# Sborník Nejdek 2008

**Háňa Bendová**
**Jarda Hančl**
**Víťa Kala**
**Franta Konopecký**
**Rasťo Oľhava**
**Jakub „šnEk“ Opršal**
**Monika Pospíšilová**
**Michal „Kenny“ Rolínek**
**Michal Rušin**
**Zuzka Safernová**
**Alča Skálová**

editor : Jakub „šnEk“ Opršal
vydání první, náklad 40 výtisků
září/říjen 2008
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

# Fyzikální úvahy v geometrii

*Háňa Bendová*

V této přednášce si víceméně hlavně na příkladech (které ale v tomto textu neuvádím) nastíníme, jak nám může trocha fyzikálních úvah dopomoci k velmi elegantním řešením některých geometrických úloh. Ač se to zdá neuvěřitelné, občas můžeme čistě fyzikálním náhledem na věc velice jednoduše získat různá geometrická tvrzení, která bychom jinak dokazovali složitě, nudně nebo dlouho … a úplně nejspíš to všechno dohromady. Nebudu se příliš rozepisovat, uvedu zde jen několik nejdůležitějších pojmů a základních poznatků, o kterých si myslím, že je dobré je mít při přednášce před sebou.

## Těžiště

**Definice.** Hmotným bodem *nazveme dvojici* $(X, m)$*, kde* $X$ *je nějaký bod v prostoru a* $m$ *jeho hmotnost.*

**Definice.** Těžištěm *soustavy hmotných bodů* $S = \{(X_1, m_1), \ldots, (X_n, m_n)\}$ *míníme bod* $T$*, pro který platí*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \boldsymbol{XA} = 0$$

Pro těžiště soustavy hmotných bodů platí následující velice důležitá tvrzení:

**Tvrzení.** (Jednoznačnost) Každá soustava má právě jedno těžiště (pokud má nenulovou hmotnost, tj. součet hmotností všech jejích hmotných bodů).

**Tvrzení.** („Lepení“) Těžiště soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolnou její podsoustavu hmotným bodem umístěným do těžiště této podsoustavy a mající její hmotnost.

**Tvrzení.** („Štěpení“) Těžiště soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolný její hmotný bod $(m, X)$ soustavou s těžištěm v bodě $X$ a celkovou hmotností $m$.

**Tvrzení.** (Zákon páky) Pro těžiště $T$ dvojice hmotných bodů $(A, m_A)$, $(B, m_B)$ platí

$$|AT| : |BT| = m_B : m_A$$

Možná Ti připadá, že ses zatím nic nedozvěděl(a) a pochybuješ o tom, že je takové povídání o těžišti k něčemu dobré – v geometrii?! Celý vtip spočívá v tom, že když člověk vhodně volí hmotnosti některých bodů a zkoumá jejich těžiště, dostane mnohdy téměř bez práce zajímavá tvrzení (o která na přednášce určitě nepřijdeš).

A to jsme se zatím bavili jen o těžišti. Co teprve když do geometrie přimícháme některé další fyzikální záležitosti, jako je třeba potenciální energie!

## Potenciální energie, rovnováha sil

**Tvrzení.** (Princip minima) Nepůsobí-li na soustavu hmotných bodů žádná vnější síla kromě tíhové síly a reakcí neměnného vnějšího prostředí, nalezne klid pouze v místě, kde její potenciální energie nabývá lokálního minima, to jest tam, kde je její těžiště nejníže, co to zrovna jde.

**Tvrzení.** (Rovnováha sil) Hmotný bod setrvává v klidu, pokud je součet sil na něj působících roven nulovému vektoru.

To jsou jistě věci, které důvěrně znáš. Opět se nabízí otázka, jak jsou využitelné v geometri. Nuže, člověk musí mít trochu důvtipu, příslušnou geometrickou úložku si vymodeluje z vhodných hejblátek, provázků, kladek, závažíček a pak se prostě kouká, jak působí tíhová síla a jak funguje zmíněná rovnováha sil. Kupodivu se z toho dá leccos vykoukat.

## Literatura

K této přednášce mě inspirovaly články Doc. Jaromíra Šimši z časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 97. (Archimédova statika v geometrii, Potenciální energie a rovnováha sil v geometrii) a také PraSečí seriál Libora Barta z roku 2000/2001, který v úvodu píše, že ho na toto téma přivedla táž série článků Doc. Šimši. Pokud vím, tyto články jsou celkem tři (kromě dvou výše zmíněných ještě Rotační setrvačnost v geometrii), jsou podle mě velice zajímavé a také velmi pěkně napsané. Moje přednáška z nich celá vychází, čili pokud Tě téma zaujalo a chceš se dozvědět něco víc, vřele doporučuji k přečtení.

# Kombinatorické identity

*Jaroslav Hančl*

## Úvod

Hlavním cílem této přednášky bude seznámit posluchače s netradičními důkazy známych i neznámých idetit. Především se budeme věnovat kombinatorickým reprezentacím, ale ukážeme si i řadu pěkných algebraických. V druhé části se naučíme používat metodu zvanou „počítání dvěma způsoby“ a předvedeme si řadu aplikací. Pokud na konci zbyde čas, tak můžeme zabrousit i do velmi složitých identit.

## Co by se již hodilo vědět

(1) *Kombinační číslo* $\binom{n}{k}$ lze jednak definovat algebraicky vzorcem $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, ale také kombinatoricky, jakožto počet všech $k$-prvkových podmnožin $n$-prvkové množiny. Obě tyto definice jsou ekvivalentní.

(2) *Binomická věta* tvrdí:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

(3) No a určitě se budou hodit i některé známe a lehké identitky:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad \frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k}.$$

## Kombinatorické důkazy

V této kapitolce si ukážeme, jak lze interpretovat danou identitu tak, aby se poté její důkaz stal hračkou. Nabídnu zde několik metod:

Metoda *bijekce*. Chceme-li ukázat, že dvě konečné množiny $A, B$ mají stejný počet prvků, nalezneme bijekci, která jednoznačně zobrazuje prvky množiny $A$ na prvky množiny $B$. Pro názornost si dokažme identitu:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Jinými slovy chceme dokázat, že počet $k$-prvkyových podmnožin $n$-prvkové množiny $M$ je stejný jako počet $(n-k)$-prvkových podmnožin. Jelikož ale bijekce $T : A \to M \setminus A$ pro každou $A \subseteq M$ dané podmínky splňuje, daná identita platí.

Metoda *seznamu* spočívá ve spočtení počtu všech prvků ve vhodně uspořádaných skupinách. Dokažme si například:

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$$

Číslo $(k+1)\binom{n+1}{k+1}$ udává počet prvků všech $(k+1)$-prvkových podmnožin $(n+ +1)$-prvkové množiny $M$. Spočteme-li si pro každý prvek $m \in M$ v kolika $(k+ +1)$-prvkových množinách se vyskytuje, dostáváme se k číslu $\binom{n}{k}$. Sečtením přes všechny prvky $m \in M$ pak dostaneme kýženou identitu.

Metoda *rozkladu do tříd* je založená na rozporcování množiny na několik tříd a následném využití bijekce a pravidla součtu. Dobře je to vidět na následujícím důkazu identity:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Nejprve rozdělme všechny $(k+1)$-prvkové podmnožiny dané $(n+1)$-prvkové množiny $M = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ do skupin $S_1$ a $S_2$ tak, že podmnožiny z $S_1$ vždy obsahují prvek $a_0$, zatímco podmnožiny z $S_2$ prvek $a_0$ neobsahují. Z této reprezentace se snadno zjistí, že $|S_1| = \binom{n}{k}$ a $|S_2| = \binom{n}{k+1}$. Musí ale též platit $|S_1| + |S_2| = \binom{n+1}{k+1}$ a proto dokazovaná identita platí.

Dále se ještě používá metoda *nápisů*, ve které se snažíme reprezentovat dané výrazy posloupnostmi písmen. A nakonec, moje nejmilejší metoda, metoda *cest ve čtvercové síti*. Zde budeme reprezentovat neznámé výrazy jako počty cest z bodu $C$ do bodu $D$, budeme stavět barikády a překonávat příkrá stoupání, avšak nakonec zjistíme, že jsme zase jenom v Pascalově trojůhelníku.

## Počítání dvojím způsobem

Pozorný a znalý čtenář si již zajisté všiml, že tato metoda byla v přadešlé kapitole použita. Ukažme si proto její plnou krásu na následujícím důkazu jinak jednoduché identity:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$$

(i) Algebraický důkaz je jednoduchý. Stačí dosadit do Binomické věty za $a = 1$ a $b = 2$ a jsme hotovi.

(ii) Kombinatorický důkaz je zajímavější. Vezměme si $n$-prvkovou množinu $M$ a počítejme počet všech dvojic $(A, B)$ podmnožin $M$, pro které platí

$A \subseteq B$. Pro dané $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ můžeme vybrat $k$-prvkovou množinu $B$ celkem $\binom{n}{k}$-krát a její podnmožinu $A$ celkem $2^k$-krát. Proto hledaný počet $N$ všech dvojic $(A, B)$ je $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$. Podíváme-li se na množinu $N$ jinak, dostaneme, že každý $m$ prvek množiny $M$ musí být v jedé z množin: $m \in A, m \in B \setminus A, m \in M \setminus B$. Proto pro každý $m \in M$ máme 3 možnosti a celkově tedy $3^n$ možností pro výběr $(A, B)$.

Metoda použitá v předchozím kombinatorickém důkaze je typický představitel počítání dvojím způsobem. Snažíme-li se takto dokázat nějakou identitu, je potřeba si chytře zvolit vhodnou množinu (v našem případě množinu $N$) a pak ještě mazaněji dvěma zcela odlišnými způsoby spočítat počet jejich prvků.

