Meziměstí

Sborník, podzim 2022

Fíla Čermák
Matěj Doležálek
Vojta Gaďurek
Klárka Grinerová
Petr Hladík
Verča Hladíková
Terka Kučerová
Josef Minařík
Magdaléna Mišinová
Radek Olšák
Daniel Perout
Zdeněk Pezlar
Hedvika Ranošová
Martin Raška
Adéla Karolína Žáčková

AUTOŘI: Fíla Čermák, Matěj Doležálek, Vojta Gaďurek, Klárka Grinerová, Petr Hladík, Verča Hladíková, Terka Kučerová, Josef Minařík, Magdaléna Mišinová, Radek Olšák, Daniel Perout, Zdeněk Pezlar, Hedvika Ranošová, Martin Raška, Adéla Karolína Žáčková
EDITOR: Matěj Doležálek
vydání první, náklad 44 výtisků
říjen 2022
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Geometrické nerovnosti

Fíla Čermák

Abstrakt. Příspěvek obsahuje výběr z geometrických nerovností. V první části se zaměřuje na různé aplikace trojúhelníkové nerovnosti, ve druhé uvádí několik známých a obtížnějších tvrzení.

Úmluva. Délky stran trojúhelníka ABC budeme značit a, b, c a příslušné protější vnitřní úhly α, β, γ.

Úloha. (motivační) Pro kladná čísla splňující $a + b + c = 8$ dokažte

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{4 + b^2} + \sqrt{9 + c^2} \geq 10.$$

Zbraně

Připomeňme si následující tři užitečná tvrzení.

Tvrzení. (kosinová věta) *Platí* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Tvrzení. (AG nerovnost) *Pro nezáporná čísla* $a_1, \ldots, a_n$ *platí*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Rovnost nastává pro $a_1 = \cdots = a_n$.

Tvrzení. (Cauchyova–Schwarzova nerovnost) *Pro reálná* $a_1, \ldots, a_n$ *a* $b_1, \ldots, b_n$ *platí*

$$\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) \geq \left(\sum a_i b_i\right)^2.$$

Rovnost nastává, pokud $a_i = \lambda b_i$ *pro nějaké* $\lambda \in \mathbb{R}$ *a všechna* i.

Cvičení 1. (CS zlomkobijec) Dokažte si variantu CS nerovnosti pro zlomky: Pro kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ a $b_1, \ldots, b_n$ platí

$$\sum \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{\left(\sum \sqrt{a_i}\right)^2}{\sum b_i}.$$

Rovnost nastává, pokud $a_i = \lambda b_i$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ a všechna i.

Troj(ostro)úhelníková nerovnost

Začneme jednoduchou, ale velmi užitečnou a fundamentální nerovností a její geometričtější modifikací.

Tvrzení. *Nezáporná reálná čísla a, b, c tvoří strany trojúhelníka, právě když splňují $a+b>c$, $b+c>a$ a $c+a>b$ (pokud připustíme degenerované trojúhelníky, změní se nerovnosti na neostré). Trojúhelník je ostroúhlý, právě když platí $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$ a $c^2+a^2>b^2$ (rovnosti připouštějí pravoúhlé trojúhelníky).*

Často je výhodnější jedna z následujících formulací:

Tvrzení. *Nejkratší křivka (lomená čára) spojující body A a B je úsečka AB.*

Tvrzení. (substituce) *Kladná čísla a, b a c jsou délkami stran nějakého trojúhelníka, právě když existují kladná čísla x, y a z splňující $a=x+y$, $b=x+z$ a $c=y+z$.*

Úloha 2. V konvexním čtyřúhelníku najděte bod s nejmenším součtem vzdáleností od vrcholů. Jak se výsledek změní v nekonvexním případě?

Úloha 3. Pro bod P uvnitř konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ dokažte

$$|AP|+|PD|<|AB|+|BC|+|CD|.$$

Úloha 4. V trojúhelníku ABC označme M střed BC. Dokažte

$$|AM|<\frac{|AB|+|AC|}{2}.$$

Úloha 5. Dokažte, že ve čtyřúhelníku existuje úhlopříčka u a strany x, y tak, že platí $x^2+y^2\le u^2$.

Úloha 6. Dokažte, že délky stran trojúhelníka splňují

(i) $(a+b+c)^2\le 4(ab+bc+ca)$,

(ii) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$,

(iii) $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$.

Ptolemaiova nerovnost

Tvrzení. (Ptolemaiova nerovnost) *Pro strany čtyřúhelníka a, b, c, d a jeho úhlopříčky e, f platí $ac+bd\ge ef$. Rovnost nastává právě pro tětivové čtyřúhelníky.*

Prosíme potlesk, přicházejí … aplikace!

Úloha 7. Nechť P je vnitřní bod rovnoběžníku $ABCD$ o obsahu S. Ukažte

$$|AP|\cdot|CP|+|BP|\cdot|DP|\ge S.$$

Úloha 8. (těžká) V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí vztahy $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$ a $|EF| = |FA|$. Ukažte

$$\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} \geq \frac{3}{2}.$$

Kdy nastává rovnost?

Další klasická tvrzení

Úloha 9. (Fermatův bod) V trojúhelníku ABC najděte bod P minimalizující hodnotu $|AP| + |BP| + |CP|$.

Poznámka. Všimněte si, že pro čtyřúhelník byla tato úloha výrazně jednodušší.

Úloha 10. (nejmenší obvod) Je dán ostrúhlý trojúhelník ABC. Najděte trojúhelník s vrcholy na jeho stranách (jeden vrchol na každé) s co nejmenším obvodem.

Těžký kalibr

Věta. (Erdős–Mordell) *Uvnitř trojúhelníka ABC uvažme bod P. Jeho kolmé projekce na strany označme D, E a F. Pak platí*

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2 \cdot \big(|PD| + |PE| + |PF|\big)$$

a rovnost nastává právě pro rovnostranný trojúhelník.

Věta. (Finsler–Hadwiger) *Platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Věta. (Euler) *Platí $|OI|^2 = R(R - 2r)$, kde R a r jsou poloměry kružnice opsané a vepsané. Speciálně tedy $R \geq 2r$.*

Návody

1. Dosaď do CS za $a_i' = \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$ (kladnost) a $b_i' = \sqrt{b_i}$ (kladnost).

2. Je to průsečík úhlopříček, případně vrchol s nekonvexním vnitřním úhlem.

3. Bodem P veď přímku mimo vnitřek trojúhelníku APD, která odsekne kus čtyřúhelníku. Nakombinuj několik trojúhelníkových nerovností.

4. Doplň na rovnoběžník $ABXC$.

5. Aspoň jeden vnitřní úhel čtyřúhelníka není ostrý.

6. Popořadě:

(i) Sečti tři vhodné násobky trojúhelníkové nerovnosti.

(ii) Využij, že pro $u < v$ a $k > 0$ platí $\frac{u}{v} < \frac{u+k}{v+k}$.

(iii) Použij $\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$, kladnost jmenovatelů plyne z trojúhelníkové nerovnosti.

7. Posuň trojúhelník CDP na stranu AB (tedy $D \mapsto A$, $C \mapsto B$ a $P \mapsto P'$). Použij Ptolemaiovu nerovnost na čtyřúhelník $APBP'$.

8. Nechť $|AC| = x$, $|CE| = y$, $|EA| = z$ a s pomocí Ptolemaia dokaž, že

$$\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

kde poslední nerovnost plyne z tvaru CS zlomkobijce.

9. Seřaď si úhly podle velikosti jako $\gamma \geq \alpha \geq \beta$ a rozeber dva případy: $\gamma < 120°$ a $\gamma \geq 120°$. Všimni si, že P musí ležet uvnitř ABC. Potom rotuj kolem A o $60°$. Uvědom si, že $|AP| + |BP| + |CP| = |BP| + |PP'| + |P'C'| \geq |BC'|$ a kdy nastává rovnost (a že ne vždy může nastat). Potom už jen dopočti úhly.

10. Nechť jsou body na stranách BC, CA, AB označeny postupně D, E, F. Překlop B podle AC na B' (tím se dostane D na D') a potom C podle AB' na C' (tím se dostane D' na D''). Ukaž, že $|DE| + |EF| + |FD| \geq |DD''|$. Zafixuj D a zjisti, jaký je úhel DAD'. Dokaž, že AD je kolmé na BC.

Literatura a zdroje

Tímto chci poděkovat Davidu Hruškovi, kterému jsem příspěvek prakticky vykradl.

[1] David Hruška: *Geometrické nerovnosti*, Lipová-lázně, 2016.

[2] Oleg Mushkarov, Titu Andreescu, Luchezar N. Stoyanov: *Geometric Problems on Maxima and Minima*, 2006.

[3] Arthur Engel: *Problem Solving Strategies*, Springer, 1998.

[4] Filip Hlásek: *Trojúhelníkové nerovnosti*, Domašov, 2012.

[5] Claudi Alsina, Roger B. Nelsen: *A Visual Proof of the Erdos-Mordell Inequality*, *http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200711.pdf*

Topologické metody v kombinatorice

Fíla Čermák

Abstrakt. V první části přednášky si řekneme, co je barvení grafů a že je to občas těžký problém. V druhé části zkusíme nastínit, co je to topologie a jak by nám mohla v barvení grafů pomoci. Následně si ukážeme nějaké zobecnění a aplikace topologického důkazu na dolní odhad barevnosti grafů.

Úmluva. Pokud není řečeno jinak, pracujeme vždy v n-dimenzionálním reálném prostoru $\mathbb{R}^n$ (přímka, rovina, prostor, ...) s euklidovskou vzdáleností[1]. Značme $[n]$ množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Kružnice S^1 je množina bodů (x, y) splňující $x^2 + y^2 = 1$, neboli množina bodů majících vzdálenost od počátku rovnu 1. Obdobně je sféra S^2 množina bodů (x, y, z) splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Obecně v n-dimenzionálním prostoru je hypersféra S^{n-1} množina bodů $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ splňujících $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

Úmluva. Všechny funkce, které budeme uvažovat, jsou spojité. Snad to bude vždy alespoň intuitivně jasné a pokud ne, zkusíme si to dokázat pořádně. Spojitá funkce pro nás znamená, že její hodnota nemůže jen tak skočit. Formální, a pro nás užitečná, vlastnost spojitých funkcí je:

Věta. (o nabývání mezihodnot) *Mějme $f(x)$ spojitou funkci z intervalu $[a, b]$ do reálných čísel. Potom $f(x)$ nabývá každé hodnoty mezi $f(a)$ a $f(b)$.*

Další vlastnost spojitých funkcí, která nás bude zajímat, je, že součet a rozdíl spojitých funkcí jsou také spojité funkce. Tak a teď na chvíli dost formalit a pojďme si říct motivaci.

Definice. (barevnost) Mějme graf G. Chceme obarvit jeho vrcholy tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly společnou barvu. Nejmenší možný počet barev nutný k obarvení tohoto grafu se nazývá *barevností* grafu G.

Úloha. (motivační) Představme si graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny množiny [5]. Hrany veďme mezi vrcholy, jejichž podmnožiny mají nulový průnik. Jaká je barevnost tohoto grafu?

[1] Vzdálenost $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

Definice. Mějme dané n a k. *Kneserův graf* $KG_{n,k}$ je graf, jehož vrcholy jsou všechny k-prvkové podmnožiny množiny $[n]$ a hrany vedou mezi vrcholy, jejichž podmnožiny mají nulový průnik.

Cvičení 1. Jaké známé grafy jsou $KG_{n,1}$, $KG_{2k-1,k}$, $KG_{2k,k}$ a jaká je jejich barevnost.

Úloha 2. Jaký je nejlepší horní odhad barevnosti Kneserova grafu?

Úloha 3. Jaký je nejlepší spodní odhad barevnosti Kneserova grafu?

Věta. (talíř s jezevcem) *Na okraji kruhového talíře s jezevcem existují v každý moment dvě protilehlá místa se stejnou teplotou.*

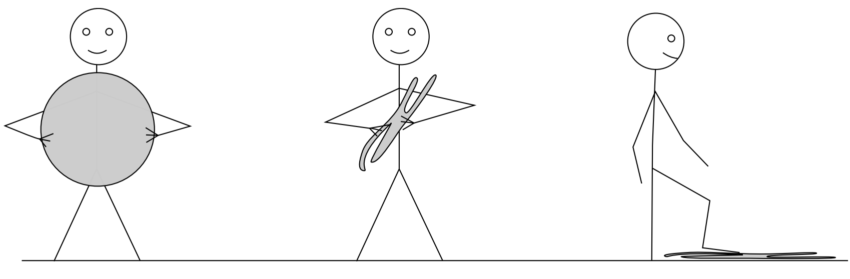
Věta. (Borsuk-Ulam, formálně v jedné dimenzi) *Uvažujme spojitou funkci $f(x)$ z kružnice S^1 do $\mathbb{R}$. Potom na této kružnici existuje takový bod x, že jemu protilehlý bod $-x$ nabývá stejné funkční hodnoty jako x.*

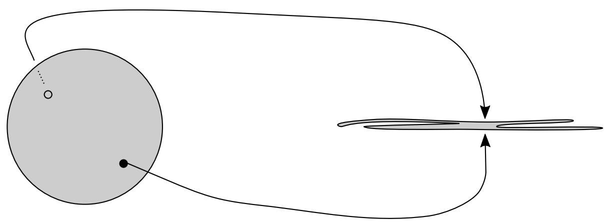
Cvičení 4. Zkuste si dokázat větu o talíři s jezevcem pomocí věty o nabývání mezihodnot.

Věta. (Borsuk-Ulam, neformálně na zeměkouli) *Na zeměkouli vždy existují dvě protilehlá místa se stejným tlakem a teplotou.*

Věta. (Borsuk-Ulam, formálně ve dvou dimenzích) *Uvažujme spojitou funkci $f(x)$ ze sféry S^2 do $\mathbb{R}^2$. Potom na této sféře existuje takový bod x, že jemu protilehlý bod $-x$ nabývá stejné funkční hodnoty jako x.*

Pro vyšší dimenze je znění analogické.





Cvičení 5. Dokažte, že následující tvrzení je ekvivalentní Borsuku-Ulamovi: Pro každou spojitou a lichou funkci $f(x)$ z n-dimenzionální sféry S^n do n-dimenzionálního prostoru $\mathbb{R}^n$ existuje na této n-dimenzionální sféře bod x splňující $f(x) = 0$.

Nyní se pojďme přesunout k ekvivalentní formulaci Borsuka-Ulama, která nás zbaví funkcí a zůstane nám jedna hezká kružnice, sféra či hypersféra a nějaké množinky. Napřed ale pár definic:

Definice. *Otevřená množina* je množina, jež pro každý svůj bod obsahuje také jeho dostatečně malé okolí.

Tvrzení.

(1) *Prázdná množina a celý prostor jsou otevřené množiny.*
(2) *Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina.*
(3) *Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.*

Známé otevřené množiny na reálné ose můžou být třeba otevřený interval nebo libovolné sjednocení otevřených intervalů. V rovině pak třeba kruh bez hranice, čtverec bez hranice atd.

Definice. *Uzavřená množina* je doplněk otevřené množiny.

Z uzavřených množin známe na reálné ose např. uzavřený interval, v rovině pak třeba uzavřený kruh atd.

Tvrzení.

(1) *Prázdná množina a celý prostor jsou uzavřené množiny.*
(2) *Libovolný průnik uzavřených množin je uzavřená množina.*
(3) *Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.*

Definice. *Pokrytí* množiny S je takový systém množin $\mathcal{U}$, jenž splňuje $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Věta. (Borsuk-Ulam, verze LS-c) *Pro jakékoli pokrytí sféry S^n pomocí $n+1$ uzavřených množina $F_1, \ldots, F_{n+1}$ existuje alespoň jedna množina obsahující dvojici protilehlých bodů (tj. $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).*

Cvičení 6. Zkuste si rozmyslet, že pro $n+2$ množin už to není pravda.

Věta. (Borsuk-Ulam, verze LS-o) *Pro jakékoli pokrytí sféry S^n pomocí $n+1$ otevřených množin $U_1, \ldots, U_{n+1}$ existuje alespoň jedna množina obsahující dvojici protilehlých bodů.*

Borsuk-Ulam má ještě spoustu alternativních formulací, z nichž každá může přijít vhod jindy. Pro nás však bude zásadní jedna, spojující dvě předešlé dohromady.

Věta. (Borsuk-Ulam verze LS-co) *Pro jakékoli pokrytí sféry S^n pomocí $n+1$ množin $U_1, \ldots, U_{n+1}$, kde každá je uzavřená nebo otevřená, existuje alespoň jedna množina obsahující dvojici protilehlých bodů.*

Cvičení 7. Dokažte si implikaci z LS-o do LS-c (LS-co).

Definice. Body v n-dimenzionálním prostoru jsou *v obecné poloze*, pokud žádných $n+1$ z nich neleží na jedné nadrovině.

Tvrzení. *Na hypersféru se dá umístit libovolně mnoho bodů v obecné poloze.*

Věta. *Dolní odhad barevnosti Kneserova grafu je $n-2k+2$.*

Je to všude!

Věta. (o palačinkách) *Nechť P_1, P_2 jsou palačinky v rovině. Pak existuje přímka, která současně rozpůlí P_1 i P_2 zároveň.*

Cvičení 8. Zkuse si tuto větu dokázat pomocí věty o nabývání mezihodnot dvakrát.

Cvičení 9. Dokažte, že každé rozložení hmoty v rovině umíme rozdělit dvěma přímkami na čtyři stejně velké části.

Věta. (o sendviči) *Mějme n objektů $A_1, \ldots, A_n$ v n-dimenzionálním prostoru. Potom existuje $(n-1)$-dimenzionální nadrovina, která současně rozdělí každý objekt na dva kusy stejného objemu.*

Cvičení 10. Zkuste dokázat i tuto obecnější variantu.

Věta. (o bodovém sendviči) *Mějme konečné množiny bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v n-dimenzionálním prostoru. Potom existuje nadrovina, která rozpůlí všechny tyto množiny najednou.*

Věta. (korálky) *Mějme náhrdelník s d druhy korálků. Pak jej lze rozdělit spravedlivě mezi dva zloděje pomocí nanejvýš d rozseknutí.*

Zobecněné Kneserovy grafy

Definice. Mějme konečnou množinu X a F množinu podmnožin X. *Kneserův graf* $KG(F)$ má F jako množinu vrcholů a dvě množiny F_1 a F_2 jsou spojené hranou, právě tehdy když $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

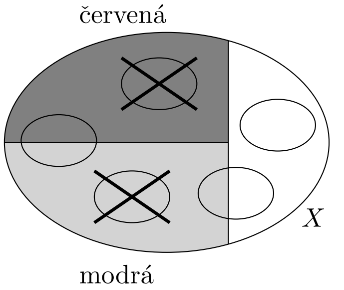
Můžeme si rozmyslet, že Kneserovy grafy, které jsme potkali na začátku přednášky mají za $F = \binom{[n]}{k}$.

Důkaz dolního odhadu barevnosti pro $KG_{n,k}$ nám dává ještě obecnější výsledek. Když to chceme trochu obecněji, tak potřebujeme trochu nových definic.

Definice. Mějme množinu X a F množinu podmnožin X. Obarvení c prvků množiny X pomocí m barev je m-obarvení, pokud žádná množina v F není celá jednobarevná. *Barevnost* F je nejmenší takové m, pro které má F nějaké m-obarvení.

