Krásný Buk

Sborník, jaro 2025

Alicka Dományová
Martin Fof
Matěj Gajdoš
Vít Hanika
Petr Hladík
Zdeněk Pezlar
Lenka Poljaková
Matouš Šafránek
Martin „Macker“ Šindelář
Lukáš Trojan
Jakub Vlček
Adéla Karolína Žáčková

Autoři: Alicka Dományová, Martin Fof, Matěj Gajdoš, Vít Hanika, Petr Hladík, Zdeněk Pezlar, Lenka Poljaková, Matouš Šafránek, Martin „Macker“ Šindelář, Lukáš Trojan, Jakub Vlček, Adéla Karolína Žáčková
Editor: Matějové a Zdeněk Pezlar
vydání první, náklad 40 výtisků
březen 2025
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Rekurentní posloupnosti

Alicka Dományová

Abstrakt. Nezřídka se v úlohách setkáváme s rekurentně zadanými posloupnostmi. Je tedy užitečné si osvojit základní strategie, jak s nimi pracovat. Příspěvek obsahuje především řadu úloh olympiádního charakteru, na kterých se to můžeme naučit.

Nekonečná reálná posloupnost je formálně funkce $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, která každému přirozenému číslu k přiřadí hodnotu $a_k \in \mathbb{R}$. Místo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ píšeme často pouze $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podobně zavádíme $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ a další.

Posloupnost můžeme zadat dvěma způsoby – explicitně nebo rekurentně. Explicitní vyjádření nám dává přímý předpis pro n-tý člen, zatímco v případě rekurentního zadání je n-tý člen vyjádřen pomocí n a předchozích členů (prvních několik členů je dáno).

Výhoda explicitního zadání spočívá v tom, že s jeho pomocí můžeme rychle spočítat libovolný člen posloupnosti, na který si vzpomeneme. Rekurentní zadání je však mnohdy snáze zapamatovatelné a na první pohled dává lepší náhled na to, jak ona posloupnost vlastně funguje. To ilustruje následující příklad.

Úloha. Jednou z nejznámějších rekurentních posloupností je *Fibonacciho posloupnost.* Ta je zadaná vztahy $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Existuje však i její explicitní vyjádření, jímž je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Nabízí se otázka, zda umíme explicitní vyjádření nalézt pro libovolnou rekurentně zadanou posloupnost. Odpověď zní: obecně ne, nicméně pokud je rekurence „pěkná“, možné to je. Tím se zde ale zabývat nebudeme a místo toho se vrhneme na úlohy!

Lehčí úlohy

Úloha 1. Posloupnost je zadána rekurentně vztahy $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ a $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ pro $n \geq 3$. Spočtěte a_{100}.

Úloha 2. Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost, v níž je $a_0 = a_1 = 1$ a pro $a \geq 2$ platí $a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1$. Ukažte, že a_{2013} není dělitelné čtyřmi.

Úloha 3. Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou rekurentně: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Ukažte, že libovolné dva členy této posloupnosti jsou nesoudělné. (MKS 22–5–3)

Úloha 4. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel splňuje vztah $a_n = a_{n-1} + a_{n+2}$ pro každé $n \geq 2$. Zjistěte, kolik nejvíce po sobě jdoucích čísel v této posloupnosti může být kladných. (MKS 30–2j–4)

Úloha 5. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost, v níž je $a_1 = a_2 = 1$ a pro každé $n \geq 3$ platí $a_n = \frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je a_n celé číslo.

Úloha 6. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo n existuje posloupnost prvočísel $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ splňující rekurentní formuli $p_i = p_1 p_2 \cdots p_{i-1} + 1$ pro $2 < i \leq n$ (druhý člen je nezávislý na prvním!). (MKS 23–1–3)

Středně těžké úlohy

Úloha 7. Je dána posloupnost: $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 167$,

$$a_n = 2003a_{n-1} - a_{n-2} + 174$$

pro $n \geq 3$. Najděte všechna k taková, že a_k je prvočíslo. (MKS 22–5–4)

Úloha 8. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 = 56$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$. Ukažte, že $a_n < 0$ pro nějaké $0 < n < 2013$. (MKS 23–1–4)

Úloha 9. První člen posloupnosti je 99 a každý další je součtem desátých mocnin všech cifer předchozího členu. Může se v takové posloupnosti vyskytnout nějaké číslo přesně dvakrát? (MKS 30–6–5)

Úloha 10. Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje vztah $a_{n+1} = a_n + f(a_n)$, kde $f(m)$ značí součin cifer čísla m. Je tato posloupnost omezená pro všechna a_1 přirozená? (MKS 23–1–6)

Úloha 11. Posloupnost má první dva členy $a_1 = 20$ a $a_2 = 11$ a dále je definovaná pomocí vzorce

$$a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}},$$

dokud má pravá strana smysl (tj. nedělí se nulou). Určete nejmenší t takové, že $a_t = 0$. (Náboj 2011, 43)

Návody

1. Platí $a_{n+6} = a_n$, řešení je -3.

2. Najdi periodu posloupnosti $\{a_n \mod 4\}_{n=0}^{\infty}$.

3. Ukaž, že pro $i > j$ dává a_i zbytek 1 po dělení a_j.

4. Nanejvýš pět – dokazuj sporem.

5. Odečti od sebe rekurentní vztahy pro n-tý a $(n+1)$-tý člen.

6. BÚNO je p_1 sudé. Rozeber tři případy podle toho, jaký zbytek dává p_2 po dělení třemi. Pro $n \geq 5$ taková posloupnost neexistuje.

7. Ukaž, že členy, jejichž index dává po dělení třemi zbytek $k \in \{0, 1, 2\}$, jsou dělitelné číslem a_k.

8. Nejprve ukaž, že $a_n \neq 0$. Dále předpokládej, že pro každé n je $a_n > 0$, a použij vhodné odhady.

9. Ukaž, že každý člen posloupnosti má nejvýše jedenáct cifer.

10. Ano. Rozmysli si, co se děje, když posloupnost přeskočí na vyšší řád.

11. Co se děje se součiny dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti?

Literatura a zdroje

Ďakujem Martine Vaváčkovej, ktorá je pôvodnou autorkou tohto príspevku.

[1] Martina Vaváčková, zborník jeseň 2013, Lysečiny
[2] Arthur Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.
[3] Saša Kazda, *Rekurentní rovnice*, Janova Bouda, 2005.
[4] Miško Szabados, *Rekurentné postupnosti*, Oldřichov, 2009.
[5] Katka Quitnerrová, *Rekurentné postupnosti*, Horní Bradlo, 2004.

Geometrická zobrazení

Alicka Dományová

Abstrakt. Geometrická zobrazení představují fascinující oblast planimetrie, která nabízí elegantní nástroje pro řešení geometrických problémů. V tomto textu si představíme několik klíčových zobrazení, se kterými jste se možná již setkali v rámci konstrukční geometrie. My se však zaměříme především na jejich využití při řešení důkazových úloh.

Definice. *Zobrazení* f je dáno, je-li k libovolnému bodu X (prvku dané množiny, např. roviny) určen jednoznačně bod $X' = f(X)$ jako jeho obraz.

Shodná zobrazení

Definice. Zobrazení roviny σ na rovinu σ se nazývá *shodné zobrazení*, pokud pro libovolné různé body X, Y roviny σ a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = |XY|$.

Mezi shodná zobrazení patří osová souměrnost, otočení (včetně středové souměrnosti a identity), posunutí a posunutá souměrnost.

Definice. Je-li v rovině dána přímka p, pak *osovou souměrností* O_p podle této přímky p rozumíme zobrazení definované jako

(i) $A' = A$, pokud A leží na p,
(ii) A' je takový bod, že p je osa úsečky AA', pokud A neleží na p.

Definice. Je-li v rovině dán bod O a je-li dáno číslo $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, pak *otočením* $R_{(O,\alpha)}$ rozumíme zobrazení definované jako

(i) $R_{(O,\alpha)}(O) = O$,
(ii) $R_{(O,\alpha)}(A) = A'$ splňující $|OA'| = |OA|$ a $|\sphericalangle AOA'| = \alpha$ pro libovolné $A \neq O$.

Poznámka. Ano, v otočení existují dva odpovídající body A' – jeden otočený po směru, druhý proti směru chodu hodinových ručiček. Této nepřesnosti se lze vyhnout zavedením tzv. orientovaných úhlů. *Orientovaný úhel* je úhel, u kterého je určeno, které jeho rameno je počáteční a které je koncové. Jednomu ze dvou směrů (zpravidla tomu proti směru) přiřadí kladné a druhému záporné znaménko.

Speciálním případem otočení je *středová souměrnost*, která odpovídá otočení o 180°. Středovou souměrnost značíme S_O, kde O je střed otočení (a tedy i sou-

měrnosti). Středová souměrnost splňuje, na rozdíl od obecného otočení, následující dvě vlastnosti:

(i) pro každý bod A platí $(A')' = A$,
(ii) bod A, bod A' a střed středové souměrnosti leží v přímce.

Definice. Je-li dán vektor $\overrightarrow{AB}$, pak *posunutím* $T_{\overrightarrow{AB}}$ rozumíme zobrazení, které libovolnému bodu X přiřadí bod X' takový, že $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, tedy takový bod, že $ABX'X$ je rovnoběžník.

Definice. Je-li p přímka v rovině a A, B body na ní, pak *posunutou souměrností* $G_{\overrightarrow{ab}}$ rozumíme zobrazení, které vznikne složením posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$ a osové souměrnosti podle přímky p.

Skládání shodných zobrazení

Definice. Jsou-li dána dvě zobrazení f a g, pak *složeným zobrazením* $g \circ f$ rozumíme zobrazení, které bodu A přiřadí bod $g(f(A))$, tj. nejdříve provedeme zobrazení f a na výsledek ještě zobrazení g.

Poznámka. Pozor, na pořadí, v němž zobrazení skládáme, záleží – složením dvou zobrazení v opačném pořadí obecně získáme jiný výsledek.

Tvrzení. *Složení dvou osových souměrností podle téže osy je identita.*

Tvrzení. *Složením dvou osových souměrností podle dvou různých protínajících se os je otočení.*

Tvrzení. *Složením dvou osových souměrností podle dvou různých rovnoběžných os je posunutí.*

Tvrzení. *Složením dvou posunutí je posunutí, případně identita.*

Tvrzení. *Složením dvou otočení podle téhož středu je otočení, případně identita.*

Tvrzení. *Složením dvou netriviálních otočení podle různých středů je buď otočení, nebo posunutí.*

Tvrzení. *Složením netriviálního otočení a posunutí je otočení.*

Věta. *Libovolné shodné zobrazení roviny je buď osovou souměrností, nebo je lze rozložit na nejvýše tři osové souměrnosti.*

Věta. *Složením dvou středových souměrností S_{O_1}, S_{O_2} dostaneme posunutí o vektor $2\overrightarrow{O_1O_2}$.*

Věta. *Každé shodné zobrazení v rovině je osová souměrnost, otočení, posunutí nebo posunutá souměrnost.*

Úlohy

Úloha 1. V rovině je dána přímka p a body A, B ležící v téže polorovině určené přímkou p. Nalezněte na přímce p takový bod P, aby $|AP| + |PB|$ bylo minimální.

Úloha 2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho průsečík výšek H. Ukažte, že obrazy bodu H v osových souměrnostech podle stran trojúhelníka ABC leží na kružnici jemu opsané.

Úloha 3. Na kratším oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je dán bod P. Ukažte, že $|PC| = |PA| + |PB|$.

Úloha 4. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Na polopřímkách AD a AB leží postupně body P, Q tak, že $|AP| = |BC|$ a $|AQ| = |CD|$. Dokažte, že přímka AC půlí úsečku PQ.

Úloha 5. Zkonstruujte trojúhelník, máte-li zadané délky dvou stran a těžnici na třetí stranu.

Úloha 6. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. Na přímce BC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Úloha 7. Nechť ABC je takový ostroúhlý trojúhelník, že $|AB| < |AC|$. Osa strany BC protíná stranu AC v bodě D. Na kratším oblouku AC kružnice opsané trojúhelníku ABC leží bod P takový, že $DP \parallel BC$. Střed strany AB označme M, Dokažte, že $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle MPB|$.

Úloha 8. Na straně CD čtverce $ABCD$ je dán bod E. Osa úhlu BAE protne stranu BC v bodě F. Dokažte, že $|AE| = |BF| + |DE|$.

Úloha 9. V rovině jsou dány body A a B. Uvažme všechny konvexní pětiúhelníky $ABCDE$ v jedné polorovině určené přímkou AB takové, že $ABDE$ je rovnoběžník a BCD je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu B. Ukažte, že kružnice nad průměrem CE procházejí všechny jedním bodem.

Úloha 10. Na těžnici z vrcholu C trojúhelníku ABC nalezněme bod X tak, aby $|BX| = |AC|$. Označme Y průsečík přímky BX a strany AC. Ukažte, že trojúhelník CXY je rovnoramenný.

Úloha 11. Jednotkové kružnice k a l se dotýkají v bodě T. Kružnice m o poloměru 2 má střed na kružnici k a dotýká se jí v bodě B. Ukažte, že přímka BT prochází jedním z průsečíků kružnic l a m.

Úloha 12. Ukažte, že žádný rovinný útvar nemůže mít přesně dva středy souměrnosti.

Úloha 13. Na tečně ke kružnici k se středem O vedené bodem A zvolíme bod B. Úsečku AB otočíme podle O o nějaký úhel, čímž dostaneme úsečku $A'B'$. Ukažte, že přímka AA' prochází středem úsečky BB'.

Úloha 14. Označme postupně A_1, B_1, C_1 středy stran BC, CA, AB trojúhelníka ABC. Označme I_a, I_b, I_c středy kružnic vepsaných trojúhelníkům AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 a O_a, O_b, O_c středy kružnic těmto trojúhelníkům opsaných. Dokažte, že trojúhelníky $I_aI_bI_c$ a $O_aO_bO_c$ jsou shodné.

Podobná zobrazení

Definice. Zobrazení roviny σ na rovinu σ se nazývá *podobné zobrazení*, pokud existuje kladné číslo k takové, že pro libovolné dva různé body X, Y roviny σ a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = k|XY|$.

Definice. *Vlastní stejnolehlost* je jednoznačně určena svým středem S (vlastní bod) a koeficientem k (nenulové reálné číslo). Pak pro libovolný bod X definujeme jeho obraz X' tak, aby platilo $\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$. Je-li k kladné/záporné, říkáme, že stejnolehlost je kladná/záporná.

Někdy může být užitečné uvažovat posunutí jako typ stejnolehlosti s 'bodem v nekonečnu'. Tu nazvene *nevlastní stejnolehlost*.

Jsou-li dány kružnice k, l s poloměry r_k, r_l, pak existuje právě jedna kladná (ne nutně vlastní) a právě jedna záporná stejnolehlost, která zobrazí kružnici k na kružnici l. Středy těchto stejnolehlostí je možné sestrojit jako (ne nutně vlastní) průsečíky společných vnějších, respektive vnitřních tečen, ovšem pouze tehdy, když kružnice tyto společné tečny mají. Pokud se kružnice dotýkají, pak bod dotyku je jedním ze středů těchto stejnolehlostí.

Definice. *Spirální podobnost* je zobrazení určené středem O, úhlem otočení $\varphi \in \langle 0°, 360°)$ a koeficientem $k > 0$. Bodu A v rovině přiřadí takový bod A', že

(i) $|\sphericalangle A'OA| = \varphi$,
(ii) $|OA'| = k|OA|$.

Věta. (Spirální podobnost chodí po dvou) *Předpokládejme, že S je střed spirální podobnosti, která zobrazuje A na A' a B na B'. Pak nejen $\triangle SAA' \sim \triangle SBB'$, ale i $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$ a spirální podobnost, která zobrazuje A na B a A' na B', má za svůj střed rovněž bod S.*

Skládání stejnolehlostí

Věta. (Skládání stejnolehlostí) *Mějme dvě (ne nutně vlastní) stejnolehlosti h_1, h_2 s koeficienty k_1, k_2 a středy S_1, S_2. Jejich složení $h_2 \circ h_1$ označme h. Pak h je opět (ne nutně vlastní) stejnolehlost, a to s koeficientem $k_1 \cdot k_2$. Pokud $S_1 = S_2$, pak středem h je opět ten samý bod (nebo jím alespoň může být – je-li h identita). V opačném případě bude střed h alespoň ležet na přímce S_1S_2.*

Skládání shodných a podobných zobrazení

Definice. *Osová stejnolehlost* je zobrazení určené přímkou o, bodem O na této přímce a koeficientem $k > 0$. Bodu A přiřadí bod A' splňující

(i) o je osa úhlu $\sphericalangle AOA'$,
(ii) $|OA'| = k|OA|$.

Osová stejnolehlost je tedy složením osové souměrnosti podle přímky o a stejnolehlosti se středem O a koeficientem k v libovolném pořadí. Je-li $k = 1$, je osová stejnolehlost zároveň osovou souměrností.

Úlohy

Úloha 15. Dokažte, že se těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Úloha 16. Dokažte, že paty výšek a středy stran trojúhelníku leží na jedné kružnici.

Úloha 17. Kružnice k, l mají vnitřní dotyk v bodě T. Tětiva AB kružnice k se dotýká kružnice l v bodě U. Dokažte, že přímka UT je osa úhlu ATB.

Úloha 18. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Označme $R = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům RAD, RBC, QAB a QCD procházejí všechny jedním bodem.

Úloha 19. (Mongeho věta) V rovině jsou dány tři neprotínající se kružnice k, l, m. Označme K, L, M po řadě průsečíky vnějších společných tečen kružnic l a m, k a m, k a l. Dokažte, že body K, L, M leží v přímce.

Úloha 20. Je dán trojúhelník ABC s obsahem S. Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC, je libovolně zvolen bod U. Označme A', B', C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

Úloha 21. Označme písmeny K, L středy stran AB, CD tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ a E průsečík polopřímek AD a BC. Dokažte, že osa úhlu AEB protíná úsečku KL.

Úloha 22. V trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané a H průsečík výšek. Dokažte, že $|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle OAC|$.

Úloha 23. **(klouzání)** V rovině jsou dány čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ značené proti směru chodu hodinových ručiček. Označme A_1 střed úsečky AA' a body B_1, C_1, D_1 obdobně. Ukažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je čtverec.

Úloha 24. Je dán trojúhelník ABC. Označme T_a bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC a E_a střed kružnice k této straně připsané. Obdobně definujeme T_b, E_b

a T_c, E_c pro strany CA a AB. Dokažte, že přímky T_aE_a, T_bE_b a T_cE_c procházejí jedním bodem.

Úloha 25. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Předpokládejme, že body P, Q leží po řadě na stranách AD, BC tak, že

$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Dokažte, že přímka PQ svírá s přímkou AB stejný úhel jako s přímkou CD.

Úloha 26. Na stranách AD, BC čtyřúhelníku, který má protější strany různoběžné, jsou dány body E a F tak, že $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|BF|}{|FC|}$. Polopřímka FE protne polopřímky BA, CD po řadě v bodech S, T. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE, SBF, TCF a TDE procházejí jedním bodem.

Úloha 27. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník takový, že $|BC| < |AB|$ a $|BC| < |CA|$. Body P a T různé od B a C leží postupně na stranách AB a AC tak, že $|BT| = |BC| = |CP|$. Střed kružnice opsané trojúhelníku APT označíme X, průsečík výšek trojúhelníku ABC označíme H. Přímky BT a CP se protínají v bodě S. Dokažte, že X, H a S leží na jedné přímce.

Úloha 28. V rovině jsou dány různě velké, stejně orientované, podobné trojúhelníky ABC a $A_0B_0C_0$. Středy úseček AA_0, BB_0, CC_0 označme po řadě A_1, B_1, C_1. Ukažte, že i trojúhelník $A_1B_1C_1$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

Úloha 29. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|BC| = |AD|$ a $BC \nparallel CD$. Označme M a N postupně středy stran BC a AD. Dokažte, že osy úseček AB, CD a MN prochází jedním bodem.

Úloha 30. Body A_1, B_1, C_1 postupně leží na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Druhý průsečík kružnic opsaných ABC a AB_1C_1 označíme A_2. Obraz A_1 podle středu strany BC označíme A_3. Obdobně definujeme B_2, C_2, B_3, C_3. Dokažte, že trojúhelníky $A_2B_2C_2$ a $A_3B_3C_3$ jsou podobné.

Návody

1. Osová souměrnost.

2. Úhlení a tětivové čtyřúhelníky.

3. Otoč trojúhelník CAP podle středu C o $60°$.

4. Dokresli si P' jako obraz P ve středové souměrnosti podle A. Najdi podobné trojúhelníky.

5. Překlop podle středu strany, jejíž délku neznáš.

6. Inspiruj se předchozí úlohou a najdi trojúhelník podobný CAN.

7. Dokresli obraz P v souměrnosti podle D, Označ ho Q, pak AQD a ABP jsou podobné.

8. Otoč trojúhelník ABF o $90°$ okolo bodu A.

9. Tento bod leží na kružnici nad průměrem AB.

10. Středová souměrnost.

11. Středová souměrnost.

12. Ukaž, že jsou-li O_1, O_2 dva různé středy souměrnosti, pak bod středově souměrný s bodem O_1 podle bodu O_2 je středem středové souměrnosti $S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$.

13. BÚNO se na obrázek podívej tak, aby přímka AA' byla vodorovná, a najdi posunutou souměrnost.

14. Posunutí.

15. Je to střed stejnolehlosti zobrazující vrcholy trojúhelníku na středy jeho stran.

16. Využij toho, že obrazy průsečíku výšek podle stran a středů stran padnou na kružnici opsanou.

17. Uvažuj stejnolehlost se středem v T zobrazující k na l.

18. Označme M druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům RAD a RBC. Pak M je střed spirální podobnosti zobrazující AB na DC (vnitřní *Miguelův bod* čtyřúhelníku $ABCD$).

19. Interpretuj body M, K jako středy kladných stejnolehlostí zobrazujících k na l, resp. l na m. Uvědom si, že jejich složením vznikne kladná stejnolehlost zobrazující k na m, která má střed v L, a použijte tvrzení.

20. Využij stejnolehlostí se středy ve vrcholech trojúhelníku ABC a koeficientem 2.

21. Osová souměrnost podle osy úhlu AEB následovaná stejnolehlostí s koeficientem $|EC| : |EA|$ zobrazí úsečku AB na úsečku CD.

22. Vyúhli, že oba dotyčné úhly jsou rovny $90° - \beta$.

23. Použij spirální podobnost zobrazující AB na $A'B'$.

24. Najdi podobné trojúhelníky a využij stejnolehlost.

25. Zobraz čtyřúhelník $ABCD$ osově podle přímky PQ.

26. Najdi spirální podobnost, která zobrazí AE na BF.

27. Dokresli rovnoběžku s BC procházející A a protni ji s BT a CP. Využij stejnolehlost se středem S.

28. Spirální podobnost chodí po dvou a těžnice se v podobnosti zobrazí na těžnici.

29. Tím bodem je střed spirální podobnosti.

30. Bod A_2 je střed nějaké spirální podobnosti. Ukaž, že AC_3B_3 a A_2BC jsou podobné a zbytek doúhli.

Literatura a zdroje

Ďakujem Jolči Štraitovej, ktorá je pôvodnou autorkou tohto príspevku.

[1] Pepa Tkadlec, Mirek Olšák: *Geometrická zobrazení*, PraSe seriál, 31. ročník.
[2] Franta Konopecký: *Geometrická zobrazení*, Rejhotice, 2006.
[3] Majda Mišinová: *Podobnosti spirální a jiné*, Kunžak, 2024.