## Příklady

**Příklad 1.** Dokažte:

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

**Příklad 2.** Metodou rozkladu do tříd nebo metodou cest ve čtvercové síti dokažte:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

**Příklad 3.** Metodou bijekce dokažte:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

**Příklad 4.** Dokažte:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$$

**Příklad 5.** Metodou nápisu dokažte:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

**Příklad 6.** Metodou cest ve čtvercové síti dokažte identitu:

$$\binom{m+n}{m} = \sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{k}\binom{m+n-k-i-1}{m-k-1}, \text{ pro } k < m$$

**Příklad 7.** Dokažte:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{m} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1} + \cdots + \binom{m}{n}\binom{n-m}{0} = \binom{n}{m}2^m$$

**Příklad 8.** Dokažte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}$$

## Literatura

Nejprve bych chtěl poděkovat Martinu Tancerovi, jehož příspěvek „Počítání dvojím způsobem“ se stal předlohou pro tuto přednášku. Naleznete ho na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php`.

[1] Kolektiv: *Metody řešení matematických úloh II*, Masarykova Univerzita, Brno, 1991

[2] Josef Kaucký: *Kombinatorické identity*, Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, Bratislava, 1975

# Nestandardní metody

*Víťa Kala*

V 60. letech minulého století jistý pan Robinson vymyslel, že celý matematický svět je možné rozšířit o spoustu dalších, takzvaných nestandardních prvků. S těmito nestandardními prvky pak do matematiky přijdou i nejrůznější nesmírně divné principy, které najednou začnou platit. My si na přednášce některé z nich uvedeme a seznámíme se s tím, jak se dá těchto podivností využít k řešení praktických příkladů.[1]

Jak je vlastně toto rozšíření možné? Vždyť přece NIC nemůže být větší, než CELÝ matematický svět? To je sice pravda, ale ono se to dá obejít takovouto fintou:[2] celý matematický svět (někdy se mu říká taky univerzum) je tak velký, že je možné jej zkopírovat do sebe sama (existuje jeho část, která je úplně stejná, jako celek). Tuto část budeme od teď považovat za naše standardní univerzum. Najednou máme ale kolem tohoto standardního matematického světa ještě spousta místa, kam ho můžeme rozšiřovat! Vhodnou část tedy zvolíme za náš rozšířený svět (ten se nazývá internální univerzum). A hle: hnedle máme rozšíření standardního světa (který je úplně stejný, jako původní svět) do internálního univerza. No a celému původnímu světu se občas taky říká externální univerzum.

Tento postup se dá provést za předpokladu, že platí následující axiom, který za pravdivý sice většina matematiků nepovažuje, je ale dokázané, že jeho přidáním k ostatním matematickým axiomům nic nezkazíme. Jakmile jej přijmeme, můžeme už z něj dokázat všechna další tvrzení, která v našem nestandardním světě platí.

**Axiom.** (Superuniverzality[3]) *Existuje libovolně šílená množina.*[4]

Co že to znamená ta libovolně šílená množina? No přece přesně to, že může být libovolně šílená (: Třeba existuje množina $x$, jejímž jediným prvkem je ona sama (tedy $x = \{x\}$). Anebo existují dvě množiny $x, y$ takové, že $x \in y$ a $y \in x$. Anebo cokoli dalšího, na co si jen vzpomeneš ...

[1] K tomu, aby tato teorie mohla být vykládaná precizně, je potřeba znát velké množství vysokoškolské matematiky. Smiř se proto s tím, že skoro žádné tvrzení neplatí přesně tak, jak je zde ve sborníčku napsané nebo jak si je uvedeme na přednášce. Na této přednášce se tedy budeme bavit o tvrzeních, která neplatí v teorii, jež je sama o sobě v zásadě šílená a nesmyslná (:

[2] Nic si z toho nedělej, pokud zbytku tohoto odstavce neporozumíš. Pro pochopení zbytku přednášky to není vůbec potřeba.

[3] Většina tvrzení, se kterými se potkáme, bude mít podobně vtipné názvy (:

[4] Pozorná čtenářka si možná všimla, že tato formulace není zcela matematicky korektní. Pro zájemce ale můžu uvést i exaktní formulaci tohoto axiomu, z které možná bude patrná výhoda neformálního přístupu: Buďte $t \subseteq a$ množiny takové, že $t$ je tranzitivní. Buď $r$ extenzionální relace na $a$ taková, že $(a, r)$ je koncové rozšíření $(t, \in)$. Pak existuje tranzitivní množina $t'$ a izomorfismus $f : (t', \in) \simeq (a, r)$ takový, že $f \restriction t = id$.

## Princip saturovanosti

**Princip.** *Ať jsou $M_1, M_2, \dots$ množiny*[5] *takové, že když si vyberu konečně z nich, mají neprázdný průnik (takovému systému množin se říká centrovaný). Pak všechny množiny mají neprázdný průnik.*

Tento princip je zcela zásadní a má nedozírné důsledky. Představme si třeba množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel a označme $A_i = \mathbb{N} - \{i\}, i = 1, 2, 3, \dots$ (množinu, kterou dostaneme, když z $\mathbb{N}$ vyhodíme číslo $i$). Průnik konečně mnoha z těchto množin je jistě neprázdný (obsahuje nekonečně mnoho nevyhozených přirozených čísel), a tedy podle principu saturovanosti musí mít všechny množiny neprázdný průnik. Musí tedy existovat přirozené číslo $n$, které není rovné žádnému z čísel 1, 2, 3, ... ! S takovým číslem se člověk na ulici jen tak nepotká.

Setkáváme se tedy se zvláštní situací – množina $\mathbb{N}$ standardních přirozených čísel se nám s přechodem do nového světa nafoukla a přibyla do ní nová nestandardní přirozená čísla. Tuto množinu všech (i nestandardních) přirozených čísel budeme značit $N$. Jak už to tak v matematice bývá, za konečné se považují ty množiny, jejichž počet prvků je rovný nějakému přirozenému číslu. S novými přirozenými čísly se nám tedy najednou objevily i nové konečné množiny (které jsou větší, než libovolná standardní konečná množina).

Stejně tak, jako jsme dokázali, že množina přirozených čísel je větší, než jsme si mysleli, bychom mohli podobné tvrzení dokázat třeba o racionálních nebo reálných číslech. V tomto případě bychom zjistili, že musí existovat nekonečně malá reálná čísla, což má také spoustu zajímavých důsledků (najednou totiž třeba půjde v jistém smyslu mluvit o „sousedních“ reálných číslech, což mnohé úvahy značně zjednoduší, ale ve standardní matematice bohužel nejde).

## Princip přenosu

**Princip.** *Nějaké tvrzení (o standardních množinách) platí ve standardním matematickém světě právě tehdy, když platí v našem rozšíření.*

Tím, že jsme přešli do našeho většího světa, jsme tedy opravdu nic neztratili – platí tu přesně totéž, co v běžném nudném světě většiny matematiků.

[5] Tady si přece jen neodpustím jednu upřesňující poznámku pro znalé. Toto tvrzení platí jen pokud množin není příliš mnoho – je-li jich méně než nějaký libovolně velký, ale předem zvolený kardinál $\kappa$.

## Princip finitarizace

**Princip.** *Každá množina*[6] *je podmnožinou nějaké konečné množiny.*

Tak teď už se ale ten Víťa musel úplně zbláznit, ne? Jak by mohla být nějaká *nekonečná* množina částí nějaké *konečné*?! Světe div se, ono to opravdu jde ... Aby si člověk mohl aspoň trochu představit, jak je to možné, je dobré si uvědomit, že v rozšířeném světě je konečných množin mnohem víc, než kolik jich bylo v tom původním standardním. Takže není divu, že je víc i těch množin, které jsou částí nějaké konečné množiny.

Tento tvrzení je jedním z nejzajímavějších důsledků nestandardního rozšíření. Umožňuje totiž snadno a bezbolestně rozšířit platnost některých tvrzení, která platí pro konečné množiny, i na množiny, které jsou nekonečné. Jedním takovým příkladem, který vyřešíme na přednášce, je tento:

**Příklad.** Buď $G$ (nekonečný) graf takový, že každá konečná množina vrcholů jde obarvit $k$ barvami tak, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu. Dokaž, že potom jde takto obarvit celý graf.

[6] Toto platí opět jen pro množiny (externálně) menší než náš známý kardinál $\kappa$.

# Invarianty a v čem vězí

*Franta Konopecký*

Při styku s úlohami se využívají různé strategie a jednou z těch podstatných je hledání invariantů. To pomáhá zdolat mnohdy i zdánlivě obtížné problémy. Shlédněme ilustrační příklad:

**Příklad.** Buď $d(n)$ ciferný součet čísla $n$. Najděte všechna řešení rovnice

$$n + d(n) + d(d(n)) = 2008.$$

**Řešení.** Po krátkém nezdaru při hledání vyhovujících $n$ se pokusíme dokázat, že rovnice nemá řešení. A hle, využijeme invariant. Při ciferném součtu se zachovává zbytek po dělení třemi, proto je levá strana rovnice vždy dělitelná třemi a nemůže být rovna 2008.

Naše základní strategie tedy říká: **Kde se něco opakuje, hledej to, co zůstává stejné.** Příbuzná myšlenka je hledat něco, co se sice mění, ale kontrolovaným způsobem (např. nějaké číslo stále roste).

Uveďme si ještě několik invariantů, které jsou často užitečné.

(1) součet čísel, případně součet modulo $n$ (pro vhodné $n$).

(2) součet druhých mocnin (geometricky vzdálenost od počátku).

(3) další aritmetické operace: součin, podíl, součet čtverců rozdílů, ...