Definice. Nazvěme *m-barevnostní defekt* systému množin F, značíme $\mathrm{cd}_m(F)$, minimální velikost podmnožiny $Y \subseteq X$ takové, že systém množin v F neobsahujících žádný prvek z Y je m-obarvitelný.

Pro $m = 2$ chceme obarvit každý bod X červeně, modře nebo bíle tak, aby žádná množina z F nebyla celá modrá nebo červená (ale může být celá bílá). $\mathrm{cd}_2(F)$ je pak minimální nutný počet bílých bodů takového obarvení.



Věta. (Dolník) *Pro konečnou X a libovolnou množinu F podmnožin X je barevnost $KG(F)$ alespoň $\mathrm{cd}_2(F)$.*

Obecně nemusí být tato nerovnost těsná a může být těžké určit $\mathrm{cd}_2(F)$. Pro naše grafy $KG_{n,k}$ však tento odhad těsný je.

Cvičení 11. Ukažte, že Dolníkova věta dokazuje těsný spodní odhad na barevnost $KG_{n,k}$.

Cvičení 12. Dokažte Dolníkovu větu.

Cvičení 13. Ukažte, že každý graf je Kneserovým nějakou množinu F.

Návody

1. Úplný graf (barevnost n), izolované vrcholy (barevnost 1), párování (barevnost 2).

2. Hladově $n - 2k + 2$.

3. To je těžké, proto tu máme tu přednášku.

4. Chceme dokázat, že existuje x takové, že $f(x) = f(-x)$. Pokud převedeme vše na jednu stranu rovnosti, dostaneme $f(x) - f(-x) = 0$. A co teď ta věta o nabývání mezihodnot?

5. Implikace z původního tvrzení do nového je snadná. Opačná implikace potřebuje novou funkci, která bude lichá. Zkus $f(x) - f(-x)$.

6. V rovině – vepiš do kružnice rovnostranný trojúhelník s těžištěm shodným se středem kružnice. Potom jej zkus středově promítnout ze středu na kružnici.

7. Vezměme si největší vzdálenost dvou bodů pro každou množinu. Uvědom si, že je to méně než 2, a zkus uzavřené množiny trochu nafouknout.

8. Nejprve si zafixuj úhel $\alpha \in [0°, 180°]$. Pro tento úhel najdi přímku $p(\alpha)$ půlící první palačinku pomocí věty o nabývání mezihodnot (hodí se uvážit přímku v $-\infty$ a $+\infty$). Vezmi si jednu fixní stranu $p(\alpha)$, pro niž nás bude zajímat obsah. Rozmysli si, jak tyto hodnoty dopadnou pro úhel 0° a 180° a použij znovu větu o nabývání mezihodnot.

9. Dvakrát iteruj.

10. Udělejme to obdobně jako pro palačinky. Nejprve si pro každý bod p na sféře S^{n-1} vezměme všechny nadroviny, které jsou kolmé na přímku spojující p s počátkem. Potom pomocí věty o nabývání mezihodnot najděme takovou nadrovinu $r(p)$, která půlí A_n. A pak uvažme funkci

$$f(p) = \Big(\text{objem } A_1 \text{ napravo od } r(p), \ldots, \text{objem } A_{n-1} \text{ napravo od } r(p)\Big).$$

Nyní už stačí jen použít Borsuka-Ulama.

11. Ukaž spodní odhad na $\mathrm{cd}_2(F)$. Zkus odstranit (neboli vybarvit bíle) pouze $n - 2k + 1$ prvků a uvědom si, že tam stále najdeme jednobarevnou k-tici.

12. Důkaz veď obdobně jako pro dolní odhad barevnosti $KG_{n,k}$. Až na to, že za d zvol barevnost $KG(F)$. Vyluč případy, kdy $i \leq d$. Pro $d + 1$ obarvi horní hemisféru modře a spodní červeně. Rovník nám dá odhad na $\mathrm{cd}_2(F)$.

13. Očísluj si vrcholy grafu. Dej do množiny pro daný vrchol unikátní identifikátor (ne)hrany mezi tímto a jiným vrcholem (třeba pro vrcholy 1 a 2 množinu $\{1, 2\}$) právě tehdy, když mezi nimi nevede hrana.

Literatura a zdroje

[1] J. Matoušek: *Using Borsuk-Ulam*, Springer, 2003.
[2] Tancer, Balko: *Topologické metody v kombinatorice*, MFF UK, 2021–2022.
[3] Bulavka, Skotnica: *Topologické metody v kombinatorice cvičení*, MFF UK, 2021–2022.
[4] *Wikipedie*, *https://en.wikipedia.org/wiki/Ham_sandwich_theorem*.

Mřížky a geometrie čísel

Matěj Doležálek

Abstrakt. Teorie čísel a geometrie. Že spolu pramálo souvisí? Omyl! Prozkoumáme geometrické vlastnosti mřížových bodů a ukážeme, jak s jejich pomocí rozlousknout některé oříšky z teorie čísel. Cesta nás provede mlhavým trojmezím geometrie, teorie čísel a kombinatoriky s občasnou odbočkou do vysokoškolské algebry.

Na začátek pár poznatků, které se budou hodit v celé přednášce.

Definice. (kanonická mřížka) Bod (a, b) v rovině nazveme *mřížovým*, pokud jsou obě jeho souřadnice a, b celá čísla. Množinu všech mřížových bodů budeme nazývat *kanonickou mřížkou.*

Pozorování. (středový trik) *Pokud úsečka spojuje dva mřížové body, jejichž souřadnice mají stejné parity, pak je střed této úsečky opět mřížový bod.*

Cvičení. Mějme úsečku spojující mřížové body (a_1, b_1), (a_2, b_2). Pak na této úsečce kromě krajních bodů leží ještě dalších $\mathrm{NSD}(a_2 - a_1, b_2 - b_1) - 1$ mřížových bodů.

Pickův vzorec

Všichni jistě rádi počítáme obsahy. Nejsnáze se to dělá u jednoduchých tvarů, úplně nejlépe u těch pravidelných. Zde si však ukážeme, že výpočet je celkem snadný i u divokých komplikovaných mnohoúhelníků, dokud jsou jejich vrcholy mřížové body.

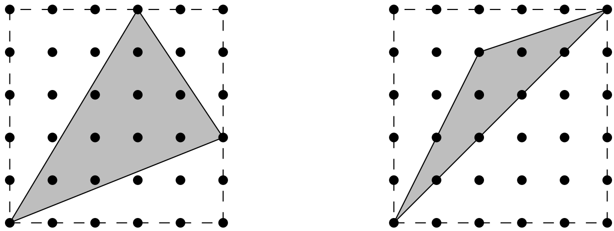
Úmluva. Není-li řečeno jinak, uvažujeme pouze mnohoúhelníky, které samy sebe neprotínají a nemají díry.

Definice. Mnohoúhelník zvěme *mřížovým*, je-li každý jeho vrchol mřížový bod.

Věta. (Pick) *Mřížový mnohoúhelník s i mřížovými body ve svém vnitřku a b mřížovými body na svém obvodu má obsah $i + \frac{b}{2} - 1$.*

Osnova důkazu. Rozmyslíme v několika krocích:

(1) Mnohoúhelníky, pro něž věta platí, můžeme „slepovat“ k sobě a věta bude stále platit. Stejně tak můžeme mnohoúhelníky, kde věta platí, „odřezávat“.
(2) Věta platí pro obdélníky a (hezky orientované) pravoúhlé trojúhelníky.
(3) Věta platí pro všechny trojúhelníky.
(4) Každý mnohoúhelník se dá rozřezat na trojúhelníky. □



Úloha 1. Uvažujme mřížový trojúhelník, jehož strany neobsahují kromě samotných vrcholů žádné mřížové body a který ve svém vnitřku obsahuje právě jeden mřížový bod. Nahlédněte, že tento vnitřní mřížový bod musí být těžištěm trojúhelníku.

Úloha 2. Kapitán pirátské lodi si chce pořídit zbrusu novou vlajku se zkříženými hnáty za 2022 dublonů. K dispozici má neomezenou zásobu mincí v hodnotách 1, 2 a 3 dublony. Kolika různými způsoby může zaplatit? (Způsoby zaplacení, které se liší jen pořadím mincí, nepovažujeme za různé.)

Úloha 3. (Eulerův vzorec) Uvažujme rovinné nakreslení grafu, ve kterém jsou všechny vrcholy mřížové body a všechny hrany jsou úsečky. Jsou-li v, e, s po řadě počty vrcholů, hran a stěn v tomto nakreslení, dokažte s pomocí Pickova vzorce rovnost $v - e + s = 2$.

Úloha 4. (Pick pro děravé mnohoúhelníky) Mějme v rovině mnohoúhelník P s h dírami. Formálně: nechť P vznikne odebráním navzájem disjunktních mřížových mnohoúhelníků $P_1, \ldots, P_h$ od mřížového mnohoúhelníku P_0, přičemž obvody jednotlivých P_i jsou disjunktní s obvodem P_0 i spolu navzájem. Dokažte, že pokud P obsahuje ve svém vnitřku a na svých obvodech po řadě i a b mřížových bodů, pak má obsah $i + \frac{b}{2} + h - 1$.

Úloha 5. *Půlbodem* nazveme libovolný bod tvaru $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ pro celá čísla a, b. Nahlédněte, že libovolný půlbod ležící ostře uvnitř mřížového mnohoúhelníku lze vyjádřit jako střed úsečky spojující dva mřížové body ležící uvnitř nebo na obvodu tohoto mnohoúhelníku.

Pozorování. *Má-li mřížový mnohoúhelník obsah S, pak je $2S$ celé číslo.*

Úloha 6. Existuje rovnostranný trojúhelník s vrcholy v bodech kanonické mřížky?

Úloha 7. Dokažte, že pro liché $n \geq 5$ neexistuje pravidelný n-úhelník s vrcholy v bodech kanonické mřížky.

Úloha 8. Nahlédněte, že Pickovu větu nelze nijak přímočaře zobecnit do vyšších dimenzí. K tomu nalezněte v prostoru dva mnohostěny, které pokrývají svými vnitřky, stranami, hranami apod. vždy stejné počty mřížových bodů, ale přesto mají různé objemy.

Ve vyšších dimenzích tedy nemáme použitelnou obdobu Pickovy věty. Podobnou informaci však kóduje *Ehrhartova věta*, kterou uvedeme bez důkazu:

Věta. (Ehrhart) *Buď M (uzavřený) mřížový mnohostěn v d-rozměrném prostoru a nechť tM pro $t > 0$ označuje obraz M ve stejnolehlosti se středem v počátku a koeficientem t. Potom existuje polynom f_M takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ pokrývá nM přesně $f_M(n)$ mřížových bodů.*

Úloha 9. Odvoďte pro mnohoúhelníky v rovině explicitní tvar Ehrhartova polynomu na základě Pickova vzorce.

Fareyovy zlomky

Vyzbrojeni Pickovým vzorcem zkusme prozkoumat třídu krásných tvrzení, která vzejdou, začneme-li zlomky nahlížet jako mřížové body v rovině.

Definice. Budiž dáno přirozené n. *Fareyovou posloupností řádu n* rozumíme posloupnost všech těch zlomků z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, jejichž jmenovatel v základním tvaru nepřevyšuje n, seřazených vzestupně a značíme ji $\mathcal{F}_n$.

Lemma. *Rovnoběžník s vrcholy* $(0, 0)$, (a, b), (c, d) *a* $(a+c, b+d)$ *má obsah* $|ad-bc|$.

Toto lemma je jen speciálním případem obecného faktu, že objem rovnoběžnostěnu je až na znaménko roven determinantu matice složené z vektorů jeho hran. Ale k tomu se ještě dostaneme.

Úloha 10. (Farey-Cauchy) Jsou-li $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sousední zlomky v $\mathcal{F}_n$, pak $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$. Naopak pokud $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ splňují $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$, pak spolu sousedí v nějakém $\mathcal{F}_n$.

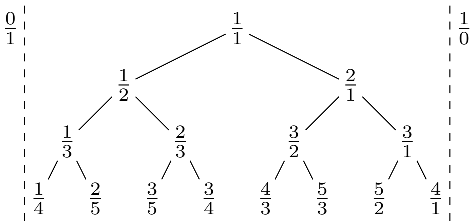
Úloha 11. (Dirichletova věta o diofantických aproximacích) Je dáno iracionální $\alpha \in (0, 1)$. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ v základním tvaru, které splňují $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Definice. *Mediantem* zlomků $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ rozumíme zlomek $\frac{a+c}{b+d}$.

Úloha 12. Uvažujme tři po sobě jdoucí Fareyovy zlomky. Nahlédněte, že ten prostřední je mediantem zbylých dvou (uvažovaných v základním tvaru).

Úloha 13. (Fordovy kružnice) Pro zlomek $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$ v základním tvaru nakresleme kružnici s průměrem $\frac{1}{q^2}$, která se dotýká reálné osy v bodě $\frac{p}{q}$. Dokažte, že dvě takové kružnice se dotýkají právě tehdy, když spolu odpovídající zlomky sousedí v některém $\mathcal{F}_n$.

Definice. (Sternův-Brocotův strom) Sestrojme nekonečný binární strom následovně. Na počátku mějme v kořeni zlomek $\frac{1}{1}$, od něhož se v dáli po řadě nalevo a napravo vznáší „zlomky“ $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{0}$. Tyto „zlomky“ v dáli nebudou mít žádné potomky, zatímco počínaje kořenem $\frac{1}{1}$ bude mít každý jiný zlomek dva potomky: levého, který bude mediantem tohoto zlomku s nejbližším nižším zlomkem na této nebo vyšší úrovni, a pravého, který bude mediantem tohoto zlomku s nejbližším vyšším zlomkem na této nebo vyšší úrovni.



Úloha 14. Nahlédněte, že Sternův-Brocotův strom obsahuje všechna kladná racionální čísla, a to dokonce v základním tvaru.

Úloha 15. Definujme *jednoduchost* zlomku $\frac{p}{q}$ jako $j\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{pq}$. Určete součet jednoduchostí všech 2^n zlomků v n-tém řádku Sternova-Brocotova stromu.

Úloha 16. Uvažujme pro $n \geq 5$ navzájem různé mřížové body $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ v rovině, které splňují $|a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i| = 1$ pro každé $1 \leq i \leq n$, přičemž uvažujeme $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_1, b_1)$. Dokažte, že $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$ je splněno i pro nějakou dvojici nesousedních indexů i, j. (Korean TST)

Nutná dávka analyticko-geometrických (ne)definic

Další na jídelníčku je Minkowského věta. K jejímu náležitému strávení si však nejdřív potřebujeme osvojit nějaké ošklivější technické koncepty v čele s (obecnou) mřížkou. Nebude to samo o sobě moc zábava, ale je to potřeba …

S objemem budeme pracovat pouze v intuitivním pojetí. Abychom ctěného čtenáře ušetřili od pojmů jako *měřitelná množina*, budeme ty množiny bodů, u kterých dává smysl hovořit o objemu, nazývat *útvary*. Intuitivně si račte představovat libovolnou slušně vychovanou hroudu.

Nedefinice. *Objem* útvaru U je nějaké nezáporné číslo, jež značíme $\operatorname{Vol} U$. Pro jeho počítání platí:

(i) Má-li d-rozměrný „hranol“ $(d-1)$-rozměrnou podstavu s objemem S a na ní kolmou výšku h, pak je objem hranolu roven $h \cdot S$.

(ii) Má-li d-rozměrný „kužel“ $(d-1)$-rozměrnou podstavu s objemem S a na ní kolmou výšku h, pak je objem kužele roven $\frac{1}{d} \cdot h \cdot S$.

(iii) Pro disjunktní útvary U_1, U_2 platí $\operatorname{Vol}(U_1 \cup U_2) = \operatorname{Vol} U_1 + \operatorname{Vol} U_2$.

(iv) Je-li U' obrazem U v posunutí (či obecněji nějakém shodném zobrazení), pak $\operatorname{Vol} U' = \operatorname{Vol} U$.

(v) d-rozměrná koule s poloměrem R má objem $C_d R^d$, kde C_d je nějaká konstanta. Pro C_d existuje (komplikovaný) explicitní předpis, nám však postačí prvních pár hodnot:

$$C_1 = 2, \qquad C_2 = \pi, \qquad C_3 = \frac{4\pi}{3}, \qquad C_4 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Dále se nám bude hodit umět počítat objemy rovnoběžnostěnů. K tomu, bohužel, musíme zaběhnout k *maticím*. Co že to matice je? Račte si vybrat: obdélníček plný čísel, sloupcové vektory zapsané vedle sebe, řádkové vektory zapsané pod sebou, pro fajnšmekry jenom reprezentace nějakého lineárního zobrazení.

Matice a objemy propojuje koncept *determinantu*. Opět si k němu dovolíme zamlčet „tu korektní" definici a místo toho pragmaticky popsat, jak s tím pracovat.

Nedefinice. *Determinant* čtvercové $d \times d$ matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_d)$$

je nějaké číslo, jež značíme $\det A$. Pro jeho počítání platí:

(i) Rozvoj podle sloupce: kdykoliv zvolíme $1 \leq j \leq d$, pak platí

$$\det A = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

kde A_{xy} značí matici $(d-1) \times (d-1)$, která vznikne z A vyškrtnutím x-tého řádku a y-tého sloupce.

(ii) Přičítání sloupců k jiným nemění determinant: Je-li $\mathbf{u}$ vektor, který leží v nadrovině určené sloupcovými vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_d$, pak

$$\det(\mathbf{a}_1|\cdots|(\mathbf{a}_j + \mathbf{u})|\cdots|\mathbf{a}_d) = \det A.$$

(iii) Determinant diagonální matice: Pokud je A *diagonální*, tzn. všechny její prvky vyjma $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{dd}$ jsou nulové, pak $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{dd}$.

Pravidla (i) a (ii) platí i tehdy, když zaměníme sloupce a řádky.

Hned si také rozmysleme cvičení, které dává intuitivní představu za determinantem a osvětluje některé jeho vlastnosti. Zdůrazněme, že tohle je celý důvod, proč se o determinanty vůbec staráme – chceme počítat *nějaké* objemy.

Cvičení. Rozmyslete si, že objem d-rozměrného rovnoběžnostěnu, jehož hrany odpovídají vektorům $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$, je roven $|\det(\mathbf{v}_1|\cdots|\mathbf{v}_d)|$. K tomu pomohou následující pozorování:

(1) Je-li matice v diagonálním tvaru, objem i determinant jsou si rovny.
(2) Sloupcové úpravy, které zachovávají determinant, zachovávají i objem.

Definice. *Mřížkou* v $\mathbb{R}^d$ rozumíme množinu $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, pokud není podmnožinou žádné nadroviny[1] a lze ji pro nějakou d-tici vektorů $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ vyjádřit přesně jako množinu všech součtů $t_1\mathbf{b}_1 + \dots + t_d\mathbf{b}_d$ pro celá čísla $t_1, \dots, t_d$. Takovou d-tici $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ nazýváme *bází* mřížky Λ.

Definice. Je-li $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ báze mřížky Λ, pak *determinantem* Λ (značíme $\det \Lambda$) označujeme absolutní hodnotu determinantu matice $(\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_d)$.