Dělitelnost

Martin Fof

Abstrakt. Jednou z elementárních vlastností celých čísel, kterou můžeme zkoumat, je, jestli je jedno násobkem druhého. O úroveň výše je pak hledání celočíselných zbytků po dělení. V této přednášce si osvětlíme, jak s těmito koncepty pracovat, zejména v kontextu olympiádní matematiky. K tomu posléze využijeme středně pokročilé nástroje jako malou Fermatovu větu a Eukleidův algoritmus.

Základní pojmy a vlastnosti

Nejprve si zavedeme dva klíčové pojmy:

Definice 1. Nechť jsou a, b celá čísla. Řekneme, že a *dělí* b (značíme $a \mid b$), pokud $b = k \cdot a$ pro nějaké celé číslo k. V opačném případě budeme říkat a *nedělí* b (značíme $a \nmid b$).

Definice 2. Nechť a, b a n jsou celá čísla. Řekneme, že a je *kongruentní* s b modulo n (značíme $a \equiv b \pmod{n}$), pokud $n \mid (a - b)$.

Pomocí tohoto značení můžeme snadno popsat řadu vlastností, které jsou sice triviální, nicméně jsou využity (občas implicitně) v celé řadě úloh.

Pozorování 3. *Pro libovolná celá čísla a, b, c, d, n platí:*

(1) $1 \mid a$,
(2) $a \mid 0$,
(3) $a \mid a$,
(4) $a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid kb + \ell c$, *kde k, ℓ jsou libovolná celá čísla,*
(5) $a \mid b \wedge c \mid d \implies ac \mid bd$,
(6) $ab \mid c \implies a \mid c$ a $b \mid c$,
(7) $ac \mid bc \iff a \mid b$
(8) $n \mid b + c \implies b \equiv -c \pmod{n}$,
(9) $a + b \cdot n \equiv a \pmod{n}$,
(10) $a \equiv b \pmod{n} \wedge c \equiv d \pmod{n} \implies a + c \equiv b + d \pmod{n}$,
(11) $a \equiv b \pmod{n} \wedge c \equiv d \pmod{n} \implies ac \equiv bd \pmod{n}$,

(12) *Pokud je c nesoudělné*[1] *s n, pak* $ac \equiv bc \pmod{n} \implies a \equiv b \pmod{n}$,
(13) $a \equiv b \pmod{n} \iff a \equiv b \pmod{-n}$.

Takřka vždy se používají kongruence modulo $n \geq 2$, protože mod 0 je kongruentní jen číslo samo se sebou, mod 1 jsou kongruentní všechna čísla a záporná modula se chovají stejně jako kladná.

Prvočísla se chovají moc hezky k dělitelnosti, některé z jejich vlastností si ukážeme v lemmátku.

Lemma 4. (prvočísla a dělitelnost) *Uvažujme prvočíslo p a přirozená čísla a, b. Potom platí:*

(1) *když $p \mid ab$, pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$,*
(2) *když $p \mid a^2$, pak $p \mid a$ a také $p^2 \mid a^2$.*

Příklady a úlohy

Příklad 5. (odstrašující) Rozmyslete si, že pokud p není v předcházejícím lemmatu prvočíslo, lemma nemusí platit.

Příklad 6. Ukažte, že pro libovolné celé číslo n je $\frac{n^3-n}{6}$ také celé číslo.

Příklad 7. Najděte zbytek po dělení čísla $2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13$ číslem 28.

Úloha 8. Najděte největší přirozené číslo a takové, že $a \mid 3^{2n+1} + 1$ pro každé přirozené číslo n.

Úloha 9. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $9 \mid 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$.

Kritéria dělitelnosti

Často se nám hodí rychle určit, jestli je nějaké číslo dělitelné daným (malým) číslem. Uvedeme si ale tvrzení, která nám nejen prozradí, zda ono číslo je či není dělitelné, ale zároveň nám pomohou určit případný zbytek.

Zároveň si všimněme, že naše tvrzení jsou specifická pro desítkovou soustavu. Pro zajímavost si můžete zkusit rozmyslet, jak by to fungovalo pro jiné soustavy, či dokonce jestli jsou nějaké soustavy vhodnější z hlediska kritérií dělitelnosti.

Věta 10. (dělitelnost mocninami dvojky a pětky) *Mějme celé číslo n a přirozené číslo a. Jako poslední a-číslí čísla n chápejme takové celé číslo $k_a(n)$, které se s n shoduje na posledních a cifrách, jinde má samé nuly a je záporné právě tehdy, když je n záporné. Pak platí*

$$n \equiv k_a(n) \pmod{2^a},$$
$$n \equiv k_a(n) \pmod{5^a}.$$

[1] Nesoudělnost dvou čísel je vysvětlena v definici 21.

Věta 11. (dělitelnost trojkou a devítkou) *Mějme celé číslo n, označme $s(n)$ jeho ciferný součet (platí $s(-n) = -s(n)$). Pak platí*

$$n \equiv s(n) \pmod 3,$$
$$n \equiv s(n) \pmod 9.$$

Věta 12. (dělitelnost jedenácti) *Mějme celé číslo n. Označme $\bar{s}(n)$ alterovaný ciferný součet, tedy takové celé číslo, které vznikne rozdílem součtů cifer na sudých a lichých pozicích (přičemž analogicky platí $\bar{s}(-n) = -\bar{s}(n)$). Pak platí*

$$n \equiv \bar{s}(n) \pmod{11}.$$

Věta 13. (dělitelnost sedmi a třinácti) *Mějme celé číslo n ve tvaru $10k + \ell$, kde k je přirozené číslo a ℓ je cifra. Pak platí:*

$$n \equiv 3k + \ell \pmod 7,$$
$$n \equiv -3k + \ell \pmod{13}.$$

Cvičení 14. Rozmyslete si, proč tato kritéria fungují.

Úloha 15. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že $s(n^2) = 3$.

Společní dělitelé a spol.

Definice 16. Mějme celá čísla a, b. Pak jako *společný dělitel* čísel a, b označíme takové celé číslo d, pro které platí $d \mid a$ a $d \mid b$.

Nezáporné celé číslo d nazveme *největší společný dělitel* čísel a, b, pokud jej dělí jejich každý společný dělitel.

Definice 17. Mějme celá čísla a, b. Pak jako *společný násobek* čísel a, b označíme takové celé číslo n, pro které platí $a \mid n$ a $b \mid n$.

Nezáporné celé číslo n nazveme *nejmenší společný násobek* čísel a, b, pokud dělí jejich každý společný násobek.

Tvrzení 18. *Pro každá dvě celá čísla a, b existuje právě jeden jejich největší společný dělitel, který budeme značit* $\mathrm{NSD}(a, b)$.

Tvrzení 19. *Nechť pro celá čísla a, b (kde $ab \neq 0$) je*

$$n = \frac{ab}{\mathrm{NSD}(a, b)}.$$

Pak platí, že n je celé číslo a $|n|$ je nejmenší společný násobek a a b. Pokud $ab = 0$, pak definujeme $n = 0$.

Důsledek 20. *Nejmenší společný násobek je pro každá dvě čísla právě jeden, můžeme pro něj proto zavést notaci* $\mathrm{nsn}(a, b)$.

Definice 21. O celých číslech a, b prohlásíme, že jsou *nesoudělná*, pakliže splňují $\mathrm{NSD}(a, b) = 1$. V opačném případě říkáme, že jsou *soudělná*.

Lemma 22. *Nechť a, b jsou celá čísla. Pak platí*

(1) $\mathrm{NSD}(a, b) = 1 \implies \mathrm{NSD}(a + b, ab) = 1$,
(2) $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(a, a - b)$.

Věta 23. (Bézoutova rovnost) *Mějme celá čísla a a b, označme $d = \mathrm{NSD}(a, b)$. Pak existují celá čísla x, y (nazýváme je Bézoutovy koeficienty) taková, že*

$$ax + by = d.$$

Obecně pak pro libovolná x', y' platí, že $ax' + by'$ je násobek d.

Jak ale najdeme d, natož Bézoutovy koeficienty x, y? K tomu nám bude sloužit tzv. *Eukleidův algoritmus.*

Věta 24. (rozšířený Eukleidův algoritmus) *Mějme celočíselnou rovnici*

$$ax + by = d,$$

kde a a b jsou celá čísla, $d = \mathrm{NSD}(a, b)$ a BÚNO platí $|a| \geq |b|$. Neznámé x, y, d pak umíme nalézt následujícím algoritmem:

(1) *Připravíme si tabulku se třemi sloupečky, do prvního řádku napíšeme po řadě a, 1, 0 a do druhého b, 0, 1.*
(2) *Dokud nemáme v prvním sloupci nulu, opakujeme následující kroky:*
  (2.1) *Označíme k_1, k_2, k_3 a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 hodnoty v posledních dvou vyplněných řádcích tabulky.*
  (2.2) *Nalezneme (pomocí dělení se zbytkem) čísla q, r tak, aby $k_1 = \ell_1 \cdot q + r$ a $0 \leq |r| < |\ell_1|$.*
  (2.3) *Do nového řádku napíšeme po řadě čísla r, $k_2 - \ell_2 \cdot q$ a $k_3 - \ell_3 \cdot q$.*
(3) *Hodnoty z předposledního řádku v prvním, druhém a třetím sloupci označíme po řadě d, x, y.*

Pozorování 25. *Pokud si vezmeme libovolný řádek tabulky z rozšířeného Eukleidova algoritmu a čísla v jednotlivých sloupcích označíme postupně d', x', y', potom platí $ax' + by' = d'$.*

Příklady a úlohy

Příklad 26. Najděte všechna celá čísla a, b, splňující $\mathrm{NSD}(a, b) = 15$ a $\mathrm{nsn}(a, b) = 900$.

Příklad 27. Nalezněte největšího společného dělitele čísel 1980 a 3179.

Úloha 28. Najděte všechna celá čísla a, b, která splňují

$$a + b = 100 \quad \text{a} \quad \operatorname{nsn}(a, b) = 210.$$

Úloha 29. Dokažte, že zlomek $\frac{21n+4}{14n+3}$ nelze pro žádné přirozené číslo n zkrátit.

(IMO 1959)

Těžší věty na závěr

Dosud jsme se moc nezabývali vlastnostmi zbytků při mocnění, které se chovají mnohem složitěji. Nicméně máme k dispozici dvě klíčová tvrzení, která nám mohou pomoci.

Věta 30. (malá Fermatova) *Nechť p je prvočíslo a a celé číslo takové, že $p \nmid a$. Pak*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Věta 31. (Eulerova) *Nechť a a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Označme $\varphi(n)$ počet přirozených čísel menších než n, která jsou s n nesoudělná. Pak*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Můžeme si povšimnout, že malá Fermatova věta je speciálním případem Eulerovy věty, neboť pro každé prvočíslo jsou s ním všechna menší přirozená čísla nesoudělná. Jelikož se ale v úlohách často dělí prvočíslem, je vhodné tento případ zmiňovat zvlášť.

Příklady a úlohy

Příklad 32. Ukažte, že $13 \mid 2^{35} + 3^{36} + 5^{37}$.

Úloha 33. Dokažte, že pro lichá přirozená čísla n platí

$$n \mid 2^{(n-1)!} - 1.$$

Úloha 34. Najděte všechna přirozená n, pro která

$$n \mid 2^n - 1.$$

(Putnam 1972)

Cvičení

Cvičení 35. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$n \equiv 4 \pmod 7 \iff 49 \mid (n^2 + 6n + 9).$$

Cvičení 36. Nalezněte všechna přirozená čísla k, m taková, že

$$\frac{k}{m} = \frac{7}{9} \quad \text{a} \quad \operatorname{nsn}(k, m) = 378.$$

Cvičení 37. Najděte největší celé číslo n takové, že

$$\frac{(n-2)^2\,(n+1)}{n-1}$$

je celé číslo. (AIME 1999)

Cvičení 38. Nalezněte všechna celá čísla x, y splňující $x^2 = 4y + 2$.

Cvičení 39. Existuje přirozené číslo n takové, že $s(2^n) = s(2^{n+1})$?

Cvičení 40. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro něž existuje přirozené číslo n takové, že platí

$$p(p+1) + q(q+1) = n(n+1).$$

Cvičení 41. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n platí $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Návody

6. Rozlož čitatel i jmenovatel na součin. Uvaž lemma 4.

7. Násobit, modulit, opakovat.

8. Podívej se na dělitele pro $n = 1$ a urči, zda budou děliteli i pro jiná n.

9. $10^n \equiv 1 \pmod 9$, poté bude výraz před dělítkem i po dělítku dělitelný třemi, můžeš zkrátit.

15. Co znamená, že je ciferný součet roven 3?

22. (1) Dá se snadno dokázat obměnou.
(2) Dokaž, že množina společných dělitelů a, b je stejná jako množina společných dělitelů a, $a - b$.

27. Použij Eukleidův algoritmus.

29. Použij Eukleidův algoritmus na nalezení největšího společného dělitele.

32. Použij malou Fermatovu větu na jednotlivé členy.

33. Rozmysli si, že $\varphi(n) \mid n!$.

34. Je jen jediné. Pak zkus využít malou Fermatovu větu.

37. Uvažuj úlohu pomocí jazyka kongruencí (modulo $n-1$). Uvaž, čemu je potom kongruentní $n - 2$ a $n + 1$.

38. Podívej se na úlohu modulo 4.

39. Převeď na kongruence modulo 3.

41. Uvažuj úlohu pomocí jazyka kongruencí (modulo 133). Zjisti, čemu je kongruentní $11 \cdot 12$. Vynásob kongruenci vhodnou mocninou 11 (nebo 12) a uprav.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je upravený příspěvek Daniela Perouta, kterému tímto děkuji.

[1] Daniel Perout: *Dělitelnost*, Zásada, 2021.

Burnsideovo lemma

Martin Fof

Abstrakt. V kombinatorických úlohách se často počítá počet různých obarvení nebo uspořádání, což není nic až tak složitého. Větší potíže však jsou, pokud máme různá otočení a překlopení považovat za identická. Burnsideovo lemma nám říká, jak i v tomto případě počet předmětů jednoduše spočítat. Nejdříve si řekneme, co říká v jednodušších pojmech, a poté se podíváme na jeho skutečné znění.

Příklad. Kolik různých náhrdelníků lze sestavit ze 3 skleněných a 5 dřevěných korálků? Korálky jsou navlečené na šňůrce, takže dva náhrdelníky lišící se jen pootočením považujeme za shodné.

Tento příklad není těžké vyřešit. Stačí všechny možnosti spočíst. To je ale poměrně pracné a jednoduše se v tom udělá chyba. A co teprve, když korálků nebude celkem 8, ale třeba 80? Přesně na to je Burnsideovo lemma. Než si ho ale ukážeme, definujeme si pár pojmů.

Úmluva.

Obrázek pro nás bude jedna „kombinace“, u které zatím nic nezanedbáváme. V našem příkladu to například budou všechny náhrdelníky s danou orientací.

Předmět pro nás bude to, co chceme spočítat – tedy „kombinace“, u které ale nezáleží na orientaci. Jeden předmět tedy může odpovídat více než jednomu obrázku. V příkladu výše to budou náhrdelníky, u kterých na orientaci nezávisí.

Pohyb bude to, co chceme v dané úloze zanedbávat. Bude to funkce, která vezme obrázek a udělá z něj (typicky jiný) obrázek. Množinu všech pohybů budeme značit G. Musí tvořit grupu, což znamená:

(i) Kdykoli složíme (provedeme po sobě) dva pohyby z G, dostaneme opět pohyb z G.
(ii) V G musí existovat pohyb, který vše nechá na místě (takzvaná identita).
(iii) Pro každý pohyb $p \in G$ existuje opačný pohyb p^{-1}, který při složení (v kterémkoli pořadí) s původním pohybem p dá identitu.

Lemma. (Burnside) *Pro pohyb p označme S_p množinu všech obrázků, které se pohybem p nezmění. Pak počet předmětů spočteme jako*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{p \in G} |S_p|.$$

Řešení. Burnsideovo lemma nám říká, že řešení výše zmíněného příkladu lze spočítat jako průměrný počet obrázků pro každý pohyb, které se jím nezmění. V našem případě jsou pohyby 8 různých pootočení. Identita zřejmě zachovává všechny obrázky a není těžké nahlédnout, že všechny ostatní otočení každý obrázek změní. Počet obrázků je $\binom{8}{3} = 56$. Počet náhrdelníků tedy bude

$$\frac{1}{8} \cdot (56 + 0 + ... + 0) = 7.$$

Úlohy

Úloha 1. Kolik náhrdelníků vyjde v úvodním příkladu, budeme-li moci náhrdelníky i převracet?

Úloha 2. Kolik náhrdelníků vyjde, budeme-li mít k dispozici dvanáct skleněných a dvanáct dřevěných korálků?

Úloha 3. Kolika způsoby lze obarvit políčka šachovnice 3×3 dvěma barvami? Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud lze dostat jedno z druhého pootočením šachovnice.

Úloha 4. Jak se předchozí úloha změní, pokud bude šachovnice skleněná, a my ji tak budeme moci i překlápět?

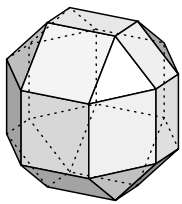
Úloha 5. Kolika způsoby můžeme obarvit políčka nekonečného čtverečkovaného papíru dvěma barvami tak, aby políčko $[x, y]$ mělo vždy stejnou barvu jako políčka $[x \pm 9, y]$ a $[x, y \pm 9]$? Obarvení lišící se pouze posunutím (avšak **nikoli** otočením či překlopením) považujeme za totožná.

Úloha 6. Máme umístit šest nerozeznatelných míčků do tří nerozeznatelných krabic. Kolika způsoby to můžeme udělat?

Úloha 7. Kolika způsoby můžeme obarvit stěny krychle dvěma barvami?

Úloha 8. Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy krychle třemi barvami?

Úloha 9. Kolika způsoby lze na každou z 26 stěn následujícího tělesa (krychle se seříznutými hranami a vrcholy) nakreslit šipku směrem k jedné hraně?



Úloha 10. O kolik se zvětší výsledek předchozí úlohy, pokud budeme

(1) trojúhelníkové stěny barvit jednou ze tří barev namísto kreslení šipky,

(2) čtyřúhelníkové stěny sousedící s trojúhelníkovými barvit čtyřmi barvami namísto kreslení šipky,
(3) čtyřúhelníkové stěny nesousedící s trojúhelníkovými barvit čtyřmi barvami namísto kreslení šipky?

Úloha 11. Kolik je možností, jak obarvit právě patnáct z třiceti hran dvacetistěnu?

Úloha 12. Pro všechna přirozená čísla N a n dokažte, že n dělí $\sum_{k=1}^{n} N^{\mathrm{NSD}(n,k)}$, kde $\mathrm{NSD}(a,b)$ značí největší společný dělitel a a b.

Návody

1. $\frac{1}{16} \cdot (56 + 4 \cdot 6)$.

2. $\frac{1}{24} \cdot \left(\binom{24}{12} + \binom{12}{6} + 2\binom{8}{4} + 2\binom{6}{3} + 2\binom{4}{2} + 8\right)$.

3. $\frac{1}{4} \cdot (2^9 + 2^5 + 2 \cdot 2^3)$.

4. $\frac{1}{8} \cdot (2^9 + 2^5 + 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^6)$.

5. $\frac{1}{81}(2^{81} + 8 \cdot 2^{27} + 72 \cdot 2^9)$.

6. $\frac{1}{6} \cdot (28 + 3 \cdot 4 + 2)$.

7. $\frac{1}{24}(2^6 + 3 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2)$.

8. $\frac{1}{24}(3^8 + 17 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2)$.

9. $2^{33} \cdot 3^7$.

10.

(1) $2^{12} \cdot 3^3$,
(2) $2^{14} \cdot 3^4$,
(3) $2^6 \cdot 3^2 + 2^{13} \cdot 3^4$.

11. $\left(\binom{30}{15} + 20\binom{10}{5} + 24\binom{6}{3} + 30\binom{14}{7}\right)/60$.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek čerpá ze skvěle napsaného příspěvku Mirka Olšáka, kterému tímto děkuji.

[1] Mirek Olšák: *Burnsideovo Lemma*, Zásada, 2014.
[2] Háňa Bendová: *Burnsideovo Lemma*, Domaslav, 2010.

Kvadratické zbytky

Matěj Gajdoš

Abstrakt. Budeme řešit kvadratické kongruence, ale ne vždy nám to půjde. Nahlédneme, že za otázkou jejich samotné řešitelnosti se ukrývá hezká teorie, a s její pomocí vyřešíme spoustu úloh.

Připomeňme některé značení: Pro celá čísla a, b říkáme, že a *dělí* b a značíme $a \mid b$, pokud existuje k celočíselné takové, že $b = ka$. Dvě celá čísla a a b jsou *kongruentní modulo* přirozené číslo m, značíme $a \equiv b \pmod{m}$, pokud $m \mid a-b$. Pro m přirozené definujeme *množinu zbytků po dělení* m jako

$$\mathbb{Z}_m := \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Příklad. (Motivační) Nalezněte všechna celá čísla x taková, aby $x^2 + 1$ bylo dělitelné sedmi.

Řešení. Chvíli zkoušíme dosazovat za x nějaká čísla, ale žádné x se nám najít nedaří... Z pohledu kongruencí můžeme úlohu formulovat jako řešení $x^2 \equiv -1 \pmod{7}$ v celých číslech. Navíc ale libovolné celé x lze zapsat jako $x = 7q + r$ pro q a r celá, $0 \leq r < 7$. Pak platí

$$x^2 = (7q + r)^2 = 49q^2 + 14qr + r^2 \equiv r^2 \pmod{7},$$

takže pokud původní rovnici $x^2 \equiv -1 \pmod{7}$ nějaké x řeší, pak ji řeší i nějaké $r \in \mathbb{Z}_7$. V $\mathbb{Z}_7$ ale snadno otestujeme, že žádné z 0^2, 1^2, 2^2, ..., 6^2 není kongruentní -1. Tedy žádné řešení naší úlohy neexistuje.

Definice. Nechť $s \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$. Řekneme, že s je *kvadratickým zbytkem* modulo m, pokud existuje $r \in \mathbb{Z}$ takové, že $r^2 \equiv s \pmod{m}$. V opačném případě nazveme s *kvadratickým nezbytkem.*

V dalším se budeme věnovat tomu, kdy je celé číslo kvadratickým (ne)zbytkem (a pro zjednodušení převážně modulo prvočíslo). Pro řešení některých úloh tato informace bohatě stačí, a přitom je to jednodušší úloha než přesné hledání těchto takzvaných *diskrétních druhých odmocnin*[1].

[1] Což je naopak problém dost náročný na to, aby na něm byl založen *Rabinův kryptosystém.*

Definice. Nechť p je prvočíslo a $s \in \mathbb{Z}$. Pak definujeme příslušný *Legendreův symbol* jako

$$\left(\frac{s}{p}\right) := \begin{cases} 0, & \text{pokud } p \mid s, \\ 1, & \text{pokud } p \nmid s \text{ a } s \text{ je kvadratickým zbytkem modulo } p, \\ -1, & \text{pokud } p \nmid s \text{ a } s \text{ je kvadratickým nezbytkem modulo } p. \end{cases}$$

Nahlížíme struktury

Úloha 1. Ukažte, že:

(1) Pro $m \in \mathbb{N}$ existuje v $\mathbb{Z}_m$ nejvýše $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ nenulových kvadratických zbytků modulo m.
(2) Pro p liché prvočíslo existuje v $\mathbb{Z}_p$ právě $\frac{p-1}{2}$ nenulových kvadratických zbytků modulo p.