(4) počet nějakých jevů, případně modulo $n$.

## Příklady

**Příklad 1.** Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ... , $2n$ ($n$ je liché přirozené). Můžeme smazat libovolná dvě čísla $a$, $b$ a místo nich napsat $|a-b|$. Toto opakujeme. Dokažte, že poslední zbylé číslo je liché.

**Příklad 2.** Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

**Příklad 3.** Na zájezdě má každý turista nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem. Zobecněte.

**Příklad 4.** Mějme celá čísla $a$, $b$, $c$ a $d$, ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici $(a, b, c, d)$ čtveřicí $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Ukažte, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě větší než milion.

**Příklad 5.** Nech $0 < x_0 < y_0$. Vyjádřete vzorcem $x_n$, $y_n$ definované rekurentními vztahy:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}.$$

**Příklad 6.** Každé z čísel $a_1, \dots, a_n$ je $+1$ nebo $-1$ a platí $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokažte, že $n$ je dělitelné čtyřmi.

**Příklad 7.** Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, každý z nich má nanejvýš $n-1$ nepřátel. Ukažte, že je možno je rozesadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.

**Příklad* 8.** Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou $x$, $y$ a $z$ (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x+y$, $-y$, $y+z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (Řešte i pro reálná čísla.)

**Příklad 9.** Začněme s nějakou čtveřicí celých čísel (varianta: reálných čísel) $(a,b,c,d)$. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici $(a,b,c,d)$ čtveřicí $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$. Dostaneme se vždy ke čtveřici $(0,0,0,0)$?

**Příklad 10.** Začněme s čísly 1, 2, ..., $4n-1$. V jednom tahu nahradíme dvě čísla jejich rozdílem. Dokažte, že po $4n-2$ tazích zbyde sudé číslo.

**Příklad 11.** Mějme množinu $\{3,4,12\}$. Jsou-li $a$, $b$ různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0.6a - 0.8b$ a $0.8a + 0.6b$. Můžeme někdy dostat množinu (a) $\{4,6,12\}$ nebo (b) $\{x,y,z\}$ kde $|x-4|, |y-6|, |z-12| < 1/\sqrt{3}$ ?

**Příklad 12.** Vezmeme šachovnici s obvyklým obarvením políček. V jednom tahu můžeme převrátit barvy v (celé) jedné řadě, (celém) jednom sloupci, či v (celém) čtverečku $2 \times 2$ políčka. Můžeme získat obarvení s jediným černým políčkem?

**Příklad* 13.** Mějme čísla $a$, $b$ kladná celá. Dokud je $a > 0$ opakujeme následující operaci: pokud je $a < b$, dosadíme místo $(a,b)$ dvojici $(2a, b-a)$, jinak místo $(a,b)$ dosadíme $(a-b, 2b)$. Pro které výchozí dvojice postup skončí? Po kolika krocích? Co můžete říci o periodách v nekonečném procesu? žešte i pro kladná reálná $a$, $b$.

**Příklad 14.** Máme modré, červené a zelené korálky. V jednom tahu smíme provést výhodnou výměnu: zahodíme dva korálky, každý jiné barvy a dostaneme za ně korálek barvy třetí. Kdy můžeme tímto postupem skončit s jediným korálkem? Záleží barva zbylého korálku na zvoleném postupu?

**Příklad 15.** Opět máme modré, červené a zelené korálky, tentokrát za zahození dvou korálků různých barev dostaneme dva korálky barvy třetí. Kdy je možno docílit toho, že všechny korálky budou mít tutéž barvu?

**Příklad 16.** V každém políčku obdélníkové tabulky je napsáno celé kladné číslo. V každém tahu je možno zmenšit všechna čísla v jednom sloupci o jedna nebo zdvojnásobit všechna čísla v jedné řadě. Dokažte, že je možno dosáhnout tabulky se samými nulami.

**Příklad 17.** Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček nebo dvojek?

**Příklad 18.** Vrcholy mnohoúhelníku jsou označeny reálnými čísly. Pokud nějaká čtveřice po sobě jdoucích čísel $a$, $b$, $c$, $d$ splňuje vztah $(a-d)(b-c)<0$, smíme prohodit $b$ a $c$. Můžeme toto prohození provést nekonečněkrát?

**Příklad 19.** Na políčku b1 šachovnice je napsáno $-1$, na ostatních $+1$. Máme možnost změnit znaménko čísel v jednom sloupci, jedné řadě nebo na libovolné diagonále (včetně jednopolíčkových diagonál, tj. rohových políček). Dokažte, že nám vždy zbyde nějaká $-1$.

**Příklad 20.** Mějme řadu 2000 čísel. Do druhé řady pod každé číslo napíšeme počet jeho opakování v řadě první. Stejně vytvoříme z druhé řady řadu třetí atd. Dokažte, že jednou budou dvě po sobě jdoucí řady stejné.

**Příklad 21.** Na každém políčku šachovnice je celé číslo, smíme přičíst jedničku ke všem číslům nějakého čtverce $4\times 4$ nebo $3\times 3$ políčka. Můžeme opakováním této operace docílit toho, aby byla všechna čísla na šachovnici dělitelná (a) dvěma, (b) třemi?

**Příklad 22.** Z čísla $11^{2000}$ vyškrtneme první číslici a přičteme ji ke zbylému číslu. Tuto operaci opakujeme, dokud nezískáme deseticiferné číslo. Ukažte, že dvě z jeho cifer budou stejné.

**Příklad* 23.** Na políčku $(1,1)$ stojí věž. Jedním tahem smíme buď zdvojnásobit jednu souřadnici, nebo odečíst menší souřadnici od větší. Na která políčka se věž může dostat?

**Příklad* 24.** Mějme posloupnost začínající $1,0,1,0,1,0,\ldots$ jejíž další členy získáme jako součet předchozích šesti modulo 10. Vyskytne se v této posloupnosti šestice $\ldots,0,1,0,1,0,1,\ldots$ ?

**Příklad* 25.** Vezmeme 35 celých čísel. Můžeme vybrat nějakých 13 z nich a zvětšit každé z těchto třinácti o 1. Ukažte, že můžeme docílit toho, že všech 35 čísel bude stejných. Prozkoumejte i zobecnění — pro $n$ čísel, z nichž je možno volit $m$.

**Příklad 26.** Čísla $1, 2, \ldots, 2n$ jsou seřazena v libovolném pořadí. Ke každému číslu přičteme jeho pořadové číslo. Dokažte, že dostaneme dvě čísla se stejným zbytkem modulo $2n$.

**Příklad 27.** V kruhu je rozmístěno $n$ důlků, v každém je jedna kulička. V jednom tahu smíme posunout jednu kuličku po směru hodinových ručiček, jinou proti směru. Můžeme shromáždit všechny kuličky v jednom důlku?

**Příklad* 28.** Na každý mřížový bod $(x, y)$ pro $y \leq 0$ můžeme položit dámový kámen. Pak s těmito kameny zacházíme jako při solitéru: vybereme dva kameny sousedící vodorovně nebo svisle a jedním přeskočíme druhý (ten druhý zahodíme) a dopadneme na volné políčko. Tímto postupem chceme dostat nějaký kámen na políčko $(0, n)$ pro co největší $n$.

**Příklad* 29.** Čísla 1, 2, ..., $n$ jsou libovolně uspořádána. V jednom kroku můžeme dvě sousední čísla (varianta: dvě libovolná čísla) prohodit. Můžeme po lichém počtu kroků dojít k výchozímu uspořádání?

**Příklad* 30.** Vezměme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. V jednom kroku můžeme jeden trojúhelník rozdělit výškou (na přeponu) na dva podobné trojúhelníky. Můžeme opakovaným dělením docílit toho, že žádné dva z našich trojúhelníků nebudou shodné?

## Zdroje

Tento příspěvek je prakticky kopií příspěvku *Roberta Šámala* z roku 2000. Řešení naprosté většiny uvedených příkladů lze nalézt v publikaci

*Engel A.: Problem Solving Strategies, Springer-Verlag 1998.*

Ta je sice vzácná, ale když mi napíšete (`frakon@gmail.com`), tak vás zaopatřím elektronickou kopií.

# Miera a jej konštrukcia

*Rasťo Oľhava*

Ľudstvo malo odjakživa potrebu premeriavať, či už išlo o počet prasiatok v chlieve alebo o rozlohu pozemku. Veľkosť alebo množstvo hralo vždy dôležitú úlohu. Často išlo o meranie veľkosti určitej množiny. Dlhé roky sme si vystačili s empiricky zistenými a odskúšanými formulkami, pričom bežný človek si s nimi vystačí aj doteraz. Neplatí to o matematikoch, ktorí s rozvojom ich vedného oboru narazili na množiny, ktorých veľkosť s ich vtedajším matematickým aparátom nevedeli určiť. A tak vznikla miera. Na mojej prednáške sa dozviete, čo to je a ako skonštruovať najzákladnejšiu z nich – Lebegueovu mieru. Uveďme si pojmy a vety, ktorými sa budeme zaoberať:

**Definícia 1.** *Nech $X$ je množina. Systém $\mathcal{O}$ podmnožín $X$ sa nazýva okruh, ak*

*(O1)* $\emptyset \in \mathcal{O}$
*(O2)* $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{O}$
*(O3)* $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{O}$

**Definícia 2.** *Nech $X$ je množina. Systém $\mathcal{O}$ podmnožín $X$ sa nazýva $\sigma$-okruh, ak*

*($\sigma$-O1)* $\emptyset \in \mathcal{O}$
*($\sigma$-O2)* $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{O}$
*($\sigma$-O3)* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{O}$