Bystří mohou namítat, že bází mřížky by mohlo být mnoho – co když každá z nich dává jiný determinant? Bez obav:

Tvrzení. $\det \Lambda$ *nezávisí na volbě konkrétní báze.*

Vzpomíná si ještě ctěný čtenář na objemovou interpretaci determinantu? Pak jej jistě nepřekvapí následující:

Pozorování. *Je-li* $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ *nějaká báze mřížky* $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$*, pak je* $\det \Lambda$ *objem tzv. fundamentálního rovnoběžnostěnu* $\{t_1\mathbf{b}_1 + \dots + t_d\mathbf{b}_d \mid t_1, \dots, t_d \in \langle 0, 1)\}$.

Cvičení. Rozmyslete si, že Pickova věta platí i pro obecnou mřížku v $\mathbb{R}^2$, pokud výsledný obsah vynásobíme $\det \Lambda$.

Úloha 17. Reálná čísla a, b, c splňují $a, c > 0$ a zároveň $D = 4ac - b^2 > 0$. Dokažte, že nerovnost $ax^2 + bxy + cy^2 < R^2$ určuje v rovině elipsu s obsahem $\frac{2\pi}{\sqrt{D}}R^2$.

Pro počítání objemů se nám také občas bude hodit poznat kolmé vektory, oprášíme proto základní vlastnosti skalárního součinu. Pro ty z vás, kdo vidíte skalární součin poprvé, vězte, že není třeba se s tím příliš trápit :-).

Definice. *Skalární součin* vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ definujeme jako $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \dots + u_dv_d$.

Ne zcela očividná geometrická interpretace skalárního součinu je, že promítneme $\mathbf{u}$ na přímku určenou $\mathbf{v}$ a (orientovanou) délku této projekce znásobíme s délkou $\mathbf{v}$. S tímto pohledem pak nepřekvapí:

Cvičení. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ jsou kolmé, právě když $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

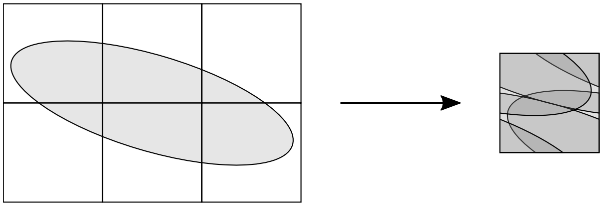
Minkowského věta

Jako předskokana pana Minkowského nejprve představme pana Blichfeldta:

Věta. (Blichfeldt) *Mějme v d-rozměrném prostoru útvar s objemem V. Potom lze tento útvar posunout tak, aby obsahoval alespoň $\lceil V \rceil$ bodů kanonické mřížky.*

Důkaz. Rozřežme daný útvar podél jednotkových krychliček kanonické mřížky a tyto rozřezané dílky přeložme přes sebe. Pokud se v některém bodě jednotkové krychličky překryje alespoň $\lceil V \rceil$ různých dílků, vyhráli jsme. Pokud ne, pak je objem roven nanejvýš $\lceil V \rceil - 1 < V$, což je spor. □

[1] Jinými slovy: Λ je „roztažená po celém $\mathbb{R}^d$“. Pouze zakazujeme to, aby Λ degenerovaně ležela jen v nějakém menším podprostoru.



Cvičení. Pro obecnou mřížku Λ se věta zobecní zohledněním determinantu – náš útvar bude v nějakém posunutí obsahovat alespoň $\left\lceil \frac{V}{\det \Lambda} \right\rceil$ bodů z Λ.

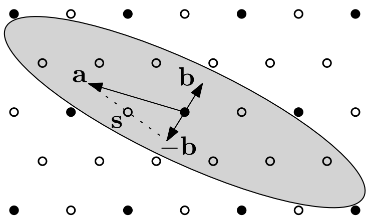
K samotné Minkowského větě zbývá ještě jedna stěžejní definice:

Definice. Množinu M bodů v d-rozměrném prostoru nazveme *konvexní*, pokud pro libovolné body $A, B \in M$ je i celá úsečka AB obsažena v M.

Sami se přesvědčte (ale nedokazujte formálně), že např. koule, kvádry, válce či rovnoběžnostěny jsou konvexní. Mnohoúhelníky jsou obecně konvexní právě tehdy, mají-li všechny vnitřní úhly menší než $180°$.

Věta. (Minkowski) *Buďte v d-rozměrném prostoru dány mřížka Λ a útvar C, který je konvexní a středově souměrný podle počátku. Pokud $\operatorname{Vol} C > 2^d \det \Lambda$, pak v C leží nějaký nenulový bod z Λ.*

Důkaz. Uvažme dvojnásobně nafouknutou mřížku 2Λ, ta má determinant $2^d \det \Lambda$, což je méně než $\operatorname{Vol} C$. Podle předchozího cvičení pak jde C posunout tak, aby obsahovala alespoň dva různé body z 2Λ. To znamená, že nějaké dva různé body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ splňují $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in 2\Lambda$. Ze středové souměrnosti ale C obsahuje i bod $-\mathbf{b}$ a z konvexnosti také střed $\mathbf{s}$ úsečky spojující $\mathbf{a}$ s $-\mathbf{b}$. Máme tak $0 \neq \mathbf{s} \in C$, ale díky $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in 2\Lambda$ taky $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}+(-\mathbf{b})}{2} \in \Lambda$, jak jsme chtěli. □



Úloha 18. (německý lesík) V poloměru $R > 0$ od počátku se rozkládá džungle. V každém mřížovém bodě uvnitř tohoto kruhu vyjma počátku roste strom s jistým pevně daným poloměrem $r > 0$. V počátku stojí pirát. Nahlédněte, že pokud je R dostatečně velké, pirát nevidí z džungle ven.

Cvičení. Nechť je v předchozí úloze naopak pevně dáno $R > 1$. Vyrobte co nejlepší dolní odhad pro hodnotu r, při které ještě pirát v některém směru vidí z džungle ven.

Lemma. *Mějme prvočíslo* $p \equiv 1 \pmod 4$. *Pak existuje* c *takové, že* $c^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$.

Úloha 19. (Fermatova věta o dvou čtvercích) Prvočíslo $p \equiv 1 \pmod 4$ lze vyjádřit jako $p = x^2 + y^2$ pro celá čísla x, y.

Lemma. *Je-li* p *prvočíslo, pak lze zvolit celá čísla* x, y *tak, že* $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$.

Úloha 20. (Lagrangeova věta o čtyřech čtvercích) Každé prvočíslo p lze vyjádřit jako $p = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ pro celá čísla x, y, z, w.

Úloha 21. Jsou dána přirozená čísla a, b, c splňující $ac = b^2 + b + 1$. Dokažte, že rovnice $ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = 1$ má celočíselné řešení. (Polská MO)

Úloha 22. (Pick z Minkowského) Dokažte pomocí Minkowského věty, že trojúhelník, který má vrcholy v bodech kanonické mřížky a kromě nich neobsahuje žádné další mřížové body, musí mít obsah $\frac{1}{2}$.

Úloha 23. (opět Dirichletova věta o diofantických aproximacích) Budiž dáno reálné číslo α a přirozené N. Dokažte, že existuje nějaký zlomek $\frac{p}{q}$ s $1 \le q \le N$ splňující $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{qN}$.

Úloha 24. (simultánní aproximace) Buďte dána přirozená čísla k, N a reálná $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Dokažte, že lze zvolit celá čísla $p_1, \ldots, p_k$ a přirozené $1 \le q \le N$ tak, aby bylo pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ splněno $\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| \le \frac{1}{q\sqrt[k]{N}}$.

Úloha 25. Nahlédněte, že mřížka $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ musí obsahovat nějaký nenulový vektor $\mathbf{v}$ velikosti $|\mathbf{v}| \le \sqrt{d} \cdot \sqrt[d]{\det \Lambda}$.

Další úlohy

Úloha 26. Dvě nekonečné posloupnosti celých čísel $a_1, a_2, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ splňují

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0$$

pro všechna $n > 2$. Dokažte, že pro nějaký index k je splněno $a_k = a_{k+2016}$.
(*i*KS 5–A5)

Úloha 27. (jednoznačnost dvou čtverců) Už víme, že $p = x^2 + y^2$ má pro prvočíslo $p \equiv 1 \pmod 4$ řešení. Dokažte, že toto řešení je dokonce jednoznačné až na změnu znamének a pořadí.

Úloha 28. V rovině je dán konvexní mřížový pětiúhelník. Dokažte, že (uzavřený) pětiúhelník, který vytínají úhlopříčky původního pětiúhelníku, obsahuje mřížový bod.

Úloha 29. Pro přirozené n nechť $f(n)$ značí počet způsobů, jak zaplatit částku n pomocí mincí v hodnotách všech mocnin dvojky. Všech druhů mincí přitom máme neomezené množství a způsoby zaplacení, které se liší jen pořadím mincí, nepovažujeme za různé. Dokažte, že pro $n \geq 3$ platí $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$. (IMO 1997)

Úloha 30. Buď dána konečná množina $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ prvočísel. Pro $x \in \mathbb{R}$ nechť $f(S, x)$ počet těch přirozených čísel nepřevyšujících x, která mají všechny své prvočíselné dělitele v S. Nahlédněte, že $f(S, x) \approx \frac{(\log x)^n}{n! \log p_1 \cdots \log p_n}$, resp. formálně $\lim_{x \to \infty} \frac{f(S,x)}{(\log x)^n} = \frac{1}{n! \log p_1 \cdots \log p_n}$.

Úloha 31. Budiž dáno přirozené číslo $m \geq 2$, potom nazvěme mřížový bod v rovině *m-mřížovým*, pokud jsou obě jeho souřadnice násobky m. Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ s vlastností: kdykoliv mřížový trojúhelník v rovině obsahuje právě jeden m-mřížový bod, pak má obsah nanejvýš cm^3. (China TST 2021)

Úloha 32. Buďte dána C, d a r. Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ délky 1 nazveme *(C, r)-žůžovým*, pokud pro každý nenulový mřížový vektor $\mathbf{z}$ splňuje vztah $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}| \geq \frac{C}{|\mathbf{z}|^r}$, kde $\cdot$ je skalární součin a $|\mathbf{z}|$ značí délku vektoru $\mathbf{z}$. Dokažte, že:

(a) Pro $r < d - 1$ nikdy neexistuje žádný (C, r)-žůžový vektor.
(b)** Pro $r > d - 1$ lze zvolit C tak, aby existoval nějaký (C, r)-žůžový vektor.

Na úplný závěr zabitá úloha s hlubokými souvislostmi v algebraické teorii čísel – jedná se o jistou podobu tzv. *Minkowského meze*:

Úloha 33. Buď $f(x)$ monický polynom stupně n s celočíselnými koeficienty, který je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$ a má n reálných kořenů $r_1, \ldots, r_n$. Potom platí

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |r_i - r_j| \geq \frac{n^n}{n!}.$$

Návody

1. Těžiště se pozná tak, že dělí trojúhelník na tři menší s navzájem rovnými obsahy.

2. Jedničky lze vždy jednoznačně doplnit. Interpretuj validní způsoby zaplacení jako mřížové body překryté jistým trojúhelníkem.

3. Spočítej obsah „celého grafu“, tzn. doplňku vnější stěny, dvěma způsoby: jednou přímo a podruhé posčítáním všech vnitřních stěn.

4. Jednoduše odečti Pickovské obsahy děr.

5. Středově zobraz mnohoúhelník podle půlbodu a počítej obsahy. Pozor, mohou vzniknout díry!

6. Čtverec vzdálenosti dvou mřížových bodů je celé číslo ...

7. Trik: nafoukni dvakrát a vezmi středy nejdelších úhlopříček. Jako mnohem techničtější alternativa jde taky zkoumat racionalitu jistých hodnot goniometrických funkcí.

8. Možností je mnoho. Jednou z těch přímočařejších jsou tzv. *Reeveovy čtyřstěny*: zafixuj půlčtverečkovou podstavu a poté hýbej výškou čtyřstěnu.

9. Ve stejnolehlosti se snadno předvídatelně chovají obsah mnohoúhelníku a počet mřížových bodů na hranici. Body uvnitř dopočítej z Pickova vzorce.

10. Interpretuj zlomky jako mřížové body a rozmysli, co dovedeš říct o trojúhelníčcích, které určují. V opačném směru stačí vzít $n = \max\{b, d\}$.

11. Pro libovolné n spadne α mezi nějaké dva Fareyovy zlomky.

12. Zapiš si vztah z Fareyovy-Cauchyovy věty pro obě sousedící dvojice.

13. Prostě to spočítej a použij Fareyovu-Cauchyovu větu.

14. Půlky Sternova-Brocotova stromu jsou hezky souměrné a levou tvoří Fareyovy zlomky. Potomci mají vždy větší jmenovatele, takže každý mediant tvoří nový Fareyův zlomek, který už bude v základním tvaru.

15. $j\left(\frac{p+q}{q}\right) + j\left(\frac{p}{p+q}\right) = j\left(\frac{p}{q}\right)$. Tyto zlomky se vždy najdou na následujícím řádku, protože operace $\frac{p}{q} \mapsto \frac{p+q}{q}$ a $\frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{p+q}$ se k Sternovu-Brocotovu stromu chovají hezky.

16. Podívej se na (ve vhodném smyslu) „největší“ vektor.

17. Přenásobením vhodnou maticí získáš kružnici $x^2 + y^2 < R^2$, obsah se mění s determinantem.

18. Pouprav si pohled: místo stromů s poloměrem a paprsků světla bez šířky uvažuj bodové stromy a paprsek světla s šířkou.

19. Jako množinu ber (otevřenou) kouli s poloměrem $\sqrt{2p}$. Mřížku vyrob z vektorů $(1, c)$ a $(0, p)$.

20. Použij podobnou strategii jako u dvou čtverců: volbou mřížky zajisti, aby všechny její body měly čtverec vzdálenosti od počátku $0 \pmod p$, volbou množiny pak zajisti, že to nemůže být $2p$ či víc.

21. Díky zadané podmínce má výraz nalevo malý diskriminant – to odpovídá velkému obsahu elipsy.

22. Vyrob z několika kopií trojúhelníku větší rovnoběžník se středem v mřížovém bodě.

23. Interpretuj $\frac{p}{q}$ jako mřížový bod (p, q). Trošičku uprav kýžené podmínky, aby dávaly symetrickou konvexní množinu a spočítej objem.

24. Přímočaře rozšiř konstrukci z předchozí úlohy. Věci, co potřebuješ počítat, vypadají fakt hezky – podstavy jsou obdélníky/kvádry.

25. Koule by možná dala lepší konstantu, nicméně postačí krychle.

26. Kolmé vektory.

27. Je-li k kružnice $x^2 + y^2 = p$ a Λ mřížka vyrobená z vektorů $(1, c)$, $(0, p)$, chceš dokázat $|k \cap \Lambda| = 4$. Pick pomůže.

28. Tady žádná věta nepomůže! Použij středový trik, připrav se na rozebrání případů a neboj se opřít o indukci!

29. Počet mřížových bodů $\approx$ objem. V dokazovaném odhadu je spousta místa, stačí rozumně odhadnout chybu.

30. Souřadnice v $\mathbb{R}^n$ interpretuj jako exponenty v prvočíselném rozkladu. Rozdíl objemu a počtu pokrytých mřížových bodů je nanejvýš úměrný povrchu, takže celkem malý.

31. Zkombinuj dvě možnosti, jak zkonstruovat další m-mřížový bod: buďto $(m+1)$-násobně stejnolehli z některého vrcholu, anebo najdi dost velký rovnoběžník zacentrovaný v onom jednom m-mřížovém bodě, jehož (alespoň) půlka leží uvnitř trojúhelníku.

32. (a) Je-li dáno $\mathbf{w}$, najdi $\mathbf{z}$, které ho rozbije, pomocí Minkowského věty. Množina daná touto vlastností není konvexní, ale dovedeš v ní najít válec libovolně velkého objemu. (b) Je-li dáno $\mathbf{z}$, spočti, jak velkou část jednotkové sféry, kterou toto $\mathbf{z}$ zakazuje, a nahlédni, že součet konverguje, takže pro dost malé C nebude zakázaná celá sféra. Možná narazíš na to, že s povrchy se blbě pracuje – vypořádej se s tím nějak.

33. Račte se posadit a připoutat, bude to jízda:

(1) Levá strana je determinant mřížky s bázovými vektory $(1, r_i, r_i^2, \ldots, r_i^{n-1})$.
(2) Do Minkowského věty chceš použít množinu $\{|x_1| + \cdots + |x_n| < n\}$. Proč?
(3) Protože AGčko!
(4) Pro body z mřížky ale z Viètových vztahů musí být $x_1 \cdots x_n$ celé číslo.
(5) Profit.

Literatura a zdroje

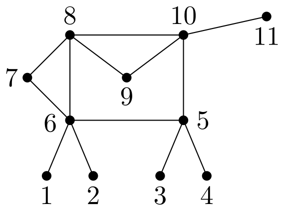
[1] Jakub Löwit: *Čísla a čtverečky*, sborník *i*KS, 2017.
[2] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2008.
[3] Jiří Matoušek: *Introduction to Discrete Geometry*, KAM MFF UK, *kam.mff.cuni.cz/~matousek/kvg1-tb.pdf.*
[4] Martin Klazar: *Úvod do teorie čísel*, KAM MFF UK, *kam.mff.cuni.cz/~klazar/ln_utc.pdf.*
[5] Keith Conrad: *Sums of two squares and lattices*, *kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Picksumofsq.pdf.*

Stromy

Vojta Gaďurek

Abstrakt. V příspěvku důkladně prozkoumáme, co jsou to stromy a kde všude je můžeme nalézt.

Definice. *Graf* je tvořen množinou V *vrcholů* a množinou E *hran* mezi nimi. Hrany jsou formálně dvouprvkové množiny vrcholů. Celý graf pak formálně zapisujeme jako uspořádanou dvojici $G = (V, E)$.

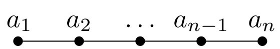


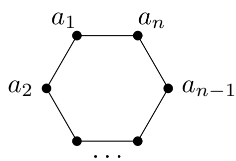
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$$
$$E = \Big\{\{1, 6\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{6, 8\}, \{8, 9\}, \{8, 10\}, \{5, 10\}, \{9, 10\}, \{10, 11\}\Big\}$$

Úmluva. Neřekneme-li jinak, předpokládejme, že graf je konečný, tedy V i E jsou konečné množiny, a že graf je neprázdný, tudíž obsahuje alespoň jeden vrchol.

Definice. *Podgrafem* grafu G je graf, který vznikl odebráním nějakých vrcholů a hran z grafu G.

Definice. *Cesta* je graf s vrcholy $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a hranami $E = \{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{n-1}, a_n\}\}$. Cesta tedy prochází každým vrcholem právě jednou. Vrcholům a_1 a a_n říkáme *koncové body* cesty. Obsahuje-li graf jako podgraf cestu s koncovými vrcholy A a B, říkáme, že *existuje/vede cesta mezi A a B*.





Definice. *Kružnicí* nazveme graf s vrcholy $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a hranami $E = \{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{n-1}, a_n\}, \{a_n, a_1\}\}$.

Definice. Říkáme, že graf je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy vede cesta.

Definice. *Strom I* je souvislý graf $G = (V, E)$ splňující $|V| - 1 = |E|$, tedy že počet vrcholů je o jedna vyšší než počet hran.