Úloha 2. (Eulerovo kritérium) Nechť p je liché prvočíslo a $s \in \mathbb{Z}$. Dokažte, že pak

$$\left(\frac{s}{p}\right) \equiv s^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Úloha 3. (Multiplikativita Legendreova symbolu) Nechť p je liché prvočíslo a $s, t \in \mathbb{Z}$. Ukažte, že

$$\left(\frac{st}{p}\right) = \left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{t}{p}\right).$$

Věta. (První suplement) *Pro p liché prvočíslo je*

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Věta. (Druhý suplement) *Pro p liché prvočíslo je*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Věta. (Gaussův zákon kvadratické reciprocity) *Nechť p a q jsou různá lichá prvočísla. Pak*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Řešíme úlohy

Úloha 4. Nechť pro celá čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 = z^2$. Dokažte, že pak některé z těchto čísel je dělitelné třemi a některé pěti.

Úloha 5. Pro která prvočísla p je i $2^p + p^2$ prvočíslem? (PraSe 35–2j–2)

Úloha 6.

(1) Vyřešte v celých číslech $x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod 5$.
(2) Buď p prvočíslo. Načrtněte postup, jak v $\mathbb{Z}_p$ řešit obecné kvadratické rovnice

$$x^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p.$$

Kde se zde projeví kvadratické zbytky a nezbytky?

Úloha 7. Rozhodněte, zda je 200 kvadratickým zbytkem modulo 401.

Úloha 8. Franta dostal k svátku dva čtverce. Všiml si, že jeden z nich se dá napsat jako $4x - 3y$ a druhý jako $3x + 4y$ pro nějaká celá čísla x, y. Dokažte, že potom jsou oba Frantovy čtverce dělitelné pěti. (PraSe 29–2p–7)

Úloha 9. Určete, pro která prvočísla p je 10 kvadratickým zbytkem modulo p.

Úloha 10. Nalezněte všechna přirozená řešení rovnice

$$1! + 2! + \cdots + k! = n^2.$$

Úloha 11. Rozhodněte, zda existuje $a \in \mathbb{N}$ takové, že není osmou mocninou přirozeného čísla a že pro libovolné prvočíslo p má polynom $x^8 - a$ kořen v $\mathbb{Z}_p$.

Úloha 12. Dokažte[2], že pokud s není čtvercem, pak existuje prvočíslo p takové, že s je kvadratickým nezbytkem modulo p.

Úloha 13. Buď P kvadratický polynom s celočíselnými koeficienty a s vlastností, že pro každé prvočíslo p existuje $n_p \in \mathbb{N}$ takové, že $p \mid P(n_p)$. Dokažte, že pak má P racionální kořeny.

Úloha 14. Mějme celé číslo n a prvočíslo p. Víme, že platí

$$2^{4n} + 9^{2n} \equiv 36^n \pmod p.$$

Dokažte, že p je tvaru $4k + 1$ pro nějaké celé číslo k. (PraSe 33–1s–3)

Úloha 15. Buď p prvočíslo tvaru $p = 4n + 1$ pro n přirozené. Ukažte, že pak

$$n^n \equiv 1 \pmod p.$$

[2] Abychom nebyli nečestní, zmiňme, že existuje kouzelná *Dirichletova věta*, která říká, že pokud a a m jsou nesoudělná, pak existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že $p \equiv a \pmod m$.

Úloha 16. Nalezněte v $\mathbb{N}$ všechna řešení rovnice

$$m^6 = n^{n+1} + n - 1.$$

(iKS 4–3–N3)

Návody

1. Zkus zbytky vyrábět a využij toho, že druhá mocnina „zapomíná znaménko“.

2. Může pomoci znát malou Fermatovu větu a vědět, že polynom nad $\mathbb{Z}_p$ má nanejvýš tolik kořenů, kolik je jeho stupeň.

3. Zrecykluj některou z předchozích vlastností.

5. Podívej se modulo 3.

6. Vyrob vhodný čtverec (a rozmysli si, že to obecně jde). Pozor na $p = 2$.

8. Jeden ze čtverců je kongruentní násobku druhého.

10. Vyrob vlevo kvadratický nezbytek.

11. Ano – chceš a navolit tak, aby šlo polynom hodněkrát rozložit na součin a dala se užít teorie kvadratických (ne)zbytků.

12. Rozklad na prvočísla a kvadratická reciprocita. Hodně číslíček si můžeš navolit sám podle své libovůle.

13. Ukaž, že diskriminant P je kvadratickým zbytkem modulo všechna prvočísla. Co z toho plyne?

14. Mohl by se hodit první suplement.

15. Jak se chová 4^n modulo $p = 4n + 1$?

16. Ukaž, že n^{n+1} obvykle nemůže být čtvercem ani krychlí, takže n dává jen dva přípustné zbytky modulo 6. Pro ty dořeš pomocí kvadratických zbytků.

Literatura a zdroje

[1] Matěj Doležálek: *Kvadratické zbytky*, Lipová-lázně, 2022.
[2] Vítězslav Kala: *Teorie čísel*, *https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kala/files/TC23.pdf*.
[3] Tristan Shin: *Quadratic Residues*, *https://mathweb.ucsd.edu/~trshin/handouts/QuadraticResidues.pdf*.

Reálná čísla

Matěj Gajdoš

Abstrakt. Většinu času počítáme právě s nimi, ale co to vlastně jsou ta reálná čísla? A proč si nevystačíme se zlomky? V přednášce reálná čísla zkonstruujeme pomocí Dedekindových řezů a ukážeme si jejich klíčovou vlastnost, totiž úplnost. Přitom si plně vystačíme se zlomky, množinami a troškou abstrakce.

Na začátku bylo $\mathbb{N}$, množina *přirozených čísel*. Jednalo se o pěknou množinku, se kterou se dobře počítalo na prstech, ale něco postrádala – rozdíl dvou čísel vůbec nemusel v $\mathbb{N}$ existovat! Proto moudří přišli s novými symboly $-n$ a 0 a pomocí nich vytvořili *celá čísla*, tj. množinu $\mathbb{Z}$, spolu s pravidly, jak její prvky porovnávat, sčítat, odčítat, násobit. Navíc $\mathbb{Z}$ obsahovalo $\mathbb{N}$.

Teď ale chybělo dělení. A tak moudřejší, stavějíce na pevných základech $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, vytvořili *racionální čísla* $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$. V těchto číslech se dalo řadit, sčítat, odčítat, násobit i dělit, a navíc se k sobě nahustila, tj. mezi každými dvěma různými racionálními čísly $p < q$ šlo najít racionální číslo r, že $p < r < q$. Prvky $\mathbb{Q}$ nakreslené na přímku v pořadí za sebou tak nově vyplňovaly celou číselnou osu.

…Tedy alespoň zdánlivě. Ukazuje se totiž, že v racionální číselné ose jsou díry – délku přepony pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délky 1 nelze vyjádřit jako racionální číslo, ale přitom tuto délku na číselnou osu jistě lze zanést.

Teď je proto na nás, abychom zase o kousek rozšířili pojetí čísel a z $\mathbb{Q}$ vytvořili $\mathbb{R}$, tedy *čísla reálná*. Přáli bychom si, aby $\mathbb{Q}$ bylo v $\mathbb{R}$ obsaženo, aby na $\mathbb{R}$ existovaly standardní aritmetické operace a uspořádání rozšiřující ty na $\mathbb{Q}$ a aby v reálné číselné ose nebyly díry.

Pro splnění posledního požadavku bychom si ale nejdříve měli ujasnit, co to vlastně taková díra zhruba je.

Řežeme!

Začněme touto klíčovou definicí:

Definice. Nechť $A \subseteq \mathbb{Q}$ je neprázdná. Řekneme, že prvek $s \in \mathbb{Q}$ je *supremem* množiny A, pokud

(1) $\forall a \in A : a \leq s$; (*$s$ je horní mez množiny A*)
(2) Pokud $s' < s$ pro $s' \in \mathbb{Q}$, pak existuje $a \in A$, že $s' < a$. (*s je nejlepší mez*)

Supremum množiny A značíme $\sup A$ (a dle následující úlohy má toto značení smysl). Supremum je takové lepší maximum – opravdu, pokud množina A má maximum, pak se snadno nahlédne, že toto je i supremem. Nicméně supremum nemusí v A ležet, a tedy zobecňuje pojem maxima.

Úloha 1. Ukažte, že supremum neprázdné množiny existuje nejvýše jedno.

Úloha 2. Ukažte, že $A := \{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ má supremum 1, ale nemá maximum.

Definice. Uspořádanou dvojici množin (A, B), kde $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, nazveme *(Dedekindovým) řezem*, pokud

(1) A a B jsou neprázdné a rozkládají $\mathbb{Q}$ (tj. $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = \mathbb{Q}$);
(2) $A < B$ ve smyslu $a < b$, kdykoliv $a \in A$ a $b \in B$;
(3) A nemá maximum.

Všimněme si, že pokud známe jednu část řezu (řekněme A), pak již známe celý řez ($B = \mathbb{Q} \setminus A =: A^c$). Pro zpřehlednění zápisu budeme občas značit řezy malými řeckými písmeny. Název „řez“ je sugestivní pro náš problém hledání děr. Zaveďme pro účel přednášky následující klasifikaci řezů (nejedná se o standardní názvosloví):

Definice. Řekneme, že řez (A, B) *indikuje díru*, pokud v $\mathbb{Q}$ neexistuje $\sup A$.

Pro libovolné $p \in \mathbb{Q}$ množiny $\mathbb{Q}_{<p} := \{q \in \mathbb{Q} \mid q < p\}$ a $\mathbb{Q}_{\geq p} := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq p\}$ definují řez $p^* := (\mathbb{Q}_{<p}, \mathbb{Q}_{\geq p})$, pro který platí $\min \mathbb{Q}_{\geq p} = \sup \mathbb{Q}_{<p} = p$, a tedy tento řez neindikuje díru. Racionální číslo p je jediná hodnota „sevřená“ mezi zlomky z $\mathbb{Q}_{<p}$ (které jsou všechny striktně menší než p) a ostatními zlomky z $\mathbb{Q}_{\geq p}$ (které jsou zase striktně vyšší než p).

Úloha 3. Nalezněte v $\mathbb{Q}$ nějaký řez, které indikuje díru.

Existují tedy řezy, které žádnou racionální hodnotu mezi sebou nesvírají, což jaksi intuitivně poukazuje na „děravost“ racionální číselné osy; formálně vzato narážíme na nepříjemnou vlastnost, že ne každá shora omezená množina zlomků má supremum. Celá myšlenka konstrukce $\mathbb{R}$ tak je považovat jednotlivé řezy za naše nová reálná čísla; vymyslet, jak řezy sčítat, odčítat, násobit, dělit a porovnávat, aby se tyto operace chovaly rozumně[1]; najít přirozené ztotožnění $\mathbb{Q}$ s nějakou podmnožinou těchto nových čísel; a nakonec doufat, že intuice „přidání děr“ byla správná a shora omezené podmnožiny $\mathbb{R}$ již budou vždy mít supremum.

Aritmetika řezů

Uspořádání řezů definujeme tak, že $(A, A^c) \leq (B, B^c)$, právě když $A \subseteq B$.

Sčítání řezů (A, A^c) a (B, B^c) definujeme jako $(A + B, (A + B)^c)$, kde $A + B := \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Ukažme, že součet řezů je opravdu řezem: Množiny $A + B$ i $(A + B)^c$ zjevně rozkládají $\mathbb{Q}$, navíc jsou neprázdné ($A + B$ je neprázdná z neprázdnosti A a B,

[1] Ostřílený znalec algebry by řekl, že $\mathbb{R}$ má tvořit komutativní těleso s lineárním uspořádáním. Přesně axiomy této struktury je proto třeba ověřit (po vhodném zadefinování operací a uspořádání).

zároveň je ale shora omezená, neboť A a B jsou shora omezené, a tedy musí $(A+B)^c$ být neprázdná). Pro $p \in A+B$, $q \in (A+B)^c$ nalezneme $a \in A$ a $b \in B$, že $p = a+b$. Pak $q - a \notin B$ (jinak by $q \in A+B$), a tedy $b < q - a$ z vlastnosti (2) řezu (B, B^c). Pak ale $p = a + b < a + q - a = q$, a tedy platí vlastnost (2) pro $(A+B, (A+B)^c)$. Nakonec, pro $p = a + b \in A + B$ lze z neexistence maxima v A nalézt $a' \in A$, $a' > a$, načež $p < a' + b \in A + B$ a tento součet proto také nemá maximum.

Úloha 4. Dokažte, že řezové sčítání je komutativní a asociativní.

Úloha 5. Dokažte, že pokud α, β a δ jsou řezy a $\alpha \leq \beta$, pak i $\alpha + \delta \leq \alpha + \delta$.

Vhodným kandidátem na *nulový řez* je $\omega := (\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}_0^+)$ – přímočaře se ověří, že pro každý řez α platí $\alpha + \omega = \alpha$.

Úloha 6. Rozmyslete si, jak zadefinovat *opačný řez* $-\alpha$, aby se jednalo o řez a platilo $\alpha + (-\alpha) = \omega$.

Zadefinovat *součin řezů* dá trochu víc práce. Pro nezáporné řezy $(A^c, A) \geq \omega$, $(B^c, B) \geq \omega$ zadefinujeme jejich součin jako $((A \cdot B)^c, A \cdot B)$, kde $A \cdot B := \{ab \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Opět se musí ověřit, že se jedná o řez. Dále pro řez α definujeme jeho *absolutní hodnotu* $|\alpha|$ jako α, pokud $\alpha \geq \omega$, v opačném případě jako $-\alpha$. Pro obecné řezy α, β pak zadefinujeme jejich součin buď jako $|\alpha| \cdot |\beta|$, pokud jsou oba řezy nezáporné nebo oba nekladné, nebo jako $-(|\alpha| \cdot |\beta|)$, pokud je jeden řez záporný a druhý kladný (absolutní hodnota řezu je nezáporný řez a součin nezáporných řezů již máme definovaný).

Úloha 7. Rozmyslete si, jak zadefinovat *jednotkový řez* ι, aby pro každý řez α platilo $\iota \cdot \alpha = \alpha$. Ukažte, že pro každý řez $\alpha \neq \omega$ existuje řez β, že $\alpha \cdot \beta = \iota$.

KVéčko, eRko a úplnost

Máme tedy množinu všech řezů $\mathbb{R}$ spolu s uspořádáním a základními aritmetickými operacemi a vcelku přímočaře, byť pracně zjišťujeme, že počítání v $\mathbb{R}$ splňuje stejná algebraická pravidla jako počítání v $\mathbb{Q}$. Proto si při počítání s reálnými čísly nemusíme žádné řezy explicitně představovat.

Racionální čísla nejsou striktně vzato podmnožinou $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ obsahuje zlomky, kdežto $\mathbb{R}$ obsahuje uspořádané dvojice množin zlomků), ovšem každé racionální číslo $p \in \mathbb{Q}$ lze přirozeně ztotožnit s řezem $p^* = (\mathbb{Q}_{<p}, \mathbb{Q}_{\geq p})$ definovaným výše pomocí $\mathbb{Q}_{<p} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < p\}$; zároveň jsme ukázali, že p^* je řez neindikující díru. K tomu ale platí i opačná identifikace (viz následující úloha), jejímž důsledkem je, že řezy neindikující díru jsou právě ty ztotožnitelné s racionálními čísly. Proto jsou řezy indikující díru lépe známy jako *iracionální čísla*.

Úloha 8. Ukažte, že pokud α je řez neindikující díru, pak existuje racionální číslo p takové, že $p^* = \alpha$.

Úloha 9. Ukažte, že pro $p, q \in \mathbb{Q}$ je $p^* + q^* = (p+q)^*$.

Nyní konečně přejdeme k oné zásadní vlastnosti, kvůli které by nás vůbec reálná čísla mohla zajímat.

Věta. (Úplnost reálných čísel) *Nechť $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ je shora omezená neprázdná množina řezů. Pak v $\mathbb{R}$ existuje její supremum.*

Důkaz. Pro řez α pišme jeho dvě komponenty jako $(A_\alpha, B_\alpha) = \alpha$. Definujme[2] $S := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ a $\sigma := (S, S^c)$. Ukážeme, že se jedná o řez, který je supremem $\mathcal{A}$.

Předně σ je řez: Z neprázdnosti $\mathcal{A}$ je S neprázdná, a protože je $\mathcal{A}$ shora omezená, existuje $\beta \in \mathbb{R}$ horní mez $\mathcal{A}$, tedy pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$ je $A_\alpha \subseteq A_\beta$, načež i jejich sjednocení $S \subseteq A_\beta$, přitom ale $A_\beta \neq \mathbb{Q}$, tudíž S^c je neprázdná. Pro $p \in S$ a $q \in S^c$ lze nalézt $\alpha \in \mathcal{A}$, že $p \in A_\alpha$. Přitom ale $q \notin A_\alpha$ (jinak by $q \in S$), takže $q \in B_\alpha$ a $p < q$. Nakonec pro takové p s nalezeným A_α existuje $r \in A_\alpha$, že $p < r$ (neboť A_α nemá maximum), načež $r \in S$ dokazuje, že p není maximem S – tedy S nemá maximum. Proto je σ opravdu řezem.

Zbývá dokázat, že σ je supremem $\mathcal{A}$. Uvědomme si, že sjednocení množin je vždy nadmnožinou oněch sjednocovaných množin, tedy námi definovaný řez σ shora odhaduje každý prvek $\mathcal{A}$, neboť pro $\alpha \in \mathcal{A}$ je $A_\alpha \subseteq S$. Nakonec, pokud $\tau = (T, T^c)$ je řez splňující $\tau < \sigma$, pak je T vlastní podmnožinou S, tj. existuje $p \in S \setminus T$ a z definice S také $\alpha \in \mathcal{A}$ splňující $p \in A_\alpha$. Pak i všechna $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$ musí ležet v A_α, speciálně $T \subseteq A_\alpha$, neboť $p \in T^c$ je horní mezí T. Tedy jsme našli $\alpha \in \mathcal{A}$, že platí $\tau < \alpha$. Tím je dokázáno, že σ je supremem $\mathcal{A}$. $\square$

Stále možná není jasné, proč chtít, aby $\mathbb{R}$ splňovalo tuto tzv. *vlastnost suprema.* Budeme muset trošku mlžit, nicméně obor *matematické analýzy* se ve velké míře o úplnost $\mathbb{R}$ opírá a spousta jejích výsledků by v $\mathbb{Q}$ neplatila. Snad Tě některé z následujících úloh přesvědčí, že úplnost je zajímavá a užitečná.

Úlohy

Úloha 10. Ukažte, že pro $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ je $\sup A \leq \sup B$.

Úloha 11. Duálně k supremu shora omezené množiny definujeme *infimum* neprázdné zdola omezené množiny A jako číslo d takové, že d je dolní mezí A a pro každé $d' > d$ již d' není dolní mezí A. Nalezněte vhodný vztah mezi supremy a infimy a ukažte, že každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

Úloha 12. Nalezněte supremum množiny $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Úloha 13. (Odmocniny) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \geq 0$ reálné. Ukažte, že existuje $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$ a že toto y je jednoznačně určené.

[2] Všimněme si, že jsme supremum v důkazu věty zkonstruovali skrze jakési sjednocení řezů ze zadané podmnožiny reálných čísel. To má svůj hlubší důvod – supremum se dá totiž definovat obecně pro libovolnou *relaci uspořádání*, speciálně tak pro množinové systémy $(\mathcal{P}, \subseteq)$ uspořádané inkluzí; potom supremem nějakého podsystému $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ je právě $\bigcup \mathcal{S}$ (pokud tedy leží v $\mathcal{P}$). Proto naše volba řezu je dobrým kandidátem na supremum, protože se vlastnosti suprema propíší z množinového uspořádání na řezy.

Úloha 14. (Desetinné rozvoje) Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel z $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Dokažte, že množina

$$A := \left\{ \sum_{i=1}^{n} 10^{-i} a_i \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

je shora omezená, a tedy lze dobře definovat číslo $0{,}a_1a_2a_3\ldots := \sup A$. V souladu s touto definicí ukažte, že $0{,}\overline{9} = 1$.

Úloha 15. (Exponenciála) Nechť x je nezáporné reálné. Dokažte, že množina

$$A_x := \left\{ \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

je shora omezená.

Úloha 16. (Borelova věta) Buď $\mathcal{A}$ libovolná množina obsahující nějaké reálné otevřené intervaly, jejichž sjednocení pokrývá $\langle 0, 1\rangle$ (tj. $\langle 0, 1\rangle \subseteq \bigcup \mathcal{A}$). Ukažte, že pak existuje konečná podmnožina $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ pokrývající $\langle 0, 1\rangle$.

Úloha 17. Ukažte, že pokud v předchozí úloze budeme uvažovat *racionální intervaly* (tj. pokrýváme $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$ „otevřenými $\mathbb{Q}$-intervaly“ tvaru $\mathbb{Q} \cap (a, b)$), pak věta předchozí úlohy neplatí – existuje množina otevřených $\mathbb{Q}$-intervalů pokrývající $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$, jejíž žádná konečná podmnožina nepokrývá $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$.

Návody

3. Intuitivně by řez mohl reprezentovat třeba $\sqrt{2}$. Ale jak takový řez zadefinovat, pokud pro nás číslo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ neexistuje?

6. Je si třeba dát pozor na to, zda α ne/indikuje díru.

11. Pro zdola omezenou A uvažuj množinu $-A$.

12. Uvažuj „n modulo 2π“ a ukaž, že pro velké n musí nějaké dvě promodulené hodnoty $(i \mod 2\pi)_{i=1}^{n}$ ležet velmi blízko sebe.

13. Zkonstruuj množinu, aby její supremum bylo kandidátem na odmocninu.

15. Jakkoliv je x velké, v určitou chvíli začne faktoriál dominovat – srovnej s geometrickou řadou.

16. Uvažuj $F := \{x \in \langle 0, 1\rangle \mid \langle 0, x\rangle$ lze pokrýt konečnou podmnožinou $\mathcal{A}\}$ a pomocí jejího suprema ukaž, že $1 \in F$.

17. Zvol iracionální číslo $\alpha \in (0, 1)$ a zkonstruuj dost $\mathbb{Q}$-intervalů tak, aby „nevedly přes α“.

Literatura a zdroje

[1] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, M. Zelený: *Matematická analýza*, *https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza-pro-studenty.pdf*.

[2] Vojtěch Jarník: *Diferenciální počet I*, Academia, 1974.

Invarianty

Vít Hanika

Abstrakt. Invarianty, česky neměnky, jsou základní technikou na řešení (nejen) kombinatorických úloh. Na přednášce se naučíme nějaké základní neměnky a snad i nějaké záludnější.

Příklad. Na tabuli jsou napsaná čísla $1, 2, 3, \ldots, 2n$, kde n je liché přirozené číslo. Vybereme si libovolná dvě čísla a, b, která smažeme, a místo nich napíšeme číslo $|a - b|$. Ukažte, že poslední zbylé číslo je liché.

Řešení. Označme S součet čísel na tabuli. Tedy před prvním krokem je

$$S = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1).$$

Z toho vidíme, že součet S je lichý. Po odebrání a a b se součet sníží o $2\min(a, b)$, to je ale sudé číslo, tedy S zůstává liché. Postupným mazáním a nahrazováním tedy, zůstane na konci jedno liché číslo.

V tomto případě byl invariant parita součtu všech prvků. Dalšími užitečnými invarianty mohou být:

(1) součet čísel, případně součet čísel modulo n (pro vhodné n),
(2) součet druhých mocnin,
(3) další aritmetické operace: součin, podíl, součet čtverců atd.,
(4) počet nějakých jevů, případně počet nějakých jevů modulo n.