**Definícia 3.** *Algebra je okruh, ktorý obsahuje celý priestor $X$. $\sigma$-algebra je $\sigma$-okruh obsahujúci celý priestor $X$, pričom ak $\mathcal{S}$ je $\sigma$-algebra na $X$, dvojica $(X, \mathcal{S})$ sa nazýva merateľný priestor.*

**Definícia 4.** *Nech $(X, \mathcal{S})$ je merateľný priestor. Množinová funkcia $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ sa nazýva miera, ak spĺňuje*

*(M1)* $\mu(\emptyset) = 0$
*(M2) ($\sigma$-additivita) ak $A_j \in \mathcal{S}$, $j \in \mathbb{N}$ sú po dvoch disjunktné, potom*

$$\mu\Big(\bigcup_j A_j\Big) = \sum_j \mu(A_j)$$

**Definícia 5.** *Vonkajšou mierou na množine $X$ rozumieme množinovú funkciu $\gamma : 2^X \to [0, \infty]$ ak spĺňuje*

*(VM1)* $\gamma(\emptyset) = 0$
*(VM2)* $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$
*(VM3) ($\sigma$-subadditivita)* $\gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j)$

**Definícia 6.** *Nech $\gamma$ je vonkajšia miera na $X$. Množinu $M \subset X$ nazveme $\gamma$-merateľnou, ak pre každú "testovaciu" množinu $T \subset X$ platí*

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \backslash M)$$

*Systém všetkých $\gamma$-merateľných množín značíme $\mathcal{M}(\gamma)$ a množinovú funkciu $\gamma \lfloor \mathcal{M}(\gamma)$ značíme $\gamma^o$*

**Veta 7.** (Vlastnosti miery) *Nech $A_j \in S$*
*(a)* $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$
*(b) ak $A_j \in S, j \in \mathbb{N}, A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, potom*

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \lim_j \mu(A_j)$$

*(c) ak $A_j \in S, j \in \mathbb{N}, A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, a ak $\mu(A_1) < \infty$, potom*

$$\mu(\bigcap_j A_j) = \lim_j \mu(A_j)$$

**Veta 8.** (Carathéodory) *Nech $\gamma$ je vonkajšia miera na $X$. Potom systém $\mathcal{M}(\gamma)$ tvorí $\sigma$-algebru a $\gamma^o$ je miera.*

No a zvyšok sa dozviete na prednáške ...

# Topologie

*Jakub Opršal*

Obecná topologie je jedna z obecnějších matematických disciplín. Co se historie týče, tak vznikla postupným zobecňováním z matematické analýzy reálných čísel přes metrické prostory. Přístup, o který se pokusím na této přednášce bude trochu netradiční, neboť půjdu od lesa a tedy začnu od obecnějších principů.

**Definice.** *Mějme prostor $X$,* (topologickým) uzávěrem *rozumíme operaci* $\overline{\phantom{A}}$, *která každé pomnožině $A \subseteq X$ přiřádí její uzávěr $\overline{A} \subseteq X$, která splňuje:*

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$
(ii) $A \subseteq \overline{A}$
(iii) $\overline{A} \subseteq \overline{(\overline{A})}$
(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

*Prostoru $X$ pak říkáme* Topologický prostor.

Topologický uzávěr množiny $A$ lze intuitivně chápat jao množinu všech bodů, které mají k $A$ „blízko“. První axiom pak říká „k prázdné množině nemá žádný bod blízko“, druhý, že „všechny body $A$ mají k množině $A$ blízko“. Třetí pak „body, co mají blízko k bodům, co jsou blízko $A$, jsou blízko k $A$“ – tento axiom je asi nejmíň intuitivní, ale pokud ho vynecháme dostaneme něco jiného než topologický prostor. Poslední pak „body, co mají blízko k $A \cup B$ mají blízko buď k $A$, nebo k $B$“.

**Definice.** *Množinu $A \subseteq X$ nazveme* uzavřenou, *je-li shodná se svým uzávěřem. Tj. $A = \overline{A}$. Množinu $A$ nazveme* otevřenou, *je-li dopňkem uzavřené, tj. $X \setminus A = \overline{X \setminus A}$.*

**Lemma.** *Platí $B = \overline{A}$ právě když $B$ je průnik všech uzavřených množin obsahujících $A$.*

**Věta.** *Je-li $X$ prostor a $A$, $B$ uzavřené množiny pak*

(i) *$\emptyset$ a $X$ jsou uzavřené*
(ii) *$A \cup B$ je uzavřená*
(iii) *Jsou-li $A_i$ uzavřené množiny pro $i \in \kappa$, pak $\bigcap_{i\in\kappa} A_i$ je uzavřená.*

Obdobná věta platí i pro otevřené množiny. Vlastně ve skutečnosti je tato věta definice topologického prostoru, takže abyste si rozumněli s ostatními matematiky uvedu ještě jednu definici:

**Definice.** (Obvyklá definice topologického prostoru) Topologickým prostorem *Rozumíme prostor $X$ a systém $\mathcal{T}$ některých podmnožin $X$, že splňuje:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ a $X \in \mathcal{T}$

(ii) $A, B \in \mathcal{T} \to A \cap B \in \mathcal{T}$
(iii) *Jsou-li* $A_i \in \mathcal{T}$ *pro* $i \in \kappa$, *pak* $\bigcup_{i\in\kappa} A_i \in \mathcal{T}$.

*Množinám z* $\mathcal{T}$ *pak říkáme* otevřené množiny.

**Lemma.** *Množina* $A \subseteq X$ *je otevřená právě když pro každý její bod* $x$ *existuje otevřená množina* $U_x$, *že* $x \in U_x \subseteq A$.

**Příklad.** (Diskrétní prostor) Uvažme uzávěr $\overline{A} = A$ pro každou podmnožinu $X$, kde $X$ je tedy libovolná množina. Pak všechny množiny jsou uzavřené a všechny množiny jsou otevřené. A z intuitivního popisu máme každý bod je od libovolné množiny „daleko“ (pokud není v ní). Tomuto prostoru se říká diskrétní, neboť sestává s oddělených (tzv. izolovaných) bodů.

**Příklad.** (Indiskrétní prostor) Naopak, je-li $\overline{A} = X$ pro každou podmnožinu $X$, pak intuitivně všechny body mají k libovolné množině „blízko“, uzavřené a otevřené množiny jsou pouze dvě a to $\emptyset$ a $X$.

**Příklad.** (Sierpinského prostor) Další příklad je jeden z „divnějších“ prostorů. Množina $X$ je dvouprvková $\{a, b\}$, přitom definujeme uzávěr $\overline{\{a\}} = \{a\}$ a $\overline{\{b\}} = \{a, b\}$. Ostatní hodnoty máme jasné. Z intuitivního hlediska pak bod $a$ má „blízko“ k bodu $b$, ale bod $b$ nemá blízko k bodu $a$.

Ještě si povíme o tom, co je to spojité zobrazení. Intuitivně asi spojitou funkci v reálných číslech chápeš jako „čáru, která se dá nakreslit jedním tahem“. Bohužel ani tato intuitivní představa nám nepomůže v pochopení toho, co je spojitá funkce. Mnohem přesnější je „zobrazuje body, co jsou blízko, na body, co jsou blízko“. Jak by to ale vypadalo formálně? S trochou představivosti snad:

**Definice.** *Jsou-li* $X, Y$ *dva topologické prostory a* $f\colon X \to Y$ *zobrazení. Řekneme, že* $f$ *je spojité pokud pro každou* $A \subseteq X$ *platí:*

$$f\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f[A]}$$

Abychom zabránili takovým zvláštním případům, jako jsou poslední dva příklady (Sierpinského a indiskrétní prostor), tak se zavádějí různé oddělovací axiomy. Z nich uvedu jen dva (těch nejběžnějších je pět a značí se $T_0, T_1, \ldots, T_4$, většina z nich má ještě rozumnější jména, krom těchto jsou ještě některé „mezi“ a to $KC$ a $T_{3\frac{1}{2}}$).

**Definice.** ($T_1$ prostor) *Prostor je* $T_1$ *je-li každá jednoprvková podmnožina uzavřená.*

**Tvrzení.** Každý konečný $T_1$ prostor je diskrétní.

Tedy zajímavé jsou právě nekonečné prostory z nich zkusím uvést a vysvětlit (jestli se k tomu na přednášce dostaneme) jeden příklad, který má velký význam v Topologii a který je také velmi dobře známý i tak.