Definice. *Strom II* je souvislý graf, v němž mezi každými dvěma vrcholy existuje právě jedna cesta.

Věta. *Každý strom je 2-obarvitelný, tj. jeho vrcholy lze obarvit dvěma barvami tak, aby žádné dva stejnobarevné vrcholy nebyly spojeny hranou.*

Cvičení. Je 2-obarvitelnost ekvivalentní tomu, že je graf stromem I či stromem II?

Definice. *Strom III* je *minimálně souvislý* graf, tedy takový, který je souvislý, ale odebráním libovolné hrany by své souvislosti pozbyl.

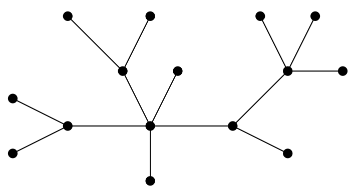
Definice. Graf je *acyklický*, pokud neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici.

Definice. *Strom IV* je takový graf $G = (V, E)$, že daný graf je maximálně acyklický a souvislý. Tedy pokud bychom přidali jednu hranu, graf by již nebyl acyklický.

Cvičení. Ukažte, že všechny čtyři definice stromu jsou ekvivalentní.

Pokud jste cvičení poctivě řešili, zjistili jste, že všechny definice stromu jsou ekvivalentní. Tedy jako definici stromu bychom mohli použít libovolnou z nich. My použijeme Strom II.

Definice. *Strom* je souvislý graf, v němž mezi každými dvěma vrcholy existuje právě jedna cesta.



Definice. Podgraf stromu, který je sám také stromem, nazýváme *podstromem*.

Věta. *Souvislý podgraf stromu je vždy strom.*

Definice. *List* je vrchol, do něhož vede právě jedna hrana.

Cvičení. Ukažte, že libovolný strom o alespoň dvou vrcholech má alespoň dva listy.

Definice. *Stupeň* vrcholu je počet hran, které do něj vedou.

Cvičení. Jaká (pokud nějaká) je ve stromu spojitost mezi stupni jednotlivých vrcholů a počtem listů?

Úmluva. (zakořenění) Občas se nám hodí strom *zakořenit*: vybereme jeden vrchol, který se stane *kořenem*, a následně budeme všechny hrany kreslit směrem dolů od kořene. Pokud pak vede hrana mezi A, B a B je dál (tedy níž) od kořene než A, říkáme, že A je *otec* B, zatímco B je *syn* A. Obecněji pokud z A vede cesta „dolů“ do B, pak je A *předkem* B, zatímco B je *potomkem* A.

Definice. *Hloubka* zakořeněného stromu je počet hran v nejdelší cestě vedoucí z kořene do nějakého vrcholu grafu.

Definice. Pro reálné C říkáme, že nějaký strom má *C-logaritmickou hloubku*, má-li n vrcholů a hloubku nanejvýš $C\log(n)$.

Úlohy

Úloha 1. V lese žije n entů a jedna veverka. Entové stojí na místě, některé dvojice z nich jsou si přitom dost blízko na to, aby mezi nimi zvládla veverka přeskočit. Shodou okolností jsou entové rozestaveni tak, že mezi libovolnými dvěma z nich existuje právě jedna cesta, po které může veverka přeskákat. *Vzdáleností* dvou entů rozumíme počet skoků, které veverka potřebuje k tomu, aby se mezi nimi přesunula. *Osamělost* enta definujeme jako součet jeho vzdáleností od všech ostatních entů. Dokažte, že pokud se osamělosti některých dvou entů liší právě o 1, pak je n liché.
(PraSe 41–1j–4)

Úloha 2. (hloubka stromu I) Mějme nějaký zakořeněný strom, pro který platí:

- Každý vrchol má nanejvýš dva syny.
- Má-li jediného syna, pak tento syn musí být listem.
- Má-li dva syny, označme je jako levý a pravý – pak je počet potomků pravého roven nebo o 1 větší počtu potomků levého.

Umíme zkonstruovat takový strom pro libovolný počet vrcholů? A umíme pevně zvolit nějaké C tak, aby zkonstruované stromy měly C-logaritmickou hloubku?

Úloha 3. (hloubka stromu II) Mějme nějaký zakořeněný strom, pro který platí:

- Každý vrchol má nanejvýš dva syny.
- Má-li jediného syna, pak tento syn musí být listem.
- Má-li dva syny, označme je jako levý a pravý – pak se hloubky podstromu tvořeného levým synem a jeho potomky liší od toho tvořeného pravým synem a jeho potomky nanejvýš o 1.

Umíme zkonstruovat takový strom pro libovolný počet vrcholů? A umíme pevně zvolit nějaké C tak, aby zkonstruované stromy měly C-logaritmickou hloubku?

Úloha 4. (hloubka stromu III) Existují jiná pravidla, která nám zajistí C-logaritmickou hloubku?

Úloha 5. Mějme nějaký souvislý graf. Dokažte, že dvě nejdelší cesty procházejí stejným vrcholem.

Úloha 6. (záchodový problém I) Petr se rozhodl založit si továrnu na potrubí. V ní začal vyrábět různé rozdvojky, roztrojky, obecněji rozbočovače (neboli rozenky). Do každé rozenky vede právě jedna (vstupní) trubka a n (výstupních) jich z ní vychází. Petr se navíc rozhodl konce jednotlivých trubek obarvit. Výstupní trubku lze zapojit do výstupní, pokud mají stejné barvy. Jediným problémem je, že každý nový typ rozenky musí vyrábět na novém stroji.

Pan Karel podniká ve stavbě toalet na školách. Rád by, aby každé záchody byly tvořeny řadou toalet o počtu dělitelném pěti, do každé toalety vedla právě jedna trubka a aby byly všechny napojeny systémem rozenek na jednu vstupní trubku. Ví však, že jeho dělníci jsou hajdaláci, chtěl by tedy, aby počet toalet (volných výstupních trubek) musel vždy být dělitelný pěti, ať už budou dělníci skládat rozenky jakkoliv. Zvládne to Petr zajistit, pokud si může dovolit pouze konečný počet strojů?

Úloha 7. (záchodový problém II) Pan Karel znovu přišel za panem Petrem – nyní by potřeboval, aby počet záchodů byl prvočíselný. Zvládne to Petr s konečným počtem strojů?

Úloha 8. (záchodový problém III) Pan Karel znovu přišel za panem Petrem, nyní má zakázku na stavbu toalet do školky. Malé děti mají rady barvy, a tak si školka přeje, aby záchody byly tří barev (žluté, červené a modré). Aby se děti nehádaly, musí být každá barva zastoupena stejným počtem. Zvládne to Petr s konečným počtem strojů? A zvládl by to, pokud by školka požadovala jen dvě barvy?

Úloha 9. (záchodový problém IV) Pan Karel přišel za panem Petrem s otázkou, zdali umí vymyslet sadu rozenek takovou, že každé rozmístění barev záchodů bude možné vytvořit jen jedním způsobem. Zvládne to Petr s konečným počtem strojů?

Úloha 10. Do tenisového turnaje se přihlásilo 2^n soutěžících. V každém kole se všichni ještě nevypadlí hráči rozdělí do dvojic a odehrají zápas. Vítězové postupují do dalšího kola, poražení vypadávají. Na konci turnaje, když zůstane pouze jediný hráč, je potřeba vytvořit výsledkovou listinu, ve které nikdo nesmí být na horší pozici než hráč, kterého porazil. Kolika způsoby je možné takové pořadí vytvořit, pokud žádní dva hráči nesmí skončit na stejné příčce? (PraSe 31–1p–7)

Úloha 11. (vejce a patra) Mějme věžák s n patry a k vajec. Naším úkolem je zjistit, z jakého nejnižšího patra se vejce po vyhození z okna rozbije. Pro dané n a k zjistěte, kolikrát budeme muset vajíčkem házet, ať se vajíčko začne rozbíjet od libovolného patra.

Úloha 12. (kuchařková věta) Na matfyzu rádi vaříme čaj. Ale vařit čaj není zas tak jednoduché – je nutné plnit pravidla přísné etikety jeho vaření. Postup je však snadný:

Chceme-li uvařit čaj z počátečního nálevu n litrů, pak:

- Čaj povaříme po dobu cn^α minut v konvičce.
- Následně rozlijeme čaj do k dalších konviček: do i-té konvičky nalijeme $a_i n$ litrů, kde $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ je pevně zvolená množina kladných reálných čísel.

- Je-li čaje málo, naředíme ho před rozlitím vodou. Pokud naopak po rozlití nějaký čaj přebývá, vylijeme ho.
- Je-li v nějaké konvičce méně čaje než n_0, potom čaj z této konvičky servírujeme. Pro ostatní konvičky celý postup opakujeme, dokud není servírován všechen čaj.

Jak dlouho nám potrvá připravit čaj pro daná n, A a n_0, máme-li neomezenou zásobu konviček, ale pouze jednu plotnu?

Úloha 13. (Hydra a Herkules) Mějme hydru v podobě stromu s kořenem H. Herkules může useknout libovolný list. Pokud usekne list L s otcem X, nastane jedna z dvou situací. Pokud $X = H$, po useknutí L se nic nestane. V opačném případě má X otce, označme ho Y, a nechť S je podstrom tvořený vrcholem X a všemi jeho potomky (po useknutí L). Pak se v důsledku useknutí takového L zkopíruje odpovídající podstrom S jako nové potomstvo Y, tzn. Y bude mít nového syna X', který bude mít nové syny odpovídající synům X, atd.

Umí Herkules sekat tak, aby hydře po konečném počtu seknutí zbyl jen samotný kořen?

Úloha 14. Umí Herkules sekat donekonečna tak, aby hydře nikdy nezbyl jen samotný kořen?

Návody

12. Nechť $S := \sum_{a_i \in A} a_1^{\alpha}$. Zkus úlohu řešit zvlášť v případech $S < 1$, $S = 1$ a $S > 1$.

Literatura a zdroje

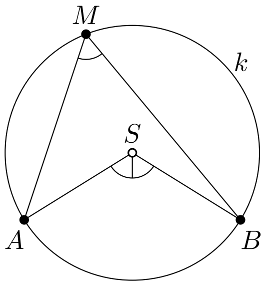
[1] Martin Mareš, Tomáš Valla: *Průvodce labyrintem algoritmů*, CZ.NIC, 2017.
[2] Martin Mareš: *Diskrétní Matematika*, *https://mj.ucw.cz/vyuka/2122/dm/.*
[3] Vladan Majerech: *Cvičení z předmětu Automaty a gramatiky*, *http://ktiml.mff.cuni.cz/˜maj/2022NTIN071.html.*
[4] Vladan Majerech: *Cvičení z předmětu Algoritmy a datové struktury 1*, *http://ktiml.mff.cuni.cz/˜maj/2022NTIN060.html.*

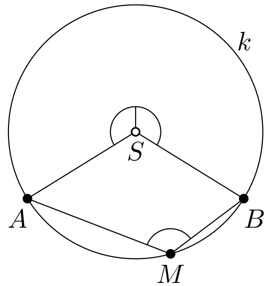
Tětivové čtyřúhelníky

Klárka Grinerová

Abstrakt. Napravo, nalevo, pravé, levé, pořád úhly. V přednášce si ukážeme pěkné vlastnosti tětivových čtyřúhelníků a pak se vrhneme na úlohy, kde hlavní role hrají úhly.

Věta. (o obvodovém a středovém úhlu) *Mějme kružnici k se středem S a její tětivu AB. Pro libovolný bod M na kružnici k nazýváme úhel AMB obvodovým a úhel ASB nazýváme středovým k příslušné tětivě AB. Pokud bod M leží na delším z oblouků AB, potom pro konvexní úhel ASB platí, že $|\sphericalangle ASB| = 2 \cdot |\sphericalangle AMB|$. Pokud M leží na kratším oblouku, platí rovnost pro nekonvexní úhel ASB.*





Důkaz. Pro důkaz věty rozeberme situace dle vzájemné polohy obvodového úhlu a středu kružnice. V případě, že bod M leží na delším oblouku, může bod S ležet na rameni úhlu, uvnitř nebo vně ostrého úhlu AMB. V druhém případě bod S vždy leží uvnitř konvexního úhlu AMB.

Pokud leží bod S na rameni obvodového úhlu, BÚNO na úsečce AM, potom trojúhelník BSM je rovnoramenný se základnou BM. Platí $|\sphericalangle SBM| = |\sphericalangle BMS|$, potom $|\sphericalangle BSM| = 180° - 2 \cdot |\sphericalangle SBM|$, z čehož dostáváme rovnost

$$|\sphericalangle ASB| = 2 \cdot |\sphericalangle SMB| = 2 \cdot |\sphericalangle AMB|.$$

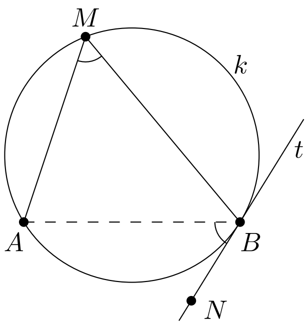
Pokud leží bod S uvnitř úhlu AMB, potom označme C průnik přímky SM a kružnice k. Jelikož $|CM| = 2|SM|$, potom z předchozího přípdu lze odvodit, že

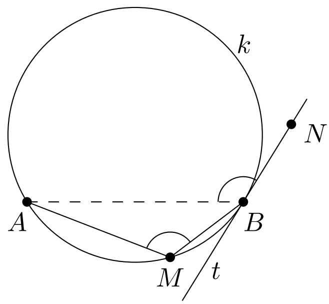
$$2 \cdot |\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ASC| \qquad \text{a} \qquad 2 \cdot |\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle CSB|.$$

Platí $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle AMC| + |\sphericalangle CMB|$ a $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASC| + |\sphericalangle CSB|$, z čehož dostáváme $2 \cdot |\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle ASB|$.

Zbylé dvě možnosti dokážeme obdobně jako předchozí. $\square$

Věta. (o úsekovém úhlu) *Mějme na kružnici k tětivu AB a bod M různý od A, B. Veďme přímku t, která se dotýká kružnice v bodě B. Zvolíme bod N ležící na t tak, že body M a N leží v různých polorovinách od AB. Úhel ABN nazveme úsekovým úhlem k tětivě AB. Úsekový úhel má stejnou velikost jako obvodový úhel AMB.*





Důkaz. Dokážeme větu v případě, že M leží na delším oblouku AB, opačný případ se vyřeší obdobně. Budiž S střed k, pak je trojúhelník ABS rovnoramenný se základnou AB. Označme jako D patu výšky z bodu S v trojúhelníku ABS. Trojúhelník DSB je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D. Jelikož $|\sphericalangle ASB| = 2 \cdot |\sphericalangle DSB|$ a zároveň z věty o obvodovém a středovém úhlu $|\sphericalangle ASB| = 2 \cdot |\sphericalangle AMB|$, takže $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle DSB|$. Dále platí

$$|\sphericalangle DBS| = 90^\circ - |\sphericalangle DSB| = 90^\circ - |\sphericalangle AMB|.$$

Zároveň SB je kolmé na t, proto je velikost úsekového úhlu

$$90^\circ - |\sphericalangle DBS| = 90^\circ - 90^\circ + |\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle AMB|.$$

$\square$

A teď hurá ke slibovaným tětivovým čtyřúhelníkům!

Definice. Čtyřúhelník je *tětivový*, pokud mu lze opsat kružnici.

Tvrzení. *Následující tvrzení jsou navzájem ekvivalentní:*

(1) *Body A, B, C, D tvoří tětivový čtyřúhelník.*
(2) *Úhly ACB a ADB shodné (ekvivalentně pro další neprotější dvojice).*
(3) *Součet velikostí protějších úhlů ABC a CDA je roven 180° (ekvivalentně pro dvojici úhlů BCD a DAB).*

Příklady

Příklad 1. Čtyřúhelníku $ABCD$ je opsána kružnice. Úhel ABC má $79°$, úhel BDC má $45°$. Jaká je velikost úhlu ACB?

Příklad 2. Máme zadané dvě kružnice k a l s průsečíky X a Y. Bodem X veďme přímku, která protíná kružnici k v bodě A a kružnici l v bodě C. Nyní i bodem Y veďme přímku. Ta protíná k v bodě B a l v bodě D. Dokažte $AB \parallel CD$.

Příklad 3. Mějme trojúhelník ABC. Osa úhlu BCA protíná podruhé kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě D. Dokažte, že bod D je středem oblouku AB.

Příklad 4. Nechť D je bod na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníka ABC. Dále X je střed kružnice opsané trojúhelníku ACD a Y střed kružnice opsané trojúhelníku BDC. Dokažte, že body C, D, X a Y leží na jedné kružnici.

Příklad 5. Rovnostrannému trojúhelníku KLM opíšeme kružnici. Na kratším oblouku KL této kružnice si zvolíme bod Q. Pak z bodu M spustíme kolmice na přímky QK a QL a jejich paty označíme E a F. Ukažte, že trojúhelník MEF je rovnostranný. (PraSe 28–2p–3)

Příklad 6. Mějme čtyřúhelník $EFGH$ takový, že se dají sestrojit kružnice e, f, g a h se středy po řadě v bodech E, F, G a H tak, aby se kružnice e a g obě dotýkaly (vnějším dotykem) kružnic f a h. Ukažte, že pak body dotyku těchto kružnic tvoří tětivový čtyřúhelník. (PraSe 28–2p–5)

Příklad 7. (Brahmaguptova věta) Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami, které se protínají v bodě E. Bodem E veďme kolmici na stranu CD. Dokažte, že tato kolmice půlí stranu AB.

Příklad 8. (Simsonova přímka) Je dán trojúhelník ABC a bod D na jeho kružnici opsané. Z bodu D spustíme kolmice na strany BC, CA, AB a jejich paty označíme P, Q, R. Dokažte, že P, Q, R leží na jedné přímce.

Příklad 9. Jsou dány dvě kružnice k, l se středy X, Y, osově souměrné podle společné tětivy AB, přičemž vzdálenost středů je menší než poloměr kružnic. Dále je na kružnici k dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož průsečík úhlopříček P leží na kružnici l a strana AD je tečna ke kružnici l. Dokažte rovnost $|CD| = |AP|$. (BRKOS XXVII–4–4)

Příklad 10. (Napoleonův trojúhelník) Mějme trojúhelník ABC. Nad stranami AB, BC, CA uvažme rovnostranné trojúhelníky ABD, BCE, ACF. Středy kružnic opsaných těmto trojúhelníkům označme po řadě K, L, M. Dokažte, že KLM je též rovnostranný.

Návody

2. Doplň úhly ve čtyřúhelnících $ABYX$ a $XYDC$.

3. Doplň obvodové úhly k tětivám AD a BD.

4. Uvaž středové a obvodové úhly k tětivě CD.

5. Uvaž obvodové úhly k tětivám FM a EM.

6. Uvaž rovnoramenné trojúhelníky s vrcholy v bodech E, F, G, H a v bodech dotyků kružnic.

7. Kolmice dělí trojúhelník AEB na dva menší trojúhelníky, uvaž velikosti úhlů v těchto trojúhelnících.

8. Ukaž, že čtyřúhelník $CPDQ$ je tětivový.

9. Hledej shodné úhly a podobné trojúhelníky.

10. Dokresli CD, AE, BF.

Literatura a zdroje

[1] Jan Kuchařík: *Některé netradiční vhledy do geometrie*, SOČ z matematiky, 2011/2012.
[2] Martin Töpfer: *Tětivové čtyřúhelníky*, Mentaurov, 2013.
[3] Jan Kadlec: *Tětivové čtyřúhelníky*, Paseky, 2018.