Úlohy

Úloha 1. Matěj na tabuli napsal čísla 1, 2, …, 100. V každém kroku odebere nějaká čísla a, b a nahradí je číslem $a + b$. Po 99 krocích mu zbylo jediné číslo. Které to bylo?

Úloha 2. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou v tomto pořadí napsána čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku smíme zvýšit dvě sousední čísla o jedna. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

Úloha 3. Buď $d(n)$ ciferný součet čísla n. Najděte všechna řešení rovnice

$$n + d(n) + d(d(n)) = 2015.$$

Úloha 4. Čokoláda má tvar tabulky $m \times n$. Petr by ji chtěl nalámat na dílky 1×1. Na kolik nejméně rozlomení se mu to může povést, pokud vždy láme pouze podél rovné rýhy ještě nerozlomeného kousku?

Úloha 5. Na každý vrchol čtverce položíme na začátku 1 kámen. V jednom kroku pak můžeme odebrat nějaký počet kamenů z nějakého vrcholu a na některý sousední vrchol přidat dvakrát tolik kamenů. Můžeme po konečném počtu kroků ve vrcholech získat (v tomto pořadí) 1989, 1988, 1990, 1989 kamenů?

Úloha 6. Každé z čísel $a_1, \ldots, a_n$ je rovno $+1$ nebo -1 a platí

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

Úloha 7. Je dáno 5 bodů: $(-5, 10)$, $(8, 7)$, $(-3, 4)$, $(6, 5)$, $(9, 4)$. Jsou povoleny následující dvě operace: Buď vybereme dva body a jeden posuneme o jedna nahoru a druhý o jedna doprava, nebo vybereme dva body a posuneme jeden o jedna dolů a druhý o jedna doleva. Pro které body (a, b) se lze po konečném počtu tahů dostat všech pět bodů do (a, b)?

Úloha 8. Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček nebo dvojek?

Úloha 9. Mějme množinu $\{3, 4, 12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0{,}6a - 0{,}8b$ a $0{,}8a + 0{,}6b$. Můžeme někdy dostat množinu $\{4, 6, 12\}$?

Úloha 10. Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

(a) Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?
(b) Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany.

Úloha 11. (trochu si započítáte) V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1, A_2, \ldots, A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \leq k \leq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí.

Úloha 12. Mějme nekonečnou čtvercovou mřížku. Na začátku máme 4 žetony na poli $(0, 0)$. V jednom tahu můžeme odebrat žeton na poli (x, y) a přidat žeton na

pole $(x+1, y)$ a $(x, y+1)$. Může se stát, že po konečném počtu kroků nejsou na žádném políčku dva žetony?

Úloha 13. Vezměme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. V jednom kroku můžeme jeden trojúhelník rozdělit výškou (na přeponu) na dva podobné trojúhelníky. Můžeme opakovaným dělením docílit toho, že žádné dva z našich trojúhelníků nebudou shodné?

Úloha 14. V řadě je n žetonů s jednou stranou bílou a druhou černou. Na začátku jsou všechny žetony otočené bílou stranou nahoru. V jednom tahu můžeme odstranit žeton otočený bílou stranou nahoru, který není na kraji, a otočit oba jeho sousedy (pozor, pokud je soused žetonu v průběhu hry odstraněný, jeho sousedem se stává další žeton v řadě). Dokažte, že umíme odstranit všechny žetony, až na dva krajní právě tehdy, když $n-1$ není dělitelné 3.

(IMO shortlist 2005 C5)

Návody

1. Součet čísel na tabuli.

2. Liché a sudé pozice.

3. Dělitelnost.

4. Co se děje s počtem kusů?

5. Mod 3.

6. Co může být krok algoritmu, když se chceme dostat k libovolnému ohodnocení proměnných? A co pak bude ten nejtriviálnější invariant?

7. Co se děje s těžištěm?

8. Dělitelnost nějakým vhodným číslem.

9. Vzdálenost od počátku.

10. Parita počtu členů.

11. Každé minci přiřadíme její pozici.

12. Dej políčkům váhy tak, aby se součet hodnot při procesu neměnil.

13. Jaké budou velikosti rozdělených trojúhelníků? Šlo by to zapsat jako uspořádaná dvojice? Nepřipomíná ti to předchozí úlohu?

14. Máš systém, který splňuje aaa = bb, aab = ba, bab = aa. Můžeš si například pod písmenky představovat, že to jsou operace na nějakém rovinném útvaru, ale pohledů na úlohu včetně invariantů existuje více.

Literatura a zdroje

Příspěvek převzal většinu úloh z příspěvku na totéž téma *Petra Hladíka* z Meziměstí 2022, kterému tímto děkuji.

Kombinatorická teorie čísel

Vít Hanika

Abstrakt. Příspěvek je sbírkou úloh z teorie čísel, k jejichž řešení se však mnoho myšlenek z teorie čísel nevyužívá a jsou spíše kombinatorické.

Dirichletův princip

Tvrzení. (Dirichletův princip) *Pokud do n přihrádek umístíme $n+1$ objektů, budou v některé přihrádce alespoň 2 objekty.*

Úloha 1. Dokažte, že mezi 82 různými přirozenými čísly lze vždy najít dvojici a, b tak, že $81 \mid (a-b)$.

Úloha 2. Z množiny $1, 2, \ldots, 2n$ jsme vybrali $n+1$ čísel. Dokažte, že některé z vybraných čísel dělí některá jiná vybraná. (Paul Erdös)

Úloha 3. Z množiny $1, 2, \ldots, 2n$ jsme vybrali $n+1$ čísel. Dokažte, že některá dvě vybraná čísla jsou nesoudělná.

Úloha 4. Je dáno n přirozených čísel. Dokaž, že existuje podmnožina, jejíž součet je dělitelný n.

Úloha 5. Mějme množinu desíti dvouciferných čísel. Ukažte, že existují dvě její disjunktní neprázdné podmnožiny se stejným součtem. (IMO 1972/1)

Nebojíme se nekonečna

Úloha 6. Existuje posloupnost přirozených čísel, která obsahuje každé přirozené číslo právě jednou a každé přirozené n dělí součet prvních n členů posloupnosti?

Úloha 7. Přirozená čísla jsou rozdělena do konečně mnoha (disjunktních) množin. Ukažte, že některá z množin obsahuje nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla. (Berkley Circle Math Contest 1999-2000)

Úloha 8. Nechť S je množina přirozených čísel taková, že každá neprázdná konečná podmnožina S má nějakého společného dělitele většího než 1. Dokažte, že i S má společného dělitele většího než 1.

Úloha 9. Rozhodněte, zda existuje posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje posloupnost $a_1 + k, a_2 + k, \ldots$ jen konečně mnoho prvočísel.

Další úlohy

Úloha 10. Nechť A, B jsou neprázdné podmnožiny přirozených čísel. Dokaž, že počet čísel, která lze vyjádřit jako $a + b$, kde $a \in A$, $b \in B$, je alespoň $|A| + |B| - 1$.

Úloha 11. Je možné čísla $1, 2, \ldots, 100$ pokrýt 12 geometrickými posloupnostmi? (Rusko 1995)

Úloha 12. Je dáno 2000 celých čísel se součtem 1, z nichž každé má absolutní hodnotu nejvýše 1000. Dokažte, že z nich lze vybrat podmnožinu se součtem 0. (Kanada 2000)

Úloha 13. Dokažte, že existuje libovolně velká množina celých čísel X taková, že pro všechna různá $a, b \in X$ platí $(a - b)^2 \mid ab$. (USA 1998)

Návody

1. Podívej se na zbytky po dělení 81.

2. Chceš najít n podmnožin, aby kdykoliv jsou spolu 2 čísla v jedné podmnožině, jedno dělilo to druhé.

3. Podívej se na sousední dvojice.

4. Podívej se na částečné součty (součty prvních i členů).

5. Nejdřív najdi nějaké podmnožiny se stejným součtem, a pak je zdisjunktni.

6. Ano. Konstruuj postupně, na sudou pozici dej nejmenší nepoužité a to na předcházející liché pozici dopočítej.

7. Může se stát, že pro každou množinu najdeme číslo, které v ní má jen konečně mnoho násobků?

8. Předpokládej spor a najdi posloupnost množin se stále se zmenšujícími NSD.

9. Ano, n-tý člen vezmi takový, aby byl od prvočísla vzdálen aspoň o n.

10. Začni od nejmenšího a postupně zvyšuj až po největší.

11. Podívej se na prvočísla.

12. Uspořádej čísla tak, aby prefixové součty (od začátku do libovolného prvku) byly omezené, a poté použij Dirichletův princip.

13. Vždycky můžeš do již nalezené množiny přidat nulu, čímž vyrobíš větší. A pokud ji chceš přidat znova, nejprve množinu posuň.

Literatura a zdroje

Děkuji Mirkovi a Pepovi, od nichž jsem převzal většinu úloh.

[1] Josef Minařík: *Kombinatorická teorie čísel*, sborník *i*KS, 2021.
[2] Mirek Olšák: *Kombinatorická teorie čísel*, Oldřichov 2012.

Turnaje a další grafy

Petr Hladík

Abstrakt. Kdo by neměl rád puntíky a šipečky? Tak právě nimi se budeme zabývat. A hlavně těma, kde mezi každými dvěma puntíky vede jedna šipka.

Pro začátek si definujeme pár základních pojmů:

Definice. Naše puntíky a šipečky budou představovat konečný *orientovaný graf*. Formálněji řečeno konečný *orientovaný graf* G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je libovolná neprázdná konečná množina a E libovolná množina (uspořádaných) dvouprvkových podmnožin množiny V. Prvkům množiny V říkáme *vrcholy* (puntíky) a prvkům množiny E zase (*orientované*) *hrany* (šipky).

Poznámka. Definice orientovaného grafu nezakazuje, aby pro nějaká $u, v \in V$ vedla šipka oběma směry. Dokonce může šipka spojovat jeden vrchol se sebou samým (potom jí říkáme *smyčka*). My ale budeme předpokládat, že tyto situace nenastanou.

Představme si že z grafu G si vybereme jeden vrchol v. Pak máme pro tenhle vrchol dvě zajímavé skupiny, a to ty vrcholy do kterých z v vedou šipičky, tuto množinu vrcholů označíme $A(v)$. A pak množinu vrcholů ze kterých vedou šipičky do v, tuto množinnu označíme $B(v)$. Pak můžeme pro vrchol v sledovat počet šipek vedoucí do něj a z něj, to označíme $\mathrm{in}(v)$ a $\mathrm{out}(v)$. Tedy $|A(v)| = \mathrm{out}(v)$ a $|B(v)| = \mathrm{in}(v)$.

Definice. *Cesta délky* n v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost n po dvou různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a hran (v_i, v_{i+1}), $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Definice. *Cyklus délky* n, nebo také n-cyklus v grafu $G = (V, E)$, je cesta délky n v grafu G sjednocená s hranou (v_n, v_1).

Definice. Řekneme, že graf G je *turnaj*, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vede šipka. Formálněji řečeno, graf G je turnaj, pokud pro všechny $u, v \in V, u \neq v$, platí buď $(u, v) \in E$, nebo $(v, u) \in E$.

Definice. O vrcholu v v turnaji V řekneme, že je *týpek*, pokud $\mathrm{in}(v) = 0$. Dále o vrcholu $v \in V$ řekneme, že je *lama*, pokud $\mathrm{out}(v) = 0$. Týpek je tedy vrchol, ze kterého vedou hrany do všech ostatních vrcholů, a tak se z něj dá dostat do všech vrcholů grafu po nejvýše jedné hraně. Do lamy naopak vedou hrany ze všech

ostatních vrcholů. Dále definujme ještě *polotýpka* jako vrchol, z nějž se dá dostat do všech vrcholů po nejvýše dvou hranách. Formálně zapsáno: v je polotýpek, pokud

$$v \cup A(v) \cup \Big(\bigcup_{u \in A(v)} A(u) \Big) = V.$$

Na zahřátí

Úloha 1. Ukažte, že v turnajích (a orientovaných grafech obecně) platí

$$\sum_{v \in V} \mathrm{in}(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{out}(v).$$

Úloha 2. Ukažte, že pokud v turnaji není týpek, pak v něm existuje trojcyklus.

Úloha 3. V mezigalaktické lize v páce soutěžilo šestnáct siláků. Každý soutěžil s každým právě jednou a žádný zápas neskončil remízou. Dokažte, že umíte vybrat 5 siláků a seřadit je do řady tak, že každý z nich porazil všechny siláky stojící za ním. (AoPS)

Úloha 4. Ukažte, že pokud v turnaji není týpek, pak jsou v něm alespoň dva polotýpci. Musí nutně existovat tři?

Pro chytré hlavičky

Úloha 5. Hvězdná říše se sestává z 1001 planet. Každé dvě planety jsou spojeny jednosměrnými červími děrami a navíc platí, že z každé planety vychází 500 červích děr a 500 jich v ní končí. 668 planet přitom tvoří autonomní republiku. Ukažte, že se z každé planety republiky dá dostat na každou jinou, aniž by bylo nutné republiku opustit. (ARO 2004 10.6)

Úloha 6. Ukažte, že v turnajích platí

$$\sum_{v \in V} (\mathrm{in}(v))^2 = \sum_{v \in V} (\mathrm{out}(v))^2 .$$

Pozor, v orientovaných grafech toto tvrzení obecně neplatí. (Putnam 1965)

Úloha 7. Turnaj nazveme *tranzitivní*, pokud pro všechna $u, v, w \in V$ taková, že $(u, v) \in E$ a $(v, w) \in E$, platí též $(u, w) \in E$. Dokažte, že turnaj je tranzitivní právě tehdy, když neobsahuje žádný cyklus.

(A Beginner's Guide to Graph Theory 10.2.4)

Úloha 8. Dokažte, že v turnaji existuje cyklus přes všechny vrcholy právě tehdy, když existuje cesta mezi každou uspořádanou dvojicí vrcholů.

Úloha 9. Řekneme, že orientovaný graf je *rozložitelný*, pokud lze jeho vrcholy rozdělit do dvou neprázdných podmnožin A a B takových, že pro všechna $u \in A$ a pro všechna $v \in B$ platí, že $(u, v) \in E$. Dokažte, že každý rozložitelný turnaj se dá změnou orientace jedné hrany změnit na graf, který není rozložitelný.

(variace na A Beginner's Guide to Graph Theory 10.2.3)

Úloha 10. Mějme turnaj G, který obsahuje k-cyklus. Dokažte, že v G existuje $(k-1)$-cyklus. Dále dokažte, že pokud dráček Šmáček zvolí jeden vrchol daného k-cyklu, pak zde existuje $(k-1)$-cyklus, který daný vrchol obsahuje.

Úloha 11. Mějme $n \geq m \geq 3$ a turnaj na n vrcholech, ve kterém se nevyskytuje m-cyklus. Dokažte, že lze jeho vrcholy ohodnotit čísly $1, 2, \ldots, n$ tak, že kdykoliv $a \geq b + m - 2$, pak vede hrana z vrcholu ohodnoceného číslem a do vrcholu ohodnoceného číslem b. (USA TST 2009)

Úloha 12. Mějme turnaj G. Jako jeho *barevnost* označme takové k, že lze obarvit jeho hrany k barvičkami tak, že zde neexistuje vrchol,který má vcházející a vycházející hranu stejné barvy. Určete minimum barevností všech turnajů na n vrcholech.

(USA TST 2015)

Úloha 13. PraSátko dostalo jako dárek $n \geq 3$ očíslovaných bodů $1, 2, \ldots, n$ a samým nadšením se jalo mezi body kreslit modré a červené šipky. Přitom výsledek jeho snahy splňoval tato pravidla:

(i) Z každého bodu vedla šipka do každého bodu s větším číslem.
(ii) Pokud z bodu A vedla cesta do B po šipkách jedné barvy, pak mezi stejnými vrcholy nevedla cesta druhé barvy.

Kolika způsoby mohlo PraSátko přikreslit všechny šipky? (ARO 2005 11.3)

Úloha 14. Turnaje se účastní 10 rytířů. Víme, že kdykoliv rytíř A porazil rytíře B, pak počet rytířů, kteří porazili A, sečtený s počtem rytířů, které porazil B, dá alespoň 8 (čili $\mathrm{in}(A) + \mathrm{out}(B) \geq 8$, kdykoliv $A > B$). Ukažte, že v celém turnaji existuje právě 40 trojcyklů.

Úloha 15. Tenisového turnaje se účastnilo $n \geq 4$ hráčů. Každí dva hráči se utkali právě jednou a nenastala žádná remíza. Čtveřici hráčů nazveme *schrecklich*, pokud jeden hráč byl poražen zbylými třemi a každý z těchto tří hráčů s posledními dvěma jednu hru vyhrál a jednu prohrál. Předpokládejme, že neexistuje schrecklich čtveřice. Dokažte, že potom

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{out}(i) - \mathrm{in}(i)\right)^3 \geq 0.$$

(IMO Shortlist 2010)

Orientované grafy

Turnaj je jen speciální případ orientovaného grafu. Mohli bychom tedy očekávat, že tvrzení, která jsme dokázali pro turnaje, budou (případně v nějaké lehce pozmě-

něné podobě) platit i pro všechny orientované grafy. Tak je tomu bohužel jen velmi zřídka. Uvědomme si totiž, že orientovaných grafů je ve srovnání s turnaji „fakt hodně“. Speciálně mohou být takové grafy nepříjemně „řídké“ (například na každou permutaci se můžeme dívat jako na orientovaný graf). Spíš než přejímání tvrzení proto bude fungovat přejímání metod. Pomocí fint, které jsme si osvojili na úlohách s turnaji, teď budeme zkoušet řešit úlohy na orientované grafy.

Úloha 16. Hrany konvexního mnohostěnu jsou orientované jednosměrnými šipkami tak, že z každého vrcholu vychází a do každého vrcholu vstupuje alespoň jedna šipka. Dokažte, že existuje stěna, na které tvoří šipky cyklus.

(KMS gama, Romania TST)

Úloha 17. Je dán orientovaný bipartitní graf s partitami X, Y. V jednom kroku vybere Amir vrchol a obrátí orientaci všech hran, které vedou z, resp. do tohoto vrcholu. Ukažte, že lze po konečném počtu kroků dosáhnout stavu, kdy pro všechny vrcholy $u \in X$ platí $\mathrm{in}(u) \geq \mathrm{out}(u)$ a pro všechny vrcholy $v \in Y$ platí $\mathrm{in}(v) \leq \mathrm{out}(v)$.

(Írán 2002)

Úloha 18. Kolem kulatého stolu sedí N rytířů. Na povel každý z nich na někoho ukáže (nikdo neukazuje na sebe). Dokažte, že umíme rytířům nasadit na hlavy přilbice tří barev tak, že nikdo neukazuje na kolegu se stejně barevnou přilbicí.

Úloha 19. Z každého náměstí ve městě M vedou přesně dvě jednosměrné uličky. Dokažte, že náměstí můžou být rozdělena do 1014 čtvrtí (čtvrti můžou být i prázdné) tak, že uličky vedou vždy jen ze čtvrti do jiné čtvrti a zároveň pokud vede nějaká ulička ze čtvrti c_1 do čtvrti c_2, pak žádná ulička nevede opačně. (ARO 2002)

Úloha 20. Francouzská výzvědná služba vyslala na Kamelot 16 špehů. Každý z nich sleduje některé své kumpány (pokud špeh A sleduje B, pak B nesleduje špeha A). Kterýchkoliv 10 špehů lze očíslovat tak, že první špehuje druhého, druhý třetího atd. až desátý prvního. Dokažte, že lze podobně očíslovat i každých 11 špehů.

(Baltic Way 1994, 19/20)

Návody

1. Spočítej počet čárek s šipkou. Dvakrát.

2. Jdi po šipkách a zkracuj.

3. A je z toho úplný holubník!

4. Vezmi hráče s nejvíce vítězstvími. Další polotýpky hledej ve vhodném podturnaji.

5. Rozděl republiku na dosažitelnou a nedosažitelnou část. Počítej dvakrát.

6. Použij sílu a příklad 1. Nebo počítej dvakrát netrojcykly.

7. To zvládneš.

8. Podívej se na nejdelší kružnici.

9. Vytvoř kružnici.

10. Postupuj pozpátku. Vezmi ℓ-cyklus a sestroj z něj $(\ell + 1)$-cyklus.

11. Použij sílu a příklad 8.

12. Vyjde $\lceil \log_2 n \rceil$. Najdi konstrukci a dokaž, že méně nejde.

13. Otoč červené šipky a poté seřaď všechny vrcholy tak, aby šipky vedly jen zleva doprava.

14. Ekvivalentně dokazuj, že každý rytíř vyhrál 4 nebo 5 utkání. Dál sporem.

15. Jak vypadají neschrecklich čtveřice? Počítej dvakrát. Použij sílu a příklady 1 a 7.

16. Uvaž kružnici, „uvnitř které“ už žádná není, a ukaž, že to musí být stěna.

17. Navrhni algoritmus, který zvětšuje počet „správně směřujících“ hran.

18. Ukaž existenci rytíře R splňujícího $\mathrm{in}(R) \leq 1$, poté použij sílu a indukci.

19. V prvním kroku obarvi náměstí 13 barvami tak, aby mezi dvěma náměstími stejné barvy neexistovala cesta délky menší než 4.

20. Nejdřív odvoď, že pro každého špeha A platí $7 \leq \mathrm{in}(A) \leq 8$ a $7 \leq \mathrm{out}(A) \leq 8$.

Zdroje

Ze zdrojů, které nejsou uvedeny u konkrétních úloh, jsem také dosti čerpal z příspěvku Lenky Kopfové *Turnaje a další grafíky.* A tím bych jí rád poděkoval. Také jsem čerpal z přednášek Pepy Tkadlece, a Martina Sýkory. Všichni zmínění čerpali z Pepova příspěvku.

Bertrandův postulát a další věty o prvočíslech

Zdeněk Pezlar

Abstrakt. Budeme se zabývat několika známými problémy o prvočíslech. Některé si dokážeme, některé ne, ale každopádně bude zábava.

Prvočísla jsou známí potížisté v teorii čísel – se snadnou definicí a hlubokými vlastnostmi. Velcí matematici jako Legendre a Gauss se zabývali rozložením prvočísel na číselné ose a jejich asymptotickým chováním. V této přednášce si dokážeme dvě relativně elementární věty a povíme si o spoustě dalších hodně neelementárních.

Věta. (Bertrandův postulát) *Pro každé $n > 1$ přirozené existuje prvočíslo p splňující $n < p < 2n$.*

Věta. (Prime number theorem) *Označme n-té prvočíslo p_n a $\pi(n)$ počet prvočísel od 1 do n. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n}.$$

Rychlokurz p-valuací

Věta. (Legendreův vzorec) *Buďte p prvočíslo a n přirozené. Pak platí*

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

Věta. (Kummer) *Ať p je prvočíslo a $m \geq n$ jsou přirozená. Pak p-valuace $\binom{m}{n}$ je počet přenosů „přes p-čko“ při sčítání n a $m - n$ v číselné soustavě o základu p.*

Úloha 1. Pro přirozená čísla a, b, c platí $a^b \mid b^c$ a $a^c \mid c^b$. Ukažte, že $a^2 \mid bc$.

Bertrandův postulát

Hlavním hrdinou v dokazování této věty bude centrální binomický koeficient $\binom{2n}{n}$. Všimněte si totiž, že z definice (nebo z Kummerovy věty) je dělitelný všemi prvočísly mezi n a $2n$. Pokusíme se tedy předpokládat, že pro nějaké n žádné takové prvočíslo neexistuje. Nejprve zkusíme odhadnout mocniny prvočísel, co mohou tento koeficient dělit.