**Definice.** (Cantorovo diskontinuum) *Nosná množina Cantorova diskontinua* $C$ *je* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *(množina všech nekonečných posloupností nul a jedniček). Topologii na tomto prostoru popíšeme otevřenými množinami. Otevřené jsou prvně množiny všech poslopností, které se na daných konečně mnoha pozicích shodují s danou posloupností (máme-li* $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_n} \in \{0,1\}$*, pak do otevřené množiny* $U$ *patří všechny posloupnosti, které mají na pozici* $i_j$ *hodnotu* $\sigma_{i_j}$ *pro každé* $j$*. A dále jsou otevřené všechny sjednocení takových množin.*

**Definice.** ($T_2$ aneb Hausdorffův prostor) *Prostor nazveme* $T_2$ *neboli Hausdorffův pokud pro každé dva body* $x, y$ *existuje otevřená množina* $U$*, že* $x \in U$ *a* $y \notin \overline{U}$*.*

# Zlatý řez

*Monika Pospíšilová*

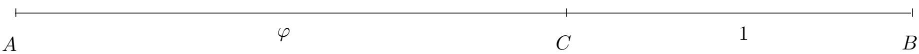
### Motto:

*Geometrie má dva velké poklady; jedním je věta Pythagorova; druhým rozdělení úsečky v krajním a středním poměru. První lze přirovnat k žíle zlata; druhý lze označit za drahokam.* (JOHANNES KEPLER)

### Co je to zlatý řez?

Zlatý řez je poměr pozoruhodných vlastností. Říká se mu také „Krajní a střední poměr“ nebo vznešeně „Božská proporce“ a značí se $\varphi$. Jeho hodnota je iracionální číslo: $\varphi = 1{,}6180339887\ldots$

Nejznámější **definice** pochází od Euklida (300 př.n.l.) a zní: „Úsečka se rozdělí v krajním a středním poměru tehdy, když se celá má k delšímu dílu jako delší díl ke kratšímu.“




$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

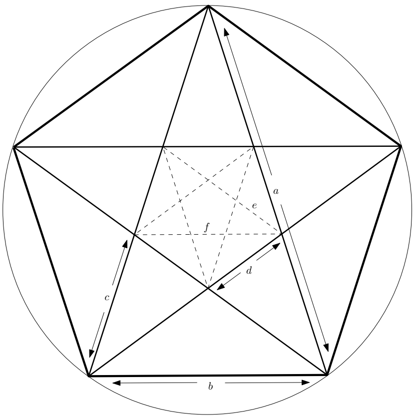
$$\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

### Historie

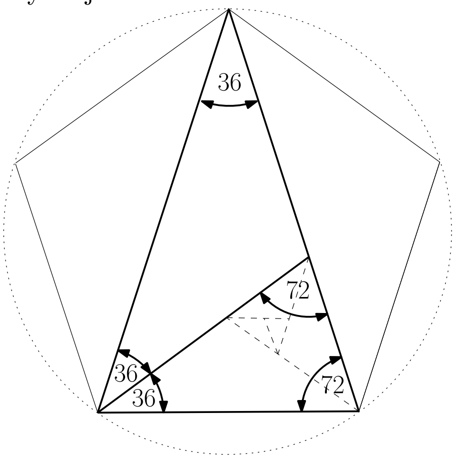
Za první průkopníky v oblasti zlatého řezu jsou považováni **Pythagorejci** (6. stol. př.n.l.). Oni sami ho nepojmenovali, ani nedefinovali, ale jejich posedlost číslem pět je k němu nevědomky přivedla. Proč si Pythagorejci oblíbili právě číslo 5 a jak souvisí toto číslo s $\varphi$? Obliba pětky vyšla ze symboliky čísel – pětka znamemá lásku a manželství a je to svazek čísel 2 (první ženské číslo značící rozporuplnost) a 3 (první mužské číslo značící harmonii). Nepřekvapí nás, že symbol bratrstva byla pěticípá hvězda, která je fascinovala a zároveň děsila svými vlastnostmi:



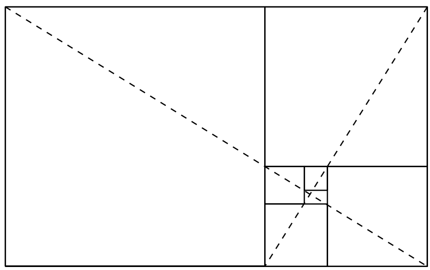

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \varphi$$

Zde si člověk poprvé uvědomil existenci iracionálních čísel. Tehdy tento jev nazývali nesouměřitelnost (to znamená, že $\frac{a}{b}$ nelze poměřit – nelze zapsat ani na hodně moc desetiných míst ... ). Tento objev vyvolal filozofickou krizi.

Zlatý trojúhelník




Zlatý obdélník



**Platón** (5/4.stol př.n.l.) navázal na Pythagorejce především zájmem o nesouměřitelnost a tzv. „Platónská“ tělesa. Stěny těchto těles tvoří shodné a rovnostrané mnohoúhelníky a těmto tělesům lze opsat kouli tak, že všechny vrcholy leží na ní. Platónskými tělěsy jsou čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. Platón jim přisuzoval základní elementy země, v pořadí z předchozí věty, takto: oheň, Země, vzduch, vesmír, voda. 12-tistěn a 20-tistěn mají ke zlatému řezu obzvlášť blízko. $\varphi$ se objevuje ve výpočtu jejich objemu, lze v jejich řezech nalézt zlaté obdélníky a vepíšeme-li je do sebe, poměr jejich hran bude $\frac{\varphi^2}{\sqrt{5}}$.

**Euklides** dal zlatému řezu jméno Krajní a střední poměr (termín zlatý řez pochází z 19. stol). Zajímal se o něj, podobně jako další řečtí badatelé, především ze zájmu o sestrojení pětiúhelníku a dvou platónských těles – dvanáctistěnu a dvacetistěnu, čemuž věnoval velkou část svého slavného třináctisvazkového díla Základy.

### Vlastnosti $\varphi$:

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$
$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$
$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$
$$\varphi - 1 = 2 \cdot \sin(18)$$

### Fibonacci (12/13. stol)

**Fibonacci** (z Filius Bonacci = syn dobrosrdečné povahy), méně známý pod svým pravým jménem Leonardo Bigollo, žil v Itálii a zasloužil se o používání indicko-arabských číslic namísto římských (kvůli aritmetice … ), také se zajímal o euklidovskou geometrii, kde popsal nové vztahy týkající se obsahu a délek stran a úhlopříček pětiúhelníku, ale i dalších mnohoúhelníků. Proslavil se především legendární úlohou o množení králíků:
„Kolik párů králíků vznikne z jednoho páru, předpokládáme-li, že každý pár zplodí každý měsíc jeden nový pár, který začne plodit potomky druhý měsíc od narození.“
Řešení si ukážeme na přednášce.
Finonacciho posloupnost:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$
$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

A jak tato čísla souvisí se zlatým řezem? Úzce…

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \varphi$$

Tríček na sčítání Fibonacciho čísel:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

Fibonacciho čísla se překvapivě často nacházejí v přírodě: listy na stonku, okvětní lístky růže, povrch ananasu, šiška jehličnanů, ...

## Renesance

Zlatý řez se často pojí s renesancí, ale tato souvislost není příliš prokazatelná. Pokrok jistě nastal, ale zlatý řez určitě nenajdeme na každé stavbě, obrazu nebo lidském těle, jak se říká. Například v dílech Leonarda da Vinciho, který mimochodem ilustroval knihu o zlatém řezu, se tento poměr nikdy s jistotou nenašel. V malbách ho nacházíme spíše náhodou a to po vytrvalé snaze.. Velký pokrok a především popularizi přinesl zlatému řezu Luca Pacioli (15./16. stol), když napsal knihu s názvem „Božská proporce" opěvující číslo $\varphi$.

O sto let později přichází **Johannes Kepler** se svým absurdním modelem velikosti oběžných drah všech (tehdy šesti) planet. Model je založen na vepisování platónských těles do sebe – oběžná dráha Merkuru se má k Venuši jako sféra opsaná osmistěnu ku sféře dvacetistěnu, který je opsaný sféře Venuši (osmistěnu). Celé pořadí je: uvnitř osmistěn (Merkur), na jeko sféře dvacetistěn (Venuše), jehož sféra představuje Zemi, dále dvanáctistěn (Mars), čtyřstěn (Jupiter) a krychle (Saturn). Je neuvěřitelné, že tato představa, až na drobné odchylky, vychází. Kepler mimojiné přišel na tři zajímavé věci týkající se zlatého řezu:

[1] $\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \varphi$

[2] $F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} \pm 1$, kde $F_n$ je $n$-té Fibonacciho číslo

[3] Máme-li pravoúhlý trojúhelník $ABD$ s přeponou $AB$ rozdělenou zlatým řezem v bodě $C$ a pravým úhlem v bodě $D$ ležícím na kolmici vztyčené v bodě zlatého řezu $C$, pak $|AC| = |BD|$.

## Příklady

**Příklad 1.** Je dána kružnice $k$ o poloměru 1, do níž je vepsáno pět kružnic o poloměrech $r$ tak, že každá se dotýká dvou dalších a má vnitřní dotek s kružnicí $k$. Určete $r$.

**Příklad 2.** Kolika způsoby lze vyběhnut schody, mužeme-li je brát po jednom nebo po dvou.

**Příklad 3.** Určete hodnotu čísla

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

**Příklad 4.** Je dán rovnoběžník $ABCD$. Přímka vedená bodem $D$ protíná úsečku $AC$ v bodě $G$, úsečku $BC$ v bodě $F$ a polopřímku $AB$ v bodě $E$ tak, že trojúhelníky $BEF$ a $CGF$ mají stejný obsah. Určete poměr $|AG| : |GC|$.

**Příklad 5.** Dokažte $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$. $F_n$ značí $n$-té Fibonacciho číslo.

**Příklad 6.** Mějme obdélník $ABCD$. Jeho strany $AB$ a $BC$ rozdělíme body $E$ a $F$ v poměru zlatého řezu tak, aby $|BF| > |CF|$ a $|BE| > |AE|$. Dokažte, že trojúhelníky $ADE$, $CDF$ a $BEF$ mají stejný obsah.

## Literatura

Tato přednáška je inspirována především jednou publikací:

(1) Mario Livio: *Zlatý řez*, Dokořán, Praha, 2006.

# Prvočísla

*Michal „Kenny" Rolínek*

Na přednášce si povíme všechno možné o prvočíslech. Dozvíte se, kam sahají naše znalosti o nich a taky, kam už nedosáhnou. Můžete se těšit na hezká prvočísla i na hezké příklady s nimi. Taky si řekneme, k čemu jsou prvočísla dobrá v úlohách.

