud se všem vězňům povede nalézt svá jména, jsou propuštěni, jinak je ředitel nechá popravit. Před začátkem hry se navíc mohou domluvit. Vymyslete pro vězně takovou strategii, aby jejich šance na propuštění byla alespoň $1 - \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}\right) > \frac{3}{10}$.

(folklor)

Úloha 12. V kruhu sedí n vězňů. Kouzelník si u každého hodí spravedlivou minci a podle toho mu dá červený, nebo modrý klobouk. Každý vězeň vidí klobouky ostatních, ale ne ten svůj. Poté všichni najednou řeknou nějaká reálná čísla. Vyhrají právě tehdy, když bude součet jejich čísel kladný a červených klobouků bude sudý počet, nebo pokud bude součet jejich čísel záporný a červených klobouků bude lichý počet. Mohou si ovšem předem domluvit strategii. V závislosti na n nalezněte největší možné p , pro které existuje strategie taková, že vězni vyhrají s pravděpodobností p .

(iKS-5-C7)

Úloha 13. V kruhu sedí $n \geq 3$ vězňů. Soudce si u každého vězně hodí spravedlivou minci a podle toho mu dá buď modrý, nebo červený klobouk. Každý z vězňů pak soudci buď pošeptá „červený“, „modrý“, nebo „nevím“. Aby nebyli odsouzeni, musí se alespoň jeden vězeň trefit a žádný se nesmí splést. Navrhněte strategii, při které uspějí s maximální pravděpodobností.

Kouzelníci

Nyní se dostáváme k úlohám, ve kterých vystupují různí kouzelníci se svými promyšlenými triky.

Úloha 14. Kouzelník Arutyun a jeho asistent Amayak předvedou následující supertrik. V místnosti je ruleta. Diváci na ní vyznačí 2007 bodů a Amayak jeden z nich smaže. Potom se Arutyun vrátí do místnosti a uhodne půlkružnici, na které smazaný bod ležel. Jak mohou tento trik provést? (ARO 2007)

Úloha 15. Dva kouzelníci Adam a Bonifác byli uvězněni a žalárník Emil s nimi chce hrát ďábelskou hru. Na stole v cele je pevně postavena šachovnice $n \times n$. Emil odvede Bonifáce pryč a po svém návratu na každé políčko šachovnice položí minci, na jejíž vrchní straně je buď panna, nebo orel. Následně ukáže Adamovi své nejoblíbenější políčko a Adam pak musí otočit právě jednu minci. Poté je Bonifác přiveden zpět. Uhodne-li Bonifác Emilovo oblíbené políčko, budou oba kouzelníci propuštěni. Pro která n lze Emila přelstít? (ITAMO 2013)

Úloha 16. Arutyun a Amayak ukazují další zázračný trik. Diváci napíší na tabuli posloupnost n cifer $0, 1, \dots, 9$ a Amayak dvě sousední zakryje černým diskem. Posléze Arutyun přijde a dvě zakryté číslice bezchybně uhodne včetně jejich pořadí. Pro které nejmenší n takový trik mohou předvádět? (ARO 2007)

Úloha 17. Jsou dána přirozená n a k splňující $n \geq k \geq 2$. Hrajeme hru proti zlému čaroději. Ten má $2n$ pexesových karet, tj. balíček obsahuje n dvojic stejných karet. Tyto karty čaroděj umístí do řady, čímž hra začíná. V každém tahu můžeme otočit k karet. Pokud mezi nimi jsou dvě stejné, okamžitě vyhráváme. V opačném případě je čaroděj podle své nálady nějak zamíchá a umístí zpět do řady. Pro které hodnoty k umíme určitě v konečném počtu tahů vyhrát? (USAMO 2016)

Úloha 18. Kenny s Pepou se domluvili, že večer při ohni předvedou trik. Pepa nechal Olina vybrat pět písní ze zpěvníku se 124 písněmi. Sám pak z těchto pěti písní vybral čtyři a určil, v jakém pořadí se budou hrát. Na to zavolali Kennymu a ony čtyři písně mu v daném pořadí zazpívali. Jakmile dozpívali, Kenny ihned začal zpívat zbývající pátou. Jak to Pepa s Kennym mohli udělat? (PraSe-30-1-8)

Kódy

Plynule pokračujeme v řešení dalších problémů, ve kterých je také potřeba najít nějaké chytré kódování.