Pro následující sérii úloh si zafixujeme přirozené n.

Úloha 2. (těžší) Buďte n přirozené a p prvočíslo takové, že v rozkladu $\binom{2n}{n}$ se vyskytuje právě v mocnině p^k. Pak ukažte, že $p^k \leq 2n$.

Úloha 3. Najděte v závislosti na $n > 2$ nějakou mez m takovou, že každé prvočíslo $p > m$ se v rozkladu čísla $\binom{2n}{n}$ vyskytuje nejvýše jednou.

Úloha 4. Najděte v závislosti na $n > 2$ nějakou mez m takovou, že číslo $\binom{2n}{n}$ nemá prvočíselného dělitele $m < p \leq n$.

Za předpokladu, že neexistuje prvočíslo ležící mezi n a $2n$, získáváme kombinací předchozích tří tvrzení

$$\binom{2n}{n} = \left(\prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{v_p} \right) \cdot \left(\prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p \right) < (2n)^{\sqrt{2n}} \left(\prod_{p \leq 2n/3} p \right).$$

Poslední odhad je slavnou Erdösovou nerovností, která odhaduje součin prvočísel po danou mez. To je posledním dílkem skládanky, které říkáme Bertrandův postulát.

Úloha 5. (Erdös) Označme $m\#$ *primoriál* čísla m jako součin všech prvočísel od 1 do m. Dokažte, že platí $m\# < 4^m$.

Úloha 6. Ukažte, že platí

$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}.$$

Úloha 7. Odvoďte z nerovnosti výše:

$$\frac{4^n}{2n+1} < (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{2n/3}.$$

Tato nerovnost platí pouze pro $n < 500$ (zkuste dokázat, že pro dostatečně velká n určitě nemůže platit), tedy pro všechny až na konečně mnoho hodnot je Bertrandův postulát dokázán.

Dále uvedeme pár úloh, ve kterých se může Bertrandův postulát hodit.

Úloha 8. Označme $\pi(n)$ počet prvočísel ležících od 1 do n. Ukažte, že pro každé n platí $\pi(n) \geq \log_2(n)$.

Úloha 9. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, které začínají na 1.

Úloha 10. (Bonseho nerovnost) Označme i-té prvočíslo p_i. Ukažte, že pro každé $n > 4$ platí $p_{n-1}\# > p_n^2$

(1) s Bertrandovým postulátem,
(2) bez něj.

Úloha 11. Je dané přirozené číslo n. Ukažte, že prvky množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ lze rozdělit do n disjunktních párů takových, že součet každých dvou je prvočíslo,

Úloha 12. Je dáno přirozené $n \geq 3$ s prvočíselným rozkladem $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Určete všechna $n \geq 3$, pro která $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tvoří geometrickou posloupnost. (MEMO 2017)

Úloha 13. (Přemýšlecí, proboha nezkoušej to) Jak by šlo dokázat, že vždy existuje prvočíslo mezi $2n$ a $3n$?

Poznámka. Pro $n > 1$ existuje prvočíslo mezi $2n$ a $3n$, viz článek [2].

Úloha 14. Rozhodni, zda existuje přirozené a, pro které existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že

$$n! + a \mid (2n)!.$$

(Prase 2018)

Prime number theorem

Tato věta zhruba tvrdí, že prvočísla rostou jako funkce $n \log n$, přesněji $p_n \sim n \log n$. To je hluboký výsledek, který překvapivě netriviálně využívá komplexní čísla, my si jej zde neukážeme. Zkusíme však přijít na něco o krapet slabšího. Ukážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ platí pro všechna n dostatečně velká:

$$(\log 2 - \varepsilon)\frac{n}{\log n} < \pi(n) < 6\frac{n}{\log n}.$$

Logaritmus bereme přirozený. Těmto dvěma odhadům se standardně říká *Chebyshevův dolní* a *horní* odhad. Ve skutečnosti jsme už všechny potřebné prostředky potkali při přípravě důkazu Bertrandova postulátu.

Úloha 15. Dokažte dolní odhad pomocí úlohy 2.

Úloha 16. Ukažte, že pro $n \geq 2$ platí

$$n \log(4) \geq \frac{1}{2}(\pi(n) - \sqrt{n}) \log(n).$$

Úloha 17. Zkuste z předchozí úlohy odvodit horní odhad.

Úloha 18. Označme n-té prvočíslo p_n. Ukažte, že pro nějaké přirozené n platí

$$\left(\frac{1}{\log 2 - \frac{1}{10000}} + 1\right) n \log n > p_n > \frac{1}{6} n \log n.$$

Úloha 19. Dokažte, že existuje přirozené číslo, které lze vyjádřit jako součet dvou prvočísel více než 2025^{2025} způsoby.

Nedávné výsledky (aneb matematici jsou frajeři)

Věta. (Green-Tao) *Existují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti prvočísel.*

Věta. (Zhang, později projekt Polymath8) *Existuje nekonečně mnoho dvojic prvočísel, která se liší nejvýše o* $7 \cdot 10^7$*, později sníženo na* 246*. Pokud by platila Riemannova hypotéza, dokonce platí, že existuje nekonečně mnoho dvojic prvočísel lišících se o* 6*.*

Věta. (Slabá Goldbachova hypotéza, Vinogradov, Helfgott(!)) *Každé liché číslo větší než* 7 *lze vyjádřit jako součet tří prvočísel.*

Věta. (Maynard) *Buď* $c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ *libovolná cifra. Pak existuje nekonečně mnoho prvočísel, která neobsahují v desetinném zápisu cifru* c*.*

Návody

1. Rozlož na p-valuace a použij AG-čko.

2. Buď rozepiš pomocí Legendreova vzorce, a nebo použij Kummerovu větu.

3. Funguje $m = \sqrt{2n}$, využij předchozí úlohu.

4. Vyhovuje $m = 2n/3$. Zapiš kombinační číslo jako podíl dvou čísel a dívej se, kolikrát se p vyskytuje ve jmenovateli a v čitateli.

5. Postupuj indukcí pro lichá m. Součin prvočísel mezi $\frac{m+3}{2}$ a m včetně odhadni kombinačním číslem.

6. Odhadni z binomické věty.

8. Přečti si název přednášky.

9. Jak zakódovat, že prvočíslo začíná na jedničku?

10. Postupuj indukcí.

12. Pomocí Bertrandova postulátu má druhé největší prvočíslo valuace 2 nebo 3. Pro 3 najdi spor, pro 2 spočítej 2-valuaci faktoriálu a dojdi ke sporu s Bertrandem.

13. Rozděl prvočísla na 3 skupiny podle velikosti, odhaduj podobně jako v Bertrandovi.

14. Pro dostatečně velké n by muselo platit $\frac{n!}{a} + 1 \mid \frac{2n\#}{n\#}$. Avšak oba výrazy můžeš odhadnout 4^n.

15. Úlohu 2 vynásob pro všechna prvočísla dělící binomický koeficient. Ten pak odhadni.

16. Zapomeň na prvočísla pod $\sqrt{n}$.

18. Jelikož platí $\pi(p_n) = n$, tak $n < 6\frac{p_n}{\log p_n}$. Pomocí toho odhadni p_n.

19. Kolik je dvojic součtů prvočísel $p + q$ pro p, $q \leq n$?

Literatura a zdroje

Část přednášky je založena na skriptech z předmětu Teorie čísel.

[1] Víťa Kala: *Skripta z teorie čísel*, MFF UK, 2022.
[2] Mohamed El-Bachraoui: *Primes between* $2n$ *and* $3n$.
[3] Ben Green, Terrence Tao: *The primes containt arbitrarily long arithmetic progressions*. 2008.
[4] D. H. J. Polymath: *Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes*. 2014.
[5] Harald Helfgott: *The ternary Goldbach problem*. 2015.
[6] James Maynard: *Primes with restricted digits*. 2016.

Funkcionální rovnice

Zdeněk Pezlar

Abstrakt. Funkcionální rovnice jsou jedním ze základních kamenů olympiádních úloh. A jako s každým pořádným kamenem si i je pořádně osaháme a strčíme do kapsy.

Pár slov úvodem

Co jsou to vlastně ty funkcionální rovnice zač? Podrobně si to vysvětlíme na následujícím příkladu:

Příklad. Nalezněte všechny rostoucí funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Úlohu si můžeme představovat jako řešení soustavy rovnic s nekonečně mnoha neznámými (které jsou označeny $f(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$). Kvůli tomu, že je neznámých tolik, nemají klasické metody na řešení soustav moc velkou šanci fungovat. Například výše uvedená rovnice je „lineární“[1], takže kdyby se jednalo o konečnou soustavu, uměli bychom ji snadno vyřešit. Přítomností nekonečna však můžeme získat mnohem bohatší strukturu, například bez přidané podmínky „f je rostoucí“ by daná rovnice měla spoustu extrémně divných a divokých řešení. Potřebujeme tedy přijít s nějakými novými metodami, které budou fungovat i na nekonečné soustavy. Pojďme si některé z nich předvést a vysvětlit na příkladech!

Substituční metoda

Nejběžnější metodou řešení funkcionálních rovnic je tzv. substituční metoda. Za tímto slušivým názvem se však neskrývá nic jiného než „dosazujeme do rovnice konkrétní věci a doufáme, že z toho něco vypadne“. Pokud totiž rovnice platí pro libovolné hodnoty x, y, tak jistě platí například i pro konkrétní volbu $x = 6$, $y = 2$. V těch nejjednodušších případech můžeme přímo dostat tvar, ve kterém řešení musí být. Občas dostaneme nějaké informace o jejích hodnotách v konkrétních bodech. Nejčastěji však zbude nějaká jiná funkcionální rovnice, která je s trochou štěstí hezčí nebo jednodušší než ta původní.

[1] Ať už to znamená, co to znamená.

V těžších úlohách se však typicky stává, že postupně dokazujeme různé vlastnosti hledané funkce, které jdou dále dobře využít. Následuje výčet užitečných vlastností funkcí, které je třeba mít na paměti:

Definice. O funkci f (do $\mathbb{R}$) řekneme[2], že je:

(1) *sudá*, pokud $f(x) = f(-x)$,
(2) *lichá*, pokud $f(x) = -f(-x)$,
(3) *prostá* (nebo že je f *injekce*), pokud $f(x) = f(y)$ vynucuje $x = y$,
(4) *na* (nebo *surjektivní*), pokud pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje x, pro něž $f(x) = y$,
(5) *bijekce*, pokud je *prostá* i *na*,
(6) *rostoucí*, pokud $f(x) < f(y)$ pro $x < y$,
(7) *klesající*, pokud $f(x) > f(y)$ pro $x < y$,
(8) *periodická s periodou p*, pokud je $x+p$ v definičním oboru a $f(x+p) = f(x)$,
(9) *omezená*, pokud existuje M takové, že $|f(x)| \leq M$.

Existuje několik typů dosazení, které se hodí obzvlášť často. Patří mezi ně například:

(1) $x = 0$ a/nebo $y = 0$, případně další konstanty, které situaci zjednoduší,
(2) prohodit x a y,
(3) $x = y$ a $x = -y$: zbaví nás jednoho stupně volnosti, například z toho vyplyne parita hledané funkce,
(4) něco, co vytvoří soustavu rovnic – občas se může stát, že správná dosazení poskytnou například soustavu lineárních rovnic v $f(A(x, y))$, $f(B(x, y))$, $f(C(x, y))$ pro nějaké výrazy A, B, C; pak ji (s)prostě vyřešte!
(5) Zkuste si tipnout jedno řešení $c(x)$. Pokud si myslíte, že je jediné, zkuste dosadit za $f(x) = c(x) + g(x)$ a dokázat, že $g(x)$ je dost vychované.
(6) $y = f(x)$ a naopak. Nelze zapomínat, že $f(x)$ je reálné číslo jako každé jiné, takže ho můžeme do rovnice dosadit.
(7) Dosazení, kterým vyrovnáme dva argumenty: například jestliže na jedné straně rovnice máme $f(y \cdot f(x))$ a na druhé $f(x)$, tak se výrazy při volbě $y = \frac{x}{f(x)}$ vykrátí a rovnice značně zjednoduší.
(8) Krok v důkazu sporem: dokazujete-li například prostotu f, často se vyplatí zkoumat, co by se stalo po dosazení $a \neq b$ s $f(a) = f(b)$ za jednu z proměnných.
(9) Vytváření symetrie: například z $f(x + f(y)) = f(x) + y$ plyne po dosazení $x = f(t)$ symetrická rovnice $f(f(t) + f(y)) = f(f(t)) + y$, ze které okamžitě plyne $f(f(y)) + t = f(f(t)) + y$.

Úmluva. Dosazení hodnot $x = a$, $y = b$ do funkcionální rovnice se většinou pro stručnost a přehlednost značí $[a, b]$.

Úmluva. Není-li v úloze upřesněn definiční obor či obor hodnot, míní se jím $\mathbb{R}$. Je-li v úloze dána nějaká rovnice, hledáme všechny funkce splňující danou rovnici na

[2] V těchto definicích chceme, aby vztah platil pro všechna x, resp. y z definičního oboru f.

definičním oboru.

Aplikaci těchto metod si ukážeme na následujících příkladech:

Příklad 1. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f(x^2) = x + f(y) - \frac{y}{f(y)}$.

Příklad 2. $f(xy+1) + f(x+y) = (f(x)+1)(y+1)$.

Příklad 3. $f(f(x) + f(y)) = f(x) + y$.

Příklad 4. (varovný) $f(x + f(y)) = f(x) + f(y)^2 + 2xf(y)$.

Příklad 5. (též varovný) $f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$.

Příklad 6. $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$.

Příklad 7. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad (1 + yf(x))(1 - yf(x+y)) = 1$.

Příklad 8. $f(f(x)) = x$, kde f je rostoucí.

Cauchyho rovnice a kamarádi

Jedná se nejspíše o nejznámější funkcionální rovnici. Vyplatí se znát ji (i se způsobem řešení). V řešení se totiž objevuje řada užitečných myšlenek: indukce, přechod z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R}$, ...

Příklad. (Cauchyho rovnice nad $\mathbb{Q}$) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Může se zdát, že by nemělo být těžké přejít od řešení nad racionálními čísly k řešení nad reálnými, ale opak je bohužel pravdou. Existuje totiž spousta patologických řešení, jejichž pouhý popis je nad rámec přednášky. Můžeme ale přidat nějaké podmínky, které situaci zachrání:

Příklad. (Cauchyho rovnice nad $\mathbb{R}$) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, přičemž známe jednu z následujících vlastností f:

(1) f je monotónní na nějakém intervalu,
(2) f zobrazuje $\mathbb{R}^+$ na $\mathbb{R}^+$,
(3) f je omezená na nějakém intervalu.

Úloha 9. $f(x+y) = f(x)f(y)$, f je rostoucí.

Úloha 10. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(xy) = f(x)f(y)$ a $f(x) > 1$ pro $x > 1$.

Úloha 11. Dokažte, že existují právě dvě reálné funkce zachovávající sčítání i násobení.

Úloha 12. $f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y)$. (Bulharsko)

Další tipy a triky

Dříve, než se vrhnete na řešení příkladů, tak následuje ještě pár užitečných tipů:

Tipujte řešení

Při hádání můžete postupovat buď intuitivně, nebo do rovnice dosazovat obecné

předpisy (například) pro konstantní, lineární, kvadratickou nebo lineární lomenou funkci. Pokud už nějaká řešení znáte, tento přístup vám může výrazně napomoci: například pokud vyhovuje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, nemá cenu dokazovat, že f je prostá či monotónní. Někdy nám může řešení poradit dobrou substituci: je-li jediné řešení $f(x) = x + 1$, pak substituce jako $g(x) = f(x) - 1$ či $h(x) = f(x - 1)$ můžou rovnici krásně zpřehlednit.

Dbejte definičního oboru
Pokud řešíte rovnici nad kladnými čísly, nezkoušejte dosazovat nulu (nebo třeba dvojici $(x, -x)$). Naopak definiční obor může někdy něco prozradit o řešení: například je-li to $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, pak můžete očekávat jedničku někde ve jmenovateli.

Mějte přehled o tom, co už víte
Při řešení funkcionálek budete typicky dostávat spoustu všemožných vztahů, o kterých si nemůžete být předem jistí, jestli vůbec k něčemu budou. Proto si velmi zjednodušíte život, když budete postupovat co nejsystematičtěji (například zkoušet kombinovat nově získané rovnice s těmi předchozími) a přehledně zapisovat veškerý pokrok, kterého se vám zatím podařilo dosáhnout[3].

Postupujte odzadu
Velmi se hodí včas si uvědomit, že už například jenom stačí dokázat, že f je prostá. Ušetříte si tím spoustu času a pokud se vám náhodou během soutěže nepovede danou vlastnost dokázat, tak můžete rovnici dořešit s tím, že ji budete předpokládat. Pokud se této vlastnosti využívá i ve vzorovém řešení (nebo ji není těžké dokázat), tak i za to dostanete body :).

Dělejte zkoušku ...
... nebo alespoň napište, že jste ji udělali. I soutěžící na IMO kvůli tomu občas zbytečně ztrácí body. Kdybyste si měli z téhle přednášky odnést jednu jedinou věc, tak tohle je ta jediná pravá. Proč je zapotřebí? V průběhu řešení typicky odvozujeme řadu nutných podmínek, které musí funkce f splňovat. Na konci řešení však typicky nevíme nic o tom, jestli jsou tyto podmínky i postačující!

Konečně úlohy!

Úloha 13. $f(y - xy) = f(x)y + (x - 1)^2 f(y)$. (Celostátko 2017)

Úloha 14. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\quad f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}$. (Celostátko 2011)

Úloha 15. $f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y)$. (MEMO 2017)

Úloha 16. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\quad f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$. (MEMO 2012)

Úloha 17. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\quad \frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$ pro čtveřice splňující $xw = yz$. (IMO 2008)

[3] Ne, že bych to sám dělal. Ale jo, fakt to pomůže.

Úloha 18. $f(\lfloor x \rfloor \cdot y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$, kde $\lfloor t \rfloor$ je největší celé číslo, které je menší nebo rovno t. (IMO 2010)

Úloha 19. $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+, \quad f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$. (Shortlist 2018)

Úloha 20. $(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$. (IMO 2002)

Úloha 21. $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$, splňující:

(1) $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$,
(2) $f(x)f(y) \geq f(xy)$,
(3) $f(a) = a$ pro nějaké $a > 1$. (IMO 2013)

Úloha 22. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x^2 y f(x)) + f(1) = x^2 f(x) + f(y)$. (MEMO 2015)

Úloha 23. $f(f(x) + x + y^2) = 2x + f(y)^2$. ($i$KS 2015)

Úloha 24. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) + f(w) = f(y) + f(z)$ pro aritmetické posloupnosti $x < y < z < w$. (iKS 2016, USAJMO 2015)

Úloha 25. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f(x + f(x)y) = f(x)f(y)$. (Golabova-Schinzelova rovnice)

Pár nedávných na konec

Úloha 26. $f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$. (MEMO 2021)

Úloha 27. $xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x))$. (BMO 2023)

Úloha 28. $f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y)$. (USAJMO 2024)

Úloha 29. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ existuje právé jedno $y \in \mathbb{R}^+$ splňující $xf(y) + yf(x) \leq 2$. (IMO 2022)

Návody

13. $[x, 1]$, $[1 - x, y]$ a symetrie.

14. $[1, y]$, $[x, 1]$ a pak zkuste vše vyjádřit s pomocí parametru $c = f(1)$.

15. f má kořen, tak ho dosaďte; pak dokažte prostotu (pro nekonstantní f).

16. Vyrovnejte argumenty a pak pro $y > 1$ zvolte x, aby $y = xy + 1$.

17. $f(x)^2 = f(x^2)$, pak vhodné dosazení dá $f(x) = x$ nebo $f(x) = \frac{1}{x}$ pro každé x; pak třeba zkoušky.

18. Dosaďte nuly a rozeberte pár případů.

19. $f(x^2) = f(x)^2$ a pak dokažte, že $f(x)$ je 2^n-tá mocnina racionálního čísla pro každé $n \in \mathbb{N}$.

20. Různě tam dosazujte nuly, eliminujte konstantní řešení, pak vyjde $f(ab) = f(a)f(b)$, takže stačí monotonie f a lehce obměněný příklad 10.

21. Dokažte, že funkce nabývá jen nezáporných hodnot, z toho odvoďte, že je rostoucí a $f(x) \geq x$.

22. Dosazováním jedniček ukažte $|f(1)| = 1$, pak substituujte $g(x) = x^2 f(x)$ a zkoumejte obor hodnot g.

23. Dokažte $f(0) = 0$, lichost a pak převeďte na Cauchyho rovnici.

24. Přidejte si pátý člen posloupnosti.

25. Vyrovnejte argumenty. Pak využijte díru v symetrii.

26. Ukažte, že $xf(x) = f(x^2)$.

27. Rozdělte na případy, kdy f je prostá a kdy ne.

28. Dosaďte $y = \frac{x^2}{2}$ a ukažte, že f je sudá. Pak dosaďte $[\sqrt{x}, y]$ a prohoďte využijte symetrii.

29. Ukažte, že po dané x vyhovuje pouze $y = x$. Poté vynuťte rovnost.

Literatura a zdroje

Tímto děkuji φ-lovi Čermákovi, jemuž jsem adaptoval přednášku, kterou více(méně) převzal od Danila Koževnikova.

[1] Vít Musil: *Funkcionální rovnice*, Oldřichov, 2012.
[2] Franta Konopecký: *Funkcionální rovnice*, Rapotín, 2007.
[3] *Art of Problem Solving*, *https://artofproblemsolving.com/*.

Mocnost a chordály

Lenka Poljaková

Abstrakt. V tomto příspěvku se seznamujeme s geometrickou technikou jménem *mocnost* bodu ke kružnici. I když se tento koncept může ze začátku zdát složitý, s trochou trpělivosti si ukážeme, že doopravdy je to snadná zbraň na těžké problémy, kterou se při řešení olympiády vyplatí znát a umět používat.

Prostě mocnost

Mocnost je vlastnost bodu, kterou vždy určujeme vzhledem k nějaké kružnici. Pro jednoduchost v této sekci pracujme s tím, že v rovině koukáme na bod M a kružnici k se středem O a poloměrem r. Chceme tedy určit mocnost bodu M ke kružnici k. Formálně ji popisujeme takto:

Definice. *Mocnost* bodu M ke kružnici k značíme $p(M,k)$ a definujeme ji jako $p(M,k) = |MO|^2 - r^2$.

Cvičení. Představme si tři různé situace, kde bod M leží uvnitř k, vně k a přímo na kružnici k. Jakých hodnot pak bude nabývat $p(M,k)$?

Poznámka. Mějme v rovině navíc bod N různý od M. Pak $p(M,k) = p(N,k)$, právě když $|MO| = |NO|$.

Cvičení. Jak bude vypadat množina všech bodů, jejichž mocnost ke kružnici k je rovna $p(M,k)$?

Cvičení. Nyní předpokládejme, že bod M je vnějším bodem kružnice k. Kdybychom z bodu M na kružnici k vedli tečnu, která by se k dotkla v bodě T, jak bychom tento bod mohli využít při hledání $p(M,k)$?

Tvrzení. *Nechť přímka p vedená bodem M protne kružnici k v bodech A a B. Pak platí:*

(1) $p(M,k) = |MA| \cdot |MB|$, *leží-li M vně k,*
(2) $p(M,k) = -|MA| \cdot |MB|$, *leží-li M uvnitř k.*

Tvrzení. *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a X je průsečíkem přímek AB a CD. Pak $ABCD$ je tětivový (lze mu opsat kružnici) právě tehdy, když*

$$|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|.$$

Navíc pokud označíme k kružnici opsanou $ABCD$, platí $|XA| \cdot |XB| = p(X, k)$.

