

Travná

SBORNÍK, PODZIM 2025

NATÁLIA BÁTOROVÁ
KÁŤA DANILINA
VOJTA GAĎUREK
VÍT HANIKA
PETR HLADÍK
DAVID HROMÁDKA
JOHANA KUBÁTOVÁ
DANIEL PEROUT
ZDENĚK PEZLAR
LENKA POLJAKOVÁ
MATOUŠ ŠAFRÁNEK
JOSEF „JOSÉ“ SOURAL
ANNA TRNKOVÁ
MAREK VALKOVIČ
ADÉLA KAROLÍNA ŽÁČKOVÁ

AUTOŘI: Natália Bátorová, Káťa Danilina, Vojta Gaďurek, Vít Hanika, Petr Hladík, David Hromádka, Johana Kubátová, Daniel Perout, Zdeněk Pezlar, Lenka Poljaková, Matouš Šafránek, Josef „José“ Sural, Anna Trnková, Marek Valkovič, Adéla Karolína Žáčková

EDITOR: jeditor

vydání první, náklad 40 výtisků

září 2025

Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Cyklotomické polynomy

NATÁLIA BÁTOROVÁ

ABSTRAKT. Na přednášce si ukážeme některé základní vlastnosti cyklotomických polynomů, které mají řadu aplikací ve vysokoškolské i pokročilé olympiádní matematice. Nabyté znalosti využijeme v elegantních důkazech speciálního případu Dirichletovy věty a Zsigmondyho věty.

Cyklotomické polynomy jsou objektem, se kterým se přirozeně setkáme, koukáme-li se na rozklady polynomů tvaru $x^n - 1$ pro přirozená n . Pojďme si ale nejdříve představit několik pojmů a tvrzení, bez nichž se neobejdeme:

Definice. O polynomu řekneme, že je *monický*, pokud je jeho vedoucí koeficient roven 1.

Okruhem rozumíme množinu $\mathbb{K}$, ve které umíme sčítat, odčítat a násobit podle všech obvyklých pravidel (přičemž násobení nemusí být komutativní a výsledky těchto operací jsou opět prvky $\mathbb{K}$).

Definice. Je-li $\mathbb{K}$ okruh, tak *okruh polynomů nad $\mathbb{K}$* (značíme $\mathbb{K}[x]$) je množinou polynomů jedné proměnné, jejichž koeficienty leží v $\mathbb{K}$. Budeme pracovat s okruhy $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ a $\mathbb{Z}_p[x]$.

Definice. O polynomu $P \in \mathbb{K}[x]$ řekneme, že je *ireducibilní nad $\mathbb{K}$* , pokud neexistují nekonstantní polynomy $Q, R \in \mathbb{K}[x]$ takové, že $P = QR$.

Věta. Pro libovolné těleso $\mathbb{K}$ má nenulový polynom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ stupně n nejvýše n kořenů v $\mathbb{K}$.

Věta. (Základní věta algebry) Nenulový polynom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stupně n má (včetně násobnosti) právě n kořenů v $\mathbb{C}$.

Věta. (Dělení se zbytkem) Pro libovolné nenulové polynomy $P(x), Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ existují jednoznačně dané polynomy $A(x), B(x) \in \mathbb{K}[x]$, pro které platí $P(x) = A(x)Q(x) + B(x)$ a $\deg(B) < \deg(Q)$.

Věta. (Gaussova) Je-li monický polynom ireducibilní nad $\mathbb{Z}[x]$, pak je ireducibilní i nad $\mathbb{Q}[x]$.

Definice. O čísle $\alpha \in \mathbb{C}$ řekneme, že je *algebraické*, pokud existuje monický polynom $P \in \mathbb{Q}[x]$, jehož je α kořenem. Má-li navíc P ze všech takových polynomů

nejnižší možný stupeň, tak ho nazýváme *minimálním polynomem* α , $\deg(P)$ pak nazýváme *stupněm* α .

Definice. O komplexním čísle z řekneme, že je *odmocninou z jedné*, pokud je kořenem polynomu $z^n - 1$ pro nějaké přirozené n . Pokud navíc pro všechna čísla menší než n platí $z^n \neq 1$, tak je z *primitivní n -tou odmocninou z jedné*. Dále budeme značit $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Definice. Pro libovolné přirozené n definujeme *cyklotomický polynom* jako

$$\Phi_n(x) = \prod_{1 \leq i \leq n, \gcd(n,i)=1} (x - \omega_n^i).$$

Cvičení. Spočítejte si několik prvních cyklotomických polynomů. Jaký je řád polynomu $\Phi_n(x)$?

Cvičení. Rozmyslete si, že Φ_n je monický polynom, jehož kořeny jsou právě primitivní n -té odmocniny jedné.

Cvičení. Nahlédněte, že platí $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$. Z toho odvoďte známou identitu $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Věta. Pro libovolné přirozené n má polynom $\Phi_n(x)$ celočíselné koeficienty.

Cvičení. Dokažte, že $\Phi_n(x)$ je reciproký pro $n \geq 2$, tj. že pro jeho koeficienty a_i platí $a_{\varphi(n)-i} = a_i$.

Cvičení. Ukažte, že součet primitivních n -tých odmocnin z jedné je roven $\mu(n)$, kde μ je Möbiova funkce

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^r, & n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \text{ součin } r \text{ různých prvočísel,} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta. Je-li p prvočíslo a n jeho násobek, pak platí $\Phi_{np}(x) = \Phi_n(x^p)$. Pokud n není dělitelné p , pak platí $\Phi_{np}(x)\Phi_n(x) = \Phi_n(x^p)$.

Cvičení. Spočítejte si několik dalších cyklotomických polynomů pomocí minulé věty.

Cvičení. Rozmyslete si, že pro lichá $n \geq 3$ platí $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

Cvičení. Ukažte, že pro nesoudělná n, a platí $\Phi_n(x^a) = \prod_{d|a} \Phi_{nd}(x)$.

Věta. (MFV pro polynomy) Buď p prvočíslo, x celé číslo a $f(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty. Potom platí $f(x^p) \equiv f(x)^p \pmod{p}$.

Věta. $\Phi_n(x)$ je ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$ pro libovolné přirozené n .

Řády a nesoudělnost

Věta. Pro přirozené číslo n a prvočíslo p takové, že $\gcd(n, p) = 1$, neexistuje žádný nekonstantní polynom $m \in \mathbb{Z}_p[x]$ takový, že $m^2(x) \mid x^n - 1$.

Věta. *Není-li mn dělitelné prvočíslem p pro $m \neq n$, pak jsou v $\mathbb{Z}_p[x]$ polynomy $\Phi_m(x)$ a $\Phi_n(x)$ nesoudělné.*

Věta. *Buď p prvočíslo. Potom pro libovolné celé t a libovolné přirozené n , nesoudělné s p , platí $p \mid \Phi_n(t) \iff \text{ord}_p(t) = n$.*

Cvičení. Rozmyslete si, že z minulého cvičení vyplývá existence primitivního prvku modulo p .

Věta. *Buďte m, n různá přirozená čísla. Jsou-li hodnoty $\Phi_m(t)$ a $\Phi_n(t)$ soudělné pro nějaké celé t , pak existuje prvočíslo p a celá čísla k, ℓ , pro něž $\frac{m}{n} = p^k$ a $\gcd(\Phi_m(t), \Phi_n(t)) = p^\ell$.*

Věta. (Schurova věta) *Množina hodnot libovolného nekonstantního polynomu $P \in \mathbb{Z}[x]$ v přirozených číslech má nekonečně mnoho prvočíselných dělitelů.*

Věta. (slabší Dirichletova věta) *Aritmetická posloupnost $\{an + 1\}_{n=1}^\infty$ obsahuje nekonečně mnoho prvočísel pro libovolné přirozené a .*

Zsigmondyho věta

Věta. (Zsigmondy) *Jsou-li $a > b$ nesoudělná přirozená čísla, tak pro libovolné přirozené n (tedy až na níže uvedené výjimky) existuje prvočíslo p , jež dělí $a^n - b^n$, ale nikoliv $a^i - b^i$ pro $1 \leq i < n$ (tzv. primitivní prvočíselný dělitel). Jediné výjimky tvoří následující případy:*

- (1) $n = 1$ a $a - b = 1$
- (2) $n = 2$ a $a + b = 2^k$ pro $k \in \mathbb{Z}$
- (3) $a = 2, b = 1, n = 6$

Analogické tvrzení platí i pro $a^n + b^n$, až na výjimku $a = 2, b = 1, n = 3$.

Cvičení. Existence primitivního prvočíselného dělitele $a^n - 1$ je ekvivalentní s tím, že $\Phi_n(a)$ má prvočíselného dělitele nesoudělného s n .

Cvičení. Rozmyslete si, že stačí dokázat Zsigmondyho větu jen pro rozdíl a pouze v případě $b = 1$.

Věta. *Předpokládejme, že pro přirozená $a, n > 1$ jsou všechny dělitele $\Phi_n(a)$ zároveň děliteli n . Potom buď $n = 2$ nebo $\Phi_n(a)$ je prvočíslo.*

Věta. *Buďte $a, n > 1$ přirozená čísla. Necht' $n = p^k r$ pro prvočíslo p a r nesoudělné s p . Potom $\Phi_n(a) > (b^p - b^{p-2})^{\varphi(r)}$ pro $b = a^{p^{k-1}}$.*

Příklady

Úloha 1. Dokažte, že žádné z čísel $10001, 100010001, \dots$ není prvočíslo.
(Britská MO)

Úloha 2. Najděte všechny dvojice celých čísel (x, y) splňující $\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$.
(IMO 2006 SL)

Úloha 3. Buď $n > 2$ liché číslo a $S \subset \{1, \dots, n\}$. Označme dále t_i počet neprázdných podmnožin S , které mají součet prvků kongruentní s i modulo n . O množině S řekneme, že je n -vyvážená, pokud platí $t_0 = t_1 = \dots = t_{n-1}$.

(1) Ukažte, že existuje n -vyvážená množina pro libovolné liché n .
(CPS 2016)

(2) Ukažte, že $\mathbb{Z}_n^*$ je n -vyvážená.

Úloha 4. Dokažte, že $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ je algebraické číslo. Jaký je jeho stupeň?

Úloha 5. Buď X neprázdná podmnožina vrcholů pravidelného n -úhelníku. O X řekneme, že je *křupavoučká*, pokud její těžiště splývá s těžištěm celého n -úhelníku. Charakterizujte všechny křupavoučké množiny pro:

- (1) n rovné mocnině prvočísla;
- (2) n rovné součinu dvou prvočísel;
- (3) co nejobecnější možné n .

Úloha 6. Dokažte, že pro různá lichá prvočísla $p_1, \dots, p_n$ má $2^{p_1 \cdots p_n} + 1$ alespoň 2^{n-1} dělitelů.
(silnější IMO 2002 SL)

Úloha 7. Najděte všechna přirozená n , pro která je $\frac{2^n+1}{n^2}$ celé číslo.
(IMO 1990)

Úloha 8. Dokažte, že pokud všechny kořeny $p \in \mathbb{Z}[x]$ leží na jednotkové kružnici, pak už jsou to nutně odmocniny z jedné.
(Kroneckerova věta)

Úloha 9. Pro dané přirozené číslo k charakterizujte všechny polynomy $p \in \mathbb{Z}[x]$, pro které je $p(x^k)$ dělitelné $p(x)$.

Úloha 10. Ukažte, že $\sum_{1 \leq i \leq n, \gcd(n,i)=1} \omega_n^{ki}$ je celé číslo pro libovolná přirozená k, n . Obecněji: je-li p symetrický polynom $\varphi(n)$ proměnných s celočíselnými koeficienty, tak jeho hodnota v kořenech $\Phi_n(x)$ je celé číslo.

Úloha 11. Je-li ω odmocnina z jedničky a $f \in \mathbb{Z}[x]$, pro které platí $|f(\omega)| = 1$, pak je $f(\omega)$ rovněž odmocnina z jedničky.

Úloha 12. Ukažte, že pro nekonečně mnoho přirozených čísel n jsou všichni prvočíselní dělitelé $n^2 + n + 1$ menší než $\sqrt{n}$.

Úloha 13. (pro odvážné) Ukažte, že se každé celé číslo objeví jako koeficient některého cyklotomického polynomu.

Úloha 14. (dávka abstraktní algebry) Nechť a, b, c, d jsou primitivní n -té odmocniny z jedné. Určete hodnotu n , platí-li $a + b + c + d = 1$.

Návody

1. Rozlož na cyklotomické polynomy.
2. Pracuj modulo 7.
3. Pro první část použij binárku. Ve druhé využij, že pro $p \in \mathbb{C}[x]$ je $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} p(\omega_n^i)$ součet koeficientů p , u kterých je exponent x dělitelný n .
4. $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, stupeň vyjde $\frac{\varphi(n)}{2}$ pro $n > 2$.
5. Použij analytiku v Gaussově rovině a dělitelnost cyklotomickými polynomy. Jo, a třetí část je open :D.
6. Rozložte na cyklotomické polynomy.
7. Nejprve pomocí MFV ukaž, že nejmenší prvočíselný dělitel n je trojka. Pak pomocí rozkladu na CP ukaž, že devítka nedělí n . Dokonči zase přes prvočíselné dělitele.
8. Jsou-li kořeny p $z_1, \dots, z_n$, tak se dívej na polynomy p_k s kořeny $z_1^k, \dots, z_n^k$. Ukaž, že existuje takové k , pro které platí $p_k(x) = p(x)$.
9. Použij minulý příklad a zapoj do toho cyklotomické polynomy.
10. Celočíselnost koeficientů $\Phi_n(x)$ a Newtonovy vztahy/základní věta symetrických polynomů.
11. Ukaž, že je-li $\Phi_n(\omega) = 0$, pak $\Phi_n(x) \mid f(x)f(x^{n-1}) - 1$; z toho odvod $|f(\omega^k)| = 1$ pro $(k, n) = 1$ a z minulého cvičení $\prod_{(k, n)=1} (x - f(\omega^k)) \in \mathbb{Z}[x]$, pak je to jen Kronecker.
12. Zvol $n = k^m$ a rozlož $\Phi_3(k^m)$ na součin, pak využij toho, že $\frac{\varphi(n)}{n}$ může být libovolně blízko nule.
13. Je to dost kencr, kdo to dá, dostane lízátka ;).
14. Pro $(k, n) = 1$ uvaž automorfismy f_k z $\mathbb{Q}[\omega_n]$, které zobrazí ω_n na ω_n^k . Po sečtení $f_k(L) = f_k(P)$ přes všechna k dostaneme, že musí platit $4\mu(n) = \varphi(n)$.

Literatura a zdroje

Chtěla bych poděkovat Danilu Koževnikovi, jehož příspěvek jsem téměř beze změn převzala.

- [1] <https://imosuisse.ch/smo/skripte/imovorbereitung/rootsofunity/en-roots-ofunity.pdf>
- [2] <http://yufeizhao.com/olympiad/exponent-lifting-sol.pdf>
- [3] Lawrence Sun: Cyclotomic polynomials in olympiad number theory

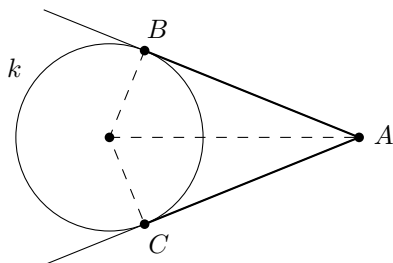
Překlápění tečen

KÁŤA DANILINA

ABSTRAKT. S tečnami se setkáváme například v olympiádní geometrii poměrně často. V přednášce se podíváme na některé jejich základní vlastnosti a ukážeme si, jak si s jejich pomocí poradit i s těžšími příklady.

Při pohledu na příklad, kde se vyskytují tečny, bývá mnohdy první myšlenkou využít úsekové úhly, které nám tečny poskytují. Přestože úhlení je velmi častou a spolehlivou technikou v řešení geometrických příkladů, zdaleka ne vždy je elegantní a ne vždy také vede ke kýženému cíli. Ukážeme si proto některé, někdy snad trochu opomíjené vlastnosti tečen skýtající nám jinou cestu řešení.

Tvrzení. Mějme kružnici k a bod A ležící vně kružnice. Vedme bodem A tečny ke k , body dotyku s kružnicí označme B , C . Pak $|AB| = |AC|$.



Tvrzení. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC , CA a AB po řadě v bodech D , E a F . Potom $|AE| = |AF| = \frac{-a+b+c}{2}$.

Tvrzení. V trojúhelníku ABC se kružnice připsaná straně BC dotýká přímk BC , CA , AB po řadě v bodech D , E , F . Pak platí, že

- (i) $|AE| = |AF| = \frac{a+b+c}{2}$,
- (ii) $|BD| = |BF| = \frac{a+b-c}{2}$, $|CD| = |CE| = \frac{a-b+c}{2}$,
- (iii) body dotyku s vepsanou a připsanou kružnicí jsou středově souměrné podle středu příslušné strany.

Cvičení. Nechtě jsou přímky p a q společnými vnějšími tečnami kružnic k_1 a k_2 . Přímka p se kružnice k_1 dotýká v bodě A a kružnice k_2 v bodě B , přímka q se kružnic dotýká v bodech C a D . Dokažte, že pak platí:

- (i) $|AB| = |CD|$,
- (ii) pokud se kružnice neprotínají a jejich vnitřní tečna r protíná přímky p a q v bodech X a Y , pak $|AB| = |CD| = |XY|$.

První krůčky

Úloha 1. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A je poloměr vepsané kružnice roven $s - |BC|$, kde s je polovina obvodu trojúhelníku ABC .

Úloha 2. Mějme kružnici k se středem S o poloměru 1 a bod P takový, že $|PS| = 3$. Tímto bodem vedme tečny ke kružnici k , které se jí dotknou v bodech A , B . Dále si zvolme libovolný bod T kratšího oblouku AB kružnice k a jím vedme tečnu ke k . Tato tečna protne úsečky AP a BP v bodech X a Y . Určete obvod trojúhelníku PXY . (Náboj 2008)

Úloha 3. Je dán trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou k , kde $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CA| = 8$. Body X a Y leží uvnitř stran AB a AC tak, že XY je tečna kružnice k . Určete obvod trojúhelníku AXY .

Úloha 4. Mějme trojúhelník ABC . Nakreslíme tři tečny k jeho vepsané kružnici tak, že každá odřízne jiný z vrcholů trojúhelníku. Obvody odříznutých trojúhelníků jsou 1, 2 a 3. Dokažte, že původní trojúhelník byl pravoúhlý. (MKS 32–6–3)

Úloha 5. Sestrojte trojúhelník ABC , znáte-li jeho obvod o , poloměr ρ kružnice připsané ke straně BC a velikost výšky v na tuto stranu. (MO 68–A–I–5)

Úloha 6. V daném trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC . Kružnice vepsaná trojúhelníku ABD se dotýká stran AB a BD v bodech K a L . Kružnice vepsaná trojúhelníku ADC se dotýká stran DC a AC v bodech M a N . Dokažte, že body K , L , M , N leží na jedné kružnici. (MO 64–A–I–5)

Úloha 7. Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $|AB| > |BC|$. Body K a M jsou body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD a ABC s úhlopříčkou AC . Body L a N jsou obdobně body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD a ABD s BD . Dokažte, že $KLMN$ je obdélník. (MO 54–A–I–2)

Úloha 8. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Na polopřímce opačné k polopřímce BC leží bod P takový, že $|AB| = |BP|$. Analogicky na polopřímce opačné k polopřímce CB leží bod Q takový, že $|AC| = |CQ|$. Označme J střed kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku a D , E po řadě její body dotyku s přímkami AB a AC . Předpokládejme, že polopřímky opačné k polopřímkám DP a EQ se protínají v bodě F různém od J . Dokažte, že $AF \perp FJ$. (MO 68–A–III–4)

Úloha 9. Trojúhelník ABC má obvod 8. Uvnitř stran AB , AC jsou postupně zvoleny body D , E tak, že $DE \parallel BC$ a zároveň je DE tečnou kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Jaká je největší možná délka DE ? (Kyjev TST 2019)

Tečnové čtyřúhelníky

Tvrzení. (o tečnovém čtyřúhelníku) Je dán čtyřúhelník $ABCD$, který má vepsanou kružnici (dotýká se všech čtyř stran). Ukažte, že $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.

Úloha 10. Je dán rovnoběžník $ABCD$, přičemž $|AB| = 2 \cdot |BC|$. Určete všechny přímky, které dělí daný rovnoběžník na dva tečnové čtyřúhelníky. (MO 64–A–S–2)

Úloha 11. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC se úhlopříčky AC dotýkají v jednom bodě.

Úloha 12. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|AB| + |BC| = |CD| + |AD|$. Kružnice vepsané trojúhelníkům ABD a CBD se úhlopříčky BD dotýkají v bodech X a Y . Dokažte, že body X a Y jsou stejně vzdáleny od středu úsečky BD .

Úloha 13. Na přímce a , na níž leží strana BC trojúhelníku ABC , jsou dány body dotyku všech tří jemu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané. (MO 63–B–I–3)

Úloha 14. Uvnitř stran BC , CA , AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D , E , F tak, aby se úsečky AD , BE , CF protály v jednom bodě, který označíme G . Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte. (MO 52–A–III–2)

Úloha 15. Mějme trojúhelník ABC s obvodem 4. Na polopřímkách AB a AC označme postupně body X , Y tak, že $|AX| = |AY| = 1$ a úsečky BC a XY se protínají v bodě M . Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABM , ACM má obvod 2. (Rusko 2011)

Úloha 16. Nechť Γ je kružnice se středem I a $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, jehož strany AB , BC , CD a DA jsou tečnami kružnice Γ a Ω je kružnice opsaná trojúhelníku AIC . Polopřímka BA protíná kružnici Ω v bodě X , který leží za bodem A , a polopřímka BC protíná Ω v bodě Z , který leží za bodem C . Polopřímky AD a CD protínají kružnici Ω po řadě v bodech Y a T , které leží za bodem D . Dokažte, že

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

(IMO 2021 – 4)

Návody

1. Čím je zajímavý čtyřúhelník AP_1IP_2 , kde I je střed kružnice vepsané a P_1, P_2 jsou její body dotyku s odvěsnami?
2. Co víme o úsečce PB ?
3. Nechť P je bod dotyku kružnice k a strany AB . Pomůže nám pak délka úsečky AP ?
4. Zkus využít poznatky z minulého příkladu.
5. Umíme z kružnice připsané získat bod A ? Je pak BC tečna ještě nějaké jiné kružnice?
6. Zkus dokázat, že se osy úseček KL , LM a MN protínají v jednom bodě, konkrétně ve středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC .
7. Dokaž pomocí překlápění tečen, že v $KLMN$ se úhlopříčky půlí a jsou stejně dlouhé.
8. Dokaž, že F leží na kružnici opsané čtyřúhelníku $ADJE$, tedy že $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle AEF|$.
9. Zkus si vyjádřit DE pomocí BC . Najdi vrchol paraboly popisující onu kvadratickou rovnici vyjádření.
10. Dokaž, že pokud $ABCD$ není obdélník, pak takové přímky existují právě dvě, obě prochází průsečíkem úhlopříček a na rovnoběžníku vytínají úsečky délky BC . Jak je tomu pro obdélník?
11. Vyjádři si vzdálenosti bodů dotyku jednotlivých kružnic s AC a dokaž, že se rovnají.
12. Dokaž, že $|BX| = |DY|$, a zamysli se, proč tím už máme vyhráno.
13. Označíme body dotyků postupně X, Y a Z , dokaž, že $|BX| = |CZ|$, a sestroj střed úsečky BC .
14. Uvědom si, že kružnice vepsaná čtyřúhelníku $AFGE$ je zároveň kružnicí vepsanou trojúhelníkům ABE a AFC , a vyjádři velikost tečen. Dokaž, že přímky AD , BE a CF jsou osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , a využij jejich vlastnosti.
15. Dokresli připsanou kružnici k ABC a kružnici se středem v A a nulovým poloměrem.
16. Vyúhli, že $|TI| = |ZI|$ a $|XI| = |YI|$, pak počítej s tečnami.

Literatura a zdroje

Chtěla bych poděkovat Ádi Káji Žáčkové, od níž jsem příspěvek s malými úpravami převzala, která již poděkovala Aniče Doležalové a Ádi Kostelecké.

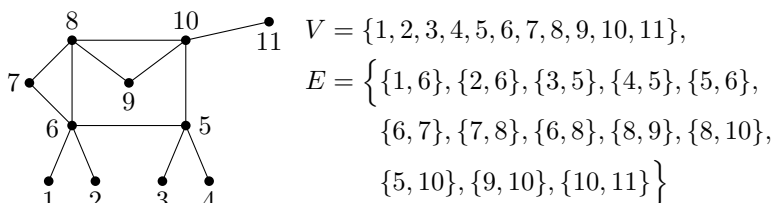
- [1] Adéla Karolína Žáčková: *Překlápění tečen*, Zásada, 2021.
- [2] *Stránky matematické olympiády*, <http://www.matematickaolympiada.cz>.
- [3] *Art of problem solving*, <https://artofproblemsolving.com>.