Úloha 19. Na obvodu rulety jsou na n pozicích napsané cifry 0 a 1. Většina kola je však skrytá, vidět je jen k následujících pozic. Cifry jsou ale na kole napsané tak chytře, že z těchto k cifer vždy umíme poznat, jak je ruleta natočená. V závislosti na k nalezněte maximální n , pro které je to možné.

Úloha 20. Dva dobří přátelé si píší zprávy sestávající vždy přesně z k písmen n -písmenné abecedy. Aby se nemohlo dojít k nedorozumění, musí se každá dvě používaná slova lišit alespoň na dvou pozicích. Ukažte, že mohou používat k^{n-1} různých slov. (KMS 05/06 Z3 12)

Úloha 21. Medvěd měl sen o polynomu p s nezápornými celými koeficienty. Kdykoli Liška řekne číslo z , Medvěd jí prozradí hodnotu $p(z)$. Kolik nejméně otázek Liška potřebuje k tomu, aby určila Medvědův polynom? (PraSe-36-4-6)

Úloha 22. Dva ruští a jeden americký špion se potkali v Moskvě u partičky karet. Mají sedm různých karet. Oba Rusové si líznou tři a na Američana zbude jen jedna. Rusové by rádi ještě před začátkem partie zjistili, kdo drží které karty. To chtějí provést tak, aby si Američan stále nebyl jistý vlastníkem žádné další karty. Může mít ruská rozvědka takový protokol, který jim to umožní bez ohledu na to, zda jej Američan zná? (Moskva 2000)

Nekonečná jízda

Zkusme nakonec řešit další hádanky s vězni, ve kterých však bude vystupovat nějaké to nekonečno¹.

Úloha 23. Ve vězení sedí 100 vězňů. Čas od času vezme bachař některého z nich na výslech. Ve výslechové místnosti je jen jedna žárovka s vypínačem, který vězni mohou přepínat. Kterýkoli vězeň může při výslechu prohlásit: „Už jsme byli všichni vyslechnuti, takže nás nemáte důvod dál zadržovat!“ Je-li to pravda, budou všichni propuštěni, v opačném případě ihned popraveni. Bachař si přitom musí výslechy předem naplánovat tak, aby každého vězně potenciálně vyslýchal nekonečněkrát. Mohou se vězni bezpečně dostat na svobodu?

Úloha 24. Řešte předchozí úlohu s následující obtíží: Předem je dáno přirozené k a bachař smí až k -krát změnit stav žárovky.

Předchozí příklad má velmi zajímavá zobecnění, která vězňům umožňují skoro libovolnou komunikaci. My se však raději pustíme do dalších příkladů jiného rázu.

Úloha 25. Za sebou sedí prasátka postupně očíslovaná přirozenými čísly, přičemž každé vidí všechny před sebou. Každé má na hlavě klobouk v nějakém odstínu šedé². Naráz všechna musí vykřiknout barvu svého klobouku. Existuje taková strategie, aby se spletlo pouze konečně mnoho z nich? (folklor)

¹Kdykoli to hraje roli, věříme v *axiom výběru*.

²Každý takový odstín odpovídá nějakému reálnému číslu z intervalu od 0 do 1.

Úloha 26. Král má ve sklepení svého hradu za každé přirozené číslo právě jednu truhlu s hromadou zlata nějaké reálné hmotnosti. Jednoho dne zadal svým 100 komorníkům nelehký úkol. Komorníci budou po jednom chodit do sklepa. Každý komorník se pak může podívat do libovolně mnoha truhlic, ale ne do všech. Při výstupu ze sklepa pak musí oznámit číslo nějaké truhly, kterou neotevřel, a váhu zlata v ní. Pokud se splete nejvýše jeden komorník, budou všichni bohatě odměněni. Můžou se komorníci předem domluvit tak, aby to zvládli?