Úloha 1. Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici k. Nechť D, resp. E, je střed strany AB, resp. AC. Polopřímka DE protíná k v bodě P. Dokažte: $|DE|^2 = |DP| \cdot |PE|$.

Úloha 2. Je dána půlkružnice k s průměrem AB. Body P, Q na úsečce AB splňují $|AP| = |BQ|$. Rovnoběžné polopřímky vycházející z P a Q protnou k postupně v X a Y. Dokažte, že součin $|PX| \cdot |QY|$ nezávisí na směru polopřímek PX a QY.

Úloha 3. Na prodloužení tětivy KL kružnice k se středem O leží bod A. Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U. Označme M střed úsečky TU. Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový.

Úloha 4. Nechť na kružnici k leží trojice bodů A, B, C, přičemž $|AB| = |BC|$. Průsečík tečen ke k v bodech A a B označme jako D. Dále nechť přímka CD protíná podruhé kružnici k v bodě E. Dokažte, že AE půlí úsečku BD.

Úloha 5. Tečny skrz A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T a U. Buď M střed AT. Úsečka MU protne k podruhé v bodě X. Dokažte, že $|XA| = 2 \cdot |MX|$.

Úloha 6. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedenou bodem Q. Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$.

Úloha 7. Nechť ABC je trojúhelník splňující $|AC| > |AB|$. Označme ω kružnici jemu opsanou a I střed jeho kružnice vepsané. Kružnice vepsaná se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Nechť X a Y jsou po řadě dva body kratších oblouků DF a DE kružnice vepsané takové, že $|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle DYC|$. Přímka XY protíná přímku BC v bodě K. Dále nechť T je takový bod kružnice ω, že přímka KT je tečnou ω a bod T leží v téže polorovině vyťaté přímkou BC jako bod A. Dokažte, že přímky TD a AI se protínají na kružnici ω.

Úloha 8. Body P a Q leží na stranách CA a AB trojúhelníka ABC. Označme K, L a M postupně středy úseček BP, CQ a PQ. Dále předpokládejme, že přímka PQ je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KLM. Ukažte, že body P a Q jsou stejně vzdálené od středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Úloha 9. Uvnitř úhlu AVB je dán bod P. Přímka skrz P protne VA, VB v bodech X, Y. Zkonstruujte přímku, pro kterou je součin $|PX| \cdot |PY|$ minimální.

Chordály

Definice. Množinu všech bodů takových, že mají stejnou mocnost k dvěma kružnicím, nazýváme *chordála.*

Cvičení. Mějme dvě protínající se kružnice k a l. Jaké body tvoří chordálu těchto kružnic?

Tvrzení. *Chordála dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.*

Úloha 10. Jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l. Zkonstruujeme jejich čtyři společné tečny a na každé vyznačíme střed úsečky určené příslušnými body dotyku. Dokažte, že tyto čtyři středy leží na přímce.

Úloha 11. Přímky ramen AD, BC lichoběžníku $ABCD$ se protnou v E. Kružnice s průměry AC, BD se protnou v X a Y. Dokažte, že E leží na XY.

Úloha 12. Nechť k a l jsou kružnice, které se protínají v bodech A a B. Body dotyku jejich jedné společné tečny s k a l označíme postupně X a Y. Dokažte, že přímka AB půlí XY.

Úloha 13. V trojúhelníku ABC označme B_0, C_0 paty příslušných výšek. Zvolme bod P tak, aby přímka PB byla tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku PAC_0 a přímka PC tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku PAB_0. Dokažte, že AP je kolmá na BC.

Úloha 14. V trojúhelníku s opsištěm O, vepsištěm I, poloměrem kružnice opsané R a poloměrem kružnice vepsané r dokažte, že $|OI|^2 = R(R-2r)$.

Úloha 15. Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem[1] H. Nechť je P druhý průsečík kružnice opsané trojúhelníku AHC a vnitřní osy úhlu BAC. Dále nechť X je střed kružnice opsané trojúhelníku APB a Y ortocentrum trojúhelníku APC. Dokažte, že $|XY|$ odpovídá poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Potenční střed

Cvičení. Mějme trojici kružnic k, l, m. Kolik bodů může mít tu vlastnost, že má stejnou mocnost ke všem třem kružnicím?

Tvrzení. *Uvažme tři kružnice k_1, k_2, k_3. Pak jejich vzájemné chordály procházejí jedním bodem (nebo jsou všechny rovnoběžné). Tomuto bodu se říká potenční střed kružnic k_1, k_2, k_3.*

Úloha 16. Mějme trojúhelník ABC. Vně tohoto trojúhelníku zkontruujeme rovnoramenné trojúhelníky BA_C, CB_A, AC_B se základnami BC, CA, AB. Dokažte,

[1] Ortocentrum je průsečík výšek.

že přímky procházející body A, B, C kolmé na BC, CA, AB se protínají v jednom bodě. Co je to za bod?

Úloha 17. Na přímce p leží body A, B, C, D v tomto pořadí. Kružnice nad průměry AC, BD se protnou v bodech X, Y. Na přímce XY zvolíme bod P takový, že nenáleží přímce BC. Přímka CP protne kružnici nad AC podruhé v bodě M, přímka BP kružnici nad BD v bodě N. Ukažte, že přímky AM, DN, XY procházejí jedním bodem.

Návody

1. Protáhni úsečku DE.

2. Zkus si dokreslit zbytek kružnice.

3. Učili jste se ve škole Euklidovy věty?

5. Víš, co se v geometrii vždycky hodí? Mít podobné trojúhelníky.

6. Přijdou ti trojúhelníky MDQ a MQB podobné?

8. Hmm, trojúhelníky MKL a AQP vypadají docela podobně, ne?

9. Zkus do $\sphericalangle AVB$ vepsat vhodnou kružnici.

10. V jaké jsme to vlastně sekci?

11. Co by muselo platit, aby E leželo na chordále našich kružnic?

12. Co bude chordála k, l?

13. Bod P je vlastně průsečík výšky z vrcholu A a jedné Thaletovy kružnice.

17. V jakém bodě by se tak mohly potkat? Jaké by měl mít vlastnosti?

Literatura a zdroje

Při přípravě přednášky jsem čerpala z níže uvedených příspěvků a jejich autorům tímto patří mé velikánské díky!

[1] Majda Mišinová: *Mocnost*, soustředení IKS, 2023.
[2] Anička Steinhauserová: *Tětivové čtyřúhelníky a mocnost*, Zásada, 2014.
[3] Pepa Tkadlec: *Mocnost a chordály*, Dobrá voda, 2010.

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

Matouš Šafránek

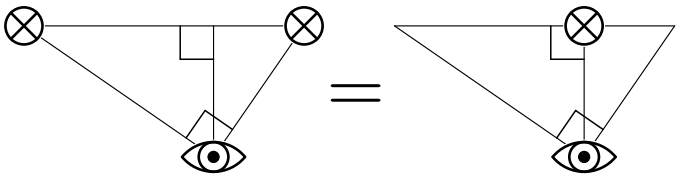
Abstrakt. Poměrně jednoduchou geometrickou úvahou sečteme strašidelně vypadající nekonečnou řadu. Potom si budeme hrát s řadami a seznámíme se s jednou geniální myšlenkou: Eulerovým součinem.

Věta. (Zákon převrácených čtverců) *Intenzita světla z bodového zdroje je přímo úměrná $\frac{1}{r^2}$, kde r je vzdálenost od zdroje.*

Tato věta nám umožňuje součet převrácených čtverců interpretovat geometricky jako celkovou intenzitu světla, kterou vidí nějaký pozorovatel od několika žárovek (na obrázcích značených $\otimes$).

Věta. (Převrácená Pythagorova) *Nechť jsou v pravoúhlém trojúhelníku a, b délky odvěsen a v výška. Pak platí*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

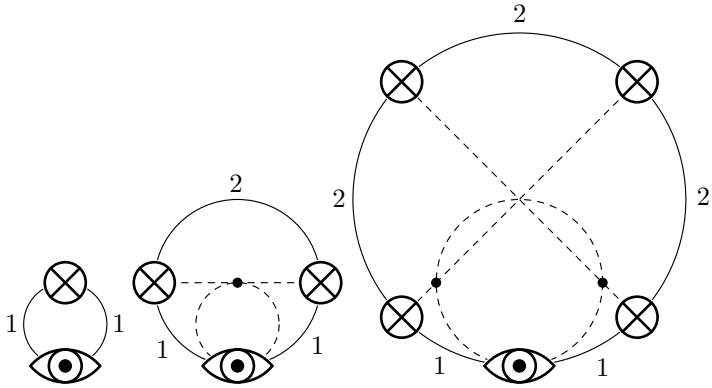


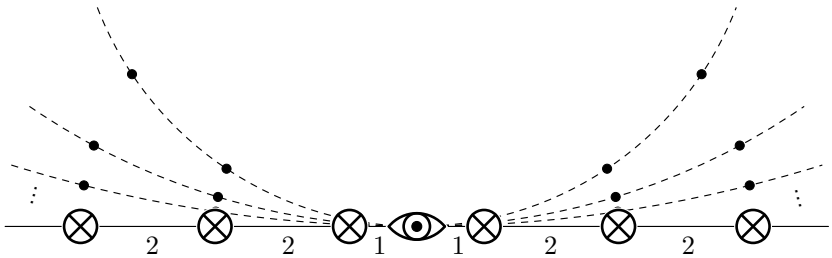
Tvrzení.

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Důkaz. Pořád dokola používáme převrácenou Pythagorovu větu.

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \cdots = \tfrac{\pi^2}{6}$$





□

Úlohy

Úloha 1. Odvoďte z předchozího tvrzení, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Úloha 2. Ukažte, že je následující suma konečná:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Úloha 3. Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$$

Úloha 4. (někdy je to lehké) Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

Úloha 5. Ukažte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty.$$

Úloha 6. Sečtěte

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2}.$$

Eulerův součin

Cvičení 7. Buď q číslo z intervalu $(0,1)$. Sečtěte nekonečnou geometrickou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Úloha 8. Ukažte, že

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \infty,$$

kde součin je přes množinu všech prvočísel $\mathbb{P}$.

Úloha 9. Ukažte (neformálně), že pravděpodobnost, že budou dvě náhodná přirozená čísla nesoudělná, je $\frac{6}{\pi^2}$.

Úloha 10. Jaká je pravděpodobnost, že bude náhodně zvolené přirozené číslo bezčtvercové? (To znamená, že není dělitelné druhou mocninou žádného prvočísla.)

Úloha 11. Vypočítejte

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Úloha 12. Pro přirozené číslo n označme $\varphi(n)$ počet přirozených čísel od 1 do n, která jsou s n nesoudělná. Najděte všechna k, pro něž existuje k různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ splňujících

$$2024 \leq \frac{\varphi(a_1)}{a_1} + \frac{\varphi(a_2)}{a_2} + \cdots + \frac{\varphi(a_k)}{a_k} < 2025.$$

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \cdots = \tfrac{\pi^2}{6}$$

Úloha 13. Ukažte, že

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \infty.$$

Úloha 14. Dokažte

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Návody

2. $n^2 + 1 > n^2$.

4. Co vychází, když postupně sčítáš prvních pár členů?

5. Odhadni každý člen zdola číslem typu $\frac{1}{2^n}$.

6. Nekonečno.

7. Co když celou řadu vynásobíš q a srovnáš s původní?

8. Použij předchozí cvičení a roznásob nekonečně mnoho závorek.

11. Roznásob.

12. Vyjádři $\frac{\varphi(a_i)}{a_i}$ pomocí prvočíselného rozkladu a_i. Jakých hodnot to může nabývat?

13. Vynásob s $\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

14. Ukaž, že když vezmeš dost velké a, platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ $a^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$.

Literatura a zdroje

[1] 3Blue1Brown: *Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem*, *https://www.3blue1brown.com/lessons/basel-problem*.

Pythagorejské trojice a racionální body

Matouš Šafránek

Abstrakt. Ukážeme si metodu, jak najít všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, tedy trojice celých čísel splňujících $a^2 + b^2 = c^2$. Metoda je složitější, než by bylo na tuto úlohu potřeba, ale zato jsou v ní zajímavé myšlenky a stejnou metodou se dají vyřešit další podobné úlohy.

Definice. *Pythagorejská trojice* je trojice přirozených čísel a, b, c splňujících

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Čísla pythagorejské trojice jsou tedy délky stran pravoúhlého trojúhelníku.

Definice. Pythagorejské trojici a, b, c říkáme *primitivní*, pokud jsou a, b, c nesoudělná.

Každou neprimitivní trojici můžeme získat jako násobek primitivní, například 9, 12, 15 je trojnásobek 3, 4, 5. Ukážeme si metodu, jak nalézt všechny pythagorejské trojice. Cestou budeme volně vycházet z následujících faktů:

Tvrzení 1. *Mějme kvadratickou rovnici $P(x) = 0$ s racionálními koeficienty. Předpokládejme, že má racionální kořen x_1.*

(1) *Pak má i druhý kořen x_2 racionální.*
(2) *Navíc, když x_1 známe, tak x_2 snadno dopočítáme.*

Tvrzení 2. *Přímka, která prochází dvěma různými racionálními*[1] *body (x_1, y_1) a (x_2, y_2), má racionální směrnici.*

Tvrzení 3. (dvojrozměrná verze tvrzení 1) *Mějme nedegenerovanou kvadratickou rovnici ve dvou proměnných $P(x, y) = 0$ s racionálními koeficienty. Předpokládejme, že má racionální kořen (x_1, y_1).*

(1) *Když přímka s racionální směrnicí prochází kořenem (x_1, y_1), leží na ní i další*[2] *racionální kořen (x_2, y_2).*
(2) *Navíc, když známe (x_1, y_1) a směrnici, snadno dopočítáme (x_2, y_2).*
(3) *Podle tvrzení 2 můžeme každý racionální kořen (x_2, y_2) takto najít.*

[1] Tedy $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$.
[2] V některých případech to bude dvojnásobný kořen $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Důkaz. (náznak) Přímka má rovnici $y = k(x-x_1)+y_1$, kde k je racionální. Hledáme druhé řešení $P(x, k(x-x_1)+y_1) = 0$. To je ale kvadratická rovnice s racionálními koeficienty v jedné proměnné x, takže má podle tvrzení 1 druhý racionální kořen.

Hurá do toho

Příklad. Najděte všechna celočíselná řešení $a^2 + b^2 = c^2$.

Řešení.

(1) **Vydělíme**. Rovnici vydělíme c^2, získáme $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Označíme zlomky $x = \frac{a}{c}$ a $y = \frac{b}{c}$, takže dále řešíme rovnici $x^2 + y^2 = 1$ v racionálních číslech. Případ, kdy je $c = 0$ a vydělit nemůžeme, musíme vyřešit zvlášť, jediné řešení je v tom případě $a = b = c = 0$.

(2) **Najdeme jedno řešení**. Netřeba být tvůrčí, například $x = 1$, $y = 0$.

(3) **Vedeme racionální přímku**. Obecnou přímku s racionální směrnicí procházející bodem $(1, 0)$ můžeme zapsat jako $\{(1 + \ell t, kt), t \in \mathbb{R}\}$, kde k, ℓ jsou nesoudělná celá čísla a $\frac{k}{\ell}$ je směrnice.

(4) **Najdeme druhé řešení**. Najdeme na přímce druhé řešení. Má tedy platit $(1 + \ell t)^2 + (kt)^2 = 1$, to upravíme na $t(2\ell + \ell^2 t + k^2 t) = 0$. Řešení $t = 0$ je to původní, zbývá řešení $t = \frac{-2\ell}{k^2+\ell^2}$, tedy $x = \frac{k^2-\ell^2}{k^2+\ell^2}$, $y = \frac{-2k\ell}{k^2+\ell^2}$.

(5) **Rozebereme soudělnost**. Pokud je aspoň jeden ze zlomků $\frac{k^2-\ell^2}{k^2+\ell^2}$, $\frac{-2k\ell}{k^2+\ell^2}$ v základním tvaru, můžeme zapsat obecné řešení původní rovnice jako $a = n(k^2 - \ell^2)$, $b = -2nk\ell$, $c = n(k^2 + \ell^2)$, kde n je celé (a $n = 1$ dá primitivní trojici). V opačném případě by n ještě mohlo být racionální.

Podíváme se, čím ta čísla vůbec můžou být soudělná. Předpokládáme-li $d \mid k^2 - \ell^2$, $d \mid -2k\ell$, $d \mid k^2 + \ell^2$, dostaneme sečtením a odečtením $d \mid 2k^2$ a $d \mid 2\ell^2$. Ježto jsou k, ℓ nesoudělná, musí platit $d \mid 2$. Zjistíme, že původní čísla jsou soudělná dvěma, právě když jsou k i ℓ lichá.

Obecné řešení tedy můžeme zapsat pro n celé a k, ℓ celá nesoudělná jako

$$a = \frac{n}{2}(k^2 - \ell^2), \quad b = -nk\ell, \quad c = \frac{n}{2}(k^2 + \ell^2), \quad \text{pokud jsou } k,\ \ell \text{ lichá},$$
$$a = n(k^2 - \ell^2), \quad b = -2nk\ell, \quad c = n(k^2 + \ell^2), \quad \text{jinak.}$$

Důsledek. *Všechny pythagorejské trojice získáme několika kosmetickými úpravami. Na znaménku b nezáleží, proto můžeme psát $b = 2nk\ell$. Zajímají-li nás jen kladné trojice, můžeme chtít k, ℓ kladná, $k > \ell$. Dále můžeme ověřit, že v primitivní trojici je právě jedno z a, b sudé. Pokud nám tedy nezáleží na pořadí čísel a, b, můžeme si zvolit, že sudé bude b. Tím vyřadíme primitivní trojice $a = \frac{k^2-\ell^2}{2}$, $b = k\ell$, $c = \frac{k^2+\ell^2}{2}$ (pro k, ℓ lichá) a můžeme psát obecnou pythagorejskou trojici jen jako*

$$a = n(k^2 - \ell^2), \qquad b = 2nk\ell, \qquad c = n(k^2 + \ell^2),$$

kde n je přirozené a $k > \ell$ jsou nesoudělná přirozená, z nichž jedno je sudé.

Úlohy

Úloha 1. Najděte všechna racionální řešení $x^2 - 2y^2 = 1$.

Úloha 2. Najděte všechny trojice celých čísel a, b, c, pro něž tvoří a^2, b^2, c^2 aritmetickou posloupnost.

Úloha 3. Najděte všechny trojúhelníky s celočíselnými délkami stran a jedním vnitřním úhlem $60°$.

Úloha 4. Dokažte, že pokud nesoudělná přirozená čísla a, b, c splňují $a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca)$, pak jsou a, b, c druhé mocniny celých čísel.

Úloha 5. Najděte všechny dvojice racionálních čísel x, y splňujících $y^3 = x^3 + x^2$.

Úloha 6. Dokažte, že rovnice $a^4 + b^4 = c^2$ nemá v přirozených číslech řešení.

Úloha 7. Dokažte, že na eliptické křivce[3] dané rovnicí $y^2 = x^3 - 2$ leží nekonečně mnoho racionálních bodů.

Na vlastní nebezpečí

Úloha 8. Najděte všechny pythagorejské čtveřice, tj. řešení rovnice $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Úloha 9. Dokažte, že $a^3 + b^3 = c^3$ nemá v přirozených číslech řešení.

Úloha 10. Najděte všechna celočíselná řešení $a^2 + b^2 = c^2 + 1$.

Návody

2. $c^2 - b^2 = b^2 - a^2$.

3. Kosinová věta: $a^2 - ab + b^2 = c^2$.

5. Klidně začni s řešením $(0, 0)$.

6. Nekonečným sestupem. Dvakrát použij vzorec pro pythagorejské trojice.

7. Zvol směrnici racionální přímky tak, aby se koeficient u t vynuloval (potom to bude tečna k té křivce).

Literatura a zdroje

[1] Abhinav Kumar: *Pythagorean Triples, Fermat Descent*, *https://ocw.mit.edu/courses/18-781-theory-of-numbers-spring-2012/5afc5a24dda38226c0085f15510de89b_MIT18_781S12_lec23.pdf*.

[2] Keith Conrad: *Pythagorean Triples*, *https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pythagtriple.pdf*.

[3] Neplést s elipsou.

Gulidlo a rovinítko

Martin „Macker“ Šindelář

Abstrakt. Konštrukčné úlohy trochu inak? Namiesto roviny priestor, namiesto pravítka rovinítko, namiesto kružidla gulidlo.

Na prednáške si precvičíme priestorovú predstavivosť riešením konštrukčných úloh v troch dimenziách. Oproti klasickým nástrojom rovinnej geometrie budeme mať k dispozícii rovinítko (umožní nám zostrojiť rovinu danú tromi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke) a gulidlo (z daného bodu opíše sféru s polomerom po nejaký bod).

Pri riešení mnohých úloh pomôže, ak si predstavíš podobnú konštrukciu v rovine. Napríklad hneď prvá úloha je „rovnaká“ ako konštrukcia rovnostranného trojuholníka, len má o dimenziu viac.

Príklad 1. Zostroj pravidelný štvorsten.

Riešenie. Zvolíme si v priestore dva ľubovoľné body A a B. Úsečka AB (jej dĺžku označíme a) bude hranou nášho štvorstenu. Zabodneme gulidlo postupne do bodov A a B a z oboch opíšeme sféru s polomerom a. Prienik týchto sfér je kružnica, nazvime ju k. Kdekoľvek na k si zvolíme ďalší bod C. Z bodu C opäť nakreslíme sféru s polomerom a, tá pretne k v dvoch bodoch. Ľubovoľný z týchto bodov je štvrtý vrchol nášho štvorstenu.

Nástroje

Podobne ako v klasických konštrukčných úlohách, hodí sa vytvoriť si nejaké nástroje, ktoré budeme vedieť neskôr používať pri konštrukciách.

Ale pred tým ako sa pustíme do $3D$ nástrojov, ukážme si že vlastne vieme používať aj tie $2D$. Na to aby sme sa presunuli do $2D$, si zvolíme rovinu σ, na ktorej budeme kružnice a priamky konštruovať. Pravítko vytvoríme tak, že cez dva zvolené body na rovine a jeden hocikde inde preložíme rovinu. Jej prienik so σ je priamka, ktorú by sme zostrojili pravítkom. Rovnako vieme zostrojiť kružnicu so stredom a polomerom na rovine keď zostrojíme s týmto stredom a polomerom guľu a zoberieme prienik so σ.

To znamená, že v tomto rozšírení vieme rysovať všetko, čo v $2D$ verzií.

Neobmedzujme sa ale na také pozemné veci ako $2D$, ale poďme stavať veci v plnom $3D$ priestore. Mohli by sme si v $3D$ zostrojiť ekvivalenty k rovnobežke a kolmici, avšak vo vyššej dimenzii majú aj takéto jednoduché operácie viac variant:

Úloha 2. Je daná priamka p a bod B. Zostroj rovinu kolmú na p prechádzajúcu bodom B.

Úloha 3. Je daná rovina σ a priamka p. Zostroj rovinu τ, ktorá je kolmá na σ a súčasne v nej leží priamka p.

Úloha 4. Majme rovinu σ a bod B mimo nej. Zostroj priamku p prechádzajúcu bodom B a kolmú na σ.

Všimnite si, že ak chcete narysovať priamku kolmú na priamku, môžete ju narysovať rovnako ako v $2D$.

Úloha 5. Zostroj priamku q rovnobežnú s danou priamkou p a prechádzajúcu daným bodom B **ne**náležiacim p.