Stromy

VOJTA GAĐUREK

ABSTRAKT. V příspěvku důkladně prozkoumáme, co jsou to stromy a kde všude je můžeme nalézt.

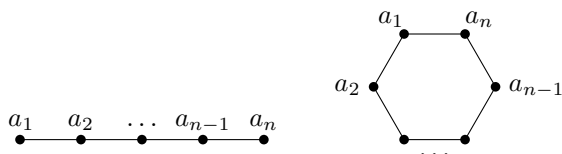
Definice. *Graf* je tvořen množinou V vrcholů a množinou E hran mezi nimi. Hraný jsou formálně dvouprvkové množiny vrcholů. Celý graf pak formálně zapisujeme jako uspořádanou dvojici $G = (V, E)$.



Úmluva. Neřekneme-li jinak, předpokládejme, že graf je konečný, tedy V i E jsou konečné množiny, a že graf je neprázdný, tudíž obsahuje alespoň jeden vrchol.

Definice. *Podgrafem* grafu G je graf, který vznikl odebráním nějakých vrcholů a hran z grafu G .

Definice. *Cesta* je graf s vrcholy $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a hranami $E = \{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_{n-1}, a_n\}\}$. Cesta tedy prochází každým vrcholem právě jednou. Vrcholům a_1 a a_n říkáme *koncové body* cesty. Obsahuje-li graf jako podgraf cestu s koncovými vrcholy A a B , říkáme, že *existuje/vede cesta mezi A a B* .



Definice. *Kružnici* nazveme graf s vrcholy $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a hranami $E = \{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_{n-1}, a_n\}, \{a_n, a_1\}\}$.

Definice. Říkáme, že graf je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy vede cesta.

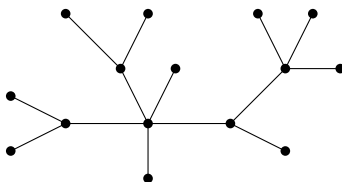
Definice. Graf je *acyklický*, pokud neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici.

Cvičení. Ať $G = (V, E)$ je souvislý graf. Které z následujících vlastností jsou ekvivalentní?

- (i) graf splňující $|V| - 1 = |E|$, tedy že počet vrcholů je o jedna vyšší než počet hran;
- (ii) graf, v němž mezi každými dvěma vrcholy existuje právě jedna cesta;
- (iii) *2-obarvitelný graf*, tj. jeho vrcholy lze obarvit dvěma barvami tak, aby žádné dva stejnobarevné vrcholy nebyly spojeny hranou;
- (iv) *minimálně souvislý graf*, tedy takový, který je souvislý, ale odebráním libovolné hrany by své souvislosti pozbyl;
- (v) *maximálně acyklický graf*, tedy pokud bychom přidali jednu hranu, graf by již nebyl acyklický.

Pokud jste cvičení poctivě řešili, zjistili jste, že ekvivalentní jsou charakterizace (i), (ii), (iv) a (v), zatímco charakterizace (iii) je slabší. Tedy jako definici stromu bychom mohli použít libovolnou z těchto čtyř. My použijeme charakterizaci (ii).

Definice. *Strom* je souvislý graf, v němž mezi každými dvěma vrcholy existuje právě jedna cesta.



Definice. Podgraf stromu, který je sám také stromem, nazýváme *podstromem*.

Věta. *Souvislý podgraf stromu je vždy strom.*

Definice. *List* je vrchol, do něhož vede právě jedna hrana.

Cvičení. Ukažte, že libovolný strom o alespoň dvou vrcholech má alespoň dva listy.

Definice. *Stupeň* vrcholu je počet hran, které do něj vedou.

Cvičení. Jaká (pokud nějaká) je ve stromu spojitost mezi stupni jednotlivých vrcholů a počtem listů?

Úmluva. (zakořenění) Občas se nám hodí strom *zakořenit*: vybereme jeden vrchol, který se stane *kořenem*, a následně budeme všechny hrany kreslit směrem dolů od kořene. Pokud pak vede hrana mezi A , B a B je dál (tedy níž) od kořene než A ,

říkáme, že A je *otec* B , zatímco B je *syn* A . Obecněji pokud z A vede cesta „dolů“ do B , pak je A *předkem* B , zatímco B je *potomkem* A .

Definice. *Hloubka* zakořeněného stromu je počet hran v nejdelší cestě vedoucí z kořene do nějakého vrcholu grafu.

Definice. Pro reálné C říkáme, že nějaký strom má *C -logaritmickou hloubku*, má-li n vrcholů a hloubku nanejvýš $C \log(n)$.

Úlohy

Úloha 1. V lese žije n entů a jedna veverka. Entové stojí na místě, některé dvojice z nich jsou si přitom dost blízko na to, aby mezi nimi zvládla veverka přeskáčit. Shodou okolností jsou entové rozestaveni tak, že mezi libovolnými dvěma z nich existuje právě jedna cesta, po které může veverka přeskákat. *Vzdáleností* dvou entů rozumíme počet skoků, které veverka potřebuje k tomu, aby se mezi nimi přesunula. *Osamělost* enta definujeme jako součet jeho vzdáleností od všech ostatních entů. Dokažte, že pokud se osamělosti některých dvou entů liší právě o 1, pak je n liché. (PraSe 41–1j–4)

Úloha 2. (hloubka stromu I) Mějme nějaký zakořeněný strom, pro který platí:

- Každý vrchol má nanejvýš dva syny.
- Má-li jediného syna, pak tento syn musí být listem.
- Má-li dva syny, označme je jako levý a pravý – pak je počet potomků pravého roven nebo o 1 větší počtu potomků levého.

Umíme zkonstruovat takový strom pro libovolný počet vrcholů? A umíme pevně zvolit nějaké C tak, aby zkonstruované stromy měly C -logaritmickou hloubku?

Úloha 3. (hloubka stromu II) Mějme nějaký zakořeněný strom, pro který platí:

- Každý vrchol má nanejvýš dva syny.
- Má-li jediného syna, pak tento syn musí být listem.
- Má-li dva syny, označme je jako levý a pravý – pak se hloubky podstromu tvořeného levým synem a jeho potomky liší od toho tvořeného pravým synem a jeho potomky nanejvýš o 1.

Umíme zkonstruovat takový strom pro libovolný počet vrcholů? A umíme pevně zvolit nějaké C tak, aby zkonstruované stromy měly C -logaritmickou hloubku?

Úloha 4. (hloubka stromu III) Existují jiná pravidla, která nám zajistí C -logaritmickou hloubku?

Úloha 5. Mějme nějaký souvislý graf. Dokažte, že dvě nejdelší cesty procházejí stejným vrcholem.

Úloha 6. (záchodový problém I) Petr se rozhodl založit si továrnu na potrubí. V ní začal vyrábět různé rozdvójky, roztrojky, obecněji rozbočovače (neboli rozenky). Do každé rozenky vede právě jedna (vstupní) trubka a n (výstupních) jich z ní vychází.

Petr se navíc rozhodl konce jednotlivých trubek obarvit. Výstupní trubku lze zapojit do výstupní, pokud mají stejné barvy. Jediným problémem je, že každý nový typ rozenky musí vyrábět na novém stroji.

Pan Karel podniká ve stavbě toalet na školách. Rád by, aby každé záchody byly tvořeny řadou toalet o počtu dělitelném pěti, do každé toalety vedla právě jedna trubka a aby byly všechny napojeny systémem rozenek na jednu vstupní trubku. Ví však, že jeho dělníci jsou hajdaláci, chtěl by tedy, aby počet toalet (volných výstupních trubek) musel vždy být dělitelný pěti, ať už budou dělníci skládat rozenky jakkoliv. Zvládne to Petr zajistit, pokud si může dovolit pouze konečný počet strojů?

Úloha 7. (záchodový problém II) Pan Karel znovu přišel za panem Petrem – nyní by potřeboval, aby počet záchodů byl prvočíselný. Zvládne to Petr s konečným počtem strojů?

Úloha 8. (záchodový problém III) Pan Karel znovu přišel za panem Petrem, nyní má zakázku na stavbu toalet do školky. Malé děti mají rady barvy, a tak si školka přeje, aby záchody byly tři barev (žluté, červené a modré). Aby se děti nehádaly, musí být každá barva zastoupena stejným počtem. Zvládne to Petr s konečným počtem strojů? A zvládl by to, pokud by školka požadovala jen dvě barvy?

Úloha 9. (záchodový problém IV) Pan Karel přišel za panem Petrem s otázkou, zdali umí vymyslet sadu rozenek takovou, že každé rozmístění barev záchodů bude možné vytvořit jen jedním způsobem. Zvládne to Petr s konečným počtem strojů?

Úloha 10. Do tenisového turnaje se přihlásilo 2^n soutěžících. V každém kole se všichni ještě nevypadlí hráči rozdělí do dvojic a odehrají zápas. Vítězové postupují do dalšího kola, poražení vypadávají. Na konci turnaje, když zůstane pouze jediný hráč, je potřeba vytvořit výsledkovou listinu, ve které nikdo nesmí být na horší pozici než hráč, kterého porazil. Kolika způsoby je možné takové pořadí vytvořit, pokud žádní dva hráči nesmí skončit na stejné příčce? (PraSe 31–1p–7)

Úloha 11. (vejce a patra) Mějme věžák s n patry a k vaječ. Naším úkolem je zjistit, z jakého nejnižšího patra se vejce po vyhození z okna rozbije. Pro dané n a k zjistěte, kolikrát budeme muset vajíčkem házet, ať se vajíčko začne rozbíjet od libovolného patra.

Úloha 12. (kuchařková věta) Na matfyzu rádi vaříme čaj. Ale vařit čaj není zas tak jednoduché – je nutné plnit pravidla přísné etikety jeho vaření. Postup je však snadný:

Chceme-li uvařit čaj z počátečního nálevu n litrů, pak:

- Čaj povaříme po dobu cn^α minut v konvičce.
- Následně rozlijeme čaj do k dalších konviček: do i -té konvičky nalijeme $a_i n$ litrů, kde $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ je pevně zvolená množina kladných reálných čísel.
- Je-li čaje málo, naředíme ho před rozlitím vodou. Pokud naopak po rozliti nějaký čaj přebývá, vylijeme ho.
- Je-li v nějaké konvičce méně čaje než n_0 , potom čaj z této konvičky serví-

rujeme. Pro ostatní konvičky celý postup opakujeme, dokud není servírován všechen čaj.

Jak dlouho nám potrvá připravit čaj pro daná n , A a n_0 , máme-li neomezenou zásobu konviček, ale pouze jednu plotnu?

Úloha 13. (Hydra a Herkules) Mějme Hydru v podobě stromu s kořenem H . Herkules může useknout libovolný list. Pokud usekne list L s otcem X , nastane jedna z dvou situací. Pokud $X = H$, po useknutí L se nic nestane. V opačném případě má X otce, označme ho Y , a nechť S je podstrom tvořený vrcholem X a všemi jeho potomky (po useknutí L). Pak se v důsledku useknutí takového L zkopíruje odpovídající podstrom S jako nové potomstvo Y , tzn. Y bude mít nového syna X' , který bude mít nové syny odpovídající synům X atd.

Umí Herkules sekat tak, aby Hydře po konečném počtu seknutí zbyl jen samotný kořen?

Úloha 14. Umí Herkules sekat donekonečna tak, aby Hydře nikdy nezbyl jen samotný kořen?

Návody

12. Nechť $S := \sum_{a_i \in A} a_i^\alpha$. Zkus úlohu řešit zvlášť v případech $S < 1$, $S = 1$ a $S > 1$.

Literatura a zdroje:

Tuto geniální přednášku jsem převzal od Bc. Vojtěcha Gaďurka. Moc mu za to děkuji.

- [1] Martin Mareš, Tomáš Valla: *Průvodce labyrintem algoritmů*, CZ.NIC, 2017.
- [2] Martin Mareš: *Diskrétní Matematika*, <https://mj.ucw.cz/vyuka/2122/dm/>.
- [3] Vladan Majerech: *Cvičení z předmětu Automaty a gramatiky*, <http://ktiml.mff.cuni.cz/~maj/2022NTIN071.html>.
- [4] Vladan Majerech: *Cvičení z předmětu Algoritmy a datové struktury 1*, <http://ktiml.mff.cuni.cz/~maj/2022NTIN060.html>.

Pravděpodobnostní paradoxy

VÍT HANIKA

ABSTRAKT. Podíváme se na některé matematické paradoxy. Pravděpodobně budete překvapeni.

Paradox 1. David každý víkend jezdí z plzeňského nádraží buď za manželkou do Dobřan, nebo za milenkou do Rokycan. Rozhoduje se náhodně – vždy nastoupí do prvního vlaku, který jede. Ačkoli vlaky do Rokycan jezdí stejně často jako vlaky do Dobřan, po nějakém čase David shledal, že byl u milenky dvakrát častěji než u manželky. Jak je to možné?

Paradox 2. Kenny, Franta a Jarda se rozhodli, že si zahrají tenis. Kenny se s nimi vsadil o kilo čokolády, že vyhraje dvakrát po sobě. Může si vybrat ze dvou možností: buď bude hrát nejprve s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou, nebo nejprve s Jardou, pak s Frantou a nakonec s Jardou. Kterou z možností si má zvolit, jestliže ví, že Jarda hraje podstatně lépe než Franta, aby zvýšil svoji šanci na výhru?

Paradox 3. Do 100místného letadla nastupuje 100 lidí, každý má místenku na jedno sedadlo. První nastupující ale ztratil svou místenku, a tak si sedne náhodně. Každý další si sedne na svoje sedadlo, je-li volné, a v opačném případě si sedne na náhodné volné sedadlo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední příchozí si sedne na svoje sedadlo?

Paradox 4. (Monty Hall) Ve finále televizní soutěže je za dvěma dveřmi koza a za třetími auto, přičemž soutěžící chce auto. Postaví se tedy k jedněm dveřím, načež moderátor otevře jedny dveře, za kterými je koza, jiné než ty, ke kterým se soutěžící postavil (moderátor ví, co je za kterými dveřmi), a pak dá soutěžícímu možnost ještě svou volbu dveří změnit. Vyplatí se soutěžícímu volbu dveří změnit?

Paradox 5. Pravděpodobnost, že se narodí děvče, je stejná jako pravděpodobnost, že se narodí chlapec.

- (i) Uvažme náhodnou rodinu se dvěma dětmi, v níž je starší dítě děvče. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou děvčata?
- (ii) Uvažme náhodnou rodinu se dvěma dětmi, z nichž je alespoň jedno děvče. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou děvčata?
- (iii) Uvažme rodinu se dvěma dětmi, z nichž je jedno moje kamarádka Xénie (a

tedy děvče). Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou děvčata?

Paradox 6. Přišli jsme na test jisté vzácné choroby vyskytující se u 1 % populace. Měřil nás přístroj, který v 90 % případů odpoví správně (ve zbylých chybně), a nahlásil, že onou chorobou trpíme. Jaká je pravděpodobnost, že tomu tak skutečně je?

Paradox 7. (Simpsonův) Lukáš a Pepa mají oba svůj žlutý a modrý sáček a v nich černé a bílé kuličky. Pokud Lukáš sáhne do svého žlutého sáčku, má vyšší pravděpodobnost vytáhnutí bílé kuličky, než kdyby sáhl do modrého. Totéž platí pro Pepu. Oba žluté sáčky nyní sesypeme dohromady a totéž provedeme s modrými. Rozhodněte, zda bude vyšší šance na vytáhnutí bílé kuličky u modrého sáčku, nebo u žlutého. (MKS 43-4-1)

Paradox 8. V jisté fiktivní zemi mají tradici, že je třeba rodit děti tak dlouho, dokud se nenarodí děvče. Bude v této zemi více chlapců, nebo děvčat?

Paradox 9. V zaškrtávacím testu můžeme na každou z pěti otázek odpovědět jedním z písmen A, B, C, D, E. Za test dostaneme tolik bodů, na kolik otázek odpovíme správně. Doslechneme-li se, že každé písmeno je použito právě jednou, vyplatí se nám dávat takové tipy, kde je každé písmeno právě jednou? (Kromě zmíněné informace o odpovědích nic nevíme.)

Obálky

Následuje několik podobně vypadajících, avšak různých úloh. Pozor, některé z nich mohou být prostě trochu podvod.

Paradox 10. V jedné obálce je 100 Kč a v druhé 200 Kč. Vybereme si náhodnou, zatím ji neotvíráme. Neznámé množství peněz v ní označíme x . V druhé obálce je také náhodně buď $2x$, nebo $0,5x$. Průměrně je tak v druhé obálce $1,25x$, a proto se nám vyplatí volbu obálky změnit.

Paradox 11. Protihráč vloží do dvou obálek dvě různá reálná čísla. Následně vás nechá si náhodně jednu vytáhnout, vy si prohlédnete číslo v ní a můžete se rozhodnout, zda si ji necháte, nebo vyměníte za jinou. Vyhrává ten z vás, který má na konci v ruce větší číslo. Rozhodněte, zda existuje strategie, která má nadpoloviční šanci na výhru bez ohledu na to, která dvě čísla protihráč napsal.

Paradox 12. V jedné obálce je nějaký neznámý kladný počet peněz a v druhé dvojnásobek. Vybereme si náhodnou a otevřeme ji. V druhé obálce je také náhodně buď $2x$, nebo $0,5x$. Průměrně je tak v druhé obálce $1,25x$, a proto se nám vyplatí volbu obálky změnit.

Paradox 13. Mějme dvě obálky. Víme, že v obou je přirozené množství peněz. Zároveň je v jedné obálce třikrát víc peněz než v druhé. Distribuce peněz v obálkách je nasledovná: pro každou dvojici čísel $(3^{n-1}, 3^n)$, $n \geq 1$ máme pravděpodobnost $\frac{1}{2^n}$, že právě tyto dvě hodnoty jsou v obálkách. Otevřeme jednu obálku a podíváme se

na hodnotu peněz v ní. Pro kterou hodnotu se nám vyplatí změnit obálku? Co když obálku neotevřeme?

Paradox 14. Je nám nabídnuta následující hra: Zaplatíme 1000 Kč, pak házíme mincí tak dlouho, dokud nám padá panna, a následně vyhrajeme 2^{n-1} Kč, kde n je počet námi provedených hodů. Vyplatí se nám tuto hru podstoupit?

Paradox 15. V $n - 1$ vrcholech pravidelného n -úhelníku stojí ovce, ve zbylém vrcholu stojí vlk. V každém kroku se vlk přesune na náhodný (jeden ze dvou) sousední vrchol a pokud v něm stojí ovce, tak ji sežere. Vlk se nasytí až v okamžiku, kdy sežere $n - 2$ ovcí, tedy právě jedna ovce přežije. Jaká ovce má nejvyšší šanci na přežití?

Paradox 16. Mirek je velký gurmán a vlastní pytel, ve kterém je 123 karamelky a 321 hašlerek. Aby si své bonbóny pořádně vychutnal, rozhodl se, že je bude konzumovat specifickým způsobem. Když se ráno probudí, začne z pytle náhodně vytahovat jeden bonbón za druhým. První bonbón vytáhne a sní – každý další bonbón vždy vytáhne, a pokud je tento stejného typu jako předchozí, rovněž jej sní. Je-li jiného typu, vrátí jej zpět do pytle, aby si pro tento den nezkazil chuť. Tím Mirkův ranní rituál končí. Uvedeným způsobem konzumuje Mirek bonbóny každý den až do chvíle, kdy už v pytli žádný nezbyde. Jaká je pravděpodobnost, že posledním sněženým bonbónem bude karamelka? (MKS 32–7–6)

Paradox 17. Deseti zvoleným ministrům byly náhodně rozdány ministerské resorty, kterých je také deset. Každý ministr zvláště zajde za králem, který posty rozdál, a musí si tipnout, který post má. Konverzace probíhá stylem:

Ministr: „Zemědělství.“

Král: „Ne, zemědělství má Jánošík.“

Ministr: „Tak administrativní záležitosti.“

Král: „Ne, administrativní záležitosti má Jim Hacker.“ ...

Ministři se mohou domlouvat pouze před zkouškou a jako celek uspějí jen tehdy, když každý tipne svůj resort nejhůře na sedmý pokus. Rozhodněte, zda se dokáží dohodnout tak, aby měli nadpoloviční šanci uspět. (Projev před ÚKMO 2014)

Paradox 18. Hrajeme jistou hazardní hru. Začínáme s 1000 Kč, vždy vsadíme nějakou částku (nejvýše tolik, kolik právě máme), následně ji s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ vyhrajeme a v opačném případě prohrajeme. K takové hře je možné přistupovat s rozličnými strategiemi:

- (i) V každém kroku vsadíme tisíc korun.
- (ii) V každém kroku vsadíme polovinu částky, kterou máme.
- (iii) (Martingale) Po každé prohře vsadíme dvojnásobek minulé sázky. V opačném případě, nebo pokud to není možné, vsadíme jednu korunu.

Při které z nabízených strategií máme nejvyšší šanci dosáhnout částky 3000 Kč?

Paradox 19. Jirka a Marek hrají svou verzi tenisu. Když podává Marek, má šanci 0,5, že vyhraje míček a když podává Jirka, vyhraje míček s pravděpodobností 0,6.

Hraje se do 21 vítězných bodů (bez prodlužování). Marek, který je slabší, podává jako první, navíc si může vybrat způsob, jak se budou střídát podání z následujících možností:

- (i) Podání se střídá pravidelně.
- (ii) Podává vždy ten, kdo naposled vyhrál míček.
- (iii) Podává vždy ten, kdo naposled prohrál míček.

Která volba je pro Marka nejvýhodnější?

Paradox 20. (Bertrandův) Pravděpodobnost, že náhodná tětiva dané kružnice je delší než strana vepsaného rovnostranného trojúhelníku, je rovna $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ a také $\frac{1}{4}$.

Návody

1. To, co rozhoduje, kterým vlakem pojedeme, je, který vlak přijede dřív.
3. Jedna polovina. Podívej se na symetrii sedadel prvního a posledního cestujícího.
4. Vyplatí se změnit volbu. Je pravděpodobnější, že auto je za některými z původně nevybraných dveří, a to se otevřením dveří s kozou nezmění.
7. Nastat mohou obě možnosti.
8. Obou stejně. Chlapců se rodí přesně 50 procent, a to kdy přestanu rodit děti totiž nemá vliv na to, jaké procento se rodí chlapců.
10. Není tomu tak, toto x je v každé možnosti jiné.
11. Existuje. Velká čísla je výhodné si nechávat, malá naopak vyměnit.
12. Není známa distribuce. Neexistuje distribuce, co by rovnoměrně náhodně vybrala náhodné reálné číslo.
14. Očekávaný zisk peněz je sice nekonečno, ale bohužel většina bankéřů má pouze konečno peněz.
15. Všechny mají stejnou šanci být poslední ovci. Všimni si, že aby zůstala ovce poslední, musí nejdříve být sněžena jedna její sousedka a poté i druhá.
17. Velký trik. Strategie existuje, zkus využít to, že permutací obsahujících cykly dlouhé 8 a víc je málo.
18. Druhá strategie je horší než první a třetí. Důležité je to nepřepálit, jinak je to jedno.
19. Všechny strategie jsou stejné. Kostky jsou vrženy, jen v závislosti na zvolené strategii se občas neodehrají všechny zápasy (jejich výsledky jsou ale napsány ve hvězdách). Vítěze ale stejně nemohou ovlivnit.

Literatura a zdroje

Děkuji Mirkovi, od něhož jsem převzal většinu paradoxů.

- [1] Mirek Olšák, *Pravděpodobnostní paradoxy*, Uhelná Příbram, 2014.

Odmocniny z jedničky

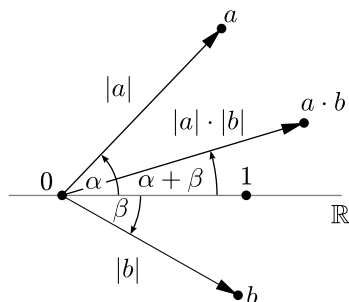
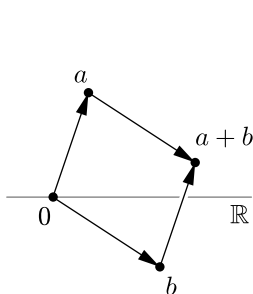
PETR HLADÍK

ABSTRAKT. V příspěvku se nejprve seznámíme s komplexními čísly jako takovými, a pak se speciálně zaměříme na odmocniny z jedničky. Nejprve se pokusíme pořádně pochopit, jak fungují, a pak si ukážeme, jak to využít na příkladech.