Invarianty

PETR HLADÍK

ABSTRAKT. Budeme hledat invarianty, popřípadě monovarianty. Tyto problémy většinou vyžadují přijít na nějaký drsný trik, potom už je řešení často přímočaré. Druhá možnost je nasadit si růžové okuláry a dívat se na příklad v jiném světě.

U příkladů, kde začínáme v nějakém počátečním stavu a následně se ptáme, jak dopadne mnohokrát opakovaný nějaký předdefinovaný krok (např. dvě čísla nahradíme jejich rozdílem), se velmi často hodí najít vlastnost, která se nemění. Této vlastnosti říkáme *invariant*. Protože invariant bude platit na konci každého kroku, můžeme díky němu něco dokázat o koncovém stavu. Tuto myšlenku si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad. Na tabuli jsou napsaná čísla $1, 2, 3, \ldots, 2n$, kde n je liché přirozené číslo. Vybereme si libovolná dvě čísla a, b, která smažeme, a místo nich napíšeme číslo $|a - b|$. Ukažte, že poslední zbylé číslo je liché.

Řešení. Označme S součet čísel na tabuli. Tedy před prvním krokem je

$$S = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1).$$

Z toho vidíme, že součet S je lichý. Po odebrání a a b se součet sníží o $2\min(a, b)$, to je ale sudé číslo, tedy S zůstává liché. Postupným mazáním a nahrazováním tedy zůstane na konci jedno liché číslo.

V tomto případě byl invariant parita součtu všech prvků. Dalšími užitečnými invarianty mohou být:

(1) součet čísel, případně součet čísel modulo n (pro vhodné n),
(2) součet druhých mocnin,
(3) další aritmetické operace: součin, podíl, součet čtverců atd.,
(4) počet nějakých jevů, případně počet nějakých jevů modulo n.

Ne vždy se hodí najít něco neměnného, občas nám stačí najít vlastnost, která se mění jedním směrem, tuto vlastnost nazýváme *monovariantem*.

Příklad. Každý člen Strany má nejvýše tři nepřátele a nepřátelství jsou symetrická. Ukažte, že pak existuje rozdělení všech členů do dvou skupin takové, že každý člen je ve skupině s nejvýše jedním svým nepřítelem.

Řešení. Uvažme libovolné rozdělení do dvou skupin a označme N celkový počet znepřátelených dvojic, jejichž oba členové jsou ve stejné skupině. Pokud člen A má ve své skupině více než jednoho nepřítele, pak jeho přemístěním do druhé skupiny snížíme N alespoň o jedna. Protože N musí být kladné, nemůže se zmenšovat do nekonečna, v jednu chvíli se tento proces musí zastavit. Když se zastaví, znamená to, že už nikdo nemá dva nepřátele ve své skupině. Nalezli jsme tedy hledané rozdělení skupin.

Úlohy

Úloha 1. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

Úloha 2. Mějme celá čísla a, b, c a d, ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a, b, c, d) čtveřicí $(a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - a)$. Ukažte, že pro libovolné číslo k bude jednou alespoň jedna souřadnice v absolutní hodnotě větší než k.

Úloha 3. Buď $d(n)$ ciferný součet čísla n. Najděte všechna řešení rovnice

$$n + d(n) + d(d(n)) = 2015.$$

Úloha 4. Každé z čísel $a_1, \ldots, a_n$ je rovno $+1$ nebo -1 a platí

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

Úloha 5. Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, z nichž každý má nejvýše $n - 1$ nepřátel a nepřátelství jsou symetrická. Ukažte, že je možné je rozesadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.

Úloha 6. Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček nebo dvojek?

Úloha 7. Mějme množinu $\{3, 4, 12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0{,}6a+0{,}8b$ a $0{,}8a+0{,}6b$. Můžeme někdy dostat množiny (a) $\{4, 6, 12\}$ nebo (b) $\{x, y, z\}$, kde $|x - 4|, |y - 6|, |z - 12| < \frac{1}{\sqrt{3}}$?

Úloha 8. V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1, A_2, \ldots, A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \leq k \leq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí.

Úloha 9. Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

(a) Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?

(b) Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany.

Úloha 10. Na tabuli je napsáno v desítkové soustavě celé kladné číslo N. Není-li jednociferné, smažeme jeho poslední číslici c a číslo m, které na tabuli zůstane, nahradíme číslem $|m - 3c|$.[1] Najděte všechna přirozená čísla N, z nichž opakováním popsané úpravy nakonec dostaneme číslo 0.

Úloha 11. Vezměme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. V jednom kroku můžeme jeden trojúhelník rozdělit výškou (na přeponu) na dva podobné trojúhelníky. Můžeme opakovaným dělením docílit toho, že žádné dva z našich trojúhelníků nebudou shodné?

Úloha 12. Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, aby byl součet všech pěti čísel kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x, y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x + y$, $-y$, $y + z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? Uvažme $S = \sum_{i=1}^{n-1} x_i * x_{i+1}$

[1] Například bylo-li na tabuli číslo $N = 1204$, po úpravě tam bude $|120 - 3 \cdot 4| = 108$.

Návody

1. Liché a sudé pozice.

2. Vzdálenost od počátku.

3. Dělitelnost.

4. Co může být krok algoritmu, když se chceme dostat k libovolnému ohodnocení proměnných? A co pak bude ten nejtriviálnější invariant?

5. Vzpomeň si na druhou úlohu, co zkusit „invertovat oblouk sousedů“?

6. Dělitelnost nějakým vhodným číslem.

7. Vzdálenost od počátku.

8. Každé minci přiřadíme její pozici.

9. Parita počtu členů.

10. 31.

11. Jaké budou velikosti rozdělených trojúhelníků? Šlo by to zapsat jako uspořádaná dvojice? Mocniny jsou mocné.

12. Součet absolutních hodnot všech podmnožin sousedících čísel.

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.
[2] Martin Töpfer: *Invarianty*, Lipová-lázně, 2016.

Polynomy

Verča Hladíková

Abstrakt. Příspěvek seznámí čtenáře s polynomy a jejich základními vlastnostmi. Dále uvádí několik příkladů k procvičení.

Naši cestu do světa polynomů zahájíme formální definicí a několika teoretickými poznatky.

Teorie

Definice. *Polynomem stupně* n rozumíme výraz tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Čísla a_i nazýváme *koeficienty polynomu* a x *proměnnou*. Pojmenujeme-li polynom f, pak $\deg(f)$ značí jeho stupeň.

Poznámka. Zpravidla bývají koeficienty polynomu reálná čísla. Obecně však můžeme polynomy definovat nad libovolným komutativním okruhem.

Poznámka. K polynomům si přidáme jeden speciální případ, a to *nulový polynom*, který má všechny koeficienty rovny nule. Jeho stupeň klademe roven -1.

Polynomy můžeme intuitivně (člen po členu) sčítat, odčítat i násobit. Jak je to ale s dělením?

Definice. Řekneme, že polynom g *dělí* polynom f (píšeme $g \mid f$), pokud existuje polynom h takový, že $f = g \cdot h$.

Tvrzení. (dělení se zbytkem) *Nechť f je polynom a g nenulový polynom. Pak existuje právě jedna dvojice polynomů h, r taková, že $f = g \cdot h + r$ a $\deg(r) < \deg(g)$.*

Další část teorie věnujeme pojmu kořen polynomu.

Definice. Číslo a je *kořenem* polynomu f, pokud $f(a) = 0$.

Tvrzení. *Polynom f má kořen a právě tehdy, když $(x - a) \mid f$.*

Důsledek. *Nenulový polynom stupně n má nejvýše n kořenů.*

Základní věta algebry říká, že každý polynom nad komplexními čísly (s komplexními koeficienty) má alespoň jeden (komplexní) kořen. Z toho již plyne, že každý komplexní polynom stupně n lze zapsat ve tvaru $a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, kde x_i jsou jednotlivé komplexní kořeny. Nalezení kořenů polynomu nám tedy umožňuje jej dostat do součinového tvaru, v němž se nám s ním bude lépe pracovat. Důkaz této věty je složitý a přesahuje rámec přednášky. Platí ale, že každý reálný polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

Důsledek. *Pokud se dva polynomy stupně nejvýše n shodují v alespoň $n+1$ bodech, jsou identické.*

Důsledek. *Každými $n+1$ body lze proložit unikátní polynom stupně nejvýše n.*

Jak takový polynom najdeme?

Věta. *Mějme body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a k nim příslušná $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Pak pro polynom*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

platí $f(x_i) = y_i$ pro všechna $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Polynom f nazýváme Lagrangeovým interpolačním polynomem.

Věta. *Má-li polynom f celočíselné koeficienty a $a, b \in \mathbb{Z}$, pak $a - b \mid f(a) - f(b)$.*

Věta. (rational root theorem) *Má-li polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s celočíselnými koeficienty racionální kořen $\frac{r}{s}$ (v základním tvaru), pak $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$.*

Úlohy

Úloha 1. Najděte polynom nabývající celočíselných hodnot ve všech celých číslech, který nemá všechny koeficienty celočíselné. (MKS 34–6–1)

Úloha 2. Najděte všechny polynomy f splňující $x \cdot f(x-1) = (x+1) \cdot f(x)$ pro všechna reálná x. (MKS 34–6–3)

Úloha 3. Najděte všechny polynomy f splňující $f(0) = 0$ a $f(x^2+1) = (f(x))^2 + 1$ pro všechna reálná x.

Úloha 4. Najděte všechny polynomy f splňující $f(2) = 6$ a $f(x^2) = x^2(x^2+1)f(x)$ pro všechna reálná x.

Úloha 5. Ať f je polynom s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že je-li $f(n)$ dělitelné třemi pro tři po sobě jdoucí přirozená čísla, pak je dělitelné třemi pro všechna přirozená čísla.

Úloha 6. Mějme polynom f s celočíselnými koeficienty a $a \in \mathbb{Z}$. Dále platí, že $f(-a) < f(a) < a$. Dokažte, že $f(-a) < -a$.

Úloha 7. Najděte všechny polynomy f splňující $f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x^2)$ pro všechna reálná x.

Úloha 8. Existuje polynom sudého stupně s lichými celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen? (MKS 34–6–4)

Úloha 9. Polynom f s celočíselnými koeficienty splňuje $f(0) = 1$. V kolika nejvíce různých celých číslech může nabývat hodnoty 2008? (MKS 28–3–5)

Úloha 10. Ať f je polynom s celočíselnými koeficienty splňující $f(0) = f(1) = 2011$. Ukažte, že $f(x)$ nemá celočíselný kořen.

Úloha 11. Reálný polynom f stupně $\deg f \leq n$ splňuje $f(i) = 2^i$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. Určete $f(n + 1)$.

Úloha 12. Koeficienty polynomu f jsou přirozená čísla. Pro každé přirozené číslo n označme a_n součet cifer v desítkovém zápisu čísla $f(n)$. Dokažte, že existuje číslo, které se v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ vyskytuje nekonečněkrát. (MKS 21–6–6)

Úloha 13. Polynom $f(x)$ stupně 2015 pro $k = 1, \ldots, 2016$ splňuje $f(k) = \frac{1}{k}$. Určete $f(2017)$. (MKS 29–1–8)

Návody

1. Nápovědu k prvnímu příkladu nechceš.

2. Ukaž, že kořenem polynomu je každé celé číslo.

3. Postupně dosazuj za x hodnoty $0, 1, 2, \ldots$ a použij důsledek o identičnosti polynomů.

4. Z druhé rovnosti urči stupeň polynomu f.

5. Z věty výše víme, že pokud je $a - b$ dělitelné třemi, pak i $f(a) - f(b)$ je dělitelné třemi.

6. Vhodně použij větu o polynomech s celočíselnými koeficienty.

7. Porovnej členy s nejnižším stupněm na pravé a levé straně.

8. Aplikuj rational root theorem.

9. Uvaž $g(x) = f(x) - 2008$. Hledejte maximální počet kořenů g. Pro kořeny x_i platí $-2007 = a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$, tedy $n \leq 5$.

10. Kdyby a bylo celočíselným kořenem f, muselo by z věty platit $a \mid 2011$ i $a \pm 1 \mid 2011$, což není možné.

11. Použij Lagrangeův polynom, vyjde $2^{n+1} - 1$.

12. Dosaď „vysokou“ mocninu 10.

13. Zkoumej kořeny polynomu $g(x) = xf(x) - 1$.

Literatura a zdroje

[1] Lucien Šíma: *Polynomy*, Paseky, 2018.
[2] Jakub Löwit: *Lagrangeova interpolace*, sborník *i*KS, 2018.

Rekurentní rovnice a posloupnosti

Terka Kučerová

Abstrakt. Chcete vědět, kolik králíků budete mít za deset let? Odpověď na tuto otázku a mnoho dalších lze získat pomocí rekurentních posloupností, tedy posloupností, u nichž známe prvních pár členů a způsob, jak následující členy spočítat z předchozích. Příspěvek shrnuje základní způsob, jak přejít od rekurentního zadání k explicitnímu, které je mnohdy výhodnější, a předkládá úlohy k procvičení.

Příkladem rekurentní posloupnosti je *Fibonacciho posloupnost* F_n, která je zadána rekurentně vztahy $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Takto zadaná posloupnost je sice jednoznačně určena, ale spočítat hodnotu F_{2016} je spíš trest než úloha. Na přednášce si ukážeme, jak lze přejít k explicitnímu vyjádření a jak řešit některé úlohy spojené – někdy poněkud překvapivě – s rekurentními posloupnostmi.

Homogenní lineární diferenční rovnice (s konstantními členy)

Začneme zlehka – řešením téměř nejjednoduššího případu, pod který spadá i Fibonacciho posloupnost, a následně se pokusíme uvedený aparát zobecnit. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že rekurentní vztah obsahuje pouze „dva předchozí členy“, u nichž jsou konstantní koeficienty, a neobsahuje člen nezávislý na hodnotách posloupnosti, tedy například $2n + 1$. Pak je posloupnost dána tzv. *homogenní lineární diferenční rovnicí druhého stupně.*

Definice. *Homogenní diferenční rovnicí druhého stupně s konstantními členy* rozumíme rovnici

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost x_n a p a $q \neq 0$ jsou daná čísla.

Uvažme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0,$$

kterou formálně dostaneme z rovnice (1) tak, že nahradíme dolní index $n + k$ exponentem k.[1] Označme λ_1, λ_2 její dva komplexní kořeny.

[1]Této rovnici říkáme *charakteristická rovnice* rovnice (1).

Nejprve uvažme $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pak snadno nahlédneme, že posloupnosti $x_n^1 = \lambda_1^n$ a $x_n^2 = \lambda_2^n$ jsou řešeními rovnice (1). Z linearity rovnice (1) přitom plyne, že libovolná posloupnost ve tvaru $x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$, kde a, b jsou libovolné konstanty, je řešením rovnice (1). Stačí tedy volit vhodná a, b, aby byly splněny počáteční podmínky, a tím nalezneme explicitní vyjádření rekurentně zadané posloupnosti.

Pokud $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, lze ukázat, že posloupnost λ^n i posloupnost $n\lambda^n$ je řešením rovnice (1). Explicitní vyjádření rekurentní posloupnosti pak budeme hledat ve tvaru $x_n = (a + bn)\lambda^n$.

Příklad. Najdi všechna řešení rovnice $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

Pokud členy posloupnosti závisí na více předchozích členech, je situace obdobná: Od homogenní diferenční rovnice k-tého stupně

$$x_{n+k} = p_{k-1}x_{n+k-1} + p_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + p_0x_n, \tag{2}$$

$p_0 \neq 0$, přejdeme k charakteristické rovnici a označíme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$ všechny její kořeny. Pokud je λ_i (nenulový) kořen s násobností n_i, pak je posloupnost $x_n^{i,j} = n^j\lambda_i^n$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n_i - 1\}$ řešením rovnice (2). Hledané řešení opět nalezneme jako tzv. *lineární kombinace* výše uvedených posloupností.

A co když rovnice homogenní není?

V případě, že rekurentní formule obsahuje i nějaký výraz v n, např. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$, je situace složitější. Obecně řešíme nehomogenní rovnici

$$x_{n+k} - p_{k-1}x_{n+k-1} - p_{k-2}x_{n+k-2} - \cdots - p_0x_n = f(n), \tag{3}$$

kde $p_0 \neq 0$ a $f(n)$ je nějaká funkce definovaná na $\mathbb{N}_0$. Při řešení nám velice pomůže následující lemma.

Lemma. *Nechť p_n je jedno, tzv. partikulární, řešení rovnice* (3)*. Potom posloupnost b_n je řešením* (3) *právě tehdy, když $b_n = p_n + a_n$, kde a_n je nějaké řešení* (2).

Abychom tedy vyřešili nehomogenní rovnici, stačí, abychom nalezli nějaké její jedno řešení. To je obecně velice těžké. Ukážeme si ale, jak jej najít, pokud je pravá strana ve tvaru $f(n) = \lambda^n P(n)$, kde λ je nějaké nenulové komplexní číslo a P polynom. Pokud označíme ℓ násobnost λ jakožto kořene[2] P, pak existuje partikulární řešení rovnice (3) ve tvaru $p_n = \lambda^n n^\ell Q(n)$, kde Q je polynom stejného stupně jako P.

A k čemu to je dobré?

Úloha 1. Kolika nejméně kroky lze přeskládat Hanojskou věž výšky n na vedlejší stojan?

[2]Pokud λ není kořenem P, pokládáme $\ell = 0$.

Úloha 2. Na kolik nejvíce kusů můžeme rozkrájet (rovinnou) pizzu n rovnými řezy?

Úloha 3. Mějme posloupnost nul a jedniček. Pro kolik posloupností nul a jedniček délky n platí, že v celé posloupnosti nejsou vedle sebe dvě nuly?

Úloha 4. Opilý pirát se motá po přímce. Začíná v bodě 0 a každým krokem se s 50% pravděpodobností posune o $+1$ a s 50% pravděpodobností o -1. Protipirátské komando přitom umístilo do bodu 2016 minu. S jakou pravděpodobností pirát přežije?

Úloha 5. Zásahová jednotka z válečné lodě *Snare* zatkla dva piráty X a Y, a že byla štědrá, dala jim po řadě x a y mincí. Piráti si mají házet spravedlivou mincí, a kdo prohraje, dá jednu svou minci druhému. Komu dojdou peníze, bude popraven, zatímco druhý propuštěn. Jaká je pravděpodobnost, že přežije pirát X? A co když má pirát X v každém hodu obecnou pravděpodobnost výhry p?

Úloha 6. Nalezněte explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti a_n, která splňuje rekurentní vztah $a_{n+1} - 3a_n = 2$ a počáteční podmínku $a_1 = 2$.

Úloha 7. (Fibonacciho posloupnost) Najděte F_n, pokud $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a platí vztah $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Úloha 8. Ukažte, že existuje jediná posloupnost a_n kladných čísel splňující $a_0 = 1$ a $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$.