Úloha 6. Zostroj rovinu, ktorá prechádza bodom B a je rovnobežná s rovinou σ.

Ešte si povieme o jednom nástroji, ktorý nemá nič s kolmosťou. Používa sa prekvapivo málo často, no hovorí celkom silnú vec o našich možnostiach, dovolí nám totiž presunúť ľubovoľnú dĺžku hocikam inam.

Úloha 7. Sú dané body A, B, C, zostroj guľu zo stredom v C a polomerom $|AB|$.

Úlohy

Teraz sa s našimi novými super schopnosťami kreslenia rovnobežiek a kolmíc pustime do ďalších úloh.

Úloha 8. Zostroj sféru, ak máš daný bod A – jej bod dotyku s rovinou σ a B, ktorý má ležať na sfére a neleží na σ.

Úloha 9. Zostroj sféru opísanú danému štvorstenu.

Úloha 10. Zostroj štvorsten, ak sú dané ťažiská jeho stien.

Úloha 11. Zostroj sféru vpísanú danému štvorstenu.

Úloha 12. Sú dané 3 kvádre v priestore. Nájdi rovinu, ktorá každý z nich rozsekne na dve časti s rovnakým objemom.

Úloha 13. (bonus) Koľko $3D$ kvádrov potrebuješ na to, aby si rozrezal 4 $4D$ hyperkvádre, každý na dva rovnaké objemy?

Úloha 14. (ťažká) Nech sú dané body S, S_{AB}, S_{BD}, S_{CD}, ktoré neležia v jednej rovine. Zostroj štvorsten $ABCD$ taký, že S je stred sféry jemu opísanej a S_{AB}, S_{BD}, S_{CD} sú postupne stredy hrán AB, BD, CD.

Úloha 15. (ťažká) Zostroj sféru, ktorá prechádza danými dvoma bodmi a dotýka sa daných dvoch sfér.

Úloha 16. (ťažká) Nech sú dané nekolineárne body T_A, V_A, T_C, priamka p mimobežná s priamkou T_AV_A a úsečka dĺžky d. Zostroj štvorsten $ABCD$ taký, že T_A, resp. T_C, je ťažisko steny BCD, resp. ABD, V_A je päta výšky spustenej z vrcholu A na stenu BCD, bod B leží na priamke p a vzdialenosť $|CV_A|$ je rovná d.

Úloha 17. (ťažká) Zostroj kocku iba gulidlom, pokiaľ sú dané dĺžky stenovej a telesovej uhlopriečky.

Návody

2. Hodili by sa dva body na p, čo sú rovnako ďaleko od B.

3. Skús najprv spraviť rovinu, ktorá je kolmá na tú priamku.

4. Čo keby sme pretli guľu v B a σ a potom použili nejaké $2D$ konštrukcie?

5. Vytvorme rovinu, na ktorej leží p a B a potom použime nejaké $2D$ konštrukcie.

6. Skús zostrojiť ľubovoľnú rovinu kolmú na σ a prechádzajúcu B. A možno aj dve.

7. Vytvorme si rovinu prechádzajúcu A, B, C, skúsme preniesť vzdialenosť na nej. Dobrý prvý krok je urobiť si rovnostranný trojuholník so stranou AC.

8. Kolmice sú tvoji kamaráti.

9. Skús opísať kružnicu dvom stenám štvorstenu.

10. Položme si finálny štvorsten na jednu stenu. Tri trojuholníky na jeho stranách majú teraz rovnakú výšku. Viete čo je teraz tiež v rovnakej výške?

11. V trojuholníku je os uhla priamka, čo je rovnako vzdialená od dvoch strán. Teraz by sa zišla priamka, čo je rovnako vzdialená od všetkých troch stien.

12. Čo sa stane, keď ľubovoľná rovina prechádza cez stred kvádra?

13. Odpoveď je 1. Toto je skôr taká troll úloha, ale príde mi pekné, že aj v $4D$ sa dá cez 4 stredy hyperkvádrov preložiť $3D$ rovina (alebo dosť veľký obdĺžnik).

Literatura a zdroje

Príklady a niektoré časti príspevku sú bezočivo skopírované od *Verči Hladíkovej*, ktorá ich skopírovala od *Rado vana Švarce*, ktorý ich skopíroval od *Alči Skálovej*, ktorá ich vytvorila pre sústredenie v Blansku-Obůrke (2011) a ktorej (aj všetkým ostatným) týmto ďakujem.

Teorie her

Lukáš Trojan

Abstrakt. Na této přednášce se podíváme na kombinatorickou teorii her a na některé postupy, jak tyto hry řešit a na jednu z nejklasičtějších kombinatorických her - Nim a jak ho řešit.

Úmluva. Budeme se zabývat pouze hrami, které splňují následující podmínky:

(1) hrají vždy dva hráči proti sobě a pravidelně se střídají v tazích po jednom (nikdo nemůže vynechat tah),
(2) pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy,
(3) jsou konečné a skončí vítězstvím jednoho z hráčů nebo remízou,
(4) jsou s úplnou informací (žádné skryté ani simultánní tahy) a oba hráči hrají racionálně (nejlépe jak mohou),
(5) jsou bez náhody.

Nejprve se budeme zabývat pouze hrami, které končí pouze výhrou jednoho z hráčů (tedy nemohou skončit remízou). Každá takováto hra se může nacházet v různých stavech[1], které si můžeme rozdělit na dva typy:

(1) *vyhrávající stav* = buď existuje takový tah, který změní stav hry na prohrávající, nebo se jedná o koncový stav definovaný jako vyhrávající (dále ho budeme značit V),
(2) *prohrávající stav* = všechny povolené tahy změní stav hry na vyhrávající, nebo se jedná o koncový stav definovaný jako prohrávající (dále P).

Na začátku se hra nachází v počátečním stavu, který je zpravidla jednoznačně definován, zatímco koncových stavů může být i více.

Věta. *Právě jeden z hráčů má vyhrávající strategii.*

Důkaz. Z definice stavů V a P plyne, že pokud se první hráč nachází ve stavu V, tak může zahrát takový tah, že soupeř bude během svého tahu ve stavu P a musí prvního hráče dostat opět do stavu V. Protože je hra konečná, tak tímto opakováním první hráč dosáhne vítězství, a má tedy vyhrávající strategii.

Pokud je ovšem na začátku hra ve stavu P, tak všechny tahy prvního hráče vedou do stavu V a druhý hráč se ocitá v roli prvního v předchozích úvahách, a má tedy

[1] Stav je jednoznačně popsán pozicí hry a hráčem, který je na tahu.

vyhrávající strategii.

Remíza

Pokud chceme, tak si můžeme zadefinovat i stav *remízy* (R). To je buď koncový stav zadefinovaný jako remíza, anebo stav, ze kterého se jde dostat do stavu remízy a ne do stavu P.

Metody řešení

Nejobecnější metoda řešení je takzvaný zpětný rozbor. V tom začneme od koncových stavů od nich zjistíme o každém stavu jaký je.

Příklad 1. Máme 15 sirek a v každém tahu odebereme 1 až 4 z nich. Který hráč vyhraje?

Tento postup sice vždy funguje, ale někdy může být velmi zdlouhavý, proto existují další postupy, při kterých nemusíme celou hru rozebrat. Jedním z těchto postupu je kradení strategií.

To funguje typicky v případě, že z původního tahu se můžeme dostat do nějaké množiny pozic M a existuje pozice $m \in M$, ze které se můžeme dostat pouze do nějaké podmnožiny $M \setminus \{m\}$. Pokud v pozici m existuje výherní strategie, tak protože do každé pozice, kam se můžeme pohnout z m, se můžeme dostat i ze startovní pozice, tak má vyhrávající strategii první hráč. Pokud neexistuje výherní strategie v m, tak se první hráč na začátku pohne do m, a tedy v tomto typu hry vždy vyhraje.

Dalším postupem je hledání symetrií. U her, v nichž prohraje hráč, který nemůže táhnout, je jedním z častých triků nalezení či vytvoření symetrie. V prvním případě hledáme vyhrávající strategii pro druhého hráče. Pokud se nám podaří nahlédnout, že je hra v nějakém smyslu symetrická a každý tah, který první hráč udělá, může druhý hráč zopakovat podle nalezené symetrie, pak má druhý hráč evidentně vyhrávající strategii.

V druhém, častějším, případě sice hra symetrická není, ale dá se na symetrickou převést tahem prvního hráče. Potom je však ve chvíli, kdy se stala hra symetrickou, na tahu druhý hráč, tedy nalezená vyhrávající strategie patří začínajícímu hráči.

Úloha 2. Máme 2 hromádky sirek po 9 a v každém tahu můžeme odebrat až 5 z nich. Který hráč vyhraje?

Úloha 3. Máme 2 hromádky sirek, v jedné je 17 a v druhé 15 sirek a v každém tahu můžeme odebrat až 6 z nich. Který hráč vyhraje?

Úloha 4. Máme kružnici o poloměru 1 metr a v každém tahu do ní jeden z hráčů umístí kružnici o poloměru 1 centimetr, tak aby se neprotínala s žádnou jinou kružnicí (včetně té velké). Který hráč vyhraje?

Úloha 5. (Čísla v lahvi) V lahvi jsou všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, vyndá z lahve nějaké číslo a všechny jeho dělitele. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Kdo má vítěznou strategii?

Úloha 6. (Přičítání dělitele) Začíná se s dvojkou. V jednom kroku hráč přičte k číslu nějakého jeho vlastního dělitele (to je dělitel menší než číslo samotné). Kdo překročí číslo 2011, vítězí. Má začínající hráč vítěznou strategii? A co kdyby ten, kdo překročí 2011, prohrál?

Hra Nim

Definice. *Nim* je hra, ve které ve startovní pozici máme několik hromádek sirek a jejich počet nemusí být nutně stejný a ve svém tahu každý hráč odebere z jedné hromádky nějaký nenulový počet sirek a výhercem je hráč, který sebere poslední sirku.

Definice. (binární xor) *Binárním xorem* čísel x a y je binární součet bez přenosu, značíme ho $x \oplus y$. Např. $21 \oplus 7 = (10101)_2 \oplus (111)_2 = (10010)_2 = 18$.

Věta. *Ve hře Nim je prohrávající pozice právě ta, v níž se binární xor velikostí všech hromádek rovná nule.*

Úloha 7. Dokaž tuto větu.

Sčítání her

Definice. (Sprague–Grundyho funkce) *Sprague–Grundyho* (*SG*) *funkcí* rozumíme funkci g, která každému stavu v přiřadí nejmenší nezáporné celé číslo n takové, že $n \neq g(u)$ pro všechny stavy u, do kterých se dá dostat tahem ze stavu v.

Tvrzení. *Pokud ve hře prohrává hráč, který nemůže táhnout, potom jsou prohrávající právě ty stavy v, pro které $g(v) = 0$.*

Definice. (Sčítání her) *Součtem her* myslíme hru, v níž si hráč může v každém svém tahu vybrat některou z dílčích her a v ní udělat tah. Pro jednoduchost jej budeme definovat pouze pro hry, kde prohrává hráč, který již nemůže táhnout.

Věta. (Sprague, 1936; Grundy, 1939) *Při součtu N her se Sprague–Grundyho funkcemi $g_1, \ldots, g_N$ získáme hru s SG funkcí*

$$g(v_1, \ldots, v_N) = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \cdots \oplus g_N(v_N).$$

Další Úlohy

Úloha 8. (Šachovnice) V pravém dolním rohu každé z N šachovnic o rozměrech $a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2, \ldots, a_N \times b_N$ stojí figurka. Tou se smí v jednom tahu pohnout pouze nahoru, vlevo, nebo šikmo vlevo nahoru, a to buď o jedno, nebo o dvě políčka. Hráč, který je na tahu, si vybere šachovnici a udělá na ní takový tah, aby figurka neopustila šachovnici. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Úloha 9. (Nim podruhé) Mějme tři hromádky sirek o 9, 10, resp. 14 sirkách. Hráč, který je na tahu, si vybere jednu hromádku a odebere z ní několik sirek. Z první hromádky je možné odebrat 1 až 3 sirky, z druhé 1 až 5 a z té poslední 1 až 7 sirek. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Úloha 10. (Laskerův Nim) Hra je stejná jako obyčejný Nim, ale navíc lze místo tahu rozdělit hromádku na dvě neprázdné hromádky.

Úloha 11. (Čtverečky) Na šachovnici $n \times m$, kde n i m jsou alespoň 5, se dva hráči střídají ve vybarvování políček. Jeden vždy vybarví čtverec 2×2, druhý libovolně orientované L-triomino. Žádné políčko nesmí být vybarveno dvakrát a ten, kdo nemůže táhnout, vyhrál. Ukažte, kdo z hráčů má vyhrávající strategii v závislosti na m, n a tom, který z hráčů začíná.

Úloha 12. (Čtvercové piškvorky) Hraje se na čtverečkovaném papíře 10×10. Ve svém tahu nakreslí hráč jeden svůj symbol do nějakého prázdného čtverečku. První hráč se snaží utvořit čtverec 2×2 ze svých symbolů a cílem druhého hráče je mu v tom zabránit.

Úloha 13. (Razítka) Začíná se na šachovnici 8×8. Hráč, který je na tahu, si vybere prázdné políčko a dá na něj razítko. Vybrané políčko musí hranou sousedit s tím předchozím. První hráč může dát razítko, kam chce. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Úloha 14. (Kayles) Dva kuželkáři stojí před řadou třinácti kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak šikovní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Návody

2. Najdi symetrii.

3. Najdi tah, který vytvoří symetrii.

4. Vymysli, kam umístit první kružnici tak, aby poté pokaždé existoval symetrický tah.

5. Co se stane, když první hráč vytáhne jedničku? A co když ne?

6. Vyzkoušejte si prvních pár možných stavů.

7. *Naznačení postupu*: Je potřeba dokázat celkem tři věci. Zaprvé, že v každém koncovém stavu je binární xor velikostí všech hromádek roven nule. Zadruhé, že z každého stavu s binárním xorem rovným nule vedou všechny tahy do stavu s nenulovým binárním xorem. A konečně za třetí musíme ukázat, že pokud máme nenulový binární xor, existuje tah, který ho vynuluje.

7. *Samotný postup*: Pro druhou část důkazu si všimneme, že pokud jsme vzali sirku z hromádky, kde bylo n sirek a po našem tahu jich tam zůstalo m, je binární xor nyní právě $m \oplus n$. Pro třetí část si stačí uvědomit, že pokud vezmeme libovolnou hromádku, na níž má počet sirek jedničku na nejvyšším řádu, kde má jedničku binární xor všech hromádek, pak je binární xor všech hromádek kromě této menší než velikost této hromádky, takže ji můžeme zmenšit tak, aby se binární xor vynuloval.

8. Jaká je hodnota SG funkce v prvém horním rohu?

10. Jsme schopni se dostat z pozice s SG hodnotou 0 v normálním Nimu do další takové pozice?

11. Existují pozice, ve kterých jeden z hráčů může hrát a druhý ne?

Literatura a zdroje

[1] Viki Němeček: *Teorie her*, Sklené, 2019.
[2] Alča Skálová: *seriál Teorie her I*, *https://prase.cz/library/s_TeorieHer_1/s_TeorieHer_1.pdf*.

AG nerovnost

Jakub Vlček

Abstrakt. Příspěvek je zaměřen na základní techniky pro práci s AG nerovností.

AG nerovnost je asi první nerovnost, se kterou se řešitel během své matematické kariéry setká. Její hlubší znalost se velmi hodí při řešení nejrůznějších olympiádních úloh. Stačí se totiž naučit pár jednoduchých triků a hned se z AGčka stane velmi silná zbraň. Pojďme si ji nejdříve dokázat.

Věta. (AG nerovnost) *Pro libovolná nezáporná čísla x_1, x_2, …, x_n platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Poznámka. Rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Poznámka. (Geometrická intuice) Pro $n = 2$ nerovnost říká, že obvod obdélníku o stranách x_1, x_2 je větší nebo roven obvodu čtverce o stejném obsahu. Toto lze zobecnit i do vyšších dimenzí.

Příklad. Pro a, b, c kladná platí:

(1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$,
(2) $a + \frac{1}{a} \geq 2$,
(3) $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Příklad. Pro $x_i > 0$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dokažte:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Cvičení. Pro x, y, z kladná dokažte:

(1) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$,
(2) $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$,
(3) $\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$,
(4) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$,
(5) $2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 15xyz$.

Sčítání AG nerovností neboli srážení mocnin

Máme-li na levé straně nerovnice vyšší mocniny než na pravé, můžeme AG použít k tomu, abychom vyšší mocniny „srazili“ dolů (rozuměj zmenšili) na součet menších mocnin. Například ve znění věty takto srážíme jedničku na n n-tin. Ne vždy ale musíme srážet mocniny u celého výrazu naráz. Vhodnější může být si výraz rozdělit, pak srazit a následně všechny odhady sečíst dohromady. Například nerovnost

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

se stává triviální, víme-li, že $2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$.

Příklad. Dokažte, že pro kladná reálná x, y, z platí

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

Cvičení. Pro x, y, z kladná dokažte (a určete, kdy nastává rovnost):

(1) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$,
(2) $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + zy)$,
(3) $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3x$,
(4) $x^4y + y^4z + z^4x \geq x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y$,
(5) $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$,
(6) $x^7 + 1 \geq x^4 + x^3$,
(7) $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq xy + yz + zx$.

U použití AG většinou chceme, aby součet mocnin u výrazů na levé straně byl rovný součtu mocnin u výrazů vpravo. Obsahuje-li nerovnost nějaké samostatné číslo, můžeme dodatečné mocniny vyrobit z něj.

Příklad. Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq 3(a + b + c).$$

Podobně, je-li v zadání podmínka typu $abc = 1$, můžeme mocniny doplnit přenásobením vhodnou mocninou tohoto výrazu.

Příklad. Dokažte, že pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ platí

$$a^5b + b^5c + c^5a \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Sčítat nerovnosti se někdy vyplatí i u zlomků, potřebujeme-li se zbavit výrazů ve jmenovateli. V takovém případě často pomůže jmenovatele (respektive jeho vhodný rozklad či násobek) ke zlomku přičíst a až potom použít AGčko.

Příklad. Pro $a, b, c > 0$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Úlohy

Úloha 1. Dokažte, že pro kladná reálná x, y, z platí

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz.$$

Úloha 2. Pro $a, b, c > 0$ splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{1 + ab}{1 + a} + \frac{1 + bc}{1 + b} + \frac{1 + ac}{1 + c} \geq 3.$$

Úloha 3. Nechť platí $a + b + c = 1$ pro a, b, c kladná. Ukažte, že potom

$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 64.$$

Úloha 4. Pro $abc = 1$, $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Úloha 5. Pro $a > 1$ a n přirozené ukažte

$$a^n - 1 \geq n\left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Úloha 6. Pro a, b, c, d kladná dokažte:

$$a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq abcd(a + b + c + d).$$

Úloha 7. Dokažte, že pro každá $a, b, c > 0$ platí

$$\frac{a^3}{(a + b)(a + c)} + \frac{b^3}{(b + c)(b + a)} + \frac{c^3}{(c + a)(c + b)} \geq \frac{a + b + c}{4}.$$

Úloha 8. Pro $abc = 1$, $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a^3}{(a + 1)(b + 1)} + \frac{b^3}{(b + 1)(c + 1)} + \frac{c^3}{(c + 1)(a + 1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Úloha 9. Pro kladné $x \neq 1$ a n přirozené ukažte

$$\frac{1-x^{2n+1}}{1-x} \geq (n+1)x^n.$$

Úloha 10. Pro kladná x, y, z dokažte

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}.$$

Úloha 11. (Youngova nerovnost) Pro kladná racionální p, q splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a kladná reálná čísla a, b ukažte, že

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Návody

1. Nejprve roznásob, pak sečti dvě AGčka.

2. Hned AG a upravuj.

3. Roznásob a pomocí tří AG uprav na krychli.

5. Uprav výraz vlevo, vytkni odmocninu a AG.

6. Sčítej AG, chce to akorát trochu trpělivosti.

7. Přičítej jmenovatele. Kolikanásobek musíš použít, aby to vyšlo hezky?

9. Jak se dá rozložit výraz v čitateli?

10. Použij příklad 2 z druhého cvičení.

11. Uvažuj $p = 1 + \frac{n}{m}$ pro m, n přirozená.

Literatura a zdroje

Příspěvek je převážně upravenou kopií přednášek Martina Poljaka a Martina Sýkory, kterým tímto mnohokrát děkuji.

[1] Martin Poljak: *AG nerovnost*, Mrtník, 2023.
[2] Martin Sýkora: *AG nerovnost*, Staré město, 2015.
[3] Edward Barbeau, Bruce Shawyer: *Inequalities*, *https://cms.math.ca/wp-content/uploads/2022/12/ATOM-IV-Inequalities.pdf*.
[4] Manfrino, Ortega, Delgado: *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser, 2009.

Barevné grafíky

Adéla Karolína Žáčková

Abstrakt. Už jako malé děti jsme měli rádi omalovánky, jenomže pak jsme s tím přestali. V přednášce si zavzpomínáme na dětská léta a budeme obarvovat! Zjistíme, že tato technika se dá nezřídka použít i v dost těžkých olympiádních příkladech a my se jich nelekneme!

O čem to vlastně budeme mluvit?

Definice. *Vrcholové obarvení* je přiřazení „barev“ (mohou to být například i čísla nebo smajlíky) vrcholům grafu tak, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu.

Definice. *Hranové obarvení* je obdobně přiřazení barev hranám grafu tak, že žádné dvě hrany sdílející vrchol nemají stejnou barvu.

Definice. Graf je *vrcholově* (*hranově*) *k-obarvitelný*, pokud existuje jeho vrcholové (hranové) obarvení k barvami.

Definice. *Chromatické číslo* grafu G se značí $\chi(G)$ a označuje minimální takové k, že graf je vrcholově k-obarvitelný.

Definice. *Vrcholový řez* v souvislém grafu je podmnožina jeho vrcholů $U \subseteq V$ taková, že po jejím odebrání není graf souvislý. Velikosti nejmenší takové podmnožiny se pak říká *vrcholová souvislost*. Pro úplný graf K_n se vrcholová souvislost dodefinovává jako $n - 1$.

Definice. O souvislém grafu řekneme, že je *k-souvislý*, pokud je jeho příslušná vrcholová souvislost větší nebo rovna k.

Definice. Graf je *k-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stupeň k.

Definice. Graf nazveme *turnaj*, pokud pro každou dvojici vrcholů $u \neq v$ existuje orientovaná hrana mezi nimi (tedy buď $(u, v) \in E$ nebo $(v, u) \in E$).

Úmluva. V přednášce budeme $\Delta(G)$ myslet maximální stupeň grafu G.

Jak takové barevnosti vypadají?

Cvičení. Jak vypadá $\chi(G)$ pro G:

(1) strom,
(2) sudý cyklus,
(3) lichý cyklus,
(4) úplný graf?

Mnohdy se nám stává, že neumíme snadno určit barevnost nějakého grafu, se kterým pracujeme. Přecejen typicky náš přístup bývá hladový (zkouším obarvovat nejlíp, jak mi to v dané chvíli připadá) a ten obvykle nebývá příliš efektivní. Proto je pak lepší mít na barevnost nějaké odhady, kterými se můžeme řídit. Takovými odhady se zabývají následující věty.

Věta. (Brooksova) *Nechť G je souvislý graf, který není úplný, ani lichá kružnice, a nechť Δ je jeho maximální stupeň. Pak G je Δ-obarvitelný.*

Pro mnoho grafů je tento odhad dost mimo (například pro úplný bipartitní graf, jehož partity mají 1 a n vrcholů), na druhou stranu existuje spousta libovolně velkých grafů, pro které je tento odhad těsný.