Zavedení komplexních čísel

Definice. Mějme rovinu s osou reálných čísel. Tuto rovinu nazveme *komplexní rovina* a body na ní budeme nazývat *komplexní čísla*. Bod 0 reálné osy nazveme *počátek* a každé komplexní číslo je vektor vedoucí z počátku do bodu v rovině příslušné tomuto komplexnímu číslu.

Definice. Součet komplexních čísel definujeme jako součet příslušných vektorů. Dále definujeme součin komplexních čísel jako vektor, který má délku rovnou součinu délek jednotlivých činitelů a svírá s kladnou reálnou polopřímku úhel rovný součtu orientovaných úhlů jednotlivých činitelů.



Pozorování. Operace na komplexních číslech splňují očekávané vlastnosti.

- (1) Na reálné ose fungují jako běžné sčítání a násobení.
- (2) Při sčítání/násobení nezáleží na pořadí sčítanců/činitelů.
- (3) Při sčítání/násobení nezáleží na pořadí uzavorkování sčítanců/činitelů.
- (4) Funguje roznásobování, tedy $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Imaginární jednotka

Pozorování. Existují právě 2 komplexní čísla, jejichž druhá mocnina je rovna -1 .

Definice. Jednomu z čísel z předchozího pozorování (to, které leží nad reálnou osou) budeme říkat *imaginární jednotka* a značit ji budeme i .

Pozorování. Každé komplexní číslo se dá jednoznačně napsat ve tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Definice. Mějme komplexní číslo $z = a$. Jako *komplexně sdružené číslo* k z nazveme obraz z v osově souměrnosti podle reálné osy. Značíme ho $\bar{z}$. Tedy pokud $z = a + bi$, tak $\bar{z} = a - bi$.

Definice. Definujeme ω_n jako komplexní číslo takové, že leží na jednotkové kružnici a s kladnou reálnou osou svírá úhel $\frac{360^\circ}{n}$ v kladném směru.

Důsledek. (Pythagorova věta) Pro pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Důsledek. (součtové vzorce) Pro úhly α, β platí následující vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta), \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta).\end{aligned}$$

Důsledek. (Moivreova věta) Pro úhel α a přirozené číslo n platí rovnost

$$(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha).$$

Cvičení. Najděte druhé odmocniny z komplexního čísla $3 - 4i$.

Příklady

Úloha 1. Nalezněte všechna komplexní řešení polynomiální rovnice $x^n - 1 = 0$.

Úloha 2. Sečtěte

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$$

Úloha 3. Sečtěte

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$$

Úloha 4. Sečtěte

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$$

Odmocniny z jedničky

Definice. O komplexním čísle z řekneme, že je *odmocninou z jedné*, pokud je kořenem polynomu $z^n - 1$ pro nějaké přirozené n . Pokud toto n je nejmenší číslo takový, že $z^n - 1 = 0$, tak z je *primitivní n -tou odmocninou z jedné*.

Definice. Řádem komplexního čísla α nazveme nejmenší n takové že $\alpha^n = 1$. Pokud takové číslo neexistuje, pak řekneme že řád je ∞ .

Cvičení. Jaký je řád ω_{10}^8 ?

Cvičení. Kolik komplexních čísel má řád n ?

Úloha 5. Necht m, n jsou přirozená čísla. Dokažte, že $x^n - 1$ dělí polynom $x^m - 1$, právě když $n \mid m$.

Definice. Mějme množinu komplexních čísel $G = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Množinou *generovanou* G nazveme co do inkluze nejmenší množinu X takovou, že $G \subset X$ a zároveň pro každá $a, b \in X$ taky $ab \in X$. Značíme ji $\langle G \rangle$.

Úloha 6. Necht G je konečná množina nějakých odmocnin z jedničky (tedy pro každé $\alpha \in G$ existuje přirozené n takové, že $\alpha^n = 1$). Pak existuje přirozené n , že $\langle G \rangle = \langle \omega_n \rangle$.

Úloha 7. Mějme přirozená čísla k, ℓ, n , pak $\langle \omega_n^k, \omega_n^\ell \rangle = \langle \omega_n^{\gcd(k, \ell)} \rangle$.

Úloha 8. Nalezněte největšího společného dělitele mnohočlenů $x^m - 1$ a $x^n - 1$ v závislosti na přirozených číslech n a m .

Úloha 9. S využitím poznatků z posledního uvedeného příkladu ukažte, že $2^n - 1$ dělí $2^m - 1$, právě když $n \mid m$.

Definice. Pro libovolné přirozené n definujeme *n -tý cyklotomický polynom* jako

$$\Phi_n(x) = \prod_{1 \leq j \leq n \wedge \gcd(n, j) = 1} (x - \omega_n^j).$$

Úloha 10. Nahlédněte, že platí $\prod_{d \mid n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Úloha 11. Dokažte, že pro libovolné přirozené n má polynom $\Phi_n(x)$ celočíselné koeficienty.

Úloha 12. Necht n je liché přirozené číslo. Spočtete

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+\omega_n^1} + \dots + \frac{1}{1+\omega_n^{n-1}}.$$

Úloha 13. Necht m, n jsou přirozená čísla. Určete $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jm}$.

Úloha 14. Přirozené číslo $n \geq 4$ nazveme *zajímavým*, pokud pro něj existuje komplexní číslo z takové, že $|z| = 1$ a zároveň $1 + z + z^2 + z^{n-1} + z^n = 0$. Kolik existuje zajímavých čísel menších než 2022? (Rumunská MO 2022)

Úloha 15. Mějme přirozená k, ℓ, n a prostou funkci f na množině $\{1, \dots, n\}$ takovou, že $f(x) - x \in \{k, -\ell\}$. Dokažte, že $k + \ell \mid n$. (Polská MO 2019)

Úloha 16. Nechtě P, Q, R, S jsou polynomy takové, že pro každé $x \in \mathbb{C}$ platí

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Dokažte, že $P(1) = 0$.

Úloha 17. Mějme přirozená čísla $m, n \geq 2$ a $a_1, a_2, \dots, a_n$ taková, že žádné z nich není násobkem m^{n-1} . Dokažte, že existují celá čísla $b_1, b_2, \dots, b_n$ taková, že ne všechny jsou nulová, $|b_j| < m$ pro každé j a $m^n \mid a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$. (IMO Shortlist 2002)

Návody

1. Označme nějaké řešení z , co musí splňovat jeho absolutní hodnota a úhel, který svírá s reálnou osou?
2. Uvažuj ω_3 , jak vypadá $(1 + \omega_3)^n, (1 + \omega_3^2)^n$ a $(1 + 1)^n$?
3. Stejně jako předchozí úloha, jen vhodně přenásob ω_3 .
4. Co takhle ω_4 ?
6. Nejdříve najdi n takové, že prvky G jsou n -té odmocniny z jedničky. Pak vezmi nejmenší k takové, že $\omega_n^k \in \langle G \rangle$ a sporuj.
7. Ukaž obě inkluze.
11. Indukcí s tím, že absolutní člen je vždy ± 1 .
12. Popáruj sčítance. Vyjde $\frac{n}{2}$.
13. Vyjde n pokud $n \mid m$, jinak 0.
14. Zkonjuguj danou rovnici.
15. Uvažuj $(k + \ell)$ -té odmocniny z jedničky.
16. Co musíme dosadit, aby se pravá strana rovnala nule?
17. Uvažuj množinu všech m^n součtů, pokud dovolujeme jen b_j kladná. Ukaž, že je to množina všech zbytků mod m^n a uvažuj ω_{m^n} .

Literatura a zdroje

- [1] Lenka Kopfová: *Odmocniny z jedničky*, Lipová-Lázně, 2022.
- [2] Mirek Olšák: *Komplexní čísla geometricky*, Mentaurov, 2013.
- [3] Jarda Hančl, Jakub „šnek“ Opršal: *Komplexní čísla*, seriál MKS, 2010/11.
- [4] <https://artofproblemsolving.com/community>.

Počítání dvěma způsoby

PETR HLADÍK

ABSTRAKT. Počítání dvěma způsoby je velmi silný nástroj, kterým lze dokazovat (nejen) kombinatorické identity. V příspěvku si ukážeme jak nahlížet úlohy pomocí tohoto způsobu.

Počítání dvěma způsoby umožňuje elegantní přístup ke spočtení nějakého složitěho výrazu. Často se to týká součtu mnoha netriviálních hodnot nebo k určení parametru jednoho odhadu. Funguje to tak, že si vytvoříme množinu, jejíž prvky budeme moci spočítat dvěma (nebo více) různými způsoby. Počty odvozené z těchto nahlédnutí však odpovídají počtu prvků stejné množiny, a tedy nahlédnuté počty se rovnají, případně dostaneme odhad jedné hodnoty pomocí druhé.

Příklad. (motivační) Na večírku si někteří lidé vzájemně potřásli rukou. Ukažte, že počet lidí, kteří si potřásli rukou lišekrát, je sudý.

Řešení. Představme si tento večírek jako graf. Vrcholy budou lidé a hrany mezi vrcholy budou jednotlivá potřesení rukou. Chceme spočítat všechny dvojice (*vrchol*, *hrana*) takové, že vrchol je jedním z koncových vrcholů dané hrany. První počítání spočívá v tom, že se jedná o součet stupňů všech vrcholů. Dostaneme $\sum_{v \in V} i_v$, kde i_v značí, kolikrát si potřásla rukou osoba v . Druhé počítání získáme počítáním hran (potřesení rukou), čímž obdržíme výsledek $2 \cdot |E|$, kde E je množina hran. Nyní už víme, že $\sum_{v \in V} i_v = 2 \cdot |E|$, tedy součet je sudý, a tedy i počet lichých hodnot i_v je sudý. Tedy počet lidí co si potřásli rukou lišekrát je sudý.

Příklad. (motivační) Spočítejte

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n}.$$

Řešení. Chceme se na tento součet podívat jako na reprezentaci nějaké situace. Kombinační čísla v součtu naznačují, že nám půjde o všechny podmnožiny n -prvkové množiny, kde každá i -prvková podmnožina přispívá do součtu právě i (počet svých prvků). Můžeme si představit i -tý sčítanec jako počet způsobů, jak z krabičky s n míčky vytáhnout i míčků a z vytažených míčků si navíc zvolit jeden speciální. Tedy nám jde o počet dvojic (speciální míček, vytažené míčky). To můžeme nahlédnout druhým způsobem tak, že nejprve vytáhneme z krabičky jeden míček, který bude

speciální, a pak k němu vytáhneme libovolnou podmnožinu zbylých míčků z krabičky, takže dostáváme celkem $n \cdot 2^{n-1}$ dvojic.

K počítání dvěma způsoby se často hodí různé kombinatorické identity, několik z nich zde ukážeme a zkusíme odvodit.

Kombinatorické identity

Před tím, než začneme kombinační čísla používat, tak bychom si je mohli zadefinovat.

Definice. Označme $\binom{n}{k}$ počet způsobů, jak z n prvkové množiny vybrat k prvků, tedy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Úloha 1. (úvodní) Dokažte $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Úloha 2. Dokažte $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Úloha 3. Dokažte $\binom{n+m+1}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k}$.

Úloha 4. Dokažte $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Úloha 5. Dokažte $\binom{n}{r} r = n \binom{n-1}{r-1}$.

Úloha 6. Dokažte $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$.

Úloha 7. Dokažte $\sum_{k=d}^n \binom{n}{k} \binom{k}{d} = 2^{n-d} \binom{n}{d}$.

Úloha 8. (Vandermondeova identita) Dokažte $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

Lehčí příklady

Úloha 9. Nechť $\mathbb{P}$ je množina všech permutací $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ čísel 1 až n takových, že žádné tři sousední prvky netvoří rostoucí posloupnost. Označme a_i průměrnou hodnotu na i -té pozici těchto permutací, tedy

$$a_i = \frac{1}{|\mathbb{P}|} \sum_{p \in \mathbb{P}} p_i.$$

Čemu se rovná součet všech a_i ?

Úloha 10. Na dětském táboře je 15 dětí. Každý den mají tři děti službu v kuchyni a platí, že každá dvojice dětí má právě jednu společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

Úloha 11. Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.

Úloha 12. Pole mřížky 21×21 jsou obarvena tak, že v každém řádku i sloupci se vyskytuje nejvýše 5 různých barev. Ukažte, že se některá z barev vyskytuje ve třech řádcích a zároveň i ve třech sloupcích.

Úloha 13. Označme $\mathbb{S}_n$ množinu všech permutací $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ čísel 1 až n . Pro permutaci $p \in \mathbb{S}_n$ označme

$$f(p) = \sum_{i=1}^n i \cdot p_i.$$

Ukažte, že

$$4 \sum_{p \in \mathbb{S}_n} f(p) = (n^2 + n)(n + 1)!.$$

Úloha 14. V matematické olympiádě řešilo 45 účastníků šest příkladů, každý příklad byl vyřešen právě 25 řešiteli. Ukažte, že můžeme vybrat dva účastníky, kteří dohromady vyřešili vše.

Těžší příklady

Jelikož se dvojí počítání často využívá v důkazových metodách v teorii grafů, zavedeme si nějakou teorii, abychom byli všichni na stejné lodi.

Definice. *Graf* G je uspořádaná dvojice množiny vrcholů V a množiny hran E , kde každá hrana vede mezi dvěma vrcholy.

Definice. *Cesta* mezi vrcholy u a v v grafu je posloupnost vrcholů taková, že se v ní žádný vrchol neopakuje a první vrchol je u a poslední v . *Souvislý* graf je takový, kde mezi každou dvojicí vrcholů existuje cesta. *Strom* je minimální souvislý graf, tedy mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje právě jedna cesta. Ekvivalentně je to souvislý graf, který má $|V| - 1$ hran. *Kostra* grafu je podgraf, který je stromem na všech vrcholech.

Úloha 15. Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^{2n} i(2n + 1 - i) = 4 \sum_{i=1}^n i^2.$$

Definice. *Rovinné nakreslení* grafu je takové nakreslení, kde se žádné dvě hrany nekříží mimo vrchol.

Úloha 16. Mějme rovinné nakreslení grafu G , ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami.¹ Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.

¹Nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tzn. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy.

Úloha 17. Dokažte, že platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Úloha 18. Spočítejte

$$1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + \cdots + n^2 \binom{n}{n}.$$

Úloha 19. V poslanecké sněmovně je 200 poslanců, kteří postupně hlasují o n zákonech. Poslanec může být buď pro schválení zákona, nebo proti, nebo se může zdrzet hlasování. Je známo, že pro každá dvě hlasování existuje poslanec, který v jednom hlasoval pro a v druhém proti. Označme si počet poslanců, kteří se zdrželi hlasování o i -tém zákonu, jako z_i . Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^n 2^{z_i} \leq 2^{200}.$$

Úloha 20. V obdélníkové tabulce $m \times n$ jsou napsána nezáporná reálná čísla, přičemž každý sloupec i každý řádek obsahuje alespoň jedno kladné číslo. Pokud se navíc řádek a sloupec protínají v políčku, kde je kladné číslo, tak je jejich součet stejný. Dokažte, že $m = n$.

Úloha 21. (LYM-nerovnost) Mějme n -prvkovou množinu A a množinu $\mathbb{S}$ podmnožin A takový, že žádná množina $z \in \mathbb{S}$ není podmnožinou jiné množiny $z' \in \mathbb{S}$. Dále označme a_i počet i -prvkových množin v $\mathbb{S}$. Pak platí

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \leq 1.$$

Úloha 22. (Erdős–Ko–Radova věta) Necht k a n jsou přirozená čísla taková, že $2k \leq n$. Dále necht M je množina k -prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ taková, že pro všechny množiny $C, D \in M$ platí $C \cap D \neq \emptyset$. Dokažte, že $|M| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Úloha 23. (malá Fermatova věta) Ukažte, že je-li p prvočíslo, pak

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Úloha 24. (Cayleyho formule) Určete počet koster úplného grafu na n vrcholech.

Úloha 25. Určete počet koster úplného grafu bez jedné hrany e .

Úloha 26. Ukažte, že každý graf s N vrcholy neobsahující žádné cykly délky přesně 4 má nanejvýš $\mathcal{O}(N^{3/2})$ hran.²

²Notace s $\mathcal{O}$ značí asymptotickou velikost. Zde konkrétně tedy má být hran nejvýše $cN^{3/2}$, kde c je nějaká konstanta nezávislá na N .

Návody

1. Mějme tým s n fotbalisty a počítejme, na kolik způsoby jde vybrat k hrajících fotbalistů. Buď vybereme k hrajících hráčů, nebo vybereme $n - k$ nehrajících.
2. Vybíráme $k + 1$ fotbalistů z týmu s $n + 1$ fotbalisty. Prvního fotbalistu buď vybereme, nebo vybíráme všechny hrající ze zbývajících fotbalistů.
3. Použijte podobnou ideu jako v předchozím příkladě, ale induktivně.
4. Vybíráte podmnožiny n -prvkové množiny. Každý prvek buďto vyberete, nebo ne.
5. Jsou dva postupy, jak z n fotbalistů vybrat r hrajících hráčů a jednoho kapitána.
6. Jak vybrat z n fotbalistů r hrajících a k útočníků.
7. Jde o zobecnění motivačního příkladu. Nyní je ale fixovaná proměnná d . Můžeme si to představit tak, že si z n lidí vybíráme $k \leq d$ kamarádů a z d z nich chceme vybrat na fotbal.
8. Máte n děvčat a m hochů a chcete z nich vytvořit k -členný tým.
9. Zkuste počítat po hodnotách ne po pozicích.
10. Počítejte dvěma způsoby počet dvojic (*množina dvou dětí, den*). Nejprve fixujte množinu dětí a poté den.
11. Počítejte dvěma způsoby dvojice (*úloha, student*), ale pozor na to, že dvě informace nejsou záměnné.
13. Jako v předchozí úloze s permutacemi. Ale pozor, tentokrát s koeficientem pozice.
14. Všimněte si, že existuje účastník, který vyřešil alespoň čtyři úlohy, a také existuje účastník, který vyřešil zbylé dvě.
15. Nakreslete si trojúhelník z kostiček se základnou délky $2n$, kde v i -tém patře leží kostičky s číslem i . Kostičky pak postupně od kraje trojúhelníku odebírejte.
16. Spočítejte dvěma způsoby počet dvojic (*trojúhelník, různobarevná hrana*).
17. Nakreslete si čtvercovou mřížku o straně n a do políčka na pozici $[i, j]$ napište číslo $i \cdot j$. Sečtěte všechna čísla po řádcích a po „elkách“ od rohu $[1, 1]$.
18. Použijte podobnou myšlenku jako u motivační úlohy, zbylou sumu už spočítat umíte.
- 19.(1) Kolik nejvýše hlasování mohlo proběhnout, pokud by každý hlasoval pro nebo proti? Kolika způsoby lze doplnit ta hlasování, kde se někdo zdržel, tak, aby každý hlasoval?
(2) Počítejte počet dvojic (*zákon, možný výsledek bez nerozhodných hlasů*).
20. Uvažte podtabulku tvořenou řádky a sloupce takovými, že součet čísel v každém z nich je stejný. Jaké má tato podtabulka rozměry?

- 21.**(1) Pro každou množinu $S \in \mathbb{S}$ vytvořte všechny permutace n prvků takové, že prvních $|S|$ prvků bude z S . Těchto permutací bude nejvýše tolik jako všech permutací n prvků.
- (2) Počítejte dvojice (*uspořádaná n -tice*, S), kde $S \in \mathbb{S}$ a prvních $|S|$ prvků n -tice je z S .
- 22.** Počítejte dvěma způsoby dvojice (*množina z M , permutace*) takové, že M bude pro tuto permutaci cyklický interval.
- 23.** Spočítejte všechny řetězce délky p , kde každý znak je z a -prvkové abecedy a nejsou v nich všechny znaky stejné. Tyto řetězce poté můžete rozdělit na skupinky po p .
- 24.** Spočítejte dvěma způsoby počet možností, jak vytvořit zakořeněný strom s n hranami orientovanými od kořene. Zkuste spočítat počet možných vytvoření z běžných stromů a také vytvářet strom po hranách.
- 25.** Dvojím počítáním spočítejte dvojice (*kostra, hrana*).
- 26.**(1) Počítejte dvěma způsoby počet „vidliček“, tedy trojic vrcholů a, b, c , kde b je spojeno hranou s a i s c .
- (2) Použijte CS nerovnost, abyste z čtverců incidencí dostali odhad na počet hran.

Literatura a zdroje

- [1] Filip Čermák: *Počítání dvěma způsoby*, Lysečiny, 2020.
- [2] Tomáš Novotný: *Počítání dvěma způsoby*, Zásada, 2017.
- [3] Martin Hora: *Počítání dvěma způsoby*, Hojsova stráž, 2016.
- [4] Zuzka Safernová: *Dvojí počítání*, Staré Město, 2009.
- [5] Martin Balko: *Kombinatorika a grafy 1*, přednáška a cvičení MFF, 2018/19.
- [6] Štěpán Šimsa: *Počítání dvěma způsoby*, materiály k MO.

DAVID HROMÁDKA

Definice. Polynom tří proměnných x, y, z nazveme *homogenní*, pokud pro všechny členy platí, že součet stupňů všech tří proměnných je konstantní v celém polynomu.

V této přednášce se budeme zabývat zápisem homogenních polynomů ve třech kladných proměnných. Aby byl celý výraz přehlednější, zapíšeme si jejich koeficienty do trojúhelníka o $d + 1$ řádcích, kde d je stupeň polynomu. V každém řádku jsou všechny členy s pevným stupněm proměnné x a tento stupeň se snižuje odshora dolů. Obdobná vlastnost platí i pro ostatní proměnné – stačí si natočit trojúhelník jiným vrcholem nahoru. Vše objasní následující příklady zápisu polynomů:

$$\left(\begin{array}{c} [x] \\ [y] \quad [z] \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} [x^2] \\ [xy] \quad [xz] \\ [y^2] \quad [yz] \quad [z^2] \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} [x^3] \\ [x^2y] \quad [x^2z] \\ [xy^2] \quad [xyz] \quad [xz^2] \\ [y^3] \quad [y^2z] \quad [yz^2] \quad [z^3] \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} [x^4] \\ [x^3y] \quad [x^3z] \\ [x^2y^2] \quad [x^2yz] \quad [x^2z^2] \\ [xy^3] \quad [xy^2z] \quad [xyz^2] \quad [xz^3] \\ [y^4] \quad [y^3z] \quad [y^2z^2] \quad [yz^3] \quad [z^4] \end{array} \right).$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & -1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 3 & & \\ & & & \\ & & & \\ 2 & 2 & 2 & \\ -3 & & & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 3 & & \\ & & & \\ & & & \\ 2 & 1 & 2 & \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

31

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & 4 & 6 \\ \cdot & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Na obecné dva trojúhelníky pak aplikujeme základní roznásobování:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \\ \cdot & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ 3 & 2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 9 & 6 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Cvičení. Zapište v trojúhelníkovém tvaru:

- $x^3 + y^3 + z^3$,
- $(x + y + z)^3$,
- $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)$,
- $(x + y + z)(xy + yz + zx)$,
- $(x + y)(y + z)(z + x)$,
- $\sum_{\text{cyc}} (x + y - z)^2$,
- $\sum_{\text{cyc}} x(x + y)(x + z)$,
- $\sum_{\text{cyc}} (2x + y + z)^2$,
- $\sum_{\text{cyc}} (3x + y)^3$.

Nerovnosti v CDN

Poznámka. Většina následujících nerovností opravdu platí pouze pro nezáporná x, y, z , na což je potřeba myslet.

Věta. (vážená AG nerovnost) Máme několik kladných čísel v trojúhelníku a v místě jejich váženého průměru, jehož váhy jsou ona čísla, máme záporné jejich součet (viz příklady). Pak hodnota polynomu, který tento trojúhelník představuje, je nezáporná.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \\ \cdot & -2 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & -3 & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & -3 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta. (sudé mocniny) Další šikovnou, triviálně platnou, nerovností je nerovnost $(x - y)^{2n} \geq 0$. Pro $n = 1$ a $n = 2$ vypadá následovně: $(1, -2, 1)$, $(1, -4, 6, -4, 1)$. První již máme pomocí AG dokázanou, oproti tomu ta druhá pomocí jednoduchého sčítání AG dokázat nelze.