Návody

1. Rozebírejte.
2. Po prvním zvednutí ruky ostatní okamžitě vědí, že tento člověk držel jako první a jako pátou význačné karty.
3. První dvě věty jim dávají pouze čísla 17 a 34. Protože Kenny ví jaké z nich Pavel má, musí mít sám to druhé.
4. První otázka zakazuje 1 pro Annu, druhá 1, 2 pro Billa. Potom ale musel mít jeden z nich 3.
5. Řešení je $(a, b, c) = (50, 20, 30)$.
6. Vyjde 4 a 13, ale dá to hodně rozebírací práce.
7. Indukce dle počtu modrých teček.
8. Parita, splést se může jen první.
9. Počítání modulo n , splést se může jen první.
10. Každý si zabere jeden součet modulo 10.

11. Vězni si mohou označit šuplíky svými jmény a podle nich je procházet.
12. Nalezněte strategii, která se rozbije pouze tehdy, když jsou všechny klobouky červené.
13. Představte si n -dimenzionální krychli. Vymyslete strategii, která buď funguje, nebo se spletou všichni.
14. Orientujte si kružnici a soustřeďte se na nejdelší oblouk.
15. Jde to pouze pro $n = 2^k$. Adam a Bonifác si čtverečky označí čísla ve dvojkové soustavě a chytře využijí jejich XOR. Pro jiná n kódování nevyjde kvůli dělitelnosti.
16. Díky nutnosti jednoznačného kódování odhadněte $n \geq 101$. Pro 101 si hrajte se součtem sudých a součtem lichých pozic modulo 10.
17. V jednom případě si vyrobte karty, které znáte. V druhém případě to zvolte tak, aby to nevyšlo.
18. Je třeba z každé pětičky písni odebrat jednu tak, abychom každou čtveřici dostali 24krát. Z každé pětičky seřazených písni odeberte tolikátou, jaký dává jejich součet zbytek modulo 5.
19. Uvažte orientovaný graf, jehož vrcholy jsou $(k - 1)$ -tice nul a jedniček a hrany odpovídají jejich překrývání na $(k - 2)$ následujících pozicích. Všimněte si, že vyrobený graf je eulerovský.
20. Vyberte ta slova, jejichž součet písmen je stejný modulo k .
21. Dvě otázky stačí – nejdřív se zeptáme na $p(1)$ a posléze na hodnotu v tak obrovském čísle k , abychom měli k dispozici jednoznačný zápis v soustavě o základu k .
22. Vyradí součet své ruky modulo 7, což stále neurčuje pozici žádné z karet.
23. Vězni si mezi sebou zvolí počtáře, kterému předají zprávu o svém výsledku rozsvícením zhasnuté žárovky.
24. Každý vězeň pošle $2k + 1$ rozsvícení počtáři, který nahlásí úspěch po $100(2k + 1) - k$ spočtených žárovkách.
25. Z každé skupinky posloupností, které se od nějakého indexu shodují, se prasátka (vybavená axiomem výběru) domluví na jednom reprezentantovi.
26. Vyřešte si to nejdřív pro dva.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je kopií příspěvku *Radečka Olšáka*, který převzal příspěvek *Kuby Löwita*, kterým tímto děkuji za kompletaci krásných příkladů.

- [1] Radek Olšák: *Vězni, domorodci a kouzelníci*, Mrtník, 2023.

Obsah

Fibonacci (Natália Bátorová)	3
Bipartitní grafy (Káťa Danilina)	7
Obsahy (Alicka Dományová)	12
Polynómy v $\mathbb{N}$ (Alicka Dományová)	15
Nedeterministické počítání (Vojta Gaďurek)	18
Sčítání (Matěj Gajdoš)	23
Interpolace (Vít Hanika)	28
Šoupání (Vít Hanika)	32
Úlohy s tabulkami (Petr Hladík)	37
Spirální podobnost (Markéta Honsejková)	42
Mřížky a geometrie čísel (David Hromádka)	48
Mixtilineární kružnice (Zdeněk Pezlar)	59
Projektivní geometrie (Zdeněk Pezlar)	63
Simsonova přímka (Lenka Poljaková)	68
Algebraické triky (Ondřej Sedláček)	72
Goniometrické funkce a substituce (Josef Soural)	79
Ciferné součty (Anna Trnková)	85
Catalanova čísla (Lukáš Trojan)	90
Vězni, domorodci a kouzelníci (Lucka Zůnová)	95