Návody

1. Vede k rekurenci $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

2. Tato úloha vede k rekurenci $a_n = a_{n-1} + n$.

3. Pro a_n značící počet takovýchto posloupností platí $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

4. Problém vede na rekurentní rovnici $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n+1}$, kde a_n je pravděpodobnost výbuchu, nachází-li se pirát v bodě $2016 - n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

5. Pravděpodobnost, že pirát X zbankrotuje, pokud má i mincí, a pirát Y má tím pádem $y + x - i$ mincí, označíme jako x_i. Spočteme, že platí $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_{i+1}$. (Při případu pravděpodobnosti výhry p se k rekurentní rovnici dojde obdobně.)

Literatura a zdroje

[1] Miško Szabados: *Rekurentné postupnosti*, Oldřichov, 2009.
[2] Katka Quittnerová: *Rekurentné postupnosti*, Horní Bradlo, 2004.
[3] Saša Kazda: *Rekurentní rovnice*, Janova Bouda, 2005.
[4] Z. Masáková: *Diskrétní matematika II*, *http://people.fjfi.cvut.cz/masakzuz/dim_soubory/dim2.pdf*.
[5] Martin Sýkora: *Rekurentní postupnosti*, Lipová-lázně, 2016.

Lagrangeovy multiplikátory

Josef Minařík

Abstrakt. Lagrangeovy multiplikátory umí být mocný nástroj na hledání extrémů funkcí více proměnných za podmínky dané rovností. Také je často lze použít k důkazům nerovností.

Derivace

K použití Lagrangeových multiplikátorů budeme potřebovat trochu derivovat. Místo formálních definic si raději ukažme, jak se derivují jednoduché funkce, ať se můžeme pustit do počítání.

Úmluva. *Derivaci* funkce f budeme značit f' a získáme ji aplikací následujících pravidel.

Tvrzení. *Pro následující funkce v proměnné x platí:*

- $c' = 0$, *kde c je libovolná reálná konstanta,*
- $(x^k)' = kx^{k-1}$, *kde k je reálné číslo,*
- $(cf(x))' = cf(x)'$, *kde c je libovolná reálná konstanta,*
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

S touto sadou (velmi základních) pravidel zvládneme zderivovat libovolný polynom. To je samozřejmě velmi omezená množina funkcí, ale pro naše účely by to většinou mělo stačit.

Příklad.
- $42' = 0$,
- $x' = 1$,
- $(x^3)' = 3x^2$,
- $(2x^2 + x + 5)' = 4x + 1$.

Tvrzení. *K vyřešení většiny úloh v tomto příspěvku by to nemělo být potřeba, ale platí*

- $\sin(x)' = \cos(x)$, $\cos(x)' = -\sin(x)$,
- $(e^x)' = e^x$, $\ln(x)' = \frac{1}{x}$,
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$.

Cvičení. Jestli vás nebaví sledovat, jak Pepa vysvětluje derivace, můžete zatím zderivovat funkce $\sqrt{2x^3}$, $x^2e^x\sin(x)$, $\sin(\cos(x))$, x^x, $\ln(\tan(3x))$, $\sin(x)^{\sqrt{\cos(x)}}$ nebo $x^{x^{x^x}}$.

V této přednášce se často potkáme s funkcemi více proměnných, proto si potřebujeme zadefinovat *parciální derivace.*

Definice. *Parciální derivaci* funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ podle proměnné x_i značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Spočítáme ji tak, že se na všechny ostatní proměnné díváme jako na konstanty a předstíráme, že f je funkce pouze v proměnné x_i.

Dále budeme často potřebovat zderivovat funkci podle všech proměnných, tomu se říká gradient.

Definice. *Gradientem* funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rozumíme vektor

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Příklad. Uveďme si pár příkladů gradientů jednoduchých funkcí více proměnných:

- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $\nabla f = (1, 1, \ldots, 1)$.
- $f(a, b, c) = abc$, $\nabla f = (bc, ac, ab)$.
- $f(x, y) = x^2y + 2xy^3$, $\nabla f = (2xy + 2y^3, x^2 + 6xy^2)$.

Lagrangeovy multiplikátory

Lagrangeovy multiplikátory nám umožňují najít lokální extrém funkce více proměnných za nějaké podmínky s rovností. Je tady ale několik technických detailů, na které je potřeba si dát pozor.

Věta. (Lagrangeovy multiplikátory) *Budiž $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelná funkce a uvažme množinu $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$. Jestliže spojitě diferencovatelná funkce $f : M \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě x_0 na M lokálního extrému, potom platí buď $\nabla g(x_0) = 0$ nebo $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ pro nějakou reálnou konstantu λ.*

Toto je ve skutečnosti trochu oslabená verze Lagrangeových multiplikátorů, nám ale prozatím bude stačit. Ve formulaci věty se vyskytuje pojem *spojitě diferencovatelná* funkce, to znamená, že její derivace je spojitá. Většina hezkých funkcí, na které narazíme (tedy těch, kde nenastane dělení nulou, nebo tam není absolutní hodnota a podobně), bude spojitě diferencovatelná. Zejména v případě polynomů nás tato podmínka nemusí moc trápit.

Pozor na to, že multiplikátory nám pomůžou najít jenom lokální extrémy, nic nám ale neříkají o globálních extrémech. Naštěstí nám může pomoct následující tvrzení:

Věta. *Na uzavřené a omezené (neboli kompaktní) množině $M \subset \mathbb{R}^n$ má spojitá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ globální minimum i maximum.*

Pojďme si to předvést na příkladu.

Příklad. Najděte maximum funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy$ na jednotkové kružnici.

Řešení. Použijeme Lagrangeovy multiplikátory. Jednotková kružnice je množina bodů splňujících $x^2+y^2 = 1$, naše podmínka tedy bude $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Funkce f i g jsou spojitě diferencovatelné, takže podmínky věty jsou splněny.

Gradienty našich funkcí jsou $\nabla f = (2x+2y, 2x)$ a $\nabla g = (2x, 2y)$. Předpokládejme, že bod (x_0, y_0) je lokální maximum, potom podle věty o Lagrangeových multiplikátorech platí $\nabla g(x_0,y_0) = 0$ nebo $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$.

(1) Případ $\nabla g(x_0,y_0) = 0$ je jednoduchý, neboť musí platit $(2x,2y) = (0,0)$, tudíž $x = 0$ a $y = 0$. To není bod na jednotkové kružnici, nemusí nás tedy zajímat.

(2) Druhý případ je trochu složitější, potřebujeme vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2\lambda x, \\ 2x &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením z druhé rovnice do první dostaneme

$$(\lambda^2 - \lambda - 1)y = 0.$$

Případ $y = 0$ zjevně nevyhovuje, zbývá tedy $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Dosazení do poslední rovnice nám dá

$$\begin{aligned} \lambda^2 y^2 + y^2 - 1 &= 0, \\ y^2 &= \frac{1}{1+\lambda^2}, \\ y &= \pm\sqrt{\frac{2}{5\pm\sqrt{5}}}. \end{aligned}$$

Dosazením a trochou úprav nyní zjistíme, že funkce má čtyři různé lokální extrémy, ve kterých nabývá hodnot $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Nalezení lokálních extrémů nám ještě nezaručuje, že jsme našli globální extrémy (ty by třeba ani nemusely existovat). My ale maximalizujeme na kružnici, která je kompaktní (uzavřená a omezená), takže globální maximum mít musí. Tím musí nutně být jedno z lokálních maxim, takže to je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ukažme si ještě jednu úlohu. Ona samotná je sice triviální, ukazuje ale, že použití multiplikátorů skýtá drobné nástrahy.

Příklad. Určete minimum výrazu xy za podmínky $x + y = 1$ pro

- x, y reálná,
- x, y nezáporná,
- x, y kladná.

Řešení. Opět použijeme Lagrangeovy multiplikátory, tentokrát máme $f(x,y) = xy$ a $g(x,y) = x + y - 1$, takže $\nabla f(x,y) = (x,y)$ a $\nabla g(x,y) = (1,1)$. Podmínky věty jsou splněny, případ $\nabla g = 0$ zjevně nastat nemůže, řešíme tedy soustavu

$$\begin{aligned} x &= \lambda 1, \\ y &= \lambda 1, \\ x + y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je zjevně $x = y = \lambda = \frac{1}{2}$.

Znamená to tedy, že odpovědí je $\frac{1}{4}$? Nikoliv, jediné, co víme, je, že $\frac{1}{4}$ je lokální extrém. Není moc těžké si rozmyslet, že lokální maximum, nás ale zajímá minimum. Žádná lokální minima jsme nenašli, co to pro nás znamená?

- Pro reálná x, y tato funkce minimum nemá (množina není omezená, takže extrémy existovat nemusí), když pošleme proměnné do nekonečna, dostaneme libovolně malou hodnotu.
- Pro nezáporná x, y minimalizujeme na uzavřené a omezené množině, funkce tedy někde musí nabývat lokálního minima. Potřebujeme ověřit krajní body. Na okrajích intervalu $(0,1)$ a $(1,0)$ je funkce nulová a jedná se o globální minimum.
- Pro kladná x, y naše množina není uzavřená, takže taky nemusí mít globální minimum! Skutečně to tak je, není těžké si rozmyslet, že se můžeme dostat libovolně blízko nuly, ale ne na nulu samotnou.

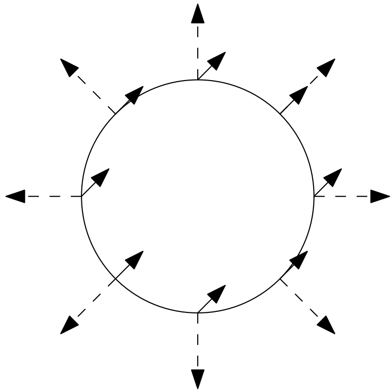
Proč to funguje?

Z toho, co jsme si zatím ukázali, nemusí být moc jasné, proč by Lagrangeovy multiplikátory měly fungovat. Nebudeme si je dokazovat formálně, zkusme si ale trochu rozmyslet, proč to dává smysl. Základem je fakt, že gradient „ukazuje směr, ve kterém funkce roste nejvíc“. Navíc nám danou funkci v okolí daného bodu lineárně aproximuje. Gradient podmínky nám potom ukazuje ve směru kolmém na křivku, na které hledáme extrém. To protože gradient ukazuje ve směru, kde podmínka nejvíce roste, a tedy je nejrychleji porušena.

Aby byl v nějakém bodě lokální extrém, nesmíme být schopni pohnout se ve směru, ve kterém funkce roste. To znamená, že gradient funkce je kolmý na podmínku, tedy rovnoběžný s jejím gradientem.

Co tam ale dělá případ $\nabla g = 0$? Ten zachycuje situaci, kdy šipka podmínky „nemá směr“ a kterou je proto potřeba ošetřit zvlášť.

Na následujícím obrázku je zachycena situace z první úlohy. Plné šipky značí gradient funkce, jejíž extrém hledáme, a čárkované šipky gradient podmínky.



Zobecnění

Výše zmíněné tvrzení lze dále zobecnit pro větší počet podmínek.

Věta. (Lagrangeovy multiplikátory) *Buďte $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelné funkce a uvažme množinu $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0\}$. Nabývá-li spojitě diferencovatelná funkce $f : M \to \mathbb{R}$ v bodě x_0 na M lokálního extrému, potom buď*

(1) *existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takové, že $\sum \alpha_i \nabla g_i(x_0) = 0$, kde aspoň jedna α je nenulová; nebo*
(2) *existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ takové, že $\nabla f(x_0) = \sum \lambda_i \nabla g_i(x_0)$.*

To znamená, že v lokálním extrému jsou buď gradienty podmínek lineárně závislé, nebo je gradient naší funkce lineární kombinací daných podmínek.

Lagrangeovy multiplikátory jdou potom dále zobecnit na Karushovy-Kuhnovy-Tuckerovy podmínky, těmi se ale v tomto příspěvku zabývat nebudeme.

Úlohy

Úloha 1. Jaké je maximum výrazu $x + y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 4$?

Úloha 2. Jaké je minimum výrazu $x + y$ za podmínky $xy = -1$?

Úloha 3. Jaké je maximum výrazu xy za podmínky $x^2 + xy + y^2 = 1$?

Úloha 4. Jaké je maximum a minimum výrazu $8x^2 - 2y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$?

Úloha 5. Který bod na přímce $3x - 5y + 7 = 0$ má nejmenší vzdálenost od počátku?

Úloha 6. Krabice (tedy kvádr bez horní podstavy) má povrch 12 m^2, jaký největší může mít objem?

Úloha 7. Dokažte, že pro všechna reálná a, b splňující $a + b = 4$ platí $ab \leq 4$.

Úloha 8. Který bod elipsy $2x^2 + xy + y^2 = 4$ má minimální vzdálenost od počátku?

Úloha 9. Jaké je maximum a minimum x^2y za podmínky $x + 2y^2 = 6$?

Úloha 10. Který bod na křivce $xyz = 3$ má minimální vzdálenost od počátku?

Úloha 11. Jaké je minimum $x^2+y^2+z^2$ za podmínek $x+y+z = 9$ a $x+2y+3z = 20$?

Úloha 12. Dokažte AG nerovnost, tedy že pro nezáporná reálná $a_1, \ldots, a_n$ platí

$$a_1 + \cdots + a_n \geq n(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Úloha 13. Jaké je maximum $a^2b+b^2c+c^2a$ pro nezáporná reálná a, b, c splňující $abc = 1$? (Kanada 1999)

Úloha 14. Pro kladná reálná a, b, c splňující $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$ dokažte $ab+bc+ca \leq \frac{3}{4}$.

Úloha 15. Jaké je maximum výrazu $xy+yz+zx$ za podmínky $x^2+y^2+z^2 = 1$?

Úloha 16. Jaké je maximum výrazu $x^3+y^3+z^3$ za podmínky $xyz^2 = 1$?

Úloha 17. Jaké je maximum výrazu $2a+b+c$ za podmínek $ab+bc+ca = 16$ a $a \geq 3$? (MO A-64-II)

Úloha 18. Jaké je maximum výrazu $b+c$ za podmínky $(a+c)(b^2+ac) = 4a$ pro kladná reálná a, b, c? (MO A-65-III)

Úloha 19. Dokažte $\sum \frac{1}{1+a+b} \leq 1$ pro kladná reálná a, b, c splňující $a+b+c = 1$. (USAMO)

Úloha 20. Pro reálná x, y, z splňující $x+y+z = 12$ a $x^2+y^2+z^2 = 54$ dokažte $9 \leq xy, yz, zx \leq 25$. (MO A-60-III)

Úloha 21. Pro kladná reálná čísla, která splňují $abcd = 4$ a $a^2+b^2+c^2+d^2 = 10$, urči maximum $ab+bc+cd+da$. (CPS 2012)

Úloha 22. Pro reálná čísla splňující zároveň $a+b+c+d = 6$ a $a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$ dokažte $36 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3) - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 \leq 48$. (IMO shortlist 2010)

Úloha 23. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d splňující $a+b+c+d = 4$ dokaž

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \geq a^2+b^2+c^2+d^2.$$

(MOP 2012)

Úloha 24. Dokaž, že pro nezáporná reálná čísla a, b, c splňující $a^2+b^2+c^2+abc = 4$ platí $0 \leq ab+bc+ca-abc \leq 2$. (USAMO 2001/3)

Úloha 25. Pro reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ splňující $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ najdi minimum a maximum $x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$.

Literatura a zdroje

[1] Danil Koževnikov: *Analýza v MO*, sborník iKS, 2019.
[2] Evan Chen: *Lagrange Murderpliers Done Correctly.*

Posloupnosti v teorii čísel

Magdaléna Mišinová

Abstrakt. Příspěvek seznamuje s několika přístupy pro zkrocení rekurentně zadané posloupnosti, když se úloha ptá na její vlastnosti ze světa teorie čísel. Úlohy jsou rozdělené do několika sekcí, v nichž je obtížnost úloh přibližně vzestupná, avšak pro sekce samotné toto neplatí.

Na začátek si zavedeme několik pojmů a značení. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost je zadaná *rekurentně*, pokud máme vztah, z něhož spočítáme n-tý člen v závislosti na několika předchozích, například $a_n = a_{n-1}^3 + 2^{a_{n-2}} + 42$. Pokud naopak n-tý člen posloupnosti umíme vyjádřit pouze v závislosti na n, říkáme tomu *explicitní* vyjádření, například $a_n = n! - n^4$. Většinou budeme mít posloupnost v úloze zadanou rekurentně. Někdy se může vyplatit hledat její explicitní tvar, ale ne vždy.

Asi nejznámější posloupnost pojmenovaná po někom je Fibonacciho posloupnost:

Definice. *Fibonacciho posloupnost*, označovaná $\{F_n\}$, splňuje $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Její rekurentní vyjádření je hezké a přirozené, má ale i svůj explicitní tvar:

Tvrzení. *Platí* $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Jak je vidět, hezká rekurence nemusí nutně znamenat hezké explicitní vyjádření. Jak explicitní vyjádření obecně hledat v této přednášce řešit nebudeme, vyzkoušíme si jen metody, které počítají s tím, že toto vyjádření je hezké (což zvyšuje pravděpodobnost, že se z něj něco dozvíme :-)).

Posouvání posloupností

Občas máme zadanou posloupnost, která sama o sobě moc hezká není, je možné, že když k ní přičteme pětku a vynásobíme ji čtyřkou, dostaneme něco daleko lepšího. Často stačí už jen to přičítání. Když není na první pohled jasné, jak posloupnost upravit, je dobré si přičítací a násobící konstantu nějak označit, napsat si rekurentní vztah pro novou posloupnost a pokusit se ho volbou konstant co nejvíc zjednodušit.

Cvičení 1. Posloupnosti zadané následujícími rekurencemi napište v explicitním tvaru. Vždy platí $x_1 = 1$.

(1) $x_{n+1} = 3x_n - 4$.
(2) $x_{n+1} = 5x_n + 6$.
(3) $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$.

Úloha 2. Nechť $x_1 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$. Dokažte, že když je x_n prvočíslo, tak je i n prvočíslo.

Úloha 3. Definujme posloupnost[1]

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{3a_n}{2} \right\rfloor.$$

Dokažte, že obsahuje nekonečno sudých i lichých čísel.

Úloha 4. Pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ a

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}.$$

Vyjádřete ji v explicitním tvaru.

Sousední členy

V této sekci se bude hodit nějakým způsobem porovnat sousední členy posloupnosti. Podívat se na jejich rozdíl, podíl, napsat si vztahy pro ně a něco s nimi provést. Můžeme na to využít Viètovy vztahy:

Tvrzení 5. *Nechť má kvadratická rovnice $x^2 + ax + b = 0$ kořeny p a q. Potom platí $-(p+q) = a$, $pq = b$.*

Úloha 6. Nechť $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_1$. Dokažte, že x_{3k+2} je třetí mocnina pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$.

Úloha 7. Definujme posloupnost

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot x_n.$$

Dokažte, že všechny členy této posloupnosti jsou celá čísla.

Úloha 8. Nechť $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ a $a_{n+1} = \frac{5}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že všechny členy posloupnosti jsou celá čísla.

Úloha 9. Nechť posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ splňuje $x_1 = 4$ a pro $n > 1$ platí

$$x_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + 5.$$

Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b), pro něž je $x_a x_b$ čtverec.

[1] *Dolní celá část* x, označovaná $\lfloor x \rfloor$, je největší celé číslo, které je nejvýše x.