Věta. (Muirheadova nerovnost) Máme dva symetrické¹ šestiúhelníky. Jeden tvoří jedničky, druhý mínus jedničky a oba mají stejné těžiště (viz první dva obrazce). Přitom šestiúhelník z mínus jedniček je uvnitř konvexního obalu šestiúhelníka z jedniček. Šestiúhelník může zdegenerovat do trojúhelníka dvojek (třetí ukázka). Pak hodnota polynomu, který tento trojúhelník představuje, je nezáporná.

$$\left(\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & 1 & & 1 & \\ & & -1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & & -1 & 1 \\ & & -1 & -1 & & \\ & & & 1 & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & 1 & -1 & 1 & \\ & -1 & & & -1 & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & -1 & & & -1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} & 2 & & \\ & -1 & -1 & \\ -1 & & -1 & \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Věta. (Schurova nerovnost) Máme tři stejně velké kosočtverce z jedniček a mínus jedniček, které tvoří symetrický útvar jako na obrázku. Kosočtverce se mohou překrývat, v překrytém místě se jejich hodnoty sečtou. Hodnota takto vytvořeného polynomu je nezáporná.

$$\left(\begin{array}{cccccc} & & 1 & & & \\ & & -1 & -1 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -1 & 1 & & & 1 & -1 \\ 1 & -1 & & & -1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc} & & 1 & & & \\ & & -1 & -1 & & \\ & & & 1 & & \\ -1 & 1 & 1 & -1 & & \\ 1 & -1 & & -1 & 1 & \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & -1 & -1 & \\ -1 & 3 & -1 & \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc} & & 1 & & & \\ & & -1 & & -1 & \\ & & & & & \\ -1 & & & 3 & & -1 \\ & & & & & \\ 1 & & -1 & & -1 & 1 \end{array} \right).$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} & & 1 & & & \\ & & -1 & & -1 & \\ & -1 & 1 & 1 & -1 & \\ & & 1 & & & \\ 1 & & -1 & -1 & & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & -1 & 3 & -1 & \\ & & & -1 & -1 & \\ & & & & 1 & \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & 1 & & -1 & \\ & & -1 & & & \\ -1 & 1 & & 1 & & \\ 1 & -1 & & 1 & -1 & \\ & & & & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Všechny nerovnosti budeme řešit tím způsobem, že se nejdříve zbavíme zlomků vynásobením všech členů jejich společným jmenovatelem. Pracujeme s nerovností, takže je potřeba si hlídat, jestli to, čím násobíme, je kladné nebo záporné. Pokud nerovnost není homogenní, využijeme podmínku a tím ji homogenizujeme. Zapišeme vše pomocí CDN a roznásobíme. Následně převedeme do tvaru $P \geq 0$ a od tohoto polynomu P odčítáme známé nerovnosti, dokud se tím nezbavíme všech záporných členů. Až se nám to povede, je úloha dokázána.

Příklad. (Nesbittova nerovnost) Pro $x, y, z \geq 0$ dokažte:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

¹Symetrií myslíme to, že pokud náš trojúhelník na sebe libovolně překlopíme nebo otočíme, rozložení ani hodnota čísel se nezmění.

Řešení. Roznásobíme celou nerovnost výrazem $2(y+z)(z+x)(x+y)$, abychom se zbavili zlomků, a dostáváme:

$$2 \sum_{\text{cyc}} x(x+y)(x+z) \geq 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Zapišeme v CDN a roznásobíme:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\text{cyc}} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} &\geq 3 \begin{pmatrix} 1 & \\ & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}, \\ \sum_{\text{cyc}} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 2 & \\ & \cdot & 2 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} &\geq 3 \begin{pmatrix} \cdot & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & \cdot & 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 2 & \\ & 2 & 6 & 2 \\ & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} \cdot & & & \\ & 3 & 3 & \\ & 3 & 6 & 3 \\ & \cdot & 3 & 3 & \cdot \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & -1 & -1 & \\ & -1 & 0 & -1 \\ & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} &\geq 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy tvar, který potřebujeme. Zbývá najít, jak tuto nerovnost zapsat jako součet známých nerovností. To uděláme postupným odečítáním známých nerovností. Pokud se takto zbavíme všech záporných čísel, nerovnost jsme nutně zapsali jako součet platných nerovností, jinými slovy platí. Můžeme rovnou říct, že tato nerovnost je přímo speciálním případem Muirheadovy nerovnosti, ale ukážeme si, jak ji dokázat pomocí AG. Využijeme následující AG k eliminaci jedné mínus jedničky:

$$\begin{pmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{1}{3} & \cdot & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Tento trojúhelník symetricky sečteme. Tím jsme se zbavili všech šesti mínus jedniček, takže jsme zapsali nalezený polynom jako součet nezáporných polynomů, tedy i tento polynom musí být nezáporný. $\square$

Cvičení. Dokažte o následujících polnomech, že jsou nezáporné:

$$\begin{pmatrix} \cdot & & & & & \\ & 4 & 4 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & -6 & -2 & -2 & -6 & \\ & -1 & -2 & 6 & -2 & -1 \\ & 4 & 2 & -2 & -2 & 2 & 4 \\ \cdot & \cdot & 4 & -1 & -6 & -1 & 4 & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdot & & & & \\ & 3 & & & \\ & \cdot & -4 & & \\ & -4 & 3 & \cdot & \\ 3 & \cdot & -4 & 3 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdot & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & -1 & -1 & -1 & & \\ & -1 & 2 & 2 & -1 & \\ \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot & \\ 1 & \cdot & -1 & -1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Úlohy

Poznámka. Ve všech úlohách předpokládáme $x, y, z \geq 0$. Zároveň budeme uvažovat pouze taková x, y, z , že jsou všechny výrazy dobře definované.

Dokažte následující nerovnosti.

Úloha 1. $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq xyz.$

Úloha 2. $\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$

Úloha 3. $\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{3(xy+yz+zx)}{2(x+y+z)}.$

Úloha 4. $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$

Úloha 5. (Česko-slovensko-polské střetnutí) $\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1.$

Úloha 6. $8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq 9(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy).$

Úloha 7. $\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 + y^2}{z} \geq 2(x + y + z).$

Úloha 8. $\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 - z^2}{y+z} \geq 0.$

Úloha 9. $(x + 2y + z)(x + y + z)^2 \geq 4(x + y)(y + z)(z + x).$

Úloha 10. $xy + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq x + y + 1.$

Úloha 11. $\frac{yz}{2x+y+z} + \frac{zx}{2y+z+x} + \frac{xy}{2z+x+y} \leq \frac{1}{4}(x + y + z).$

Úloha 12. Pro $x + y + z = 1$ dokažte $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}.$

Úloha 13. (IMO 1984/1) Pro $x + y + z = 1$ dokažte $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$

Úloha 14. (Iran 1996) $(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$

Úloha 15. Pro $x + y + z = 3$ dokažte $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3xyz}}.$

Úloha 16. (IMO 2002/2) Pro $xyz = 1$ dokažte $(x - 1 + \frac{1}{y})(y - 1 + \frac{1}{z})(z - 1 + \frac{1}{x}) \leq 1.$

Úloha 17. (IMO 2005) Pro $xyz = 1$ dokažte $\sum_{\text{cyc}} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq 0.$

Úloha 18. (IMO 1995) Pro $xyz = 1$ dokažte $\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^3(y+z)} \geq \frac{3}{2}.$

Úloha 19. Pro $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = x + y + z$ dokažte $\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(2x+y+z)^2} \leq \frac{3}{16}.$

Úloha 20. (SKMO Kvalifikace 2024/25) $\sum_{\text{cyc}} \frac{x^3}{(x+2y)(y+2z)^2} \geq \frac{1}{9}.$

Úloha 21. $\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)} \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^4}.$

Úloha 22. $\sum_{\text{cyc}} \frac{xy}{xy + y^2 + zx} \leq 1.$

Úloha 23. (IMO 1967) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{x^8 + y^8 + z^8}{x^3 y^3 z^3}$.

Úloha 24. Pro $xyz = 1$ dokažte $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{(1+x)(1+y)} + \frac{z}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq \frac{7}{8}$.

Úloha 25. $\frac{x^6 z^3 + y^6 x^3 + z^6 y^3}{x^2 y^2 z^2} \geq \frac{x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz}{2}$.

Úloha 26. Pro $x + y + z = 1$ dokažte $\frac{\sqrt{xyz}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Úloha 27. Pro $xyz = 1$ dokažte $\sum_{\text{cyc}} (x^4 + y^3 + z) \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 + y^2}{z} + 3$.

Úloha 28. $\left(\sum_{\text{cyc}} x^4\right) \left(\sum_{\text{cyc}} xy^3\right) \geq \left(\sum_{\text{cyc}} x^3 y\right) \left(\sum_{\text{cyc}} x^2 y^2\right)$.

Úloha 29. Pro $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dokažte $x + xz + y \leq 2$.

SOS

Příklad 30. (nerovnost Vasileho Cirtoaje) Pro kladná a, b, c dokažte

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3 b + b^3 c + c^3 a).$$

Řešení. Tahle nerovnost je velmi zrádná. Na první pohled působí nevinně, má stupeň 4, jen tři proměnné a je homogenní. Po zapsání do CDN vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & -3 & & \cdot & \\ & 2 & & \cdot & 2 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & -3 \\ 1 & -3 & 2 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Hned je vidět v čem je problém, záporné trojky jsou hrozně blízko kraje a v rozích máme jen jedničky. To pomocí našich kanónů nepadne. A jak tedy vypadá řešení? Polynom přepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a^2 - b^2 - ab + 2bc - ca)^2,$$

čímž je nerovnost dokázána.

Jak na tohle někdo přišel? To vám nepovím, ale co si z příkladu odnést je, že cyklické nerovnosti se často dají dokázat kouzelným přepsáním do součtu čtverců. Zároveň to je způsob jak vymýšlet netriviální nerovnosti – vzít si nějaký náhodný polynom, umocnit ho na druhou a cyklicky sečíst.

Úloha 31. Vymysli si vlastní úlohu, kterou nedokážeš vyřešit jednoduchým AG a Schurem.

Protože převod do obecných součtů čtverců je těžký, budeme si muset vystačit s nějakým jednodušším tvarem. Ten tvar bude

$$S = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2,$$

je znám pod názvem „Sum Of Squares“ a zkratkou SOS. Ještě budeme pro větší přehlednost chtít, aby se výrazy S_a , S_b , S_c lišily pouze cyklickou záměnou proměnných. Převod do takového tvaru není složitý, v trojúhelníčku stačí odečítat cyklicky $(1, -2, 1)$ a zapisovat si, kde jsme je odečetli.²

Příklad 32. Pro $a, b, c > 0$ dokažte nerovnost

$$2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b)).$$

Řešení. Nerovnost zapíšeme v CDN jako

$$\begin{pmatrix} & & 2 & & \\ & -3 & -3 & & \\ & 4 & \cdot & 4 & \\ -3 & \cdot & \cdot & \cdot & -3 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

což následně rozepíšeme jako součet cyklických $(1, -2, 1)$:

$$\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & -2 & \cdot & & \\ & \textcircled{1} & \cdot & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \cdot & & \\ & -1 & -1 & & \\ & 2 & \textcircled{1} & 2 & \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \cdot & & 1 \\ & \cdot & \cdot & -2 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \textcircled{1} \\ -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tím dostáváme rozklad na

$$\sum_{\text{cyc}} \begin{pmatrix} & & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & 1 & -1 & 1 & \end{pmatrix} (b - c)^2,$$

ale všechny tyto členy jsou kladné, tedy jsme dokázali nerovnost.

Může se stát, že nám nevyjdou všechny členy přímo kladné. Pak ale stále nemusíme zoufat, může nám pomoci následující tvrzení.

Věta. Mějme $S = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2$. Pokud je splněna nějaká z následujících podmínek, tak je $S \geq 0$.

- (1) (Vyvážíme dvojnásobek) S_a , S_c , $S_a + 2S_b$ a $S_c + 2S_b$ jsou nezáporné.
- (2) (Prostřední převáží) S_b , $S_a + S_b$ a $S_b + S_c$ jsou nezáporné, kde b je medián a , b , c .
- (3) (Dva proti jednomu) S_b , S_c a $b^2S_a + a^2S_b$ jsou nezáporné, kde b je medián a , b , c .
- (4) (Cyklické součty) $S_a + S_b + S_c$ a $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a$ jsou nezáporné.

²Dokonce každý cyklický polynom se součtem koeficientů rovným 0 lze v SOS nějak zapsat.

Důkaz. Pro důkazy se hodí postupně tato pozorování

$$(1) \quad 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 - (a-c)^2 = (a+c-2b)^2 \geq 0$$

$$(2) \quad (b-c)(b-a) \leq 0 \Rightarrow (a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$$

$$(3) \quad \frac{a-c}{b-c} \geq \frac{a}{b} \Rightarrow (a-c)^2 \geq \frac{a^2}{b^2}(b-c)^2$$

$$(4) \quad \text{BÚNO } S_a + S_b \geq 0. \text{ Diskriminant polynomu kde } x = b-c \text{ a } t = a-b. \quad \square$$

Příklad 33. (Schurova nerovnost) Zatím jsme si ukazovali Schurovu nerovnost jen v jejím trojúhelníkovém tvaru, standardně ale vypadá takto

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

Řešení. Nejříve si vyzkoušíme našeho známého Schura pro $t = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & -1 & \\ & -1 & 3 & -1 \\ & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kvůli zachování symetrie si odečteme $\frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (b+c)(b-c)^2$. Zbude nám šestiúhelníček, který zapíšeme jako $\frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} -a(b-c)^2$, tedy celkově máme

$$S_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & -1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}, \quad S_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}.$$

Protože je nerovnost symetrická, tak BÚNO $a \geq b \geq c$, pak je $S_b \geq 0$, zároveň

$$S_b + S_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & 2 & \\ & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \geq 0, \quad S_b + S_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & \cdot & \\ & \cdot & 2 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Tedy z tvrzení *Prostřední převáží* Schurova nerovnost pro $t = 1$ platí.

Pro obecný důkaz se podíváme se na člen $(a-b)(a-c)$ a zapíšeme ho jako součet nějakých výrazů $(1, -2, 1)$. Dostaneme identitu

$$(a-b)(a-c) = \frac{1}{2}((a-c)^2 + (a-b)^2 - (b-c)^2).$$

V CDN to vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ & -1 & -1 \\ & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} & 1 & \\ & -2 & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 1 & \\ \cdot & \cdot & -2 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \cdot & \\ -1 & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Tedy výraz ze zadání můžeme přepsat jako

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (b^t + c^t - a^t)(b-c)^2.$$

Tedy znovu pomocí *Prostřední převáží* nerovnost platí.

Poznámka. Tvar SOS není jednoznačný, takže i když se nám povede polynom nějak zapsat, ale ne dokázat nerovnost, můžeme se jej pokusit zapsat v jiném SOS tvaru, který by se s úlohou zvládl lépe poprat.

Další úlohy

Ve všech následujících úlohách předpokládáme $a, b, c \geq 0$.

Úloha 34. Dokažte, že

$$2(a^6 + b^6 + c^6) + 16(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \geq 9a^4(b^2 + c^2) + 9b^4(c^2 + a^2) + 9c^4(a^2 + b^2).$$

Úloha 35. $a^5 + 2b^5 + 8b^3a^2 \geq 7b^4a + 2a^3b(a + b)$.

Úloha 36. Dokažte o následujících polynomech, že jsou nezáporné:

$$\begin{pmatrix} & & 1 & & & \\ & & -1 & -1 & & \\ & 1 & -4 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ -1 & -4 & 3 & -4 & -1 & \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & & & 1 & \\ & & & 1 & -10 & 1 \\ & 1 & 6 & 6 & 1 & \\ 1 & -10 & 6 & -10 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & & & 1 & \\ & & & -1 & & \\ & & -8 & 2 & & \\ 2 & 6 & 6 & & & \\ -1 & -8 & 6 & -8 & & \\ 1 & & & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 37. Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníka, dokažte

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2abc(a + b + c).$$

Úloha 38. $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$.

Úloha 39. $\sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6$.

Úloha 40. Pro $a + b + c = 1$ dokažte $\frac{1}{abc} + \frac{4}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{13}{ab+bc+ca}$.

Úloha 41. $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$.

Úloha 42. $\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \geq \frac{5}{3}$.

Úloha 43. $8a^2b^2c^2 \geq (a+b)(b+c)(c+a)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

Úloha 44. $\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 4$.

Úloha 45. $\sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2+bc}{b^2+c^2} \geq \frac{9}{2}$.

Úloha 46. Pro $a + b + c = 1$ dokažte $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{25}{1+48abc}$.

Úloha 47. $a(a-b)(a-2b) + b(b-c)(b-2c) + c(c-a)(c-2a) \geq 0$.

Úloha 48. Pro $a + b + c = 3$ dokažte $\frac{a-1}{b+1} + \frac{b-1}{c+1} + \frac{c-1}{a+1} \geq 0$.

Úloha 49.

$$\begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & -2 & 2 & 2 & -2 & \\ & 1 & 2 & -6 & 2 & 1 & \\ & & & -2 & 2 & 2 & -2 & \\ & & & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 & & & \end{pmatrix} \geq 0.$$

Návody

- 10.** Přidej třetí proměnnou a homogenizuj pomocí $z = 1$.
- 12.** Nahraď podmínkou jedničku na pravé straně. Roznásob a nelekni se, že nesedí součet koeficientů.
- 15.** Nahraď $1 = \frac{3}{x+y+z}$, umocni na druhou a bij.
- 16.** Homogenizuj pomocí $(xyz)^{\frac{1}{3}} = 1$. Pokud se děšíš necelých exponentů, substituuuj $x^3 = a$, $y^3 = b$, $z^3 = c$.
- 18.** Homogenizuj pomocí $(xyz)^{\frac{4}{3}} = 1$. Substituuuj třetí mocniny. Kdopak by se 24. stupně bál.
- 19.** Zbav se zlomků, stupně stran se liší o 2. Využij podmínku ve tvaru $xy + yz + zx = x^2yz + xy^2z + xyz^2$.
- 24.** Homogenizuj pomocí $(xyz)^{\frac{1}{3}} = 1$, substituuuj třetí mocniny.
- 26.** Umocni na druhou, pak homogenizuj.
- 29.** Zaříd, aby na jedné straně byl stupeň dva a na druhé jedna, pak umocni.
- 34.** $\sum_{\text{cyc}} (b^4 + c^4 + 2b^3c + 2c^3b - 6b^2c^2)(b - c)^2$.
- 35.** $(a^3 - 3ab^2 + 2b^3)(a - b)^2$.
- 37.** $\sum_{\text{cyc}} a(a + c - b)(b - c)^2$.
- 38.** $\sum_{\text{cyc}} (b^2c + c^2b - abc)(b - c)^2$.
- 39.** $\sum_{\text{cyc}} (b^3c + c^3b + 3b^2c^2 - ab^2c - ac^2b + a^2bc)(b - c)^2$.
- 40.** $\sum_{\text{cyc}} (a^3 + ab^2 + ac^2 - 2abc)(b - c)^2$.
- 41.** $\sum_{\text{cyc}} (b^4 + c^4 + bc^3 + cb^3 + a^3b + a^3c - 2b^2ac - 2c^2ab)(b - c)^2$.
- 42.** $\sum_{\text{cyc}} (3b^4 + 3c^4 + 2b^3c + 2c^3b - 3b^2c^2 + a^3b + a^3c - b^2ac - c^2ab - a^2bc)(b - c)^2$.
- 43.** $\sum_{\text{cyc}} (b^3c + c^3b + 2b^2c^2 - a^2bc)(b - c)^2$.
- 44.** $\sum_{\text{cyc}} (b^5a^2 + c^5a^2 + a^5b^2 + a^5c^2 + 5ab^4c^2 + 5ac^4b^2 - a^2b^3c^2 - a^2c^3b^2 - 2a^4cb^2 - 2a^4bc^2 + 4b^2c^2a^3)(b - c)^2$.
- 45.** $\sum_{\text{cyc}} (2b^4 + 4b^3c + b^2c^2 + 4bc^3 + 2c^4 + ab^2c + abc^2 + a^2bc - 2a^3b - 2a^3c)(b - c)^2$.
- 46.** $\sum_{\text{cyc}} a(3a - b - c)^2(b - c)^2$.

47. $\frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} (4b - c)(b - c)^2$. Příklad $a \geq b \geq c$ je lehký. Pro případ $c \geq b \geq a$ rozeber v neroznásobené formě podpříklad kdy $b \geq 2a$. Pro kouzelné řešení polynom vynásob polynomem $\sum_{\text{cyc}} (b - c)^2$.

48. Něco odečti. Nepřipomíná to trochu předchozí příklad?

49. Součet každého řádku je 0, takže pokud úloha platí, tak je polynom dělitelný $(b - c)^2$. A co symetrie? Už víš, co za polynom šestého stupně se v zadání skrývá? :-) Alternativně v SOS $S_a = b^2c^2 - abc^2 - acb^2 + a^2bc$, spočti cyklické součty.

Literatura a zdroje

Tímto bych chtěl poděkovat Radku Olšákovi, od kterého jsem tuto přednášku téměř beze změny převzal.

- [1] Radek Olšák: *Chinese dumbass notation a SOS*, Lipová-lázně, 2022.
- [2] Brian Hamrick: *The Art of Dumbassing*,
<https://web.archive.org/web/20190812194101/https://www.tjhsst.edu/~2010bhamrick/files/dumbassing.pdf>.
- [3] <https://www.quora.com/What-is-Chinese-Dumbass-Notation>.
- [4] Evan Chen: *Supersums of Square-Weights (SOS) – A Dumbass Perspective*,
<http://web.evanchen.cc/handouts/SOS-Dumbass/SOS-Dumbass.pdf>.
- [5] Matěj Konečný: *Dvě techniky na nerovnosti*,
<https://iksko.org/files/sbornik5.pdf>.
- [6] Michal „Kenny“ Rolínek, Pavel Šalom: *Zdolávání nerovností*, seriál MKS, 2009/10.

Ramseyovky

JOHANA KUBÁTOVÁ

ABSTRAKT. Pravidelné struktury se v matematice skrývají všude. I když si vezmeme náhodně vytvořené objekty, tak často stačí, aby byly dost velké, a máme zajištěnou určitou pravidelnost. V teorii grafů se tímto zabývá převážně Ramseyova teorie, jejíž nejdůležitější věty a příklady na ně si v této přednášce předvedeme.

Věta. (Dirichletův princip) *Pro přirozená n, k mějme $nk + 1$ míčků obarvených k barvami. Pak musí existovat $n + 1$ míčků stejné barvy.*

Příklad. (Motivace) Mějme skupinu 6 lidí, kde se každý dva lidé navzájem buď znají, nebo neznají. Ukažte, že existuje trojice, ve které se každý dva znají, nebo každý dva neznají.

Věta. (Ramseyova věta – dvojbarevná) *Pro každá přirozená n, m existuje N takové, že když obarvíme hrany úplného grafu na N vrcholech červenou a modrou, tak vždy nalezneme červený úplný podgraf velikosti n nebo modrý úplný podgraf velikosti m .*

Definice. Nejmenší takovéto číslo N z předcházející věty se značí $R(m, n)$.

Tvrzení. *Platí nerovnost $R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$.*

Poznámka. Podle motivační úlohy je $R(3, 3) \leq 6$. Ukažte, že skutečně $R(3, 3) = 6$.

Věta. (Ramseyova věta – vícebarevná) *Pro každá přirozená $n_1, \dots, n_k$ existuje N takové, že když obarvíme hrany úplného grafu na N vrcholech k barvami, tak pro nějaké $1 \leq i \leq k$ nalezneme úplný podgraf na n_i vrcholech, jehož hrany mají všechny i -tou barvu.*

Definice. Nejmenší takovéto číslo N z předcházející věty se značí $R(n_1, \dots, n_k)$.

Tvrzení. *Platí nerovnost $R(n_1, \dots, n_k) \leq R(n_1, \dots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k))$.*

Podobná tvrzení se dají zformulovat i pro nekonečné grafy. My se podíváme pouze na nekonečno „stejně velké“ jako množina přirozených čísel. Výsledky jde zobecňovat i dále, ale na to už jsou potřeba netriviální znalosti z teorie množin.

Věta. (Ramseyova věta – nekonečná) *Mějme nekonečný graf, kde vrcholy tvoří množina přirozených čísel a hrany všechny dvojice přirozených čísel. Když hrany*

tohoto grafu libovolně obarvíme konečným počtem barev, tak vždy bude existovat nekonečný jednobarevný úplný podgraf.

Poznámka. Platnost nekonečné verze Ramseyovy věty implikuje platnost konečné verze.

Klasická definice grafu nám pomáhá ukazovat vztahy mezi dvojicemi objektů. Co kdybychom se ale rozhodli zkoumat vlastnosti trojic, čtveřic, atd.? K tomu bychom museli klasickou definici grafu rozšířit na strukturu, které se říká hypergraf. Jednoduše řečeno, za hrany lze považovat nějakou p -tici vrcholů a ne jenom dvojice. Formální definici si uvádět nebudeme, ale význam by měl být jasný z následující věty.