## Rozložení prvočísel

- Prvočísel je nekonečně mnoho.
- Úseky bez prvočísel jsou libovolně dlouhé.
- Prvočísla řidnou logaritmicky (Čebyšev).
- Prvočísel tvaru $4n + 1$ je nekonečně mnoho.
- Prvočísel tvaru $qn + 1$, kde $q$ je prvočíslo je nekonečně mnoho.
- Prvočísel tvaru $an + b$, kde $(a, b) = 1$ je nekonečně mnoho (Dirichlet).
- Mezi $n$ a $2n$ existuje prvočíslo pro $n \geq 2$ (Bertrand).
- (Hypotéza) Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $n^2 + 1$ (popřípadě si dosaď svůj oblíbený nerozložitelný polynom).
- (Hypotéza) Mezi $n^2$ a $(n + 1)^2$ existuje prvočíslo pro $n \geq 2$ (opět si můžeš dosadit různé mocniny).

**Příklad 1.** Ukažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel obsahující vaše rodné číslo (nepřerušené).

**Příklad 2.** Ukažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel začínajících vaším rodným číslem (v nejhorším použijte některou z hypotéz).

## Počítání s prvočísly

Taky máte pocit, že počítání s přirozenými čísly je otrava? Zkusme si počítat s čísly $\{0, 1, 2 \dots p - 1\}$ a uvidíme, že i zde vše krásně funguje.

- Sčítání, odčítání a násobení je úplně bez problému.
- Překvapivě se tu i dělení chová slušně.
- $a^p \equiv a \pmod{p}$ (Fermat).
- $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ (Wilson).

**Příklad 3.** Najděte všechny prvočísla $p$, pro něž je číslo

$$\binom{p}{0}^2 + \binom{p}{1}^2 + \cdots + \binom{p}{p}^2$$

dělitelné číslem $p^3$.

**Příklad 4.** Sečtěte řadu

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{p-2}{p-1} \pmod{p}.$$

**Příklad 5.** Vyřešte kongruenci

$$(1+2)(1+2+3)\dots(1+2+\cdots+p-1) \equiv 2002 \pmod{p}$$

## Otevřené problémy

- Riemannova hypotéza: O ní podrobněji až na přednášce
- Goldbachova hypotéza: Každé sudé číslo větší než 2 lze zapsat jakou součet dvou prvočísel.
- Slabá Goldbachova hypotéza: Každé liché prvočíslo větší než 5 lze zapsat jakou součet tří prvočísel.
- Prvočíselná dvojčata: Existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat.
- Existuje nekonečně mnoho Fermatových, Mersennovsých, Fibonacciovských prvočísel.

## Zajímavosti, novinky

- Existuje polynom (27 proměnných), jehož kladné hodnoty jsou právě všechna prvočísla (1947).
- Prvočísla se dají testovat v polynomiálním čase (2002).
- Prvočísla tvoří aritmetické posloupnosti libovolné délky (2004).
- Číslo 0,2357111317... je iracionální (Erdos).
- Posloupnost $a_n = \sqrt{24n+1}$ obsahuje všechna prvočísla.
- Přirozená čísla lze přeuspořádat tak, aby součet žádné souvislé konečné podposloupnosti nebyl prvočíselný (na přednášce kdyžtak dovysvětlím).

Následuje několik zajímavých prvočísel (ovšem některá si nechám až na přednášku):

$$42^{42} + \pi(42)$$
$$120^{120} - 119^{119}$$
$$6163, 61603, 616003, 6160003$$
$$7^7 + 11^7 + 13^7$$
$$5555555555551111111111$$
$$77777677777$$

# Vieta jumping

*Michal „Kenny“ Rolínek*

Pod podivným názvem této přednášky se skrývá jen pár let stará finta, která nám pomůže při řešení kvadratických Diofantických rovnic. Více už ukáží samotné příklady.

**Příklad 1.** Kladná celá čísla $a$, $b$ jsou taková, že číslo $(4a^2 - 1)^2$ je dělitelné číslem $4ab - 1$. Dokažte, že $a = b$. (IMO 2007)

**Příklad 2.** Budiž $a$, $b$, $c$ taková přirozená čísla, že platí

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = c.$$

Ukažte, že pak $c = d^2$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$. (IMO 1988)

**Příklad 3.** Pro $x$, $y$, $z$ platí

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = z.$$

Dokažte, že $z = 3$. (Moldávie 2006)

**Příklad 4.** Nalezněte všechny dvojice čísel $(m, n)$ takové, že $mn - 1$ dělí $m^2 + n^2$. (USA 2007)

**Příklad 5.** Přirozená čísla $a$, $b$, $c$ splňují

$$0 < a^2 + b^2 - abc \leq c.$$

Ukažte, že $a^2 + b^2 - abc$ je čtverec. (CRUX 1998)

**Příklad 6.** Ukažte, že ke každému $m \in \mathbb{N}$ lze najít nekonečně mnoho dvojic nesoudělných čísel $(x, y)$ takových, že

(i) $x \mid y^2 + m$
(ii) $y \mid x^2 + m$ (IMO short 1992)

**Příklad 7.** Zjistěte, pro která $n \in \mathbb{N}$ má

$$x + y + w + z = n\sqrt{xywz}$$

rovnice celočíselné řešení. (Británie 2002)

# Fraktály

Michal Rušin

## Úvod

Ak sa pozrieme kamkoľvek do prírody, zistíme, že prevažná väčšina útvarov je nepravidelných. Tieto útvary sa dá vyjadriť aproximáciou, tým však často dochádza k deformáciám a strate informácií. Predstavme si, že máme zmerať obvod nejakého ostrova. Jednou z možností je zmerať ho meradlom s nejakou dĺžkou. Po zopakovaní merania meradlom napr. polovičnej dĺžky, nameriame o niečo viac. Teoreticky je možné zmenšovaním dĺžky meradla dospieť k nekonečnej dĺžke ostrova.

Fraktálna geometria sa na rozdiel od tej klasickej zaoberá členitosťou objektov. Termín fraktál pochádza z latinského fractus – rozbitý. Matematická definícia tohto pojmu zatiaľ neexistuje, najbližšie k skutočnosti je zrejme definícia B. Mandelbrota:

**Definícia 1.** *Fraktál je množina, pre ktorú platí, že jej Hausdorfova dimenzia je väčšia než dimenzia topologická.*

Z problému skúmania dĺžky ostrova vyplýva jeden závažný dôsledok. Ak má totiž krivka nekonečnú dĺžku, mala by v rovine „zaberať o niečo viac miesta“ než krivka s konečnou dĺžkou. To „viac miesta“ sa nazýva Hausdorffova dimenzia a u fraktálov je vždy väčšia než topologická dimenzia. Priamka má topologickú dimenziu 1, štvorec 2, kocka 3 atď. Ak je obvod fraktálu $K = N * e^D$, kde $N$ je počet úsečiek nutných k aproximácii, $e$ je dĺžka úsečky a $D$ je dimenzia, potom mierka $s = \frac{1}{N}$. Dosadením $K = 1$ sa Hausdorffova dimenzia

$$D_H = \frac{log(N)}{log(\frac{1}{s})}.$$

To znamená, že dimenzia fraktálu je neceločíselná.

Okrem Mandelbrotovej definície existuje aj tzv. všeobecná definícia:

**Definícia 2.** *Fraktál je taký útvar, že pri jeho zväčšení dostaneme opäť rovnaký obraz, bez ohľadu na mierku.*

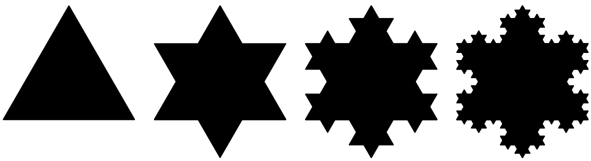
Táto vlastnosť sa nazýva invariantnosť voči zmene mierky. Vezmime si taký strom. Z diaľky vidíme kmeň, z ktorého vyrastajú konáre. Po priblížení vidíme konár (predstavuje kmeň), z ktorého vyrastajú listy (predstavujú konáre) atď.

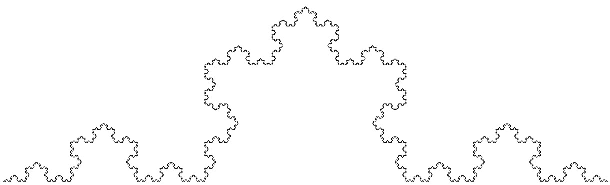
K vzniku teórie chaosu a s ňou súvisiacej fraktálnej geometrie významne prispeli počítače. Na prelome päťdesiatych a šesťdesiatych rokov sa matematik E. Lorenz snažil vymyslieť rovnice popisujúce správanie atmosféry. Vtedy boli pomalé výpočty už aj jednoduchých rovníc a tak si raz skrátil čas vykreslením len polovice grafu. Po porovnaní so skorším grafom však zistil, že od určitého bodu sa grafy rozchádzajú stále viac. Pôvodny graf bol totiž počítaný s presnosťou na 8 desatinných miest, polovičný len na 6.

## Príklady fraktálov

Medzi najjednoduchšie fraktály patria tzv. iteračni funkčni systémy. Najjednoduchším fraktálom vôbec je Cantorovo diskontinuum. Na začiatku je priamka. Tu rozdelíme na tri zhodné časti a obe krajné časti zase rozdelíme na tri časti, na ktoré aplikujeme toto pravidlo. Najprv vznikne niekoľko úsečiek, ale po nekonečne mnohých iteráciách vznikne len nekonečne veľa bodov.