Věta. (Vizingova) *Nechť G je graf s maximálním stupněm Δ. Pak G je hranově $(\Delta+1)$-obarvitelný.*

Ač se to možná nezdá, rozhodnout, zda je graf hranově Δ nebo $(\Delta+1)$-obarvitelný je těžké, dokonce i pro poměrně řídké grafy. Například pro 3-regulární grafy je to NP-těžký problém.

Cvičení. Nalezněte nekonečnou množinu 3-souvislých 3-regulárních grafů s hranovou barevností 4.

Úmluva. Nebude-li specifikováno, o které obarvení se jedná, budeme mít na mysli to vrcholové.

Nojo, ale co s tím budu dělat?

I když zrovna tyto dvě věty se v olympiádě moc neobjevují, dávají nám docela pěkný vhled na to, jak barevnosti vypadají. My se teď ale půjdeme vrhnout na příklady!

Úloha 1. Dokažte, že každý graf lze obarvit $\Delta + 1$ barvami.

Úloha 2. Dokažte bez použití Brooksovy věty, že pro 3-souvislý neúplný graf platí $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Úloha 3. Dokažte, že bipartitní graf G lze hranově obarvit $\Delta(G)$ barvami.

Úloha 4. Na mírovou konferenci se dostavilo n různých států. Každý stát poslal jednoho generála a jednoho špeha. Zároveň každé dva státy buďto už mají uzavřenou

dohodu o neútočení, anebo ne. Je však potřeba rozdělit špehy a generály do pokojů tak, aby žádný špeh nebyl s žádným generálem na pokoji. Navíc každý generál chce být na pokoji jenom s generály, se kterými mají dohodu o neútočení. Naopak, každý špeh chce být jen se špehy, se kterými jejich strana nemá dohodu o neútočení. Najděte minimální počet pokojů, pro které vždy umíme lidi rozdělit do pokojů podle jejich požadavků.

Úloha 5. Budiž T turnaj. Definujme dobré obarvení hran turnaje jako takové, že pro libovolné hrany (u, v) a (v, w) mají tyto hrany různé barvy (Ale hrany (u, v) a (u, w) můžou být stejné barvy). Orientované hranové chromatické číslo turnaje je definované jako nejmenší počet barev, které potřebujeme na dobré obarvení hran. Pro každé n najděte minimum orientovaných hranových chromatických čísel mezi všemi turnaji na n vrcholech. (USA TST 2015)

Úloha 6. Mějme $n \geq 3$ různých barev. Nechť $f(n)$ označuje největší celé číslo s vlastností, že každá strana a každá úhlopříčka konvexního mnohoúhelníku, který má $f(n)$ vrcholů, se dá obarvit jednou z n barev následujícím způsobem:

(1) jsou použity aspoň dvě barvy,
(2) každé tři vrcholy mnohoúhelníka určují buď trojici úseček stejné barvy, nebo trojici úseček tří různých barev.

Dokažte, že $f(n) \geq (n-1)^2$ a že rovnost v této nerovnosti nastává pro nekonečně mnoho n. (MEMO 2009)

Úloha 7. Obarvíme hrany K_n pomocí $n-1$ barev. Vrchol nazveme *duhou*, pokud jsou hrany, které z něho vycházejí, všechny obarveny různými barvami. Kolik nejvíce duh může existovat? (Iran 2012)

Úloha 8. Šílený vědec stvořil armádu robotů. Problém je v tom, že některé dvojice robotů se nenávidí (nenávist je vzájemná). Vždy však s roboty lze udělat jednu z následujících dvou operací:

(1) Pokud nějaký robot nenávidí lichý počet robotů, vědec ho může zničit.
(2) Vědec může zdvojnásobit armádu tak, že se každý robot R rozdělí na dva roboty R_1 a R_2. Roboti R_1 a R_2 se vždy nenávidí. Pro každou dvojici původních robotů R, Q, kteří se nenáviděli, se budou nenávidět roboti R_1, Q_1 i roboti R_2 a Q_2. To jsou všechny dvojice robotů, které se budou nenávidět po zdvojnásobení.

Dokažte, že vědec umí po konečném počtu operací dostat armádu robotů, ve které neexistuje dvojice robotů, která se nenávidí. (IMO Shortlist 2013)

Úloha 9. Ve státě jsou některá města spojená leteckými linkami, přičemž se umíme letadlem dostat z každého města do každého. Pokud uvažujeme okružní let (začneme z téhož města, kde skončíme) složený z lichého počtu různých letů a všechny tyto lety zrušíme, tak budou existovat dvě města, mezi kterými se nedá dostat letecky. Dokažte, že můžeme stát rozdělit na čtyři oblasti tak, že lety povedou jen mezi městy z různých oblastí. (ARO 2010)

Úloha 10. Nechť S je množina $N \geq 3$ bodů v rovině. Předpokládejme, že žádné tři neleží v přímce. Úsečky s oběma krajními vrcholy v S jsou obarveny jednou ze dvou barev. Dokažte, že existuje $N-1$ úseček stejné barvy takových, že se protínají maximálně ve svých koncových bodech a žádná jejich podmnožina netvoří mnohoúhelník s kladným obsahem. (Chorvatsko TST 2016)

Úloha 11. Je dáno přirozené číslo $n \geq 3$. Uvažme množinu n bodů v prostoru takovou, že:

(1) každé dva body jsou spojeny provázkem, buďto červeným, modrým, zeleným, nebo žlutým,
(2) pro každou trojici bodů platí, že buď jsou všechny provázky mezi nimi stejné barvy, nebo má každý jinou,
(3) ne všechny provázky mají stejnou barvu.

Najděte maximální hodnotu n. (SAMO 2022)

Úloha 12. Je dán graf G o $n \geq 2$ vrcholech. Víme, že existuje takové rozdělení $\{V_1, V_2, \dots V_k\}$ množiny vrcholů, že pro každé i, j $(1 \leq i \leq j \leq k)$ lze vždy najít $x \in V_i$, $y \in V_j$, mezi kterými nevede hrana. Dokažte, že G je $(n-k+1)$-obarvitelný (vrcholově).

Úloha 13. Je dáno $4n$ mincí o vahách 1, 2, 3, $\dots$, $4n$, každá obarvená jednou z n barev, přičemž každá barva má 4 mince. Dokažte, že tyto mince můžeme rozdělit na dvě množiny se stejnou vahou takové, že každá obsahuje dvě mince od každé barvy. (IMO Shortlist 2020)

Úloha 14. Mezi účastníky jsou některé dvojice rivalové a soupeří o to, kdo je lepší v matice. Skupině říkáme *soupeřící*, pokud má lichý počet účastníků (alespoň 3) a je možné ji naaranžovat kolem kulatého stolu tak, že každí dva sousedé jsou rivalové. Víte-li, že mezi účastníky je nejvýš 2015 soupeřících skupin, dokažte, že je umíte rozdělit do jedenácti týmů na náboj tak, že žádní dva rivalové nejsou ve stejném týmu. (IMO Shortlist 2015)

Úloha 15. Souostroví PraSepágy se sestává z $n \geq 2$ ostrovů. Mezi každými dvěma jezdí unikátní převoz oběma směry, každý převoz spadá pod jednu z k společností. Cestovatel začíná na (nějakém) daném ostrově a chce navštívit každý z ostrovů právě jednou, aniž by se vrátil tam, kde začal. Je známo, že když nějaká společnost uzavře všechny své linky, cestovateli se toto nepodaří, nehledě na to, na jakém ostrově začíná. V závislosti na n určete maximální možnou hodnotu k.

(IMO Shortlist 2023)

Návody

1. Odeber jeden z vrcholů s maximálním stupněm. Jde to vyindukovat?

2. Najdi vrcholy u, v, w tak, že $uv, vw \in E$, ale $uw \notin E$. Odeber u, w, najdi kostru a zakořeň ji ve v. Přidej u, w, budou mít stejnou barvu. Barvi od listů (rozmysli si, že to funguje).

3. Jak by to vypadalo, kdyby G byl regulární? (Tj. kdyby všechny jeho vrcholy měly stejný stupeň.)

4. Je to $n + 1$. Postupuj indukcí. Uvědom si, že samostatně barvíš graf G a jeho doplněk. Kolik nových barev musíš maximálně přidat, když přidáváš nový vrchol?

5. Zkus uspořádat vrcholy turnaje do bipartitního grafu vzhledem k jedné konkrétní barvě hran. Dokaž indukcí s pomocí komponent.

6. Prostě si seber jeden vrchol a hrany stejné barvy, co z něho vedou. Na konstrukci využij trochu teorie čísel a polož $n = p + 1$.

7. (Skoro) všechny můžou být. Pro sudé to udělej indukcí (dávno tu nebyla, že?) a pro liché prostě přidej jeden vrchol.

8. Pokud jsi ještě stále překvapený(á), co dělá tato úloha mezi barvením, tak se podívej, co se děje s $\chi(G)$.

9. Seber co nejvíc hran z G tak, aby tvořily bipartitní podgraf. Ukaž, že zbylé hrany taky tvoří bipartitní podgraf. Potom to už je.

11. Smaž všechny provázky, které nejsou červené. Jak pak vypadá graf? Může graf obsahovat K_n pro $n \geq 4$?

13. Spáruj si mince do dvojic s vahou $4n+1$ a rozděl tyto dvojice do dvou množin. Vytvoř si multigraf, kde každý vrchol je barva a hrany jsou mezi barvami v jedné dvojici. Najdi Eulerovskou kružnici (kružnici procházející každou hranou právě jednou) a obarvi ji dvěma barvami.

14. Zkus dokázat, že pokud $\chi(G) = k \geq 3$, pak má G alespoň $2^{k-1} - k$ soupeřících skupin.

15. Uvědom si, že vlastně hledáš obarvení K_n k barvami, aby každá Hamiltonovská cesta obsahovala všech k barev. Je to megadlouhej kencrrrrr :D. Vyjde to $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Nevěš hlavu! Existuje řešení.

Literatura a zdroje

Chtěla bych poděkovat Petru Hladíkovi, jemuž jsem ukradla několik příkladů z jeho přednášky z *i*KSka. Spoustu inspirace jsem jinak čerpala z předmětu Kombinatorika a grafy 2.

[1] Petr Hladík: *Teorie grafů*, sborník *i*KS, 2023.
[2] *Art of problem solving*, *https://artofproblemsolving.com/community*.

Symediány

Adéla Karolína Žáčková

Abstrakt. Už ze základní olympiádní geometrie víme, že těžiště je zajímavý bod. V této přednášce se podíváme na pokročilejší olympiádní téma, které nám tento bod skýtá – symediány. Toto téma je významné zejména tím, kolik rozličných vlastností symediány mají, přednáška tedy obsahuje spoustu tvrzení, ani úlohám se v ní však nevyhneme!

Každý ve svém životě hledáme kamarády. Stejně tak to má i těžiště, jeden z mála význačných bodů trojúhelníku, jehož kamarád není ani zdaleka tak proslulý jako on. My si však ukážeme, že sláva opravdu není všechno a že onen bod ve skutečnosti může skrývat spoustu zajímavých vlastností.

Položme základní kámen!

Definice. Mějme daný úhel XVY a jeho osu o. Přímky p a q nazveme *antirovnoběžné*, pokud osový obraz přímky p podle o je rovnoběžný s přímkou q. Pokud navíc $V \in p$ a $V \in q$, říkáme, že p a q jsou *izogonální*.

Úmluva. Není-li specifikováno jinak, budeme izogonály a antirovnoběžky brát vzhledem k odpovídajícímu úhlu v trojúhelníku (pro těžnice to bude vnitřní úhel u vrcholu, ze kterého vycházejí, pro strany trojúhelníku úhel naproti nim).

Definice. Symediány trojúhelníka jsou přímky izogonální s jeho těžnicemi.

Tvrzení 1. *Symediána z vrcholu A je množina vnitřních bodů X úhlu BAC, pro něž je*

$$\frac{d(X, AB)}{d(X, AC)} = \frac{c}{b},$$

kde $d(X, AB)$ značí vzdálenost bodu X od přímky AB.

Toto tvrzení už nám snadno dokazuje tvrzení následující. Zkuste si rozmyslet, zda byste jej uměli dokázat i jinak.

Tvrzení 2. *Symediány se protínají v jednom bodě, který nazveme Lemoinovým bodem a budeme ho značit K.*

Těžiště má tedy svého kamaráda a není to jen tak nějaký náhodný bod! Zajímavé však je, že Lemoinův bod vlastně jednodušeji než jako kamaráda těžiště popsat

neumíme. Pojďme si nyní zavést nějaké značení. Označme symediánu, která prochází přes vrchol A, jako *A-symediánu*. Průsečíky symedián se stranami trojúhelníka AB, AC a BC budeme značit S_c, S_b respektive S_a.

Tvrzení 3. *Symediána je množina středů antirovnoběžek s protější stranou.*

Jinými (a možná zajímavějšími) slovy: Protíná-li antirovnoběžka ke straně BC přímky AB a AC v bodech B' a C', pak A-symediána trojúhelníku ABC je těžnice v trojúhelníku $AB'C'$ (a naopak).

Tvrzení 4. *A-symediána prochází průsečíkem tečen ke kružnici opsané v bodech B a C.*

Další vlastnosti symedián

Tvrzení 5. *S_a dělí stranu BC v poměru*

$$\frac{BS_a}{S_aC} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Tvrzení 6. *Mějme bod X na A-symedián a veďme jím antirovnoběžky ke stranám AC, AB. Ty protnou přímky AB, AC v bodech T, U. Pak platí $|XT| = |XU|$.*

Všimněme si, že výše zformulované tvrzení je zobecněním tvrzení o tečnách ke kružnici opsané.

Definice. Označme jako D, E a F body dotyku kružnice vepsané postupně se stranami BC, AC a AB. Pak se přímky AD, BE, CF protínají v tzv. *Gergonnově bodě.*

Tvrzení 7. *Uvažujme tečny ke kružnici opsané v bodech A, B, C. Ty ohraničují takzvaný Gergonnův trojúhelník $E_aE_bE_c$ (E_a je průsečík tečen z vrcholů B, C). Pak Lemoinův bod trojúhelníku ABC je Gergonnův bod trojúhelníku $E_aE_bE_c$.*

Tvrzení 8. *Nechť X je bod na kružnici opsané různý od A, pro který platí*

$$\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{c}{b}.$$

Pak AX je A-symediána. Navíc BC, XA, CB jsou symediány v trojúhelnících BXA, XBC, BAX.

Obtížnější tvrzení

Tvrzení 9. (Kosinová kružnice) *Bodem K vedeme antirovnoběžky se stranami. Ty na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed této kružnice je K.*

Cvičení. Rozmyslete si, že oněch šest bodů leží uvnitř stran, právě když je trojúhelník ostroúhlý.

Tvrzení 10. (Tuckerovy kružnice) *Strany trojúhelníka „přistejnolehlíme“ ke K s koeficientem menším než jedna. Obrazy na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed kružnice je na úsečce OK.*

Tvrzení 11. (Lemoinova kružnice) *Bodem K vedeme rovnoběžky se stranami. Ty na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed kružnice, na níž leží, je střed úsečky OK.*

Tvrzení 12. (Lemoinův teorém) *Lemoinův bod je jediný bod, který je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníku, tedy trojúhelníku, jehož vrcholy jsou projekce K na strany.*

Konečně nějaké úložky!

Úloha 13. Ukažte, že v ostroúhlém trojúhelníku leží symediána vždy mezi osou úhlu a výškou.

Úloha 14. Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AC| = 2|AB|$. Ke kružnici k jemu opsané sestrojme tečny v bodech A a C a jejich průsečík označme P. Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici k. (Výběrko 2013)

Úloha 15. Ke stranám AB a AC trojúhelníka ABC připíšeme zvenku čtverce a průsečík jejich stran rovnoběžných s přímkami AB a AC (ale různých od nich) označíme X. Dokažte, že X leží na A-symediáně.

Úloha 16. Tři těžnice dělí trojúhelník ABC na šest trojúhelníků. Ukažte, že jejich opsiště leží na jedné kružnici.

Úloha 17. Nechť D, E, F jsou body dotyku kružnice vepsané postupně se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že ABC je rovnostranný, právě když je těžiště trojúhelníku ABC Lemoinovým bodem trojúhelníku DEF.

Úloha 18. Ukažte, že trojice úseček spojujících střed strany se středem odpovídající výšky prochází Lemoinovým bodem.

Úloha 19. (Kružnice šesti bodů) Z paty výšky z vrcholu A trojúhelníku ABC spustíme kolmice na strany AB a AC a uvážíme jejich paty. Podobně sestrojíme další čtyři paty. Dokažte, že všech šest takto získaných bodů leží na kružnici.

Úloha 20. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC. Bod P leží uvnitř trojúhelníka tak, že $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ACP|$. Označme M střed strany BC. Ukažte, že $|\sphericalangle BPM| + |\sphericalangle CPA| = 180°$. (Polsko 2000)

Úloha 21. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ pro střed M úsečky AC platí $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle CMD| = |\sphericalangle BAD|$. Dokažte, že $ABCD$ je tětivový. (Polsko 2005)

Úloha 22. Nechť MN je přímka rovnoběžná s BC, kde M, N leží na stranách AB, AC. Přímky BN a CM se protínají v bodě P. Kružnice opsané trojúhelníkům BMP a CNP se protínají ve dvou různých bodech P a Q. Dokažte $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAP|$. (Balkan MO 2009)

Úloha 23. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Osa úhlu u vrcholu A protne stranu BC v bodě D a kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě E (různém od A). Kružnice s průměrem DE protne podruhé kružnici opsanou v bodě F. Dokažte, že AF je symediána v trojúhelníku ABC. (ARO 2009)

Úloha 24. Trojúhelník ABC je vepsaný do kružnice ω. Tečny k ω v bodech B a C se protínají v T. Bod S leží na polopřímce BC tak, že $AS \perp AT$. Body B_1 a C_1 leží na polopřímce ST (s C_1 mezi B_1 a S) tak, že $|B_1T| = |BT| = |C_1T|$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a AB_1C_1 si jsou podobné. (USA TST 2007)

Úloha 25. Mějme trojúhelník ABC a jeho kružnici opsanou ω. Tečny k ω vedené body B a C se protínají v bodě X. Přímka AX protíná ω v bodě K. Dokažte, že BC je B-symediána v trojúhelníku ABK a C-symediána v trojúhelníku ACK.

Úloha 26. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, kde $AB < AC$ a ω kružnice jemu opsaná. K ω vedeme tečny t_B, t_C postupně v bodech B a C, tyto tečny se protnou v bodě L. Přímka rovnoběžná s AC procházející bodem B protíná t_C v bodě D. Přímka skrz C rovnoběžná s AB protíná t_B v bodě E. Kružnice opsaná trojúhelníku BCD se dotýká AC v bodě T. Kružnice opsaná BCE protíná prodloužení AB v bodě S. Dokažte, že ST, BC a AL se protínají v jednom bodě. (Balkan MO 2017)

Úloha 27. Nechť Ω je kružnice opsaná ostroúhlému trojúhelníku ABC. Bod D je střed toho oblouku BC, který neobsahuje A. Kružnice ω se středem v D se dotýká úsečky BC v bodě E. Tečny k ω procházející bodem A protínají přímku BC v bodech K a L tak, že body B, K, L, C leží na přímce BC v tomto pořadí. Kružnice γ_1 se dotýká úseček AL a BL a kružnice Ω v bodě M. Kružnice γ_2 se dotýká úseček AK a CK a kružnice Ω v bodě N. Přímky KN a LM se protínají v bodě P. Dokažte, že $|\sphericalangle KAP| = |\sphericalangle EAL|$. (Polsko 2019)

Návody

9. Použij tvrzení 6.

10. Najdi stejnolehlost se středem v K, která přenáší kružnici opsanou na kružnici z tvrzení. Uvědom si, že se tam objevují nějaké antirovnoběžky.

11. Uvědom si, že je Lemoinova kružnice jednou z Tuckerových kružnic.

12. Nechť jsou paty z K označeny D, E, F. Pak si označ $DK \cap EF$ jako P. Z trojúhelníků FPK a EPK sinovkou dokaž, že P je střed EF. Rozmysli si opačnou implikaci.

13. Vzpomeň si na tvrzení 4 a dokresli Švrčkův bod.

14. Poznej symediánu, dokresli příslušný střed strany a dokaž, že ona symediána protíná k ve středu oblouku BC.

15. Všimni si, že bod X má správný poměr vzdáleností od AB a AC.

16. Dokresli si úpatnicový trojúhelník, aby T bylo jeho Lemoinovým bodem. Vystejnolehli opsiště ze středu T s koeficientem 2. Dokaž, že jejich obrazy leží na nějaké Tuckerově kružnici.

17. Jedna implikace je triviální. Použij tvrzení 7, podle něj je Lemoinův bod DEF Gergonnovým bodem trojúhelníku ABC. Zkoukni definici.

18. Ukaž, že každá z přímek je množina středů obdélníků vepsaných do ABC, které leží na jedné ze stran. Dokaž, že všechny obdélníky, co leží na BC, se dají zobrazit nějakou stejnolehlostí se středem v A na nějaký obdélník připsaný zvenku BC s nějakým dobře popsatelným středem. Použij kosinovou kružnici.

19. Je to jedna z Tuckerových kružnic. Spoj body lomenou čarou střídavě rovnoběžnou a antirovnoběžnou s protější stranou.

20. Poznej symediánu.

24. Dokresli si střed BC. Pomocí sinovky dokaž podobnost trojúhelníků AMC a ATC_1.

26. Dokaž, že $CS \parallel BT$ a uvědom si, že AL protíná CS a BT ve středech. Pak chceš dokázat, že se v lichoběžníku úhlopříčky a spojnice středů základen protínají v jednom bodě.

27. Dokresli si Q průsečík tečen z bodů B a C ke kružnici Ω. Chceš pak dokázat, že A, P a Q leží v přímce. Dokresli kružnici vepsanou $\triangle AKL$ a využij středy stejnolehlosti kružnic.

Literatura a zdroje

Tento příspěvěk byl s trochou reorganizace, přidanými příklady a hinty převzat od Rada Švarce (a tím i od Štěpána Šimsy), kterým oběma tímto děkuji.

[1] Rado van Švarc: *Symediány*, Paseky, 2018.
[2] *Art of problem solving*, *https://artofproblemsolving.com/community*
[3] David Hruška, Rado van Švarc: *Geometrie trojúhelníka*, PraSečí seriál, 36. ročník, *https://prase.cz/archive/36/serial.pdf*.

Obsah

Rekurentní posloupnosti (Alicka Dományová) 3
Geometrická zobrazení (Alicka Dományová) 6
Dělitelnost (Martin Fof) 14
Burnsideovo lemma (Martin Fof) 21
Kvadratické zbytky (Matěj Gajdoš) 24
Reálná čísla (Matěj Gajdoš) 28
Invarianty (Vít Hanika) 33
Kombinatorická teorie čísel (Vít Hanika) 36
Turnaje a další grafy (Petr Hladík) 39
Bertrandův postulát a další věty o prvočíslech (Zdeněk Pezlar) 44
Funkcionální rovnice (Zdeněk Pezlar) 49
Mocnost a chordály (Lenka Poljaková) 55
$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ (Matouš Šafránek) 59
Pythagorejské trojice a racionální body (Matouš Šafránek) 63
Gulidlo a rovinítko (Martin „Macker“ Šindelář) 66
Teorie her (Lukáš Trojan) 69
AG nerovnost (Jakub Vlček) 74
Barevné grafíky (Adéla Karolína Žáčková) 78
Symediány (Adéla Karolína Žáčková) 83