Úloha 10. Nechť $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{1+3a_n^2}$ pro přirozená $n \geq 1$. Dokažte, že pro všechna přirozená n je a_n celé číslo.

Úloha 11. Mějme rekurentně zadanou posloupnost $x_1 = x_2 = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{x_{n-1}}.$$

Dokažte, že všechny členy této posloupnosti jsou celá čísla.

Modulení a periody

Občas se stačí prostě podívat na posloupnost modulo nějaké číslo a využít toho, že ji máme zadanou rekurentně. Potom se totiž posloupnost modulo něco časem musí zacyklit.

Úloha 12. Nechť platí $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ a pro $n \geq 1$

$$a_{n+2} = (2-n^2)a_{n+1} + (2+n^2)a_n.$$

Dokažte, že neexistují tři přirozená čísla p, q, r taková, že $a_p a_q = a_r$.

Úloha 13. Nechť $a_1 = b_1 = 1$ a

$$a_{n+1} = 9a_n - 2b_n,$$

$$b_{n+1} = 2a_n + 4b_n.$$

Ať $c_n = a_n + b_n$. Dokažte, že neexistují tři různá přirozená čísla k, ℓ, m taková, že $c_k^2 = c_\ell c_m$.

Úloha 14. Pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_1 = 2$ a pokud $n > 1$, a_n je největší prvočíselný dělitel $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + 1$. Dokažte, že 5 není v této posloupnosti.

Úloha 15. Pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že když 45 dělí a_n, tak i 44 dělí a_n.

Občas by se nám hodilo vědět, jestli posloupnost je periodická už od začátku. Pokud umíme rekurentní předpis „převrátit“, tedy z pozdějších členů spočítat ty předchozí, můžeme posloupnost prodloužit „na druhou stranu“ do $-\infty$. Tím pádem musí být celá periodická.

Úloha 16. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $k > 0$ takové, že $n \mid F_k$.

Úloha 17. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje index k, pro nějž $m \mid F_k^4 - F_k - 2$. (CPS 2007)

Úloha 18. Pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ a

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}.$$

Najděte všechna prvočísla p, pro něž existuje přirozené m splňující $p \mid a_m - 1$. (MEMO 2012)

Různé

Úloha 19. Pro která přirozená n existuje aritmetická posloupnost délky n, jejíž členy jsou převrácené hodnoty celých čísel?

Úloha 20. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $n + m \mid a_n + a_m$ pro všechna různá přirozená m a n. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí $n \mid a_n$.

(Petrohrad 2016, 11.1)

Návody

2. Nejdřív posuň o konstantu, pak rozlož na součin.

3. Sporem. Když je a_n sudé nebo liché, umíš se zbavit dolní celé části. Pro lichá čísla posloupnost posuň.

4. Budeš potřebovat k posloupnosti něco přičíst a něčím ji vynásobit.

6. Kolik je $x_n - x_{n-1}$?

7. $x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdots \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot x_1$.

9. Vyjádři x_n jen pomocí x_{n-1}, uvědom si, že každé dva členy posloupnosti jsou nesoudělné a vyjádření uzavři mezi dva čtverce.

10. Přepiš si to do kvadratické rovnice. Udělej to pro dva sousední členy a použij Viètovy vztahy.

11. Viètovy vztahy ti dají dvě rovnice. Použij tu druhou než v předchozí úloze.

12. Modulo 3.

13. Modulo 8.

14. Kdyby ano, jak musí vypadat předchozí člen? Pak zkus modulo 4.

15. Prostě spočítejte délky period modulo 9, 5, 4 a 11.

16. Platí $n \mid F_0$.

17. $F_{-1} = -1$.

18. Tohle zadání by ti mohlo být povědomé. Pak se podívej na a_{-1}.

19. Faktoriál.

20. Zkus si napsat několik dělitelností, které dostáváš ze zadání. Pro samotné n toho moc nevymyslíš, ale co pro jeho násobky?

Literatura a zdroje

[1] Martin „Vodka“ Vodička: *Postupnosti v Teórii čísel*, sborník *i*KS, 2018.
[2] *https://artofproblemsolving.com/community/*

Kombinatorické nepočítání

Radek Olšák

Abstrakt. Když chceme ukázat, že dvě množiny jsou stejně velké, je často zbytečně pracné počítat jim prvky. Přitom může stačit sestrojit bijekci či prostě jen „nahlédnout“, že je to v obou případech totéž.

Definice. *Kombinační číslo* $\binom{n}{k}$ udává počet možností, jak do n přihrádek umístit k nerozlišitelných kuliček, do každé nejvýše jednu.

Rozcvička

Cvičení 1. Nahlédněte, že $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Cvičení 2. Nahlédněte, že roznásobením $(a+b)^n$ dostaneme

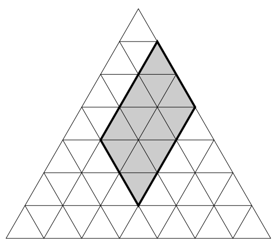
$$\binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}a^nb^0.$$

Cvičení 3. Nahlédněte

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Cvičení 4. Nahlédněte, že počet možností, jak na šachovnici umístit blíže neurčený počet střelců tak, aby se vzájemně neohrožovali, je druhou mocninou přirozeného čísla.

Cvičení 5. Uvědomte si, že počet všech rovnoběžníků v rovnostranném trojúhelníku o straně délky n s trojúhelníkovou mřížkou je $3\binom{n+2}{4}$.



Všehochuť

Cvičení 6. Je dáno přirozené číslo k a $n \geq k$. Uvažme náhodnou permutaci na $\{1, 2, \dots, n\}$. Nahlédněte, že pravděpodobnost, že prvky $1, 2, \dots, k$ leží v jednom cyklu, nezávisí na volbě n.

Cvičení 7. Označme x_n počet slov délky n z písmen A, B neobsahujících podslovo $ABABA$ ani $BABAB$ a dále označme y_n počet slov délky n z písmen A, B neobsahujících nikde pět stejných po sobě jdoucích písmen. Nahlédněte, že $x_n = y_n$.

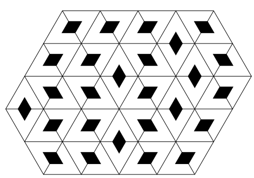
Cvičení 8. Alča si nakreslila čtvercovou mřížku $n \times n$ a do každého políčka napsala počet všech obdélníků (a čtverců) v mřížce, které obsahují dané políčko (na obrázku je situace pro $n = 3$). Uvědomte si, že součet čísel ve všech políčkách je roven $\binom{n+2}{3}^2$. (PraSe 29–3–7, Rakousko 2002)

9	12	9
12	16	12
9	12	9

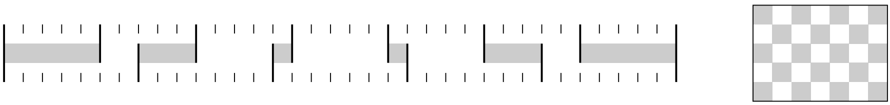
Cvičení 9. Letecká společnost provozuje (obousměrné) spoje mezi některými (neuspořádanými) dvojicemi z n měst (povolené je i neprovozovat žádný spoj či všechny). Města přitom mají různé priority. Pokud navíc existuje spoj mezi městy a, b a město c má vyšší prioritu než b, existuje i spoj mezi a, c. Uvědomte si, že počet možností, jak spoje provozovat, je 2^{n-1}.

Cvičení 10. Jsou dána přirozená čísla a, b, c. Uvažujte všechny tabulky nezáporných celých čísel $a \times b$, v nichž všechny řádky a sloupce jsou nerostoucí a všechna čísla jsou rovna nejvýše c (levý obrázek). Na druhé straně uvažujte šestiúhelník s vnitřními úhly $120°$ a stranami délek a, b, c, a, b, c a sadu kosočtverečků slepených ze dvou jednotkových rovnostranných trojúhelníků (pravý obrázek). Nahlédněte, že počet tabulek je stejný jako počet možností, jak vyskládat šestiúhelník kosočtverečky.

2	2	1	1
2	2	0	0
1	1	0	0



Cvičení 11. Buďte a, b nesoudělná lichá čísla. Na pravítku dlouhém ab vyznačme nejprve každou a-tou rysku, pak každou b-tou rysku, a nakonec obtáhněme každý druhý úsek mezi vyznačenými ryskami (začneme obtáhnutím prvního). Uvědomte si, že celková délka obtaženého úseku je rovna počtu černých políček na šachovnici $a \times b$, jejíž rohová políčka jsou černá. (PraSe 31–8–6, ruský folklór)



Cvičení 12. Permutacím σ na množině $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, pro něž existuje $i < 2n$ takové, že $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$, říkejme *dobré*. Ostatní nazývejme *špatné*. Uvědomte si, že dobrých permutací je více než špatných. (IMO 1989–6)

Cvičení 13. Jsou dána čísla $n \geq k$ stejné parity. V řadě stojí $2k$ lamp očíslovaných $1, \ldots, 2k$. Na začátku jsou všechny zhasnuté. Jeden krok spočívá v rozsvícení zhasnuté lampy nebo zhasnutí rozsvícené. Označme X počet n-prvkových posloupností kroků, po kterých budou svítit právě lampy $1, \ldots, k$, a dále označme Y počet n-prvkových posloupností kroků, po kterých budou svítit právě lampy $1, \ldots, k$, přičemž byly přepínány pouze tyto lampy. Rozmyslete si, že

$$\frac{X}{Y} = \frac{2^n}{2^k}.$$

(IMO 2008–5)

Cvičení 14. Je dáno $n \geq 3$ bodů očíslovaných $1, 2, \ldots, n$. Z bodu s menším číslem vede vždy šipka do bodu s větším číslem. Obarvení šipek červenou a modrou nazveme *jednobarevné*, pokud pro libovolnou dvojici různých vrcholů A, B neexistuje zároveň modrá a červená cesta z A do B. Uvědomte si, že počet jednobarevných obarvení je $n!$. (ARO 2005)

Cvičení 15. Jako *plné n-tice* přirozených čísel budeme označovat ty, ve kterých pro každé $i \geq 2$, jež se v n-tici vyskytuje, platí, že se v n-tici vyskytuje i $i-1$, přičemž první výskyt $i-1$ je před posledním výskytem i. Rozmyslete si, že plných n-tic je $n!$. (IMO Shortlist 2002)

Cvičení 16. Označme $G(n)$ počet všech možných stromů (souvislých grafů bez kružnic) na daných n vrcholech. Bijektivně ukažte

$$n^n = G(n) \cdot n^2.$$

Pravděpodobnost

Cvičení 17. 🕮 Mirek je velký gurmán a vlastní pytel, ve kterém je 123 karamelek a 321 hašlerek. Aby si své bonbóny pořádně vychutnal, rozhodl se, že je bude konzumovat specifickým způsobem. Když se ráno probudí, začne z pytle náhodně vytahovat jeden bonbón za druhým. První bonbón vytáhne a sní. Každý další bonbón vždy vytáhne, a pokud je tento stejného typu jako všechny předchozí, rovněž jej sní. Je-li jiného typu, vrátí jej zpět do pytle, aby si pro tento den nezkazil chuť. Tím Mirkův ranní rituál končí. Uvedeným způsobem konzumuje Mirek bonbóny každý den až do chvíle, kdy už v pytli žádný nezbyde. Jaká je pravděpodobnost, že posledním snězeným bonbónem bude karamelka?

Cvičení 18. 🕮 Do stomístného letadla nastupuje 100 lidí, každý má místenku na jedno sedadlo. První nastupující ale ztratil svou místenku, a tak si sedne náhodně. Každý další si sedne na svoje sedadlo, je-li volné, a v opačném případě si sedne na náhodné volné sedadlo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední příchozí si sedne na svoje sedadlo?

Cvičení 19. 🕮 V $n-1$ vrcholech pravidelného n-úhelníku stojí ovce, ve zbylém vrcholu stojí vlk. V každém kroku se vlk přesune na náhodný sousední vrchol (jeden ze dvou), a pokud v něm stojí ovce, sežere ji. Vlk se nasytí až v okamžiku, kdy sežere $n-2$ ovcí, tedy právě jedna ovce přežije. Uvědomte si, že pravděpodobnost přežití každé ovce je stejná.

Cvičení 20. 🕮 Adam a Bedřich hrají iKS-tenis na n míčků. Pokaždé jeden hráč podává míček a některý z hráčů tento míček vyhraje. V okamžiku, kdy má někdo vyhráno n míčků, vyhrává celý zápas. První míček podává Adam a dále mohou být tři schémata podávání:

(1) Podává vždy ten, kdo naposled vyhrál míček.
(2) Podává vždy ten, kdo naposled prohrál míček.
(3) Hráči se v podání se pravidelně střídají.

Předpokládejme, že pravděpodobnost výhry míčku závisí vždy jen na tom, který hráč podával. Rozmyslete si, že celkové šance hráčů na výhru zápasu nezávisí na volbě schématu.

Kombinatorické identity

Cvičení 21. 🕮 $\displaystyle\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$

Cvičení 22. 🕮 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$

Cvičení 23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n.$

Cvičení 24. $\displaystyle\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{d}.$

Cvičení 25. $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$

Cesty v mřížce

Cvičení 26. Nahlédněte, že počet cest délky $a+b$ z levého dolního rohu do pravého horního v mřížce $a \times b$ je $\binom{a+b}{a}$.

Cvičení 27. Nahlédněte, že

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Cvičení 28. Nechť a, b jsou přirozená čísla. Uvažme cesty podél mřížky z bodu $[0,0]$ do bodu $[a,b]$, které nikdy nejdou doleva, nachází se v nich právě jeden krok dolů a žádný vrchol není navštívený vícekrát. Uvědomte si, že jejich počet je roven $(a+1)\binom{a+b}{a-1}$. (variace na celostátní kolo MO 2015)

Cvičení 29. Každé posloupnosti složené z n nul a n jedniček přiřadíme číslo, které je počtem maximálních úseků stejných číslic v ní. (Například posloupnost 00111001 má 4 takové úseky 00, 111, 00, 1.) Pro dané n sečteme všechna čísla přiřazená jednotlivým takovým posloupnostem. Uvědomte si, že výsledný součet je roven

$$(n+1)\binom{2n}{n}.$$

(MO 66–A–III–4)

Cvičení 30. Označme

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k.$$

Rozmyslete si, že $f(n) + f(n-1) = 2^n$.

Cvičení 31. Bijektivně ukažte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}.$$

Rozklady

Definice 32. *Rozkladem* čísla n délky $k \geq 1$ rozumíme konečnou nerostoucí posloupnost přirozených čísel $a_1, \ldots, a_k$ splňující $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Cvičení 33. Nahlédněte, že počet všech rozkladů čísla n je roven počtu rozkladů čísla $2n$ délky n.

Cvičení 34. Nahlédněte, že počet rozkladů čísla n délky k je stejný jako počet všech rozkladů n, kde $a_1 = k$.

Cvičení 35. Rozklad nazveme *symetrickým*, pokud pro každé i udává a_i počet prvků rozkladu velkých alespoň i. Uvědomte si, že symetrických rozkladů čísla n je stejně jako těch rozkladů čísla n, kde jsou jednotlivá a_i různá a současně lichá.

Cvičení 36. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ označme $f(m,n)$ počet n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ celých čísel splňujících $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq m$. Rozmyslete si, že $f(m,n) = f(n,m)$.

Cvičení 37. Označme si jako $A(n)$ počet posloupností $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ přirozených čísel takových, že $a_1 + \cdots + a_k = n$ takových, že $a_i + 1$ je mocnina dvojky. Dále nechť $B(n)$ je počet posloupností $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$ přirozených čísel takových, že $b_1 + \cdots + b_m = n$ a pro každé $j < m$ platí $b_j \geq 2b_{j+1}$. Bijektivně ukažte, že pro každé přirozené n je $A(n) = B(n)$.

Cvičení 38. Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n, ve kterých jsou všechna a_i různá, je stejný jako počet rozkladů čísla n, ve kterých jsou všechna a_i lichá.

Cvičení 39. Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n, které neobsahují druhou mocninu přirozeného čísla, je stejný jako počet rozkladů čísla n, ve kterých se každé číslo i vyskytuje nanejvýš $(i-1)$-krát.

Fibonacciho čísla

Definice 40. Počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1) \times 1$ kostičkami 1×1 a 2×1, nazýváme *n-tým Fibonacciho číslem* a značíme F_n.

Cvičení 41. Nahlédněte, že počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1) \times 2$ dominovými kostičkami, je roven F_n.

Cvičení 42. Nahlédněte

$$F_{a+b+1} = F_{a+1}F_{b+1} + F_aF_b.$$

Cvičení 43. Nahlédněte, že pro každé $n \geq 4$ platí $F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2$.

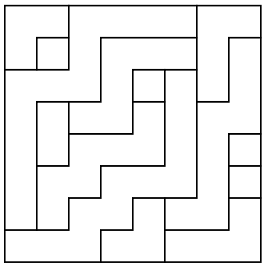
Cvičení 44. Uvědomte si, že počet možností, jak rozdělit tabulku $(n+1) \times 1$ na dílky větší než 1×1, je F_n.

Cvičení 45. Uvědomte si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $n \times 1$ kostičkami s lichými rozměry, je F_n.

Cvičení 46. Uvědomte si, že $F_k \mid F_{nk}$.

Cvičení 47. (Cassiniho identita) Rozmyslete si, že $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.

Cvičení 48. *Hadem* nazvěme konečnou posloupnost čtverečků v mřížce takovou, že každý následující čtvereček je těsně nad předchozím nebo těsně vpravo od něj. Rozmyslete si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $a \times b$ pomocí hadů, je součinem několika (ne nutně různých) Fibonacciho čísel. Na obrázku je ukázka vyskládaného čtverce 8×8.



Catalanova čísla

Definice 49. Počet všech cest délky $2n$ ve čtvercové mřížce $n \times n$ z levého dolního rohu do pravého horního, které vedou celé nad odpovídající úhlopříčkou, nazýváme *n-tým Catalanovým číslem* a značíme jej C_n.

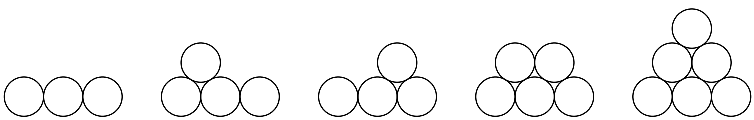
Cvičení 50. Uvědomte si, že C_n je rovno počtu náhrdelníků s n bílými a $n+1$ černými korálky, přičemž náhrdelníky lišící se pouze otočením (nikoli překlopením) považujeme za nerozlišitelné. Na základě toho odvoďte

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

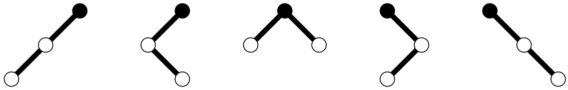
Cvičení 51. Uvědomte si, že počet cest, které překročí úhlopříčku je $\binom{2n}{n+1}$. Na základě toho odvoďte, že

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Cvičení 52. Nahlédněte, že počet možností, jak na sebe poskládat pyramidu z mincí se spodní řadou o n mincích (viz obrázek), je roven C_n.



Cvičení 53. Rozmyslete si, že C_n udává počet zakořeněných binárních stromů na n vrcholech, kde rozlišujeme pravé a levé syny.



Cvičení 54. Na základě předchozího cvičení nahlédněte, že počet možností, jak rozdělit pravidelný $(n+2)$-úhelník na n trojúhelníků, je C_n.