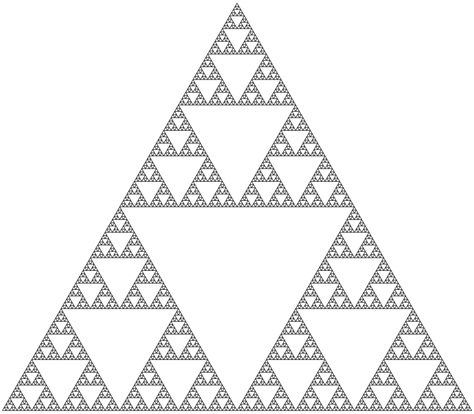
Ďalším jednoduchým fraktálom je Kochova vločka. Predstavte si trojuholník, ktorému na každú stranu „prilepíme“ k prostrednej tretine ďalší trojuholník o tretinu menší. A tento postup budeme opakovať aj na tento trojuholníček. Po čase vznikne krivka so zaujímavými vlastnosťami, ktoré nájdeme aj u ďalších fraktálov. Táto krivka nikdy nepretne sama seba, pretože nové trojuholníky sú príliš malé na to, aby si „prekážali“. Každá iterácia krivku o malý kúsok predĺži, ale plocha zostáva na rozdiel od krivky konečná.

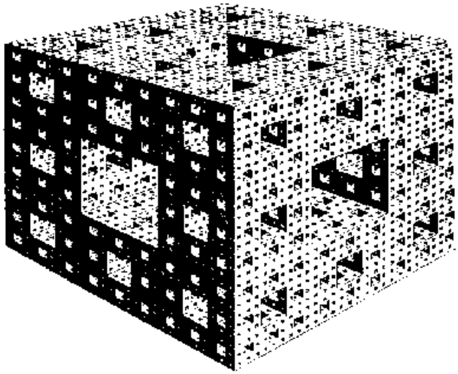




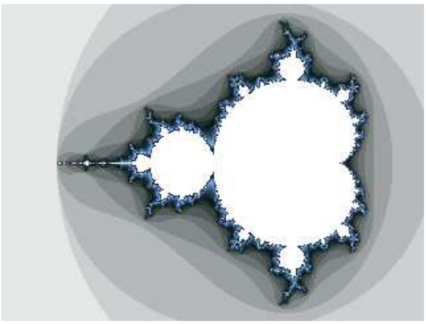
Veľmi známy fraktál je Sierpinského trojuholník. Tento obrazec vznikne tak, že z trojuholníka vyrežeme trojuholník tvorený strednými priečkami trojuholníka pôvodného a tento postup opakujeme na tri ostávajúce trojuholníčky. Podobné operácie môžeme urobiť na viacrozmerné objekty. Príkladom je Mengerova huba, trojrozmerná mriežka s nekonečne veľkým povrchom, ale nekonečne malým objemom.

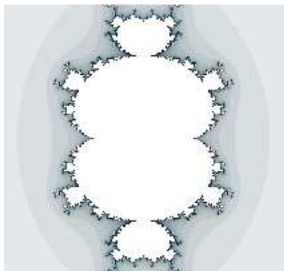
Trochu zložitejším prípadom je Mandelbrotova množina. Vzniká iteratívne a je definovaná rovnicou $z_n = z_{n-1}^2 + c$, kde $z$ a $c$ sú komplexné čísla. Určiť, či nejaký bod leží v tejto množine je celkom jednoduché. Vezmeme komplexné číslo a rekurentý vzťah opakovane aplikujeme až kým výsledok výpočtu nepresiahne





hodnotu 2. Ak ju presiahne, výpočet končí, ak nie, bod do množiny patrí. V praxi sa preto nastavuje počet iterácií, po ktorých výpočet skončí aj keby mal správne pokračovať. Samozrejme je možné celočíselný exponent nahradiť exponentom reálnym alebo napr. komplexným, tým ale vzniká veľmi zložitý štvorrozmerný útvar.





Ukazuje sa, že v praxi je dosť ťažké nenaraziť na fraktálny útvar. K popisu týchto útvarov sa používa fraktálna geometria, bez ktorej by niektoré prírodné úkazy, útvary boli nepochopiteľné (napr. turbulencie). Fraktály majú však širšie využitie. Predikcia (predpoveď) počasia je toho najlepším dokladom. Dôležitá je tiež predikcia v oblasti ekonomiky a ďalších.

## Literatúra

Príspevok vychádza z informácií na adrese `http://martin.hinner.info/math/Fraktaly` a `http://www.sweb.cz/chaos.fraktaly/`.

# Aplikace Eulerovy formule

*Zuzka Safernová*

Teorie grafů se neustále rozvíjí, nemá uplatnění jen v informatice či elektronice, ale např. i v geometrii. Na přednášce se nejprve seznámíme se základními pojmy z teorie grafů, poté formulujeme a dokážeme Eulerovu formuli a nakonec se zaměříme na její uplatnění v geometrii.

Pojmy z teorie grafů, které se budou hodit: graf, souvislý graf, rovinný graf, úplný graf, bipartitní graf

**Věta 1.** (Eulerova formule) *Nechť $G$ je souvislý rovinný graf s $n$ vrcholy, $e$ hranami a $f$ stěnami. Pak $n - e + f = 2$.*

S touhle formulkou se mnozí z vás jistě už setkali, ovšem spíše v souvislosti s mnohostěny. V teorii grafů se často využívá následujícího důsledku:

**Lemma 2.** *Nechť $G$ je rovinný graf (bez smyček a násobných hran) s $n > 2$ vrcholy. Pak*

(i) *$G$ obsahuje vrchol stupně nejvýše 5.*
(ii) *$G$ má nejvýše $3n - 6$ hran.*
(iii) *Jsou-li hrany $G$ obarveny dvěma barvami, pak existuje vrchol $G$ takový, že z něj vycházejí nejvýše dvě „alternující“ hrany. „Alternující“ hrana je taková, že hrana, která po ní ve směru hodinových ručiček následuje, má jinou barvu než ona sama.*

Mimo jiné umíme pomocí Eulerovy formulky snadno ukázat, že úplný graf $K_5$ ani úplný bipartitní graf $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Tato pěkná formulka má však uplatnění i v geometrii. Důkazem budiž následující 3 pěkné věty.

**Věta 3.** (Sylvester-Gallai) *Pro každou množinu $n \geq 3$ bodů v rovině takovou, že ne všechny body leží na přímce, existuje přímka, která obsahuje právě dva body této množiny.*

**Věta 4.** *Je-li dána konečná konfigurace „černých“ a „bílých“ bodů v rovině, ne všechny na přímce, pak vždy existuje „monochromatická“ přímka: přímka obsahující nejméně dva body jedné barvy a žadný bod barvy druhé.*

**Věta 5.** (Pickova formule) *Plocha libovolného (ne nutně konvexního) mnohostěnu $Q$ (v rovině) s celočíselnými vrcholy je dána formulí $S(Q) = n_{\mathrm{uv}} + \frac{1}{2} n_{\mathrm{hr}} - 1$, kde $n_{\mathrm{uv}}$ a $n_{\mathrm{hr}}$ je počet celočíselných bodů uvnitř respektive na hranici $Q$.*

# Lineární perspektiva

*Alča Skálová*

## Úvod

Název perspektiva vznikl z latinského perspicere, což znamená prohlédnutí skrz něco. Je to jeden ze způsobů, jak zachytit trojrozměrný prostor do roviny. Oproti většině jiných promítání má tu výhodu, že i na papíře vypadá výkres trojrozměrně. O tom, jak toho docílit, co se při tomto promítání zachovává či spíše nezachovává, bude právě tahle přednáška.

Nenechej se odradit vidinou přílišného rýsování[7], délkou tohoto textu či spoustou nových pojmů. Možná na ně vůbec nedojde. Záleží na tom, čemu dáte přednost. Můžeme celou přednášku přesně konstruovat nebo to omezit na minimum a ke konci si třebas jen črtat.

## Podmínky LP

Obecné středové promítání má pouze jedinou podmínku – aby střed promítání $S$ nenáležel průmětně $\nu$. Což ovšem někdy vede k zajímavým paradoxům. Při perspektivě proto navíc zohledňujeme podmínky, které platí při pozorování jedním okem.

(i) Distance $d$ musí být větší než minimální vzdálenost zřetelného vidění. Tedy $d > 20cm$.

(ii) Jedním okem jsme s to postřehnout jen ty objekty, které leží uvnitř rotačního kužele (*zorný kužel*) s osou v hlavním směru, přičemž úhel površek s hlavním směrem je stálý a nepřesahuje $20°$. Zobrazujeme tedy jen ty předměty, které leží v našem zorném poli.

(iii) Je dána pevná vodorovná rovina $\pi$, na které leží pozorovaný objekt a většinou i stojí pozorovatel.

## Slovníček

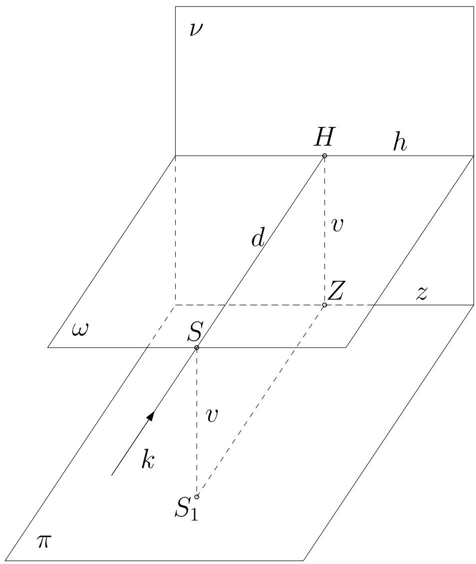
(i) Bod $S$ – *střed promítání* neboli poloha oka.

(ii) Rovina $\nu$ – *perspetivní průmětna.*

(iii) Rovina $\pi$ – *základní rovina.* Je vodorovná a kolmá na průmětnu. Stojí na ní promítané předměty.

(iv) Přímka $z$ – *základnice.* Je průsečnice rovin $\nu$ a $\pi$.