Věta. (Ramseyova věta – pro p -tice) *Pro každá přirozená n, p, k existuje přirozené N takové, aby platilo následující. V úplném grafu na N vrcholech přiřadíme každé p -tici vrcholů jednu z k barev, potom vždy existuje úplný podgraf o n vrcholech, kde každá p -tice z daných n vrcholů má stejnou barvu.*

Poznámka. Stejná věta platí i pro nekonečné grafy, ostatně z ní se často konečná věta i vyvozuje.

Perličky na přirozených číslech

Věta. (Van der Waerdenova) *Pro libovolná přirozená čísla d, k existuje přirozené N takové, že když jakkoli obarvíme čísla $1, \dots, N$ k barvami, tak vždy najdeme jednobarevnou aritmetickou posloupnost délky d .*

Definice. Nejmenší takovéto číslo N z předcházející věty se značí $W(d, k)$.

Tvrzení. $W(3, 2) \leq 5 \cdot (2 \cdot 2^5 + 1)$.

Tvrzení. $W(3, 3) \leq 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot (2 \cdot 3^{7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1)} + 1)$.

Důkaz výše uvedených tvrzení využívá toho, že najdeme dostatek jednobarevných (ale navzájem různě barevných) aritmetických posloupností délky 2 mířících do stejného místa. Tím zajistíme, že číslo na tomto místě už musí doplňovat jednu z těchto posloupností na jednobarevnou posloupnost délky 3. Stejnou myšlenkou ve spojení s dvojnásobnou indukcí podle délky posloupnosti a počtu barev lze dokázat Van der Waerdenovu větu i v obecném případě. Pro formální důkaz se hodí uvažovat jedno zanoření indukce navíc. Konkrétně pokud bychom chtěli dokázat konečnost $W(d, k)$, tak dokazovat, že pro všechna přirozená $i \leq k$ existuje N takové, že libovolné obarvení množiny $\{1, \dots, N\}$ obsahuje jednobarevnou aritmetickou posloupnost délky d nebo i různě barevných jednobarevných aritmetických posloupností délky $d - 1$ mířících do stejného místa.

Věta. (Schurova věta) *Pro každé obarvení přirozených čísel dvěma (resp. konečně mnoha) barvami existují $x, y, z \in \mathbb{N}$ mající stejnou barvu a splňující $x + y = z$.*

A jsou tu i nějaké příklady!

Úloha 1. (Erdős-Szekeres) V posloupnosti $(n-1)(m-1)+1$ různých přirozených čísel vždy existuje klesající podposloupnost délky n nebo rostoucí délky m .

Úloha 2. Každý bod v rovině je obarven buď modře, nebo červeně. Ukaž, že existuje obdélník s vrcholy stejné barvy.

Úloha 3. Dokaž, že dokonce $W(3, 2) = 9$.

Úloha 4. Dokaž, že $R(k, l) < R(k-1, l) + R(k, l-1)$, pokud jsou obě čísla $R(k-1, l)$ a $R(k, l-1)$ sudá.

Úloha 5. Dokaž, že existuje nekonečná množina přirozených čísel H taková, že pro každá dvě různá čísla $x, y \in H$ má číslo $x+y$ sudý počet různých prvočíselných dělitelů. (Staré PraSe – myšmaš)

Úloha 6. Dokaž, že existuje množina H z předchozího příkladu, která obsahuje dokonce po dvou nesoudělná čísla.

Úloha 7. (Happy ending problem) Dokaž, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina N bodů v obecné poloze v rovině obsahuje n bodů v konvexní poloze (tj. vrcholy konvexního n -úhelníka).

Úloha 8. V úplném grafu o 17 vrcholech je každá hrana obarvena modře, červeně, nebo zeleně. Dokaž, že v grafu existuje jednobarevný trojúhelník. (IMO 1964)

Úloha 9. (Modulární Velká Fermatova věta) Ukaž, že pro každé přirozené n existuje p_0 takové, že pro všechna prvočísla $p > p_0$ má kongruence

$$x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$$

řešení pro nějaká $x, y, z \in \mathbb{N}$, kde $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Úloha 10. Existuje funkce $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro libovolnou nekonečnou podmnožinu M přirozených čísel platí $\{f(a, b); a, b \in M\} = \mathbb{N}$?

Úloha 11. (těžší) Obarvěme čísla $\{1, \dots, 1978\}$ libovolně šesti barvami. Dokaž, že existují tři stejnobarevná čísla x, y, z splňující $x + y = z$. (IMO 1978)

Návody

1. Uvažujte dvojice čísel říkající, jaké nejdelší klesající a rostoucí podposloupnosti na konkrétních číslech v posloupnosti končí.
2. Vezměte si mřížku bodů s celočíselnými souřadnicemi a podívejte se na svislé trojice bodů.
5. Aplikuj Ramseyovky třeba na množinu čísel dávající po dělení 3 zbytek 1.
7. Nejdřív vyšetři případ pro $n = 4$.
8. Ke spočtení $R(3, 3, 3)$ použij fakt, že $R(3, 3) = 6$.
9. Pomocí primitivního prvku pro p si všechna čísla v $\mathbb{Z}_p^*$ napiš jako mocninu tohoto prvku a následně je obarvi podle velikosti exponentu modulo n .
10. Neexistuje. Dokonce neexistuje, i kdybychom dvojice přirozených čísel „barvili“ pouze 4 barvami místo všech přirozených čísel.

Literatura a zdroje

Děkuji Martinovi Raškovi, od něhož jsem přednášku beze změny převzala.

- [1] Martin Raška: *Ramseyovky*, Sklené, 2019.
- [2] B. M. Landman, A. Robertson: *Ramsey theory on the Integers*, SML, 2014.
- [3] Ben Green, *Ramsey Theory and the IMO*, <https://www.jstor.org/stable/3621841>
- [4] Jongmin Baek: *Introduction to Infinite Ramsey Theory*, 2017.
- [5] Vašek Rozhoň: *Úvod do Ramseyovy teorie*, Lipová-lázně, 2016.

Úhlení

DANIEL PEROUT

ABSTRAKT. Příspěvek shrnuje základní metody řešení geometrických úloh. Uvádí jejich orientované verze, které nám umožňují vyhnout se rozebírání různých konfigurací bodů v řešení. Dále obsahuje úlohy vhodné k procvičení této techniky.

Věta. (Charakterizace tětíkových čtyřúhelníků) *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) $ABCD$ je tětíkový (má kružnici opsanou),
- (ii) $|\angle ACB| = |\angle ADB|$ (shodnost obvodových úhlů),
- (iii) $|\angle ABC| + |\angle ADC| = 180^\circ$.

Věta. (O středovém a obvodovém úhlu) *Nechť body A, B leží na kružnici se středem S a bod C na kratším oblouku AB . Pak*

$$2|\angle ACB| = |\angle ASB|.$$

Příklad. (Lemma o dvou kružnicích) Jsou dány kružnice k, l , které se protínají v bodech A, B . Na kružnici k zvolme bod X a sestrojme Y jako průsečík přímky XB s kružnicí l . Ukažte, že nezávisle na volbě bodu X má trojúhelník AXY vždy stejné vnitřní úhly.

Věta. (O úsekovém úhlu) *Nechť ABC je trojúhelník vepsaný do kružnice k a p přímka procházející bodem A . Na přímce p zvolme bod X tak, aby ležel v polorovině opačné k $\overrightarrow{ABC}$. Pak platí, že p je tečna kružnice k , právě když $|\angle XAB| = |\angle ACB|$.*

Definice. *Obloukový úhel $|\angle AB|$ dvou bodů A, B ležících na kružnici k je roven $|\angle AXB|$ pro libovolný bod X ležící na opačném oblouku $\overrightarrow{AB}$.*

Příklad. Nechť je $ABCD$ obdélník a P bod na jeho opsané kružnici různý od jeho vrcholů. Nechť W, X, Y a Z jsou kolmé projekce bodu P na strany AB, BC, CD a DA . Ukažte, že jeden z bodů W, X, Y a Z je ortocentrum trojúhelníka tvořeného zbylými body.

Věta. (O obloukových úhlech) *Nechť k je kružnice, A, B, C, D libovolné body na ní a X průsečík AD a BC . Pokud*

- (i) X leží uvnitř kružnice k , pak $|\angle AXB| = |\angle AB| + |\angle CD|$,

- (ii) X leží na polopřímce DA mimo kružnici k , pak $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle CD| - |\sphericalangle AB|$,
- (iii) X leží na polopřímce AD mimo kružnici k , pak $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AB| - |\sphericalangle CD|$.

Definice. *Orientovaným úhlem* $\sphericalangle(p, q)$ dvou přímek p, q (v tomto pořadí) nazveme úhel, o který je třeba otočit p v kladném směru (proti směru hodinových ručiček), aby otočená p byla rovnoběžná s q . Tento úhel je jednoznačný až na násobek 180° .

Lemma. (Základní vlastnosti orientovaných úhlů) *Pro přímký p a q platí*

- (i) $\sphericalangle(p, p) = 0$,
- (ii) $\sphericalangle(p, q) = -\sphericalangle(q, p)$,
- (iii) $\sphericalangle(p, q) + \sphericalangle(q, r) = \sphericalangle(p, r)$,
- (iv) $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p, q) + k \cdot 180^\circ$, kde k je celé číslo,
- (v) jsou-li A, B, S tři body neležící v přímce, pak A, B leží na jedné kružnici se středem S , právě když $\sphericalangle(AS, AB) = \sphericalangle(BA, BS)$.

Lemma. *V trojúhelníku $\triangle ABC$ platí*

$$\sphericalangle(CA, AB) + \sphericalangle(AB, BC) + \sphericalangle(BC, CA) = 0.$$

Věta. (O obvodovém a středovém úhlu pro orientované úhly) *Nechť body A, B, C, D leží na jedné kružnici se středem S pak*

- (i) $\sphericalangle(AC, CB) = \sphericalangle(AD, DB)$.
- (ii) $2 \cdot \sphericalangle(AC, CB) = \sphericalangle(AS, SB)$.

Věta. (O úsekovém úhlu pro orientované úhly) *Přímka BX je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABC právě tehdy, když $\sphericalangle(AC, CB) = \sphericalangle(AB, BX)$.*

Věta. (O tětiových čtyřúhelnících) *V rovině jsou dány čtyři různé body A, B, C, D . Tyto body leží na jedné kružnici, právě když platí*

$$\sphericalangle(AC, AD) = \sphericalangle(CB, BD).$$

Příklad. (Folklor) Jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 tak, že k_i a k_{i+1} a protínají v bodech A_i a B_i ($k_5 = k_1$). Ukažte, že pokud je A_1, A_2, A_3, A_4 leží na jedné kružnici, pak i B_1, B_2, B_3, B_4 leží na jedné kružnici.

Definice. *Obloukový orientovaný úhel* $|\overrightarrow{\sphericalangle AB}|$ oblouku $\overrightarrow{AB}$ kružnice k je roven $\sphericalangle(AX, BX)$ pro libovolný bod X ležící na oblouku $\overrightarrow{BA}$.

Věta. (O orientovaných obloukových úhlech) *Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník a X průsečík přímek AD a BC . Pak $\sphericalangle(AX, XB) = |\overrightarrow{\sphericalangle AB}| + |\overrightarrow{\sphericalangle DC}|$.*

Úloha 1. Přímký p, q se protínají v bodě S . Dále jsou dány body A, B takové, že $\sphericalangle(p, SA) = \sphericalangle(SB, q)$. Paty kolmic z bodů A, B na přímkou p označme postupně A_p, B_p a obdobně paty kolmic na přímkou q jako A_q, B_q . Dokažte, že body A_p, A_q, B_p, B_q leží na jedné kružnici.

Úloha 2. (Miquelova věta) Je dán trojúhelník ABC . Na přímkách BC , CA , AB leží postupně body X , Y , Z . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AYZ , XBZ a XYC prochází jedním bodem.

Úloha 3. (Lemma o spirální podobnosti) Kružnice k_1 a k_2 se protínají v bodech X a Y . Přímka procházející X protíná k_1 a k_2 podruhé v A a B . Druhá přímka procházející X protíná k_1 a k_2 podruhé v C a D . Ukažte, že jsou si trojúhelníky AYC , BYD podobné.

Úloha 4. Je dán rovnoramenný trojúhelník SAC se základnou AC . Na přímkách SA , SC leží postupně body X , Z takové, že přímka XZ je rovnoběžná s přímkou AC . Buď O střed kružnice opsané trojúhelníku AZS . Ukažte, že přímky XC a SO jsou na sebe kolmé.

Úloha 5. (Švrčkův bod) V trojúhelníku ABC označme $\check{S}$ druhý průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu A s kružnicí opsanou ABC . Dále označme $\check{S}'$ druhý průsečík osy vnějšího úhlu u vrcholu A s kružnicí opsanou. Nakonec označme středy kružnic připsaných ke stranám BC , CA , AB postupně I_a , I_b , I_c a střed kružnice vepsané I . Dokažte

- (i) $|\check{S}B| = |\check{S}C| = |\check{S}I| = |\check{S}I_a|$,
- (ii) $|\check{S}'B| = |\check{S}'C| = |\check{S}'I_c| = |\check{S}'I_b|$.

Úloha 6. Buď H průsečík výšek trojúhelníku ABC a H' obraz H v osově souměrnosti podle přímky AB . Dokažte, že H' leží na kružnici opsané ABC .

Úloha 7. Skrz průsečík výšek H trojúhelníku ABC vedeme přímku p . Označme p_a , p_b osově obrazy přímky p podle přímek BC , CA . Dokažte, že se přímky p_a , p_b protínají na kružnici opsané.

Úloha 8. (Simsonova přímka) Buď P bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Dokažte, že paty kolmic z P na strany trojúhelníka (3 body) leží v jedné přímce.

Přímka z předchozí úlohy se nazývá Simsonova přímka trojúhelníku ABC vzhledem k bodu P .

Úloha 9. Jsou dány body A , B , C , P na jedné kružnici. Kružnice k se dotýká přímky PA v bodě A a prochází bodem B . Druhý průsečík této kružnice s přímkou AC označme X . Dokažte, že přímka BX je kolmá na Simsonovu přímku trojúhelníku ABC vzhledem k bodu P .

Úloha 10. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Nechtě jsou D , E , F paty výšek z vrcholů A , B , C . Jeden z průsečíků EF s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC označme P . Průsečík přímek BP a DF označme Q . Ukažte, že $AP = AQ$.

(IMO Shortlist 2010)

Úloha 11. Na stranách trojúhelníku ABC leží postupně body P , Q , R . Nechtě k_A , k_B a k_C jsou kružnice opsané trojúhelníkům AQR , BRP , CPQ . Jsou-li X , Y a Z druhé průsečíky AP s k_A , k_B a k_C , pak ukažte, že $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$. (USAMO 2013)

Úloha 12. Necht MN je přímka rovnoběžná se stranou BC trojúhelníku ABC tak, že $M \in AB$ a $N \in AC$. Přímky BN a CM se protínají v P . Kružnice opsané trojúhelníkům BMP a CNP se podruhé protínají v Q . Ukažte, že $|\angle BAQ| = |\angle CAP|$.
(Balkán 2009)

Úloha 13. Kružnice k_1 a k_2 se protínají v bodech P a Q . Necht AC a BD jsou takové tětivy kružnic k_1 a k_2 , že přímky AB a CD se protínají v P . Přímky BD a AC se protínají v X . Y je bod na k_1 takový, že $PY \parallel BD$. Z je bod na k_2 takový, že $PZ \parallel AC$. Ukažte, že body Q, X, Y, Z leží na jedné přímce. (USA TST 2007)

Úloha 14. Je dán trojúhelník ABC s kružnicí opsanou k . Necht l je libovolná přímka v rovině a l_A, l_B, l_C obrazy l podle úseček BC, CA, AB . Necht $A'B'C'$ je trojúhelník určený přímkami l_A, l_B, l_C .

(i) Ukažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$ leží na k .

(Irán 1995)

(ii) Předpokládejme, že l je tečna k . Ukažte, že kružnice opsaná $A'B'C'$ se dotýká kružnice k .

(IMO 2011/6)

Návody

1. Najdi tětiové čtyřúhelníky.
2. Najdi obvodové úhly a využij součet úhlů v trojúhelníku.
3. Využij velikost vedlejšího úhlu v tětiovém čtyřúhelníku.
4. Použij středové a obvodové úhly.
5. (i) Osy úhlů jsou na sebe kolmé.
(ii) Využij obvodové úhly.
6. Vyúhli.
7. Použij obloukové úhly.
8. Využij velikost vedlejších úhlů v tětiových čtyřúhelnících.
9. Použij větu o úsekových úhlech.
10. Ukaž, že $APFQ$ je tětiový čtyřúhelník.
11. Použij lemma o spirální podobnosti.
12. Najdi tětiové čtyřúhelníky a použij spirální podobnost.
13. Ukaž, že $XQAC$ je tětiový čtyřúhelník.

Literatura a zdroje

Příspěvek je pouze s drobnými úpravami převzán od Veroniky Hladíkové.

- [1] Veronika Hladíková: *Úhlení*, Zásada, 2017.
- [2] Martin Tancer: *Orientované úhly*, Prudka, 2002.
- [3] Mírek Olšák: *Orientované úhlení*, Domašov, 2012.
- [4] Michal 'Kenny' Rolínek: *Angle chasing*, Dobrá voda, 2010.
- [5] Titu Andreescu a Razvan Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2011.
- [6] Evan Chan: <http://web.evanchen.cc/handouts/Directed-Angles/Directed-Angles.pdf>

ABSTRAKT. Vezmi si tři osy úhlů trojúhelníka, protni je a voila! Tento bod jistě znáš, to je super. Na této přednášce ho proto poznáš ještě o tolik blíže, no neber to!

Tvrzení. *Osy vnitřních úhlů trojúhelníka ABC se protínají v jednom bodě. Podobně se osy vnějších úhlů při dvou vrcholech a osa vnitřního úhlu třetího protínají v jednom bodě.*

Průsečík os vnitřních úhlů budeme značit I . Průsečík osy vnitřního úhlu BAC a os vnějších úhlů ABC a ACB budeme značit I_A . Podobně definujeme I_B a I_C .

Tvrzení. *Bod I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a I_A je střed kružnice připsané straně BC .*

Úmluva. Domluvme se, že kružnici opsanou trojúhelníku XYZ budeme značit (XYZ) . V této přednášce budou body D, E, F značit po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, AC a AB .

Švrci a připsiště

Střed oblouku $\widehat{BC}$ neobsahujícího A kružnice (ABC) označme S_A a nazvěme ho A -Švrkem, střed druhého oblouku označme N_A a nazvěme ho A -Antišvrkem.

Tvrzení. (Souhrn vlastností Švrka) *Body B, C, I a I_A leží na kružnici s průměrem II_A a středem S_A . Body B, C, I_B a I_C leží na kružnici s průměrem $I_B I_C$ a středem N_A .*

Tvrzení. (Dualita) *Body A, B, C jsou paty výšek v trojúhelníku $I_A I_B I_C$ a ortocentrum tohoto trojúhelníka je I . Kružnice (ABC) je Feuerbachova kružnice¹ trojúhelníku $I_A I_B I_C$.*

Tato věta je extrémně důležitá, když se bavíme o kružnicích připsaných. Občas na tebe úloha hodí kružnice připsané, když analogické tvrzení o kružnici vepsané by bylo jednodušší. Občas je úloha trochu bídák, no.

¹Kružnice procházející středy stran a patami výšek.

Úloha 1. (Shooting lemma) V trojúhelníku ABC uvažme body X, Y na úsečce BC a druhé průsečíky přímk $S_A X$ a $S_A Y$ s kružnicí opsanou označme Z, T . Ukažte, že X, Y, Z, T leží na kružnici.

Úloha 2. Ukažte, že platí $|AI| \cdot |AI_A| = |AB| \cdot |AC|$.

Úloha 3. V trojúhelníku ABC se středem kružnice opsané O uvažme bod K na kružnici vepsané takový, že KD je průměr kružnice vepsané. Dokažte, že se přímky KN_A, DS_A a OI protínají v jednom bodě.

Úloha 4. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC . Ukažte, že přímka AI se dotýká kružnice (MIN_A) .

Úloha 5. Je daná kružnice Ω a její tětiva AB . Do jednoho oblouku $\widehat{AB}$ kružnice Ω je vepsaná kružnice, která se dotýká Ω v bodě K a AB v bodě L . Ukažte, že KL je osa úhlu AKB .

Úloha 6. (Bevan point) Označme V obraz I ve středové souměrnosti podle středu kružnice opsané. Ukažte, že V je střed kružnice opsané trojúhelníku $I_A I_B I_C$.

Poznámka. Ze stejnolehlosti z I plyne, že kružnice $(I_A I_B I_C)$ je dvakrát větší než (ABC) .

Úloha 7. Je dán trojúhelník ABC s $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$. Označme M a N středy úseček AB a BI . Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN . (MO-70-III-2)

V přednášce na překlápění tečen se ukázalo, že dotyky vepsané a připsané kružnice strany BC jsou symetrické podle středu této strany. To se využije v následující úloze, mějme to pak na mysli v příští sekci.

Úloha 8. Necht $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník s $AB \parallel CD$. Vepsaná kružnice trojúhelníku BCD se dotýká úsečky CD v bodě E . Bod F leží na ose $\sphericalangle DAC$ tak, že $EF \perp CD$. Necht opsaná kružnice trojúhelníku ACF protíná přímku CD v bodech C a G . Dokažte, že trojúhelník AFG je rovnoramenný. (USAMO 1999/6)

Úloha 9. V různostranném trojúhelníku ABC označme K jeden průsečík osy úhlu BAC s kružnicí nad průměrem BC a K' jeho protilehlý bod na této kružnici. Ukažte, že K, K', S_A a N_A leží na kružnici.

Úloha 10. V úloze výše označme druhý průsečík osy $\sphericalangle BAC$ s danou kružnicí L a analogicky definujme L' . Ukažte, že kružnice $(K' L' N_A)$ pólí úsečku BC . (MO-71-III-3)

Stejnolehlosti na kružnici vepsané

Pro tuto sekci označme X bod dotyku kružnice připsané straně BC s touto stranou.

Lemma 11. (Diameter of incircle lemma) *Ukažte, že přímka AX prochází bodem přímo naproti D na kružnici vepsané. Podobně přímka AD prochází bodem naproti X na kružnici připsané.*

Úloha 12. Označme M střed strany BC . Ukažte, že přímka MI půlí úsečku AD .

Úloha 13. V trojúhelníku ABC s ortocentrem H označme K, L, M po řadě paty výšek z bodů A, B, C . Paty kolmic z bodů A a H na přímku LM označme po řadě P a Q . Konečně, přímky KP a HQ se protnou v bodě R . Určete poměr $\frac{|HQ|}{|HR|}$.
(USA TST 2011/1)

Úloha 14. Ukažte, že $AX \parallel IM$ a $AD \parallel MI_A$.

Lemma 15. (Midpoint of altitudes lemma) *V trojúhelníku ABC dokažte, že přímky XI a I_AD obě půlí výšku z A .*

Úloha 16. V trojúhelníku ABC označme Y obraz I podle přímky BC a P patu výšky z A . Dokažte, že P, Y a I_A leží na přímce.

Lemma 17. *V trojúhelníku ABC označme M střed BC . Ukažte, že přímky AM, EF a DI prochází jedním bodem.*

Úloha 18. V trojúhelníku ABC označme M střed BC . Kolmice na přímku AM vedená bodem I protíná přímku EF v bodě L . Ukažte, že $AL \parallel BC$.

Úloha 19. V různostranném trojúhelníku ABC se středem kružnice opsané O označme středy výšek z A, B, C po řadě K, L, M . Ukažte, že přímky KD, LE, MF a OI prochází jedním bodem.
(Vietnam TST 2003/2)

Úloha 20. V trojúhelníku ABC uvažme N druhý průsečík přímky DI_A s kružnicí vepsanou. Ukažte, že kružnice (BNC) půlí úsečku DI_A . (vesměs CAPS 2021/2)

Úloha 21. V trojúhelníku ABC uvažme K střed výšky z A . Ať N je druhý průsečík DK s kružnicí vepsanou. Ukažte, že kružnice (BNC) se dotýká kružnice vepsané.
(Shortlist 2002/G7)

Úloha 22. (těžší) V trojúhelníku ABC uvažme body P a Q různé od D na přímce BC tak, že $|BP| = |BD|$ a $|CQ| = |CD|$. Ukažte, že jeden z průsečíků kružnic (CEP) a (BFQ) leží na kružnici vepsané.
(MEMO 2025/I3)

Iran lemma

Lemma 23.² *V trojúhelníku ABC dokažte, že se přímka EF , osa úhlu ABC a střední příčka příslušící bodu C protínají v jednom bodě. Navíc tento bod leží na Thaletově kružnici nad BC .*

Nejllepší pohled na toto tvrzení je „souběh osy úhlu jednoho vrcholu, střední příčky druhého a přímky spojující dotyky kružnice vepsané třetího“. Když se tak v úloze objeví dva, automaticky máme třetí.

²Těž se mu někdy říká „Unlikely concurrence“, protože, lidově řečeno, wtf.

Úloha 24. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC , P patu C na AB a K bod na ose úhlu ABC takový, že $KM \parallel AB$. Ukažte, že $|KP| = |KC|$.

Úloha 25. V trojúhelníku ABC osy úhlů ABC a ACB protnou přímkou EF po řadě v bodech X a Y . Ukažte, že I je střed kružnice vepsané trojúhelníku DEX .

Úloha 26. V trojúhelníku ABC označme M střed úsečky BC . Označme P , Q průsečíky osy úhlu BAC s kružnicí ω se středem M procházející bodem D . Ukažte, že $|\angle PMQ| + |\angle BAC| = 180^\circ$. (Slovenské výběrko 2016/16)

Úloha 27. V úloze výše ukažte, že průsečík tečen ke kružnici ω v bodech P a Q leží na výšce z A .

Úloha 28. Předpokládejme, že v trojúhelníku ABC existuje bod X na přímce EF tak, že

$$|\angle XBC| = |\angle XCB| = 45^\circ.$$

Ukažte, že přímka S_AD prochází buď E , nebo F . (Balkán 2023/1)

Úloha 29. Na kružnici vepsané nerovnoramenného trojúhelníku ABC leží bod Q tak, že $AQ \perp QD$. Ukažte, že přímka AQ prochází bodem dotyku kružnice připsané trojúhelníku ABC ke straně BC .

Úloha 30. V úloze výše označme M střed strany BC a uvažme navíc bod P uvnitř trojúhelníku ABC takový, že $|MD| = |MP|$ a $|\angle PAB| = |\angle PAC|$. Dokažte, že platí buď $|\angle PQE| = 90^\circ$ nebo $|\angle PQF| = 90^\circ$.

(USA TST 2015/1)

Úloha 31. (aneb, proč se to jmenuje Iran lemma) V trojúhelníku ABC označme H ortocentrum trojúhelníku BIC . Dále označme P patu výšky z D na EF a K střed úsečky DP . Ukažte, že KH půlí úsečku EF . (Iran TST 2009/9)

Návod. Najdi trojúhelník, jehož připsiště je H tak, že K je pořad střed výšky.

Sharky–Devil a big picture

Druhý průsečík kružnice (AEF) s kružnicí (ABC) označme pro tuto sekci jako S . Tomuto bodu říkáme *A-Sharky–Devil*. Hned z definice³ si všimněme, že S je *střed spirální podobnosti přenášející FE na BC* , tedy, že $SFE \sim SBC$. Označme si navíc dále patu komice z D na EF jako P . Tento bod už jsme viděli v předchozí úloze, trochu více nyní prozkoumáme jeho vlastnosti.

Lemma 32. V trojúhelníku ABC označme A' bod přímo naproti A na kružnici opsané. Pak S , P , I a A' leží na jedné přímce.

Úloha 33. Ukažte, že se přímky AS , BC a kolmice na AI v I protínají v jednom bodě.

³Pokud se chceš dozvědět víc o spirálce, podívej se na tenhle příspěvek <https://prase.cz/library/SpiralniPodobnostAKZ/SpiralniPodobnostAKZ.pdf>

Úloha 34. V různostranném trojúhelníku ABC osa úhlu BAC protne stranu BC v bodě K , přímka AS protne stranu BC v bodě T . Bodem K vedme rovnoběžku s přímkou SI a její průsečík s TI označme J . Dokažte, že $AJ \perp BC$.

(Girls in Mathematics Tournament 2024)

Úloha 35. (Bevan point znovu) V různostranném trojúhelníku ABC označme V obraz I ve středové souměrnosti podle středu kružnice opsané. Dokažte, že $SA \perp AV$.

Úloha 36. (lehce počítací) Ukažte, že zmíněná spirální podobnost zobrazí P na D . Odvoďte z toho, že SD je osa úhlu BSC , tedy přímka SD prochází bodem S_A .

Úloha 37. V trojúhelníku ABC uvažme průsečík K přímek N_AS a BC . Ukažte, že K leží na přímce EF .

Úloha 38. V trojúhelníku ABC označme X, Y po řadě průsečíky přímky EF s osami úhlů ABC a BCA . Ukažte, že X, Y, S a N_A leží na kružnici.

Úloha 39. V různostranném trojúhelníku ABC ukažte, že přímka DI je tečna ke kružnici (DPS). (Čína jihovýchod 2023/5)

A jako velké finále si vyřešíme další úlohu z amerického výběrka. Hodně zábavy, nezlomte pravítka!

Úloha 40. V různostranném trojúhelníku ABC označme G druhý průsečík přímky AP s (ABC) . Ukažte, že S, P, D a G leží na kružnici.

Úloha 41. V úloze výše dokažte, že N_A, D a G leží na přímce.

Úloha 42. V úloze výše označme M střed strany BC . Ukažte, že D je střed kružnice vepsané trojúhelníka GSM . (USA TST 2021/2)

Návody

1. Vyúhli to.
2. Najdi podobnost.
3. Přímka OI je přímka spojující středy nějakých kružnic, že?
4. Mocnost.
5. Stejnolehlost.
6. Zapoj Antišvrka a ukaž, že $N_AA \perp N_AV$.
7. Na co navádí středy? Odpověď je buď střed kružnice opsané a nebo stejnohlost, tak si vyber :D
8. Zkus tam najít pár známých bodů.
9. Jaký bod by to fakt chtělo dokreslit?
10. Vyúhli švrka pomocí předchozí úlohy.
11. Stejnolehlost v A .
12. Najděte vhodnou stejnohlost pomocí lemmatu 11.

13. Ortocentrum? To zní jako dualita. Využij lemmatu 11.
14. Stejnolehlost nebo střední příčky.
16. Najdi střední příčku pomocí Midpoint of altitudes lemmatu.
18. Najdi ortocentrum v obrázku. Využij lemma 17.
19. Zase a znova stejnohlost. Mezi DEF a kterým trojúhelníkem?
20. Jak uchopit střed? Co pomocí mocnosti?
21. Využij předchozí úlohu. Pro tečnost najdi stejnohlost z kružnice vepsané na kružnici (BNC). K tomu chceš říct, že střed DI_A je bod nejníž na (BNC). Pomocí délek ukaž, že je to Švrk.
22. Dokresli připsiště a využij předchozí úlohu. Mocnost a úhlení.
24. Najdi Švrka.
25. Najdi dvě Thaletovky a úhli.
26. Iran lemma dává pár rovnoběžností.
27. Dokresli si pár kružnic z Iran lemmatu a ukaž, že se dotýkají ω . Tečny jsou taky chordály.
28. Z Iran lemmatu plyne, že ABC je pravoúhlý.
29. Jaký je druhý průsečík AQ s kružnicí vepsanou?
30. Kde ještě leží P ? Pak už to jen vyúhli.
31. Něco půli výšku, co nám to asi připomíná?
33. Jaká chordála může být kolmice na AI v I ?
34. Využij předchozí úlohu. Co je J ?
35. Najdi rovnoběžnost. Jak využít, že O je střed VI ?
36. Spočítej $|FP|/|EP|$ pomocí trošky goniometrie a všimni si úhlů v trojúhelníku BIC .
37. Najdi kružnici, co prochází středem EF a vyúhli to.
38. Vzpomeň si na Iran lemma a na předchozí úlohu. Mocni.
39. Co starý dobrý shooting lemma?
40. Dokresli bod naproti A .
41. Pomocí nalezené kružnice ukaž $|\angle SGD| = |\angle SGN_A|$.
42. Dokresli Švrka a najdi pár kolmic.

Literatura a zdroje

- [1] i3435: *Muricaaaaaaa*, <https://artofproblemsolving.com/community/c6h2456133p20459825>.
- [2] Evan Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*.
- [3] Yufei Zhao: *Lemmas in Euclidean Geometry*, <https://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf>

Úvod do teorie čísel

LENKA POLJAKOVÁ

ABSTRAKT. Teorie čísel je jedním ze čtyř pilířů matematické olympiády. Každý zkušený olympionik má svou základní sadu nástrojů, ze kterých své řešení pak lepí. V tomto příspěvku si proto na spoustě úložek představíme nejužitečnější zbraně, co při řešení „N-ka“ používáme.

Úmluva. Všechna m, n považujeme za přirozená, všechna k, ℓ, a, b za celá.

Dělitelnost a prvočísla

Definice. O celých a, b říkáme, že a dělí b , jestliže existuje k takové, že $b = k \cdot a$. Značíme $a \mid b$.

Definice. Přirozené číslo p nazveme prvočíslem, pokud má právě dva přirozené dělitele.

Úloha 1. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Úloha 2. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $4k + 3$.

Úloha 3. Nahlédněte, že součin libovolných pěti po sobě jdoucích celých čísel je dělitelný osmi, třemi i pěti.

Úloha 4. Určete, pro která n platí $n + 1 \mid n^2 + 1$.

Úloha 5. Označme $M_n = 2^n - 1$. Dokažte, že pokud je M_n prvočíslo, pak i n musí být prvočíslo.

Úloha 6. Označme $K_n = 2^n + 1$. Dokažte, že pokud je K_n prvočíslo, pak n je nutně mocninou dvojky.

Úloha 7. Dokažte, že pro každé $n > 2$ existuje prvočíslo p takové, které splňuje $n < p < n!$.

Největší společný dělitel

Definice. Největším společným dělitelem čísel a, b nazveme největší přirozené d takové, že $d \mid a, d \mid b$. Tuto skutečnost značíme $\text{NSD}(a, b) = d$. Pokud $d = 1$, říkáme,

že jsou čísla a, b nesoudělná.

Jedním ze způsobů jak efektivně najít největšího společného dělitele dvou přirozených čísel je Euklidův algoritmus, který si představíme během přednášky.

Věta. Každé n má jednoznačný rozklad na prvočinitele $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

Úloha 8. Ukažte, že pro nesoudělná a, b platí $\text{NSD}(ab, a + b) = 1$.

Úloha 9. Ukažte, že zlomek $\frac{21n+4}{14n+3}$ je v základním tvaru.

Úloha 10. Ať F_n značí n -té Fibonacciho číslo, tedy $F_0 = 0, F_1 = 1$ a následně $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Pak dokažte, že $\text{NSD}(F_a, F_b) = F_{\text{NSD}(a,b)}$.

Úloha 11. V závislosti na nesoudělných a, b najděte $\text{NSD}(a + b, a^2 + b^2)$.

Kongruence

Definice. Čísla a, b jsou kongruentní modulo m , pokud $m \mid a - b$. Značíme $a \equiv b \pmod{m}$.

Tvrzení. Pro daná a, m existuje b splňující $ab \equiv 1 \pmod{m}$, právě tehdy, když jsou nesoudělná. Pak už je b jednoznačně dané modulo m a značíme ho $b \equiv a^{-1} \pmod{m}$.

Úloha 12. Dokažte, že pro dvě přirozená čísla a, b nemůže být výraz $(36a + b)(a + 36b)$ mocninou dvojky.

Úloha 13. Nechť p je prvočíslo větší než 5. Dokažte, že $p - 4$ nemůže být čtvrtá mocnina přirozeného čísla.

Úloha 14. Označme $p(n)$ součin nenulových cifer čísla n . Položme $T = p(1) + p(2) + \cdots + p(999)$. Určete největší prvočíslo, které dělí T .

Počítání modulo prvočíslo

Věta. (malá Fermatova) Je-li p prvočíslo a $p \nmid a$, pak $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Úloha 15. Spočítejte $2023^{2024} \pmod{13}$.

Úloha 16. Ať jsou p, q různá prvočísla. Dokažte, že $pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.

Úloha 17. Dokažte, že pro každé prvočíslo p existuje kladné n takové, že $2^n \equiv n \pmod{p}$.

Úloha 18. Buď p prvočíslo. Dokažte, že všichni prvočíselní dělitelé $2^p - 1$ jsou $\equiv 1 \pmod{p}$.

Kvadratické zbytky

Definice. Celé číslo a je kvadratickým zbytkem modulo m , pokud kongruence $x^2 \equiv a \pmod{m}$ má řešení.

Úloha 19. Najděte všechny kvadratické zbytky modulo 8, 3, 5, 11.

Úloha 20. Nahlédněte, že -1 je kvadratický zbytek modulo liché prvočíslo p , právě když $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Úloha 21. Celá čísla x, y splňují $7 \mid x^2 + y^2$. Dokažte, že x i y jsou násobky 7.

Návody

5. Použij obměnu a $a - b \mid a^k - b^k$.
6. Použij obměnu a $a + b \mid a^l + b^l$ pro liché l .
7. Podívej se na $n! - 1$.
8. Sporem. Dokaž pomocné tvrzení $p \mid ab \implies p \mid a$ nebo $p \mid b$.
9. Zkus pustit Euklidův algoritmus na výrazy s neznámou n .
10. Začni důkazem $d \mid n \implies F_d \mid F_n$.
11. Přepiš $a^2 + b^2$ jako trikový součet a pak aplikuj Euklidův algoritmus.
12. Použij modulo 8.
13. Použij vhodné modulo a kongruence.
14. Neboj se toho a zkus T natvrdo spočítat.
16. Dívej se zvlášť modulo p a q .
17. Co kdyby bylo pro jednoduchost n násobkem $p - 1$?
18. Začni vhodným rozkladem.

Literatura a zdroje

Tímto mockrát děkuji cvičícím předmětu Proseminář z teorie čísel, z jejichž materiálů jsem čerpala většinu úloh a definic.

- [1] Matěj Doležálek: *Proseminář z teorie čísel – shrnutí*
- [2] Mikuláš Zindulka: *Proseminář z teorie čísel*

Konstrukce kružítkem

MATOUŠ ŠAFRÁNEK

ABSTRAKT. V příspěvku ve formě úloh dokážeme Mohrovu–Mascheroniho větu, že vše, co jde sestrojít pravítkem a kružítkem, jde sestrojít kružítkem samotným.

„Každou geometrickou konstrukci, kterou lze provést pravítkem a kružítkem, lze provést samotným kružítkem.“

Toto pozorování učinil již roku 1672 dánský matematik Georg Mohr, nikdo mu však v té době nevěnoval velkou pozornost. Stejnou větu dokázal v roce 1797 Lorenzo Mascheroni, jenž sklídl podstatně větší úspěch. Proto dnes mluvíme o konstrukcích pomocí kružítky jako o mascheroniovských konstrukcích.

Poznámka. Leckdo by mohl namítat, že výše zmíněný výrok neplatí, protože pouhým kružítkem přece nejsme schopni sestrojít přímku (neumíme totiž nakreslit rovnou čáru). Avšak v tomto příspěvku budeme chápat přímku jako dvojici různých bodů, jimiž je jednoznačně určena.

Kromě rýsování přímek a kružnic se veškeré konstrukce pravítkem a kružítkem dají poskládat ze tří elementárních konstrukcí:

- (1) Nalezení průsečíku dvou kružnic.
- (2) Nalezení průsečíku přímkou a kružnice.
- (3) Nalezení průsečíku dvou přímek.

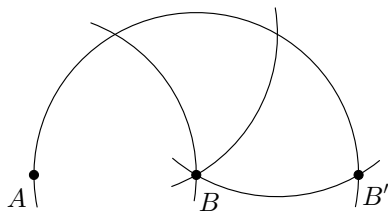
Naším cílem bude ukázat, že každou z nich zvládneme stejně dobře i bez pravítka. Pojdme na to!

Základy

Budeme-li v následujících příkladech mluvit o úsečce AB , resp. přímkce AB , máme vždy na mysli body A , B , které ji určují.

Příklad 1. K zadané úsečce AB sestrojte úsečku dvakrát delší.

Řešení. Sestrojíme kružnici se středem B procházející bodem A . Na ni nanese me z bodu A třikrát za sebe tutéž vzdálenost a dostaneme tak bod B' . Úsečka AB' je pak zřejmě dvakrát delší než úsečka AB .



Úloha 2. Mějme přímku AB a bod C . Sestrojte obraz bodu C v osové souměrnosti podle přímky AB .

Úloha 3. Rozhodněte, zda leží zadané body A, B, C na jedné přímce.

Úloha 4. Je dána přímka AB a bod C . Sestrojte rovnoběžku k AB procházející bodem C .

Úloha 5. Je dána úsečka délky a . Sestrojte délku $\sqrt{3}a$.

Úloha 6. Je dána úsečka AB a dvakrát delší úsečka CD . Najděte střed úsečky CD .

Úloha 7. Je dána přímka AB a kružnice k se středem O . Předpokládejme, že bod O neleží na přímce AB . Najděte průsečík přímky AB a kružnice k .

Jde do tuhého

Úloha 8. Je dána kružnice k se středem O a bod B vně. Sestrojte tečnu z bodu B ke kružnici k .

Úloha 9. Najděte střed zadané úsečky AB .

Úloha 10. Sestrojte čtverec o straně AB .

Úloha 11. Je dána kružnice k se středem O a poloměrem r , dále bod B a úsečka délky $a < r$. Sestrojte přímku procházející bodem B , která v kružnici k vytne tětivu délky a .

Úloha 12. Je dána přímka AB a kružnice k se středem O tak, že O leží na AB . Najděte průsečík přímky AB a kružnice k .

Úloha 13. Sestroj osu daného úhlu BAC .

Úloha 14. Nechť jsou a, b, c délky tří daných úseček. Najděte délku x takovou, aby platilo $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$.

Úloha 15. Jsou dány různoběžné přímky AB a CD . Najděte jejich průsečík.

Bonusy

Úloha 16. Ukažte, že si vystačíme i s kružítkem, kterým nejde přenášet délky. Jde tedy jen narýsovat kružnice s daným středem procházející daným bodem.

Úloha 17. Dokážete vyřešit úlohu 15 bez použití výsledku úlohy 12?

Úloha 18. Najděte za použití co nejméně kružnic kruhovou inverzi bodu B vůči kružnici k se středem O .

Úloha 19. Na kolik nejméně narýsovaných kružnic umíte najít střed úsečky?

Návody

4. Rovnoběžník.
5. Nejde nesestrojit :).
7. Osová souměrnost.
8. Sestroj vhodný rovnoramenný trojúhelník.
9. Sestroj vhodný rovnoramenný trojúhelník. Nebo použij mocnost.
10. $\sqrt{2}$.
11. Jak bys to dělal(a) s pravítkem?
12. Mocnost.
13. Jak bys to dělal(a) s pravítkem?
14. Mocnost.
15. Podobnost umíš díky předchozí úloze.
16. Osová souměrnost.

Literatura a zdroje

Rád bych poděkoval Martině, kterou sice vůbec neznám, ale převzal jsem od ní většinu příspěvku.

- [1] Martina Vaváčková: *Konstrukce kružítkem*, Domašov, 2012.
- [2] Norbert Hungerbühler: *A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem*, https://www.math.ch/norbert.hungerbuehler/publications/A_Short_Elementary_Proof_of_the_Mohr-Mascheroni_Theorem.pdf

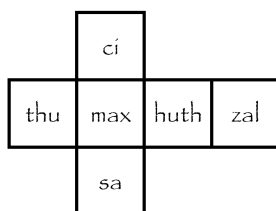
Lingvistika

MATOUŠ ŠAFRÁNEK

ABSTRAKT. V příspěvku se představuje lingvistika jako obor, ve kterém se, podobně jako v matematice, hodí schopnost hledat logické struktury. Obsahuje několik lingvistických úloh převzatých z České lingvistické olympiády.

Etruská kostka

V této úloze vidíte tzv. Toskánskou kostku – archeologickou památku popsanou následujícími etruskými slovy: *ci*, *huth*, *max*, *sa*, *thu*, *zal*. Každé z těchto slov odpovídá jednomu z čísel mezi 1 a 6. Rozložení těchto slov na síti kostky vidíte níže:



Při překladu vycházeli lingvisté z následujících informací, které poslouží i vám:

- (1) součet protilehlých stran dává dohromady vždy 7,
- (2) *thu*, *ci* a *zal* označují (nikoli nutně v tomto pořadí) čísla 1, 2 a 3,
- (3) *ci*, ale nikoli *thu* a *zal*, se velmi často objevují na tzv. Lněné knize, která byla objevena na obinadle mumie a která obsahuje rituální texty,
- (4) následující dvojice slov se vyskytují v epitafech (náhrobních nápisech):

*thu clan; thu at; thu mezu; thu vinac; thu thuscu; ci clenar; zal clenar;
ci atr; zal atr; ci mesur; zal mesur; ci vinacr; zal vinacr; ci thuscur;
zal thuscur,*

- (5) v řadě starověkých středomořských kultur mělo číslo 3 zvláštní magický význam.

Úloha. Vepište na správná místa v síti čísla odpovídající jednotlivým slovům.

ČLO-16/17-I-3

O opicích a dětech

Jazyk apinayé patří do brazilské jazykové rodiny Ge. V současnosti jím mluví méně než 800 lidí, a je tedy vážně ohrožený.

Níže vidíte ukázkou šesti vět ze zmíněného jazyka spolu s jejich českými překlady. V jejich zápisu jsme použili i některé znaky, které nepatří ani do české, ani portugalské abecedy; abyste však úlohu vyřešili, nepotřebujete vědět, jak se tyto znaky vyslovují.

Kukrẽ kokoi.	Opice jí.
Ape kra.	Dítě pracuje.
Ape kokoi ratš.	Velká opice pracuje.
Ape mĩ metš.	Dobrý muž pracuje.
Ape metš kra.	Dítě pracuje dobře.
Ape punui mĩ pijetš.	Starý muž pracuje špatně.

Úloha. Přeložte do češtiny:

Ape ratš mĩ metš.
Kukrẽ ratš kokoi punui.
Ape pijetš mĩ.

Úloha. Přeložte do apinayé:

Velké dítě pracuje dlouho.
Stará opice jí hodně.

ČLO-13/14-I-2

Arabština

Přiřaď k českým větám (1-7) jejich arabské ekvivalenty (a-g).

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. Jak se máš? | (a) اسكن أمام المنطقة الجديدة. |
| 2. Jím chléb se sýrem. | (b) اين جبن؟ |
| 3. Kde je sýr? | (c) كيف حاله؟ |
| 4. Seděli jsme pod oknem jednoho domu. | (d) هذا بيت قديم. |
| 5. Žena sedí na židli. | (e) أكل خبز و جبن. |
| 6. Toto je starý dům. | (f) تجلس امرأة في الكرسيه. |
| 7. Žiji před novou čtvrtí. | (g) جلسنا تحت شباك بيت. |

ČLO-12/13-I-2

Počítání v gávríjštině

Gávríjščina je jedním z asi 30 jazyků severopákistánských horských vesnic. Tento jazyk se řadí do indoárijské větve indoevropské jazykové rodiny, což znamená, že je velmi vzdáleně příbuzný češtině.

Prohlédněte si následující gávríjské číslovky:

5 – paandž, 44 – čorteedubiš, 14 – čun, 63 – tlaateetläbiš, 24 – čorteebiš,
72 – bääteetläbiš, 33 – tlooteebiš, 81 – ääkteečorbiš, 34 – čunteebiš.

Úloha. Napište gávríjsky: 13, 52, 61, 94.

Zde je několik dalších gávríjských číslovek:

55 – paandžkämtläbiš, 76 – čorkämčorbiš, 97 – tlaakämpandžbiš.

Úloha. Napište gávríjsky: 36, 57, 79, 103.

ČLO-17/18-I-2

Čínské znaky

V následující tabulce je uvedeno několik čínských znaků, jejich fonetický přepis a překlad do češtiny.

汀	tīng	pobřeží	浯	wú	řeka Wu
咏	yǒng	zpívat	咀	jǔ	žvýkat
燂	tán	kouř	烘	hōng	grilovat
沮	jǔ	uplakany	吵	chǎo	mluvit hlasitě
叮	dīng	kousnout	炷	zhù	knot
洪	hōng	potopa	浅	qiǎn	mělký
炒	chǎo	smažit	炊	chūi	vařit
晤	wú	číst nahlas	哄	hōng	smát se
注	zhù	nalít	吹	chūi	foukat

Úloha. Na základě informací z tabulky přiřadte k těmto znakům český překlad:

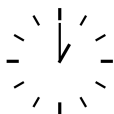
- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 1. 泳 | 2. 浯 | 3. 叫 |
| a) křičet | b) plavat | c) zahřát |

Úloha. Přiřadte ke znakům jejich fonetický přepis:

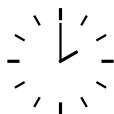
- | | | | | |
|---------|-------|---------|-------|---------|
| 1. 汀 | 2. 垧 | 3. 吵 | 4. 怛 | 5. 吾 |
| a) dīng | b) jù | c) chǎo | d) wú | e) hōng |

Kolik hodin je v Tallinu

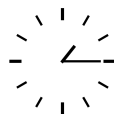
Tallin je hlavní město Estonska, kde přibližně 1 milion lidí mluví estonštinou, neindeevropským jazykem příbuzným finštině.