[7] Ale když si vezmeš i něco podobného tužce a pravítku, tak neprohloupíš.



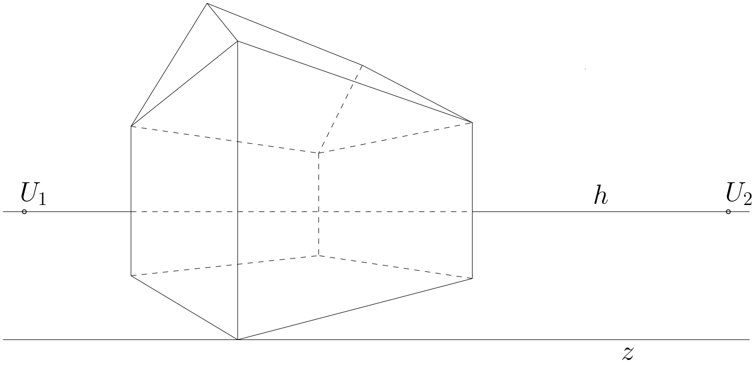

(v) Bod $S_1$ – *stanoviště*. Je kolmý průmět oka $S$ do základní roviny. Neboli místo, kde stojí pozorovatel.
(vi) Přímka $k$ – *hlavní paprsek*. Kolmice spuštěná z oka na průmětnu $\nu$.
(vii) Bod $H$ – *hlavní bod*. Průsečík hlavního paprsku s průmětnou $\nu$.
(viii) Vzdálenost $HS$ – *distance d*.
(ix) Rovina $\omega$ – *obzorová rovina*. Je vedená okem $S$ rovnoběžně se základní rovinou $\pi$.
(x) Přímka $h$ – *horizont (obzor)*. Je průsečnice obzorové roviny a průmětny.
(xi) Přímka $v$ – *hlavní vertikála*. Je vedena bodem $H$ kolmo na základnici.
(xii) Bod $Z$ – *základní bod*. Průsečík hlavní vertikály a základnice.
(xiii) Vzdálenost $SS_1$ – *výška oka* nebo též *výška horizontu*. Zpravidla ji volíme rovnu výšce člověka – tedy $1,5$ až $2$ metry. Pokud ji zvětšíme, vzniká *perspektivní nadhled*, zmenšíme-li ji, dostaneme *perspektivná podhled*.
(xiv) *Průčelná přímka* je rovnoběžná s průmětnou $\nu$, ostatní přímky jsou neprůčelné. Přímky rovnoběžné s $k$ (hlavním paprsek), jsou tzv. *hloubkové přímky*.

## Co je důležité

(i) Rovnoběžky se v perspektivě (až na výjimky) nezobrazují jako rovnoběžky. Protínají se v tzv. *úběžníku*, což je bod ležící na horizontu.
(ii) Perspektiva nezachovává dělící poměr.

(iii) Podle počtu úběžníků dělíme perspektivu na jednoúběžníkovou, dvojúběžníkovou a tříúběžníkovou.

Na závěr alespoň jedna ukázka (dvojúběžníková perspektiva).




## Literatura

Pokud by ses chtěl/a deskriptivou zaobírat nějak hlouběji, pak věz, že jsem čerpala zejména z knih *Deskriptivní geometrie I* a *Deskriptivní geometie II*, jež sepsali pánové *Drábek, Harant* a *Setzer*.

# Mocnost bodu ke kružnici

*Alča Skálová*

## Úvod

Na přednášce si povíme, co je to mocnost bodu ke kružnici, jak vypadají chordály a potenční střed. A potom si na to vyřešíme pár (či spíš víc) příkladů. Nečekejte nic extra drsného, nýbrž spíš šikovnou věc z geometrie, kterou stojí za to znát. A to nejen proto, že některé příklady se s ní řeší jedna báseň (-:

## Trocha vět a definic

**Věta 1.** *Mějme kružnici $k(S, r)$ a bod $M$, kterým prochází přímka $p$, jež protne kružnici $k$ v bodech $A$ a $B$. Potom platí $|MA| \cdot |MB|$ nezávisí na volbě $p$ a je rovno $||MS|^2 - r^2|$. V případě, že body $A$, $B$ splynou do bodu $T$ (tedy $p$ je tečnou $k$), stále platí $|MT|^2 = |MS|^2 - r^2$.*

**Definice 2.** (Mocnost) *Mocnost bodu $M$ ke kružnici $k(S, r)$ je číslo $|MS|^2 - r^2$.*

**Věta 3.** *Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím $k(K, r)$ a $l(L, s)$, je přímka $ch$ kolmá na přímku $KL$, jejíž patou je bod $P$, pro který platí $|KP| = \frac{|KL|^2 + r^2 - s^2}{2 \cdot |KL|}$.*

**Definice 4.** (Chordála) *Množina všech bodů, které mají ke dvěma kružnicím stejnou mocnost, se nazývá chordála dvou kružnic.*

**Definice 5.** (Potenční střed) *Bod, který má stejnou mocnost ke třem zadaným kružnicím, se nazývá potenční střed kružnic.*

## Příklady

**Příklad 6.** Je dána kružnice $k$ se středem $S$, mimo ni bod $A$. Na kružnici $k$ je pohyblivý průměr $XY$. Trojúhelníku $AXY$ je opsána kružnice se středem $O$. Urči množinu všech bodů $O$.

**Příklad 7.** Mějme rovnostranný trojúhelník $ABC$ a jemu opsanou kružnici $k$. Nechť $D$, resp. $E$ je střed strany $AB$, resp. $AC$. Polopřímka $DE$ protíná $k$ v bodě $P$. Dokaž: $|DE|^2 = |DP|.|PE|$.

**Příklad 8.** (Apolloniova úloha – BBp) Je dána přímka $t$ a body $A$ a $B$ (ve stejné polorovině), které na ní neleží. Sestroj kružnici $k$ procházející body $A$ a $B$ tak, aby $t$ byla její tečna.

**Příklad 9.** (Apolloniova úloha – BBk) Jsou dány body $A$, $B$ a kružnice $f$. Sestroj kružnici $k$, jež prochází body $A$, $B$ a dotýká se kružnice $f$.

**Příklad 10.** Na úsečce $AB$ je bod $M$. Ve stejné polorovině od $AB$ jsou čtverce $ACDM$ a $MEFB$, kterým jsou opsány kružnice, jež se protnou v bodech $M$ a $N$. Dokaž, že přímka $MN$ prochází jedním bodem, bez ohledu na polohu bodu $M$.

**Příklad 11.** Je dán trojúhelník $ABC$ a uvnitř něho bod $P$. Označme $X$ průsečík přímky $AP$ se stranou $BC$ a $Y$ průsečík přímky $BP$ se stranou $AC$. Dokaž, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu $C$) kružnic opsaných trojúhelníkům $ACX$ a $BCY$ leží na přímce $CP$.

**Příklad 12.** Je dána rovnice $x^2 + px + q = 0$, kde $p$ a $q$ jsou reálná čísla. Uvažujme všechny paraboly určené touto rovnicí takové, že protínají osy $x$ a $y$ ve třech různých bodech. Tyto body určují kružnici. Dokaž, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem, bez ohledu na hodnotu $p$ a $q$.

**Příklad 13.** Trojúhelník $ABC$. Na straně $AB$ je pohyblivý bod $M$ a na straně $AC$ je pohyblivý bod $N$. Kružnici nad poloměrem $|BN|$ nazvěme $k_1$ a kružnici nad poloměrem $|CM|$ budiž zvána $k_2$. Kružnice $k_1$ a $k_2$ se protnou v bodech $P$ a $Q$. Dokaž, že přímka $PQ$ prochází pevným bodem bez ohledu na polohu bodů $M$ a $N$.

**Příklad 14.** (IMO 2008) V ostroúhlém trojúhelníku $ABC$ označme $H$ průsečík výšek. Kružnice procházející bodem $H$ se středem ve středu strany $BC$ protíná přímku $BC$ v bodech $A_1$ a $A_2$. Podobně kružnice procházející bodem $H$ se středem ve středu strany $CA$ protíná přímku $CA$ v bodech $B_1$ a $B_2$ a kružnice procházející bodem $H$ se středem ve středu strany $AB$ protíná přímku $AB$ v bodech $C_1$ a $C_2$. Ukaž, že body $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ leží na jedné kružnici.

**Příklad 15.** Je dána kružnice $k$, bod $O$, který na ní neleží, a přímka $p$, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici $l$, která má vnější dotyk s kružnicí $k$ a dotýká se i přímky $p$. Body dotyku označme $A$ a $B$. Pokud body $O$, $A$, $B$ neleží v přímce, sestrojíme kružnici $m$ opsanou trojúhelníku $OAB$. Dokaž, že všechny takové kružnice $m$ procházejí společným bodem různým od bodu $O$, anebo se dotýkají téže přímky.

**Příklad 16.** (ČSP střetnutí) Je dán trojúhelník $ABC$, ve kterém $\beta > 45°$ (při obvyklém značení). Nechť $D$, $E$, $F$ jsou po řadě paty výšek z vrcholů $A$, $B$, $C$ a nechť $K$ je takový bod úsečky $AF$, že platí $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$. Dokaž, že platí rovnost $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$.

Závěrem bych mohla zmínit, kterak poznat, že při řešení příkladu nastal čas na použití mocnosti. Ale to až na přednášce `(-:`.

## Zdroje

Příklady jsem nacházela všude možně, ale hlavními zdroji byli: Mathlinks na adrese `http://www.mathlinks.ro/Forum/`, archiv matematické olympiády – `http://www.math.muni.cz/řvmo/` a Pepa Tkadlec.

Všem budiž vysloven dík.

# Obsah