Kell on üks.



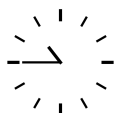
Kell on kaks.



Veerand kaks.



Pool neli.



Kolmveerand
üksteist.



Viis minutit
üks läbi.

Některá čísla v estonštině:

6 – kuus, 7 – seitse, 8 – kaheksa, 10 – kümme.

Úloha. Přeložte následující časy do estonštiny:

- 8:45,
- 4:15,
- 11:30,
- 7:05,
- 12:30.

Úloha. Zapište, jaký čas označují následující estonské fráze:

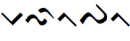
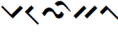
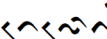
- Kakskümmend viis minutit üheksa läbi.
- Veerand neli.
- Pool kolm.
- Kolmveerand kaksteist.
- Kolmkümmend viis minutit kuus läbi.

Lontara

Bugijština je jazyk z austronéské rodiny, kterým mluví přibližně 5 milionů lidí v oblasti ostrova Sulawesi.

Ve dvou sloupcích máte zadána slova v bugijštině v náhodném pořadí. V levém řádku v písmu lontara, ve druhém v přepisu do latinky s českým překladem.

Poznámka: Apostrof (') i „h“ označují výslovnostní variantu předcházející samohlásky.

A.		1.	batuwa (náctiletý)
B.		2.	polisih (policie)
C.		3.	marenu (šťastný)
D.		4.	polotoh (tužka)
E.		5.	bata (pochybnost)
F.		6.	badi' (tradiční meč)
G.		7.	toli (vždy)
H.		8.	maleko (ohyb)
I.		9.	telepisi (televize)
J.		10.	juku' (ryba)
K.		11.	goluh (míček)
L.		12.	malopo (velký)

Úloha. Přiřadte slova.

Úloha. Zapište písmem lontara:

lagoh (švagr), kabusuh (křeslo), mateh (umřít),
 pasarah (trh), purinah (strýc), sikola (bronzový).

ČLO-14/15-I-1

Jazyk ik

Jazyk ik náleží do rodiny nilo-saharských jazyků. Mluví jím necelých 10 000 obyvatel Ugandy. Ve sloupcích tabulky níže naleznete vždy infinitiv ikského slovesa, jeho tvar pro přítomný čas v první osobě jednotného čísla a český překlad. Některé buňky jsou však nevyplněny.

ibokesukot		
	tokopukoti	vyškubnout
ipakes	ipaki	navádět rukou
tsidzesukot	tsidzukoti	
torikes		vést
kokes	koki	zavírat, přikrývat
nures		
	honi	
kokesukot		ohradit
ibokes		
tsidzes	tsidzi	poslat
		převážet
torikesukot	toriikoti	
	ookoti	
nuresukot	nurukoti	odříznout
	ipaakoti	házet

Úloha. Doplňte obsah osmnácti nevyplněných buněk, víte-li, že chybějící české překlady jsou (v náhodném pořadí): *odeslat, setřásat, vézt, vyvést, řezat, trást, odložit*.

Poznámka: ε, i, ɔ, u jsou samohlásky, po řadě podobné e, i, o, u.

ČLO-18/19-I-3

Literatura a zdroje

Díky patří pořadatelům lingvistické olympiády a taky Michalovi, od kterého jsem příspěvek s malou úpravou převzal.

- [1] *Česká lingvistická olympiáda*, <http://ufal.mff.cuni.cz/clo> a nověji <https://lingol.cz>
- [2] Michal Töpfer: *Lingvistika*, Sklené, 2019.

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

JOSEF „JOSÉ“ SOURAL

ABSTRAKT. Zkráceně CS nerovnost – snad jedna z nejdůležitějších nerovností celé matematiky. V přednášce se konkrétně seznámíme s její podobou pro reálná čísla, která je velmi mocným nástrojem pro odhadování algebraických výrazů. Třebaže nerovnosti na mezinárodních soutěžích ubývá, umět používat CS nerovnost zůstává pro úspěšného olympionika nutností. Přitom osvojení těchto technik není až tak obtížné. Rozpoznat, zda nám v nějakém příkladě bude CS nerovnost užitečná, a zdárně ji použít je už pak jen otázkou cviku. Tak pojďme procvičovat!

Věta. (Cauchyho–Schwarzova nerovnost) *Nechť $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou libovolná reálná čísla. Pak platí*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Důkaz. Uvažujme dvě n -tice libovolných reálných čísel $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$.

$$P(x) = (a_1x - b_1)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$$

je zřejmě nezáporný výraz pro libovolné reálné x . Jelikož je zároveň v proměnné x kvadratický, je jeho diskriminant nekladný. Tedy

$$(2a_1b_1 + \dots + 2a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \leq 0,$$

z čehož úpravou dostáváme kýženou nerovnost. □

Poznámka. Rovnost nastává právě tehdy, když existuje reálné λ splňující $b_i = a_i\lambda$ pro všechna i od 1 do n .

Na rozehrátí

Cvičení. Dokažte nerovnost $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$ pro kladná a, b, c .

Cvičení. Pro x, y, z reálná dokažte $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$.

Cvičení. (základní a užitečné figle) Dokažte:

- (1) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,
- (2) $n(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2$ pro $a_i \in \mathbb{R}$,
- (3) $(a_1 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$ pro $a_i \in \mathbb{R}^+$,
- (4) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$ pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$,
- (5) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$ pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která to má smysl.

Cauchyho–Schwarzova nerovnost má dva obzvlášť užitečné speciální tvary – oba jsou sice ekvivalentní jejímu znění, ale výrazně usnadňují intuici:

Tvrzení. (CS zlomkobijec) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \dots, a_n$ nezáporná a $b_1, b_2, \dots, b_n$ kladná. Pak platí*

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Tvrzení. (CS na odmocniny) *Buď n přirozené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ čísla kladná reálná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}.$$

Vyzkoušejte si zlomkobijce

Cvičení. Nechť jsou a, b, c, d kladná čísla splňující $a + b + c + d = 1$. Ukažte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Irská MO)

Úloha 1. Nechť jsou a, b, c kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

Úloha 2. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

Vyzkoušejte si odmocninového CS

Cvičení. Dokažte následující nerovnosti pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

- (i) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)},$
- (ii) $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}.$

Úloha 3. Ukažte, že pro $x, y, z \geq 1$ platí

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x(yz+1)}.$$

Nějaké ty příklady – střední

Úloha 4. Určete všechny n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \dots + \frac{n^2}{x_n} &= n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

(Kraj MO 1981/1982)

Úloha 5. Ukažte, že pro kladná reálná a, b, c splňující $a + b + c = 1$ platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

Úloha 6. Kladná čísla $x, y, z \geq 1$ splňují $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokažte

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.$$

Úloha 7. Pro nezáporná reálná a, b dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

(Celostátní MO 2014)

Úloha 8. Pro kladná reálná a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

(Turnaj měst 1998)

Nějaké ty příklady – těžší

Úloha 9. Nechtě jsou a, b, c, d, e reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 8, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &= 16. \end{aligned}$$

Určete, jaké nejvyšší hodnoty může nabývat e .

(USAMO 1978)

Úloha 10. Kladná reálná x, y, z splňují $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Dokažte

$$\frac{x^3}{\sqrt{y^2 + z^2 + 7}} + \frac{y^3}{\sqrt{z^2 + x^2 + 7}} + \frac{z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 7}} \geq 1.$$

Úloha 11. Pro kladná reálná a, b, c dokažte, že

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Úloha 12. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí

$$\frac{c^2 - ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{a^2 - bc}{4a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{a^2 + 4b^2 + 4c^2} \geq -\frac{3}{4}.$$

Úloha 13. Mějme kladná reálná a, b, c , že $abc = 1$. Dokažte

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^5 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^5} \leq 3.$$

(IMO 2005)

Návody

1. V čitatelích chceš netriviální druhou mocninu.
2. Po zlomkobijci roznásob a roztrhni. Bude se též hodit AG nerovnost.
3. Dvakrát použij CS ve tvaru $\sqrt{((x-1)+1)(1+(y-1))} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$.
5. V čitatelích chceš druhou mocninu.
6. Odmocniny nalevo poděl a vynásob příslušnou proměnnou.
7. Nejdříve zlomkobijec, poté odmocniny. A nějakátá ta algebraická manipulace.
8. Zkus si jen tak pro zábavu roznásobit $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.
9. Odhadni vztah mezi součty druhých a prvních mocnin u prvních čtyř proměnných pomocí CS.
10. Odhadni zlomkobijcem a odmocninami tak, aby pak šlo $a^2+b^2+c^2$ substituovat jednou proměnnou, která bude v nerovnostech figurovat sama.
11. Po zlomkobijci a odmocnině ekvivalentně převed' na nerovnost ≥ 0 . Poté použij, že $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pro každé kladné reálné x .
12. Odečti od každého zlomku jednu čtvrtinu, ať dostaneš v čitateli druhou mocninu. Použij zlomkobijce „naopak“.
13. Odhadni jmenovatele pomocí CS, ať se zbavíš pátých mocnin (použij podmínku v zadání ;-)).

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je s pouze drobnými úpravami převzat od Martina Rašky, kterému tímto srdečně děkuji za skvělou předlohu.

- [1] Martin Raška: *Cauchy–Schwarzova nerovnost*, Hojsova Stráž, 2016.

Diskrétní spojitost

ANNA TRNKOVÁ

ABSTRAKT. Podíváme se na v principu jednoduchou kombinatorickou techniku zvanou *diskrétní spojitost* a její využití v různých olympiádních úlohách.

Příklad. (motivační) Na rovině louce se pase 2023 bodových prasátek. Pastervec Matěj se doslechl, že se k louce blíží vlk, který chce prasátka sežrat. Samozřejmě chce prasátka zachránit, a proto by kolem nich rád postavil kruhovou ohradu (jiné tvary neuznává). Zároveň by si ovšem rád naklonil Štěstěnu na svoji stranu, proto by chtěl nechat právě 42 prasátek mimo ohrádku, a tím učinit krvavou oběť svému Pánu a Spasiteli Belzebubu. Ukažte, že takovou ohrádku skutečně umí postavit.

Řešení. Nejprve ukážeme, že existuje bod B , na kterém nestojí žádné prasátko a který zároveň nemá k žádným dvěma prasátkům stejnou vzdálenost. To plyne z toho, že pokud má bod ke dvěma prasátkům stejnou vzdálenost, potom leží na ose úsečky, která je spojuje. Tím máme ale zakázaný jen konečný počet (konkrétně $\binom{2023}{2}$) přímek a konečný počet bodů, což nám určitě nepokryje celou rovinu. Proto bod B s požadovanými vlastnostmi vskutku existuje.

Nyní, když jsme hotovi s technikáliemi, přejdeme na skutečné použití diskrétní spojitosti. Uvažujme kružnici k_1 se středem v B , která neobsahuje žádné prasátko (ta existuje – prostě zvolme poloměr menší, než je vzdálenost B k nejbližšímu prasátku). Postupně ji nafukujeme, dokud všechna prasátka neleží uvnitř kružnice. Na začátku se mimo kružnici páslo $2023 > 42$ prasátek, na konci je to $0 < 42$. Protože při nafukování najednou přidáme vždy jen jedno prasátko (protože B nemá k žádným dvěma prasátkům stejnou vzdálenost), musí jednou určitě nastat taková situace, kdy se právě 42 prasátek nachází mimo ohrádku.

Základní úlohy

Úloha 1. Dánsko a Anglie spolu hrály fotbal. Dánský tým dal celkem osm gólů, kdežto anglický pět. Musel během utkání existovat okamžik, kdy se počet gólů, které již Anglie dala, rovnal počtu gólů, které Dánsko ještě dá? (PraSe 37–1j–1)

Úloha 2. Naty k narozeninám dostala krásný kruhový dort a hned se rozhodla půlkruhovou část z něj věnovat nejlepšímu řešiteli PraSátka. Než ji ale stihla odkrojit, José už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků tak, že $2k$ z nich

bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že Naty i tak našla několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (PraSe 33–1j–5)

Úloha 3. V oboustranně nekonečné řadě stojí pionýři a žampióny. Je známo, že v libovolném konečném úseku několika vedle sebe stojících organismů se počet pionýrů a žampiónů liší nanejvýš o 1000. Dokažte, že v nějakém úseku 2000 organismů stojí přesně 1000 pionýrů a 1000 žampiónů. (Itálie 2013)

Úloha 4. Nekonečná posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňuje, že $a_1 = 1$ a pro libovolné přirozené i je rozdíl $a_{i+1} - a_i$ roven 0 nebo 1. Víte-li, že pro jisté n platí $a_n = \frac{n}{1000}$, dokažte, že existuje m splňující $a_m = \frac{m}{500}$.

Úloha 5. Každá ze stěn osmi jednotkových krychliček je obarvena modře, nebo červeně, přičemž celkově je modrých stěn stejně jako červených. Dokažte, že krychličky lze složit do jedné krychle $2 \times 2 \times 2$, na jejímž povrchu bude modrá barva zabírat stejnou plochu jako červená.

Úloha 6. Ukažte, že existuje 1000 po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž je právě 5 prvočísel. (PraSe 30–1p–4)

Úloha 7. Přirozené číslo n nazveme *budovatelské*, pokud se dá zapsat ve tvaru $n = a^b + b$ pro přirozená čísla $a, b > 1$. Dokažte, že existuje úsek 2014 po sobě jdoucích přirozených čísel s přesně x budovatelskými čísly

- (i) pro $x = 2012$, (Srbsko 2014)
- (ii) (těžší) pro libovolné $x \in \{0, 1, \dots, 2014\}$.

Úloha 8. Mějme úplný bipartitní graf s lichým počtem vrcholů. Každá jeho hrana má hodnotu buď -1 , nebo 1 a platí, že součet hodnot všech hran je roven nule. Dokažte, že existuje kostra tohoto grafu, která má také součet všech hran nulový.

Úloha 9. Je dána rostoucí posloupnost přirozených čísel $a_0, a_1, \dots$. Dokažte, že existuje právě jedno přirozené $n \geq 1$ splňující

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}. \quad (\text{IMO 2014})$$

Úloha 10. Jsou dána přirozená čísla p, q, n , kde $p + q < n$, a $(n + 1)$ -tice čísel $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, pro niž platí:

- (i) $x_0 = x_n = 0$.
- (ii) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $x_i - x_{i-1}$ buďto p , nebo $-q$.

Dokažte, že existují indexy $i < j$ s $(i, j) \neq (0, n)$, pro něž platí $x_i = x_j$. (IMO 1996)

Záludnější úlohy

Diskrétní spojitost není vždy tím jediným, nebo dokonce ani ne tím hlavním, co úloha potřebuje. Často ji potkáme jako jednu z mnoha ingrediencí, kterou je třeba

šikovně kombinovat s něčím dalším – třeba indukcí nebo Dirichletovým principem. Tyto úlohy neřadím nutně podle obtížnosti, spíše podle společných témat.

Úloha 11. V každém vrcholu pravidelného 2018úhelníku seděl ráno jeden termít. Tito termíti byli v nějakém pořadí označení čísly 1 až 2018 (každé číslo bylo použito). Jediné, co termíti umějí, je vyměnit si místo se svým sousedem. Večer se každý termít nacházel ve vrcholu naproti tomu, v němž začínal. Dokažte, že se někdy v průběhu dne prohodili dva termíti se součtem čísel 2019. (PraSe 38–1p–7)

Úloha 12. (těžší) Máme n červených a n modrých karet, na každé z nich je nějaké číslo od 1 do n (čísla se mohou opakovat). Je vždy možné vybrat několik modrých a několik červených karet tak, aby měly modrá a červená skupinka stejný součet? (PraSe 40–4j–5b)

Pár úložek s posloupnostmi

Úloha 13. Uvažme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $a_0 = 0$. Další členy definujeme následovně. Pro přirozené číslo n označme ℓ_n největší liché číslo, které dělí n . Pak položíme $a_n = a_{n-1} + 1$, pokud ℓ_n dává po dělení čtyřmi zbytek 1, a $a_n = a_{n-1} - 1$, pokud dává zbytek 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje nekonečně mnoho i takových, že $a_i = m$. (PraSe 39–1j–5)

Úloha 14. Nechť $p(n)$ pro přirozené číslo $n > 1$ značí největší prvočíslo, které dělí n . Nekonečná posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňuje $a_1 > 1$ a rekurenci $a_{i+1} = a_i + p(a_i)$. Dokažte, že v posloupnosti $\{a_i\}$ se vyskytuje čtverec. (Čína 2020)

Úloha 15. Jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená n je b_n rovno součinu všech různých prvočísel dělících a_n . Dále pro všechna $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Dokažte, že existuje přirozené k splňující $\frac{a_k}{b_k} = 2019$. (PraSe 39–2p–7)

Něco málo z kombinatorické geometrie

Úloha 16. Nechť $n > 1$ je přirozené číslo. V rovině se pase n bodových kraviček a n bodových oveček. Žádná tři zvířátka neleží na jedné přímce. *Balanční přímkou* nazveme přímku procházející jednou ovečkou a jednou kravičkou tak, že na každé straně od přímky je stejně oveček jako kraviček. Ukažte, že existují alespoň dvě balanční přímky. (USAMO 2005)

Úloha 17. V rovině je dáno n modrých a n červených bodů, přičemž žádné tři barevné body neleží na jedné přímce. Dokažte, že lze nakreslit n úseček spojujících modrý a červený bod tak, že žádné dvě nebudou mít společný bod (ani koncový).

Úloha 18. (těžší) Nechť S je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. *Větrným mlýnem* rozumíme následující proces: Na počátku je vybrána nějaká přímka ℓ procházející právě jedním bodem $P \in S$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se středem otáčení P , dokud „nenarazí“

na další bod množiny S , označme jej Q . Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q , dokud nenarazí na další bod množiny S , a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že lze zvolit bod $P \in S$ a přímku ℓ procházející bodem P tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít každý bod z S za střed otáčení nekonečněkrát. (IMO 2011)

Návody

1. Dívej se na $A - D$ jako funkci času. A a D jsou to, co by tak člověk čekal.
2. Posouvej zvolenou $2k$ -tici dílků a sleduj počet menších, které jsou zvolené.
3. Kdyby úloha neplatila, zkonstruuješ dloouhatánský úsek s větší převahou jednoho organismu, než je povolena.
4. Může $\frac{n}{a_n}$ přeskočit celé číslo?
5. Zprvu slož krychličky libovolně, pak je otáčej, abys dosáhl(a) opačné (ne)rovnováhy modré a červené barvy na povrchu.
6. Na začátku číselné osy je prvočísel hodně. Zkonstruuuj úsek, kde je jich fakt málo.
7. Úsek s mnoha budovatelskými čísly sestrojíš explicitně. Pro část (ii) odhadni, kolik budovatelských čísel menších než x může existovat.
8. Součet součtů hran všech možných koster musí být také 0.
9. Co lze říct o posloupnosti $d_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n - na_n$?
10. BÚNO ber $\text{NSD}(p, q) = 1$ a sleduj počty skoků o p v úsecích délky $p + q$.
11. Neprohodivší se doplňkoví termiti museli mít stejnou cestu.
12. Nakresli si tabulku $(n + 1) \times (n + 1)$ a zanes do ní součty částečných součtů modrých a červených karet. Rozparcelováním tabulky na slupky tvaru L kolem jednoho rohu spolu s diskretní spojitostí a Dirichletem najdi dvě políčka se stejným číslem.
13. Odvoď a_{2n} na základě a_n . Z toho pak nahlédni, že posloupnost neomezeně poroste a nekonečně častokrát se vrátí do 1.
14. Ukaž, že posloupnost $b_n = \frac{a_n}{p(a_n)}$ je neomezená. Pak si můžeš zvolit nějaké šikovné číslo, které by měla trefit.
15. Kdy posloupnost $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ roste? Nahlédni její neomezenost – to pomůže také ukázat, že se vždy vrátí k 1.
16. Když na konvexním obalu susedí ovečka a kravička, je to snadné. V těžším případě toč přímkou skrz zvířátko na konvexním obalu.
17. Snaž se vyřešit jednu libovolnou dvojici bodů. Nejde-li to snadno, rozděl úlohu na dvě menší.
18. Zvol P , aby byl uprostřed ve směru kolmém na ℓ . Uděl ℓ orientaci a sleduj, kolik bodů je během otáčení nalevo a napravo od ní.

Literatura a zdroje

Tímto děkuji Matějovi, jehož přednášku jsem skoro beze změn převzala.

- [1] Matěj Doležal: *Diskretní spojitost*, Mrtník, 2023.
- [2] <https://artofproblemsolving.com/community>.

Posloupnosti v teorii čísel

MAREK VALKOVIČ

ABSTRAKT. Příspěvek se zabývá úlohami, které zkoumají posloupnosti celých čísel z pohledu teorie čísel. Jsou zde uvedeny obecné tipy a triky, jak k takovýmto úlohám přistupovat, následované řadou příkladů, u kterých se v jednotlivých sekcích obtížnost postupně zvyšuje.

Define. Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Define. Posloupnost je zadaná *rekurentně*, pokud máme vztah, z něhož spočítáme n -tý člen v závislosti na několika předchozích, například $a_n = a_{n-1}^3 + 2^{a_{n-2}} + 69$.

Define. Posloupnost je zadaná *explicitně*, pokud n -tý člen máme zadaný v závislosti na n .

Významným příkladem celočíselné posloupnosti je Fibonnaciho posloupnost.

Define. *Fibonacciho posloupnost*, označovaná $\{F_n\}$, splňuje $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Existuje několik obecných rad, pomocí kterých můžeme skolit úlohy o posloupnostech v $\mathbb{N}$:

- (1) Spočítej si prvních pár členů posloupnosti, počítej dokud to nejsou moc velká čísla. Často lze i takto primitivním způsobem zjistit důležité informace.
- (2) Většinou máme n -tý člen zadaný pomocí předchozího, předchozích dvou nebo všech předchozích členů. Algebraicky (například rozdílem či podílem dvou po sobě jdoucích členů) si tvar uprav na jeden ze zbylých dvou.
- (3) Uvědom si, co chceš dokázat, využij své znalosti teorie čísel, abys zjistil(a), jaké vlastnosti se vyplatí zkoumat. Pokud je implikace těžko uchopitelná, zkus ji obměnit.
- (4) Posloupnost zadaná rekurentně, kde každý člen je závislý na určitém počtu předchozích členů, se musí dříve či později modulo nějaké číslo zacyklit.
- (5) Jdi opačným směrem. Spočítej nultý, minus první, minus druhý ... člen.
- (6) Vytvoř si nějakou pomocnou posloupnost, najdi si pro ni rekurentní vztah a vztah k původní posloupnosti.

Úloha 1. Necht $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$. Dokažte, že a_{3k+2} je třetí mocnina pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$.

Úloha 2. Necht $x_1 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$. Dokažte, že když je x_n prvočíslo, tak je i n prvočíslo.

Úloha 3. Necht platí $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ a pro $n \geq 1$

$$a_{n+2} = (2 - n^2)a_{n+1} + (2 + n^2)a_n.$$

Dokažte, že neexistují tři přirozená čísla p, q, r taková, že $a_p a_q = a_r$.

Úloha 4. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $k > 0$ takové, že $n \mid F_k$.

Lehčí úlohy

Úloha 5. Definujme posloupnost¹

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{3a_n}{2} \right\rfloor.$$

Dokažte, že obsahuje nekonečno sudých i lichých čísel.

Úloha 6. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost s $a_1 = 1$, která splňuje rekurzi:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & \text{pokud } (a_n - 2) \notin \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\} \text{ a } a_n - 2 > 0, \\ a_n + 3 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dokažte, že v posloupnosti se objeví každá druhá mocnina přirozeného čísla a že budou vždy o tři větší než předchozí člen posloupnosti.

Úloha 7. Pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že když 45 dělí a_n , tak i 44 dělí a_n .

Úloha 8. Pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_1 = 2$ a pokud $n > 1$, a_n je největší prvočíselný dělitel $a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1$. Dokažte, že 5 není v této posloupnosti.

Úloha 9. Necht pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ platí $a_1 = 1$ a

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

pro $n \geq 1$. Vypočítejte člen a_{2025} .

Úloha 10. Necht posloupnost $x_1, x_2, \dots$ splňuje $x_1 = 4$ a pro $n > 1$ platí

$$x_n = x_1 x_2 \dots x_{n-1} + 5.$$

Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) , pro něž je $x_a x_b$ čtverec.

¹ Dolní celá část x , označovaná $\lfloor x \rfloor$, je největší celé číslo, které je nejvýše x .

Začíná jít do tuhého**Úloha 11.** Definujme posloupnost

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot x_n.$$

Dokažte, že všechny členy této posloupnosti jsou celá čísla.

Úloha 12. Nechtě $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{1 + 3a_n^2}$ pro přirozená $n \geq 1$. Dokažte, že pro všechna přirozená n je a_n celé číslo.**Úloha 13.** Nechtě $a_1 = b_1 = 1$ a

$$a_{n+1} = 9a_n - 2b_n,$$

$$b_{n+1} = 2a_n + 4b_n.$$

Ať $c_n = a_n + b_n$. Dokažte, že neexistují tři různá přirozená čísla k, ℓ, m taková, že $c_k^2 = c_\ell c_m$.**Úloha 14.** Pro přirozené číslo $c > 1$ zavedme posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ pomocí $x_1 = c$ a předpisu

$$x_{n+1} = c \cdot x_n + \sqrt{c^2 - 1} \cdot \sqrt{x_n^2 - 1}$$

pro všechna n . Dokažte, že každé x_n je celé číslo.

(PraSe 43–1j–8)

Olympiádní**Úloha 15.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje index k , pro nějž $m \mid F_k^4 - F_k - 2$. (CPS 2007)**Úloha 16.** Pro posloupnost kladných celých čísel $\{a_n\}$ platí pro každé $n > 2$

$$a_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-2} a_{n-1} - 1.$$

Dokažte, že:

a) některé prvočíslo je dělitelem nekonečně mnoha členů této posloupnosti.

b) takových prvočísel je nekonečně mnoho. (Celostátko 2023)

Úloha 17. Rozhodněte, zdali existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, která splňuje

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

pro každé přirozené n .

(EGMO 2015)

Úloha 18. Přirozená čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ splňují

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$$

pro $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2028$. Dokažte, že alespoň jedno z čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ je dělitelné 2^{2020} (EGMO 2020)

Úloha 19. Pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_0 = 2, a_1 = 4$ a

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}.$$

Najděte všechna prvočísla p , pro něž existuje přirozené m splňující $p \mid a_m - 1$. (MEMO 2012)

Úloha 20. Pro dané celé číslo $a_0 > 1$ definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots$ předpisem

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{pokud } \sqrt{a_n} \text{ je celé číslo,} \\ a_n + 3 & \text{jinak, pro každé } n \geq 0. \end{cases}$$

Určete všechny hodnoty a_0 , pro které existuje číslo A takové, že rovnost $a_n = A$ platí pro nekonečně mnoho indexů n . (IMO 2017)

Návody

5. Sporem. Rozděľ na případy, kdy je a_n sudé a liché.
6. Modulo 5.
7. Prostě spočítej délky period modulo 9, 5, 4 a 11.
8. Kdyby ano, jak musí vypadat předchozí člen? Pak zkus modulo 4.
9. Vyjádři si součet prvních n členů jako S_n , hledej teleskop.
10. Uvědom si, že každé dva členy jsou nesoudělné. Zdůvodni, proč členy pro $n > 2$, nemohou být čtverce.
11. $x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \dots \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot x_1$.
12. Přepiš si to do kvadratické rovnice. Udělej to pro dva sousední členy a použij Viètovy vztahy.
13. Modulo 8 a 3.
14. Přepiš si to do kvadratické rovnice, z Viètových vztahů najdi lineární vztah.
15. $F_{-1} = -1$.
16. Vyjádři si a_n v závislosti na předchozích dvou členech.
17. Zkoušej, jak dlouho mohou být součty dvou po sobě jdoucích členů čtverce.
18. Podívej se na dělitelnost čtyřmi.
19. Přičti dva, uprav na součinný tvar a udělej si pomocnou posloupnost $b_n = \frac{a_n + 2}{2}$.
20. Mod 3. Najdi nejmenší člen posloupnosti.

Literatura a zdroje

Děkuji Majdě Mišinové, od které jsem přednášku z velké části převzal, a také panu docentu Bártovi, jehož přednáška mě inspirovala, abych přednášel stejné téma.

- [1] Magdaléna Mišinová: *Posloupnosti v teorii čísel*, Meziměstí, 2022.
- [2] <https://artofproblemsolving.com/community/>
- [3] <https://www.matematickaolympiada.cz/>

Pryč s exponenty! (aneb p -valuace a LTE)

ADÉLA KAROLÍNA ŽÁČKOVÁ

ABSTRAKT. Pokud řešíme úločky z teorie čísel, dost často nám nestačí zjistit, jestli nějaké číslo dělí druhé. Občas potřebujeme zjistit i jak moc. A přesně tím se zabývají p -valuace. Postupně se naučíme s nimi pracovat a používat je v rozličných situacích, abychom mohli rozlousknout i záladnější příklady.

Definice. Pro celá čísla a, b říkáme, že a dělí b (značíme $a \mid b$), pokud existuje celé číslo c splňující $b = ac$.

Definice. (p -valuace) Pro prvočíslo p definujeme p -valuaci celého čísla $a \neq 0$ jako největší nezáporné celé k takové, že $p^k \mid a$. Značíme $v_p(a) = k$. Pro $a = 0$ budeme brát $v_p(a) = \infty$ pro každé p .

Tato spousta matematických značek nám vlastně jinými slovy říká, že p -valuace je exponent u p v prvočíselném rozkladu čísla a . Právě prvočíselný rozklad nám dost často pomůže nahlédnout nejen základní vlastnosti, jak uvidíme dále.

A k čemu že ty p -valuace jsou?

Tvrzení. Platí $a \mid b$, právě pokud $v_p(a) \leq v_p(b)$ pro každé prvočíslo p .

Tvrzení. Pro $a, b > 0$ platí $a = b$, právě když $v_p(a) = v_p(b)$ pro každé prvočíslo p .

Tvrzení. Platí $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. V důsledku toho i pro celé k : $v_p(a^k) = kv_p(a)$.

Tvrzení. Platí $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$. Pokud navíc $v_p(a) \neq v_p(b)$, potom v předchozí nerovnosti nutně nastane rovnost. Obdobná nerovnost rovněž platí pro rozdíl $a - b$.

Cvičení. Rozmyslete si, že p -valuace se dají rozumně dodefinovat i pro racionální čísla a že i po tomto rozšíření většina z předchozího stále platí.

Tvrzení. Přirozené číslo a je k -tou mocninou přirozeného čísla právě tehdy, když $k \mid v_p(a)$ pro každé prvočíslo p .

Tvrzení. *Nechť $\gcd(a, b)$ značí největšího společného dělitele čísel a, b a $\text{lcm}(a, b)$ nejmenší společný násobek čísel a, b . Potom platí*

$$v_p(\gcd(a, b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}, \quad v_p(\text{lcm}(a, b)) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

Pojďme si p -valuace trochu ohmatat

Pokud jsi zkušený p -valuačník, tuto sekci směle přeskoč. Jinak se ti ale může hodit se s vlastnostmi p -valuací trochu více seznámit. :)

Cvičení. Spočítejte následující hodnoty:

- (1) $v_2(2^n + 4)$,
- (2) $v_3(v_3(18^{18}))$,
- (3) $v_p((3p^3 + p^2)(p^3 + 2p^2 + 5p))$.

Cvičení. Máme tři čísla, z nichž žádné není dělitelné 8 ani 125. Kolika nejvíce nulami může končit jejich součin?

Cvičení. Nahlédněte, že pro přirozené n je $v_p(n) \leq \log_p n \leq n - 1$.

Někdy by se mohlo hodit...

V další sekci jsou známé věty z teorie čísel, které se možná pro řešení některých příkladů budou hodit. Pozor ale, nesnažte se je rvát na každý příklad, to fungovat spíš nebude. ;)

Věta. (Bertrandův postulát) *Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ existuje prvočíslo p splňující $n < p < 2n$.*

Věta. (Malá Fermatova) *Pro každé prvočíslo p a každé celé a platí $a^p \equiv a \pmod{p}$. Pokud jsou a a p nesoudělná, platí rovněž $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

A teď už hurá na nějaké příklady!

Úloha 1. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, c platí

$$\frac{(\gcd(a, b, c))^2}{\gcd(a, b) \cdot \gcd(b, c) \cdot \gcd(c, a)} = \frac{(\text{lcm}(a, b, c))^2}{\text{lcm}(a, b) \cdot \text{lcm}(b, c) \cdot \text{lcm}(c, a)}.$$

Úloha 2. Jsou dána přirozená čísla a, b taková, že

$$a \mid b^2, \quad b^2 \mid a^3, \quad a^3 \mid b^4, \quad b^4 \mid a^5, \quad a^5 \mid b^6, \quad \dots$$

Dokažte, že $a = b$.

Úloha 3. Mějme čísla a, b, c , pro která platí $a \mid b^3, b \mid c^3, c \mid a^3$. Dokažte, že pak platí $abc \mid (a + b + c)^{13}$.

Úloha 4. Dokažte, že pro přirozená a, b, c, d splňující $ab = cd$ platí

$$\gcd(a, c) \cdot \gcd(a, d) = a \cdot \gcd(a, b, c, d).$$

Úloha 5. Jsou dána přirozená a, b, c splňující $a^b \mid b^c, a^c \mid c^b$. Dokažte, že $a^2 \mid bc$.

Úloha 6. Řekneme, že kladné reálné číslo je *copaté*, pokud není celé a v jeho desetinném zápisu následuje za desetinnou čárkou jen konečně mnoho nenulových číslic. Rozhodněte, zda existují copatá čísla a, b, c taková, že všechna tři čísla ab, bc i ca jsou celá. (MO 64-C-II-4)

Úloha 7. Racionální číslo nazýváme *mocným*, pokud jej lze vyjádřit ve tvaru $\frac{m^k}{n}$ pro nějaká nesoudělná kladná celá m, n a nějaké celé $k > 1$. Jsou dána kladná racionální čísla a, b, c taková, že $abc = 1$. Dále necht existují kladná celá x, y, z , že $a^x + b^y + c^z$ je celé číslo. Dokažte, že a, b, c jsou všechna *mocná*.

Faktoriály a kombinační čísla

Jakmile se člověk setká v příkladu s faktoriálem, má asi tendenci začít trochu fňukat. Přece jenom, pro velká čísla nám vznikají pěkné obludnosti. Hodí se ho tedy nějak pěkně odhadnout. My to umíme pomocí tzv. *Legendreovy formule*, která sice až zas tak pěkně nevypadá (suma spousty dolních částí, fuj ble), ale dá se s ní dobře pracovat, alespoň co se dělitelnosti týče.

Tvrzení. (Legendreova formule) Pro každé přirozené číslo n platí

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor.$$

Poznámka. Součet ve vzorci je sice formálně nekonečný, pro libovolné p však od dostatečně velkého j bude p^j větší než n a pak budeme přičítat pouze nuly.

Věta. (Lagrange) Necht $s_p(n)$ značí ciferný součet přirozeného čísla n v soustavě o základu p . Potom platí $v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$.

Věta. (Kummer) Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ má p -valuaci rovnou počtu „přenosů jedničky do vyššího řádu“ při sčítání k a $n - k$ pod sebou v soustavě o základu p .

Cvičení.

- (1) Rozložte $15!$ na prvočísla.
- (2) Určete, kolika nulami končí $100!$.
- (3) Dokažte, že číslo $N = 46! \cdot 47! \cdot 48!$ není druhou mocninou celého čísla a najděte jeho největší dělitel, který druhou mocninou celého čísla je.

Úloha 8. Pro prvočísla p platí $p^n \nmid ((p-1)n)!$.

Úloha 9. Platí $v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor$.

Úloha 10. Najděte všechna přirozená n , pro něž $v_2(n!) = n - 1$.

Úloha 11. Pro libovolná celá nezáporná m, n je

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(n+m)!}$$

celé číslo.

Úloha 12. Dokažte, že pro přirozená n platí

$$(n+1) \cdot \text{lcm} \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \right) = \text{lcm}(1, 2, \dots, n+1).$$

Úloha 13. Dokažte, že existuje konstanta c taková, že pro libovolná přirozená a, b, n splňující $a! \cdot b! \mid n!$ nutně platí $a + b < n + c \log n$. (Erdős)

Úloha 14. Pro přirozené $n \geq 3$ definujme posloupnost přirozených čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ pomocí rozkladu

$$n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ jsou prvočísla. Najděte všechna n , pro něž je posloupnost $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ geometrická. (MEMO 2017 T8)

Úloha 15. Najděte všechna složená kladná celá čísla n splňující následující vlastnost: pokud kladní dělitelé n jsou $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, pak $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2}$ pro všechna $1 \leq i \leq k-2$.

(IMO Shortlist 2023)

Úloha 16. Je dáno kladné celé číslo a . Říkáme, že kladné celé číslo b je a -dobré, pokud je číslo $\binom{an}{b} - 1$ dělitelné $an + 1$ pro všechna kladná celá n taková, že $an \geq b$. Nechť b je a -dobré kladné celé číslo, ale $b + 2$ a -dobré není. Dokažte, že $b + 1$ je prvočíslu. (IMO shortlist 2019)

Lifting the exponent (LTE)

Dost často se setkáváme s rozdíly mocnin. Následující tvrzení a větičky nás dovedou až k Lifting the exponent (LTE) lemmatu. To nám poradí, co s nimi, abychom na ně jenom smutně nekoukali. Ale pozor! Předpoklady ve větách typicky nebývají jenom na okrasu, proto je důležité zkontrolovat, že opravdu všechny platí.

Lemma. Nechť je p libovolné prvočíslu, m přirozené číslo a x, y celá čísla taková, že $p \nmid m, x, y$, ale $p \mid x - y$. Potom $v_p(x^m - y^m) = v_p(x - y)$.

Lemma. Nechť je $p > 2$ prvočíslu a x, y celá čísla splňující $p \nmid x, y$, ale $p \mid x - y$. Potom $v_p(x^p - y^p) = v_p(x - y) + 1$.

Cvičení. Rozmyslete si, proč je v lemmatu uvedena podmínka $p > 2$.

Věta. (Lifting the exponent lemma) *Nechť je p liché prvočíslo, n přirozené číslo a x, y celá čísla splňující $p \nmid x, y$, ale $p \mid x - y$. Potom*

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

Poznámka. Pokud je n liché, pak nahrazením y za $-y$ získáme obdobné tvrzení i pro součet namísto rozdílu.

Cvičení. Rozmyslete si, že všechny podmínky v LTE jsou potřebné, tedy, najděte protipříklady, kdy kvůli nějaké vynechané podmínce rovnost neplatí.

Věta. (LTE pro dvojku) *Nechť je n sudé přirozené číslo a x, y lichá celá čísla. Potom*

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1.$$

Poznámka. To vypadá jako docela nešikovný dlouhý vzorec. My si ale uvědomíme, že jedno z $v_2(x \pm y)$ musí být rovno jedné. Tím se nám pak vzorec zjednoduší na jednu z následujících dvou možností:

$$v_2(x - y) + v_2(n) \quad \text{nebo} \quad v_2(x + y) + v_2(n).$$

Tvrzení. *Budiž p prvočíslo a nechť $p \nmid a, b$. Pokud je k nejmenší přirozené číslo splňující $p \mid a^k - b^k$, pak pro přirozené n platí $p \mid a^n - b^n$ právě tehdy, když $k \mid n$.*

Dost vykecávání a hurá na úlohy!

Úloha 17. Je dáno přirozené k . Najděte všechna přirozená n splňující $3^k \mid 2^n - 1$.

Úloha 18. Dokažte, že pro liché prvočíslo p , přirozené a a $n \geq 2$ platí $p^n \mid a^p - 1$ právě tehdy, když $p^{n-1} \mid a - 1$.

Úloha 19. Dokažte, že pro každé přirozené n lze zvolit přirozené k tak, že

$$7^n \mid 2^k + 3^k + 4^k - 1.$$

Úloha 20. Prvočíslo p a přirozená a, n splňují $2^p + 3^p = a^n$. Dokažte, že $n = 1$.
(Irsko)

Úloha 21. Přirozená a, n, k splňují $n \mid (a-1)^k$. Dokažte $n \mid a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1$.

Úloha 22. Najděte všechny trojice (x, y, p) , kde x, y jsou přirozená čísla a p prvočíslo splňující $p^x - y^p = 1$.

Úloha 23. Je dáno bezčtvercové¹ přirozené n . Dokažte, že neexistují nesoudělná přirozená čísla x, y splňující $(x + y)^3 \mid x^n + y^n$.

Úloha 24. Mějme liché přirozené $n > 1$ a nesoudělná přirozená $a > b$. Dokažte, že $a^n - b^n$ má prvočíselného dělitele, který nedělí $a - b$.

¹Přirozené číslo nazýváme *bezčtvercovým*, pokud není násobkem žádného a^2 pro $a > 1$.

Úloha 25. Najděte všechna přirozená n splňující $2^n \mid 3^n - 1$.

Úloha 26. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) , které splňují $b^a \mid a^b - 1$.

Úloha 27. Najděte všechna přirozená a , pro něž je $4(a^n + 1)$ třetí mocninou celého čísla pro každé přirozené n .

Úloha 28. Pokud pro přirozená a, b, c platí $c \mid a^c - b^c$, pak už i $c \mid \frac{a^c - b^c}{a - b}$.

Úloha 29. Buďte a, b racionální čísla. Pokud je $a^n - b^n$ celé číslo pro nekonečně mnoho různých přirozených n , pak už jsou obě a, b celá.

Úloha 30. Budiž $k > 1$ přirozené číslo. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených n splňujících

$$n \mid 1^n + 2^n + \dots + k^n.$$

Úloha 31. Najděte všechna přirozená n , pro která je $2^{n+2}(2^n - 1) - 8 \cdot 3^n + 1$ čtverec. (Vietnam)

Úloha 32. Najděte všechna kladná celá čísla a, b, c a prvočíslo p , takové, že platí $2^a p^b = (p + 2)^c + 1$. (China TST 2022)

IMO úlohy (aneb nebylo to nějaké jednoduché?)

Úloha 33. Najděte největší mocninu 1991, která dělí číslo

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$

(IMO shortlist 1991)

Úloha 34. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (n, k) , které splňují

$$(2^k - 1)(2^k - 2)(2^k - 4) \dots (2^k - 2^{k-1}) = n!.$$

(IMO 2019)

Úloha 35. Je dána nekonečná posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ přirozených čísel taková, že

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

je přirozené číslo pro všechna $n \geq k$, kde k je nějaké pevné přirozené číslo. Dokažte, že $a_n = a_{n+1}$ pro všechna $n \geq m$, kde m je nějaké pevné přirozené číslo.

(IMO 2018)

Úloha 36. Najděte všechny trojice (p, x, y) , kde p je prvočíslo a x, y jsou přirozená čísla taková, že $x^{p-1} + y$ i $x + y^{p-1}$ jsou mocniny p . (IMO shortlist 2014 N5)

Úloha 37. Najděte všechny trojice (a, b, p) kladných celých čísel takové, že p je prvočíslo a $a^p = b! + p$. (IMO 2022)

Návody

1. BÚNO si seřaď valuace, potom přímočaře počítej.
2. $a^n \mid b^{n+1}$ znamená $\frac{v_p(a)}{v_p(b)} \leq \frac{n+1}{n}$. V podstatě totéž jde říct s logaritmem místo valuací.
3. Prostě si vyjádři nerovnosti mezi p -valuacemi a ono to vyjde. ;)
4. Označ si p -valuace jednotlivých proměnných a rozebírej jejich možné pořadí.
5. AG nerovnost.
6. Umíš získat nezáporné 2-valuace a 5-valuace u každého ze součinů?
7. Koukni na nějaké prvočíslo p , že $v_p(a) \geq 0$. Jak musí vypadat zbytek? Chytře si vyjádři valuace b a c .
8. V Legendreově formuli zahod' celé části.
9. Ukonči součet u indexu $j = k$ takového, že $1 \leq \frac{n}{p^k} < p$ a využij $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
10. V nerovnostech z důkazu předchozí úlohy musela všude nastat rovnost.
11. Odhadni zvlášť každý člen

$$\left\lfloor \frac{2m}{p^j} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+m}{p^j} \right\rfloor$$

z Legendreovy formule.

12. Využij Kummerovu větu. Pokud $\alpha = v_p(n+1)$, pak $n+1$ zapsané v soustavě o základu p končí α nulami.
13. Dělitelnost dává nerovnost (třeba) 2-valuací. Vhodně odhadni celé části v nenulových členech, těch je asymptoticky $\log n$.
14. Hodí se Bertrandův postulát.
15. Co kdyby mělo n dva prvočíselné dělitele? S technikáliemi pomůžou p -valuace.
16. Ukaž, že číslo b je a -dobré právě tehdy, když b je sudé a pro všechna prvočísla $p \leq b$ platí $p \mid a$.
17. Přímočaře použij LTE. Pozor na předpoklady!
18. Nezapomeň na předpoklady LTE. Hodí se malá Fermatova věta.
19. Vol k tak, aby vznikly dvě LTEčkové dvojice.
20. LTE něco poví o 5-valuaci. Dej pozor na případ $p = 2$.
21. LTE na $a^n - 1$. Nezapomeň pečlivě ověřit předpoklady.
22. Převeď y^p na pravou stranu a podívej se na p -valuaci.
23. Chceš aplikovat LTE a využít $v_p(n) \leq 1$, dej však pozor na degenerované případy související s dvojkou.

- 24.** Má-li $a^n - b^n$ pouze prvočíselné dělitele, kteří dělí $a - b$, pak dovedeš odhadnout všechny p -valuace.
- 25.** Rozkládej $3^n - 1 = (3^{n/2} + 1)(3^{n/2} - 1)$, dokud to jde.
- 26.** Nejtěžší část: dokaž, že nejmenší prvočíslo $p \mid b$ také dělí $a - 1$. Potom rozliš paritu p , použij LTE a pečlivě odhadni $n - v_p(n)$.
- 27.** Pokud má $4(a^n + 1)$ lichého prvočíselného dělitele p , podívej se na $4(a^{pn} + 1)$.
- 28.** Pro každé prvočíslo $p \mid c$ rozliš případy dle toho, zda $p \mid a - b$ a zda $p \mid a, b$.
- 29.** Předpokládej, že společný jmenovatel má prvočíselného dělitele, a najdi spor. Hodí se tušit něco o řádech prvků modulo p .
- 30.** Zkus $n = p^m$, trik je ve správné volbě lichého prvočísla p . Zkus použít LTE na „zrcadlové“ členy.
- 31.** Pojmenuj si čtverec a^2 a uprav na součin. Potom zkoumej 3-valuaci, zbav se a a omez n .
- 32.** Podívej se na dva případy podle parity c . Pokud je c liché, tak rozliš 2 případy podle toho, jestli je $p + 3$ mocninou dvojky. V sudém případě časem využij 2-valuaci.
- 33.** Prostě si vyrob LTEčkový tvar a moc se s tím nepárej.
- 34.** Pomocí 2-valuace a 3-valuace omez k , zbytek dorozeber.
- 35.** Stačí ukázat, že nepřibývají nová prvočísla a všechny p -valuace jsou od nějaké chvíle nerostoucí. Rozliš případy podle toho, zda někdy (za indexem k) nastane $v_p(a_n) \geq v_p(a_1)$.
- 36.** Připrav se na spoustu rozebírání rozbitých případů. Hlavní myšlenka je hledat velké valuace p v rozdílech $y - x$ potažmo $y^p - x^p$.
- 37.** Nejprve vyluč $b = 1$ a $2 \leq b < p$. Pro $b \geq p$ ukaž $a = p$ a pak se podívej na 2-valuace.

Literatura a zdroje

Chtěla bych poděkovat Matěji Doležálkovi, jehož přednášku z Lysečín 2021 jsem (podruhé a lépe) vykradla, spolu s přidáním dalších příkládů.

- [1] Matěj Doležálek: *p-valuace*, Lysečiny, 2021.
- [2] Ákos Záhorský: *P-adické hodnoty a Lifting The Exponent Lemma*, sborník iKS, 2019.
- [3] *Art of problem solving*, <https://artofproblemsolving.com/>

Obsah

Cyklotomické polynomy (Natália Bátorová)	3
Překlápění tečen (Káťa Danilina)	8
Stromy (Vojta Gaďurek)	12
Pravděpodobnostní paradoxy (Vít Hanika)	17
Odmocniny z jedničky (Petr Hladík)	21
Počítání dvěma způsoby (Petr Hladík)	25
Chinese dumbass notation a SOS (David Hromádka)	31
Ramseyovky (Johana Kubátová)	42
Úhlení (Daniel Perout)	46
I (Zdeněk Pezlar)	51
Úvod do teorie čísel (Lenka Poljaková)	57
Konstrukce kružítkem (Matouš Šafránek)	60
Lingvistika (Matouš Šafránek)	63
Cauchyho–Schwarzova nerovnost (Josef „José“ Soural)	70
Diskrétní spojitost (Anna Trnková)	74
Posloupnosti v teorii čísel (Marek Valkovič)	79
Pryč s exponenty! (aneb p-value a LTE) (Adéla Karolína Žáčková)	84