Cvičení 55. *Dyckovou n-cestou* rozumíme cestu o $2n$ krocích zprava doleva, která začíná ve výšce 0, v každém kroku popojde o 1 šikmo nahoru nebo o 1 šikmo dolů, končí ve výšce 0 a nikdy nejde do záporné výšky. Kopečkem v Dyckově n-cestě rozumíme vrchol ve výšce 1, jehož oba sousední vrcholy leží ve výšce 0. Rozmyslete si, že počet všech kopečků ve všech Dyckových n-cestách je stejný jako počet všech Dyckových n-cest (což je zřejmě rovno C_n).

Cvičení 56. *Obrazcem délky n* rozumíme neuspořádanou dvojici cest v mřížce délky n vedoucích pouze doprava a nahoru a navíc takových, že se potkají pouze v prvním a posledním bodě. Bijektivně ukažte, že počet obrazců délky n je C_{n-1}. Na obrázku jsou dva obrazce délky 9. (PraSe 26–4–8)

Návody

2. Sčítanec $a^i b^{n-i}$ dostaneme tolikrát, kolik je možností, jak v i závorkách vybrat a a ve zbylých $n-i$ vybrat b.

4. Počet možností, jak je umístit na bílá políčka, krát počet možností, jak je umístit na černá.

6. Při procházení cyklu začínajícího bodem 1 přeskakuj čísla vyšší než k.

7. Invertuj každou druhou pozici.

12. Ve špatné permutaci přesuň první prvek ke svému „kamarádovi".

13. Vyjádři pomocí X, případně Y, počet n-prvkových posloupností kroků takových, že na konci bude pro každé $i \leq k$ svítit právě jedna z dvojice lamp i, $k+i$.

14. Obrať červené šipky.

15. $2, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 3 \iff 6, 3, 5, 2, 4, 1, 8, 7$.

17. Jaká je pravděpodobnost, že jeden den sní Mirek všechny karamelky? A jaká je, že sní všechny hašlerky?

18. Co by se změnilo, kdyby si každý sedl na své místo, a pokud je zabrané, vyhodil toho, kdo na něm seděl?

19. Každá ovce si všimne vlka až v okamžiku, kdy se poprvé octne vedle ní.

20. Kolikrát nejvýše mohou podávat jednotliví hráči v jednotlivých schématech? Karty osudu jsou rozdány, na hře nezáleží.

21. Obarvi r kuliček fialově a $r - k$ modře.

22. Jaký je počet všech podmnožin n-prvkové množiny?

23. Jaký je počet všech podmnožin n-prvkové množiny s jedním speciálním prvkem?

24. Jaký je počet všech podmnožin n-prvkové množiny s d speciálními prvky?

25. Vyber k z pásku dlouhého $m+n$. Kolik jsi vybral z první části a kolik z druhé?

26. Právě a ze všech $a + b$ kroků povede vodorovně.

33. V rozkladu délky n sniž každý sčítanec o 1.

38. $(1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1) + (1) + (3 + 3) + (3) = 4 + 2 + 1 + 6 + 3$.

39. Nahrazuj v prvním typu rozkladů vždy k stejných čísel k za číslo k^2.

41. Stačí první řádek.

50. Černá = nahoru, bílá = doprava. Existuje právě jedno natočení náhrdelníku takové, že jej držíme za černý korálek a zbylá cesta vede nad úhlopříčkou.

51. Překlop takovou cestu poprvé, co překročí úhlopříčku, a získej tím cestu v mřížce $n - 1 \times n + 1$.

Literatura a zdroje

[1] Mirek Olšák: *Kombinatorické nepočítání*, sborník iKS, 2016.
[2] Mirek Olšák: *Pravděpodobnostní paradoxy*, Uhelná Příbram, 2014.
[3] Josef Minařík: *Nahlížíme identity*, online, 2020.
[4] Anna Mlezivová: *Fibonacciho čísla*, Lipová-Lázně, 2022.

Ordinální čísla a transfinitní rekurze

Daniel Perout

Abstrakt. Při konstrukci některých matematických objektů chceme sice postupovat rekurentně, ale na očíslování kroků nám nevystačí ani všechna přirozená čísla, potřebujeme dělat rekurzi „za nekonečno". Abychom něco takového dokázali, seznámíme se s ordinálními čísly, která rozšiřují koncept uspořádání za hranice nekonečna.

Příklad 1. (motivační) V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dán bod O. Ukažte, že množinu $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ lze pokrýt disjunktními přímkami.

Vyřešit tento příklad explicitní konstrukcí je netriviální (a podle mě nemožné), tento příspěvek se ji nebude ani pokoušet hledat.

Místo toho by nás mohlo napadnout zkusit nějak projít všechny body prostoru a každému zvlášť přidělit přímku, tedy provést nějakou rekurzi (indukci[1]). Problémem je, že standardní rekurzi známe pouze pro konečné množiny, v nekonečnu by nám došla čísla pro označování kroků. Tento problém ale jednoduše vyřešíme tím, že si taková nekonečná čísla vymyslíme.

Temná přirozená čísla

Než se vydáme do nekonečna, zůstaneme ještě chvíli v říši přirozených čísel, konkrétně se je pokusíme vybudovat v teorii množin. Teorie množin[2] se totiž výborně hodí k popisu nekonečných objektů. Navíc konstrukce přirozených čísel nám vybuduje dobrou intuici i pro ordinální čísla.

V teorii množin pracujeme pouze s množinami, proto musíme přirozená čísla nějak uchopit jako množiny. Můžeme toho docílit např. tím, že každé číslo ztotožníme s množinou jeho předchůdců. Tedy

- $0 := \emptyset$,
- $1 := \{0\} = \{\emptyset\}$,
- $2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- $\ldots$

[1] Zatímco *indukce* je důkazová technika, *rekurzí* konstruujeme nové matematické objekty. V tomto příspěvku se zaměřujeme zejména na rekurzi, ale indukce i rekurze jsou si velice podobné.

[2] Tady se *teorií množin* konkrétně myslí Zermelo-Fraeneklova teorie společně s axiomem výběru. V jiných teoriích množin se s nekonečnem může pracovat úplně jinak, a proto se jimi zabývat nebudeme.

Z takového principu můžeme snadno vydedukovat, jak bude vypadat funkce *následníka* čísla:

$$s(n) = n + 1 := n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Množinu přirozených čísel potom definujeme jako *tu nejmenší množinu*[3], která obsahuje nulu (prázdnou množinu) a ke každému jejímu prvku obsahuje i následníka tohoto prvku. Tuto množinu označíme ω.

Mmmm ... moc dobré uspořádání

Na rozumnou rekurzi potřebujeme přesně chápat, co znamená *uspořádání*. Zadefinujme jej nyní v obecném matematickém smyslu.

Definice. *Relace* na množině A je libovolná podmnožina $A \times A$.

Definice. Relaci $\lhd$ na množině A nazveme *(ostrým) uspořádáním*, pokud je $\lhd$

(1) *ireflexivní*, tj. žádné x není menší samo sobě ($\forall x \in A\colon\ x \ntriangleleft x$), a
(2) *tranzitivní*, tj. je-li x menší než y a y menší než z, pak je nutně x menší než z ($\forall x, y, z \in A\colon\ x \lhd y \wedge y \lhd z \to x \lhd z$).

Pokud je $\lhd$ uspořádání na množině A, pak dvojici $(A, \lhd)$ nazveme *uspořádanou množinou*.

Úloha 2. Rozmyslete si, že v uspořádané množině nenajdeme cykly, tj. neexistuje posloupnost $a \lhd \cdots \lhd a$.

Takové definici uspořádání vyhoví třeba i (vlastní) inkluze na všech podmnožinách dané množiny. Na inkluzi bychom ale dělali rekurzi jen s obtížemi, protože nám takové uspořádání nedává jasnou posloupnost prvků, podle které bychom se rekurzili. Chtěli bychom proto takové uspořádání, které nám ji určovat bude.

Definice. Uspořádání $\lhd$ na množině A nazveme

(1) *lineárním*, pokud jsou každé dva prvky A porovnatelné, tj. $\forall x, y \in A\colon\ x \lhd y \vee y \lhd x \vee x = y$,
(2) *dobrým*, pokud je $\lhd$ lineární a každá neprázdná podmnožina A má $\lhd$-nejmenší prvek (nejmenší prvek je menší než všechny ostatní).

Na první pohled není jasné, proč se hodí mít *dobré* uspořádání a nestačí *lineární*. Tato intuice přirozeně vychází z uvažování o konečných objektech, viz následující úlohu.

Úloha 3. Ukažte, že pro konečné množiny je lineární uspořádání zároveň i dobrým uspořádáním.

Dobré uspořádání je ale pro rekurzi nutné: kdybychom dělali rekurzi na množině celých čísel, nemáme, kde začít (protože např. celá množina nemá nejmenší prvek). Zatímco dobré uspořádání nám pro každou podmnožinu přesně určí její počátek a můžeme se vesele rekurzit výše a výše.

---

[3] Rigorózní konstrukce překračuje obsah přednášky.

Nekonečno ... plus jedna?

Mohlo by nás nyní napadnout, že bychom množinu zkrátka dobře uspořádali a rozjeli podle ní rekurzi, přitom bychom vůbec nepotřebovali nějaká nekonečná čísla. Pořadová čísla ale velice zjednodušují život. Dneska už čekání na poště neznamená stání ve frontě, ale pouhé vyzvednutí lístečku, který nám (v ideálním případě) dá i informaci, kdy tak můžeme očekávat odbavení u přepážky.

Přirozená čísla nám stačila v říši konečna, do nekonečna je potřebujeme rozšířit. Zaveďme si *ordinály* – jejich definice bude formální, abstraktní a těžko uchopitelná, ale v zásadě stojí na dvou principech: chceme jednak, aby (jako u přirozených čísel) byl ordinál množinou svých předchůdců, a jednak, aby na něm bylo jasně poznat nějaké dobré uspořádání.

Definice. Množinu x nazveme *tranzitivní*, pokud je každý její prvek i její podmnožinou, ekvivalentně $\forall y, z$: $z \in y \in x \to z \in x$.

Množinu x nazveme *ordinálním číslem (ordinálem)*, pokud je tranzitivní a $(x, \in)$ je dobře uspořádaná množina.

Úmluva. Ordinály budeme značit malými řeckými písmeny (typicky $\alpha, \beta, \dots$).

Tato definice se ukazuje jako velice silná, pro nás ale budou užitečná následující tvrzení o ordinálech.

Tvrzení.

(i) *Každý prvek ordinálu je ordinál.*
(ii) *Třída všech ordinálů je dobře uspořádaná náležením.*
(iii) *Ordinál je vlastní podmnožinou jiného ordinálu, právě když mu náleží jako prvek.*
(iv) *Sjednocení množiny ordinálů je ordinál.*
(v) *Pro ordinál α je i $\alpha + 1$ ordinál, kde $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$.*
(vi) *Pro ordinály α, β platí: $\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$.*

Pro porovnávání ordinálů definujeme $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$ a $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$. Potom můžeme sjednocení množiny ordinálů ztotožnit s jejich supremem.

Úloha 4. Ukažte, že množina přirozených čísel ω i každý její prvek jsou ordinály.

Ordinály si můžeme výhodně rozdělit na ty, které jsou přímými následníky jiného ordinálu (tj. jsou „o jedna větší"), a ty, které z předchozích ordinálů vzniknou jako jejich supremum (někdy říkáme *limita*). Ordinály proto dělíme na:

(a) *nulu* (tj. prázdnou množinu),
(b) *následnické ordinály* (α je následnický, pokud pro nějaký ordinál β je $\alpha = \beta + 1$),
(c) a *limitní ordinály* (tak zkrátka nazýváme všechny ostatní).

Když poté budeme dělat rekurzi, můžeme se zaměřit na každý druh ordinálů zvlášť.

Jak tedy vypadá nekonečné počítání oveček? Začneme nulou nebo limitním ordinálem, přičteme jedničku, pak zase jedničku … až do nekonečna, tj. do suprema, a skončíme na dalším limitním ordinálu. Takže máme 0, 1, 2, …, ω, $\omega+1$, $\omega+2$, …, $\omega+\omega$, $\omega+\omega+1$, …

Takový obrázek se skutečné a pravdivé představě o ordinálech blíží jen vzdáleně, teď nám ale, spolu s pojmem kontinua (viz níže), bude muset vystačit. Podívejme se nyní na pravou sílu ordinálů: jejich schopnost reprezentovat každé dobré uspořádání.

Ordinály jako typy dobrých uspořádání

Tvrzení. *Je-li $(M, \lhd)$ dobře uspořádaná množina, pak existuje právě jeden ordinál α takový, že $(M, \lhd)$ je izomorfní*[4] $(\alpha, \in)$.

Definice. Ordinál α z předchozího tvrzení nazveme *order typem* množiny M a zapisujeme $\alpha = \mathrm{ot}_{\lhd}(M)$.

V některých případech na množině neznáme dobré uspořádání, ale chceme k ní najít vhodný ordinál, pak jím typicky myslíme ten nejmenší order type, tj.

$$\mathrm{ot}(M) = \min\{\mathrm{ot}_{\lhd}(M) \mid \lhd \text{ je dobré uspořádání } M\}.$$

Tvrzení. (princip dobrého uspořádání) *Každou množinu lze dobře uspořádat.*[5]

Princip dobrého uspořádání mimo jiné říká, že každá množina má order type.

Množiny velké a větší

Na úvahy v rekurzi budeme potřebovat chápat koncept velikosti množiny, pojďme si nyní shrnout základní poznatky.

Definice. Nechť A, B jsou množiny. Řekneme, že

(1) *A je menší než B* (značíme $A \preccurlyeq B$), existuje-li prosté zobrazení $f : A \to B$,
(2) *A má stejnou velikost (mohutnost) jako B* (značíme $A \approx B$), pokud existuje bijekce $f : A \to B$,
(3) *A je ostře menší než B* (značíme $A \prec B$), pokud $A \preccurlyeq B$ a $A \not\approx B$.

Definice. Nechť je A množina. Množinu všech podmnožin A nazveme její *potenční množinou* a značíme ji $\mathcal{P}(A)$.

Věta. (Cantor) *Nechť je A množina. Pak platí $A \prec \mathcal{P}(A)$.*

Pomocí potenční množiny tedy umíme vyrábět stále větší a větší množiny. Pro nás bude zajímavá zejména potence ω, neboť přesně tak je mohutná i množina všech reálných čísel.

Definice. *Kontinuem* nazveme ordinál $\mathfrak{c} = \mathrm{ot}(\mathcal{P}(\omega))$.

---

[4] Neděs se pojmu *izomorfismus*, tím tady myslíme jen tu skutečnost, že prvky jedné množiny jsou jen „přejmenované“ prvky druhé množiny. Formálněji: existuje bijekce mezi M a α taková, že jeden prvek množiny M je menší než druhý, právě pokud totéž platí i pro jejich obrazy.

[5] Jde o ekvivalentní vyjádření *axiomu výběru*, důkaz dalece přesahuje hranice této přednášky.

Tvrzení. $\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$.

Tvrzení. *Pro každé přirozené* $n \geq 1$ *platí* $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$.

Transfinitní rekurze

Věta. (o transfinitní rekurzi) *Nechť je* A *množina a* F, G *jsou třídové funkce*[6]. *Pak existuje právě jedna třídová funkce* H *z třídy všech ordinálů do třídy všech množin, která splňuje:*

(1) $H(0) = A$ *(základní krok),*
(2) $H(\alpha + 1) = F(H(\alpha))$ *(následnický krok),*
(3) $H(\lambda) = G(H \restriction \lambda)$ *(limitní krok).*

Tato formulace se může zdát děsivá, ve skutečnosti ale popisuje poměrně jednoduchý algoritmický princip. Vůbec se nelekejme, že konstruujeme funkci H, protože taková funkce je pouze očíslováním (některých) množin ordinály, tj. ve skutečnosti konstruujeme „posloupnost“ množin. Proto nás nepřekvapí, že základní krok je libovolná množina A.

Rovnost $H(\alpha + 1) = F(H(\alpha))$ značí, že v konstrukci následnického kroku nějak navazujeme na předcházejí krok (stejné jako u rekurze na přirozených číslech). Tj. funkce F nám jen pro danou konstrukci říká, jak udělat další krok. Obdobně funkce G se podívá na funkci H omezenou pouze na kroky do ordinálu λ (λ je množina svých předchůdců) a na základě nich vyhodnotí, co se bude dít v limitním bodě (protože tady nemá předchůdce).

Ekvivalentní vyjádření transfinitní rekurze je pouze pomocí jedné funkce, která se podívá na všechny předcházející kroky.

Věta. (ekvivalentně o transfinitní rekurzi) *Nechť je* F *třídová funkce, pak existuje právě jedna třídová funkce* H *z třídy všech ordinálů do třídy všech množin, která splňuje* $H(\alpha) = F(H \restriction \alpha)$.

Příklad 1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dán bod O. Ukažte, že množinu $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ lze pokrýt disjunktními přímkami.

Řešení. Víme, že bodů v prostoru je kontinuum, můžeme je proto všechny bez bodu O dobře uspořádat: $X = \{P_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{c}\}$. Nyní provedeme transfinitně rekurentní konstrukci množin Σ_α pro ordinály $\alpha < \mathfrak{c}$, které budou obsahovat vzájemně disjunktní přímky, tak, že

(i) $\Sigma_\alpha \preccurlyeq \alpha \prec \mathfrak{c}$,
(ii) P_α leží na nějaké přímce ze $\Sigma_{\alpha+1}$, a
(iii) pro každé $\beta < \alpha < \mathfrak{c}$ platí $\Sigma_\beta \subseteq \Sigma_\alpha$.

Nechť $\alpha \in \mathfrak{c}$ je ordinál.

(1) Pokud $\alpha = 0$, pak $\Sigma_0 = \emptyset$.

[6] Třídovou funkcí tady myslíme objekt, který všem množinám přiřadí nějakou množinu.

(2) Pokud je α následnický, pak existuje β takové, že $\alpha = \beta + 1$ a Σ_β splňuje všechny podmínky (i)–(iii). Kdyby bod P_β už ležel ve sjednocení všech přímek v Σ_β, stačí nám položit $\Sigma_\alpha = \Sigma_\beta$.

Nechť tedy[7] $P_\beta \notin \bigcup \Sigma_\beta$, tj. potřebujeme přidat přímku ℓ tak, aby $P_\beta \in \ell$ a ℓ byla disjunktní se všemi přímkami ze Σ_β.

Uvažme libovolný kužel C, který má vrchol v bodě P_β a neleží na něm O, ten je tvořen kontinuem přímek. Přímka v Σ_β může kužel C protnout nejvýše ve dvou bodech (kdyby jej protínala ve více, musela by být jednou z přímek tvořících plášť kužele C, ale to by procházela bodem P_β), tedy průsečíků přímek z Σ_β s kuželem C je nanejvýš dvakrát tolik co prvků Σ_β, tj. $C \cap \bigcup \Sigma_\beta \preccurlyeq 2 \times \Sigma_\beta \prec 2 \times \mathfrak{c} \approx \mathfrak{c}$. Protože každý průsečík zakáže nejvýše jednu přímku pláště kužele C (ačkoliv více průsečíků může ležet na jedné přímce), ukázali jsme tím, že jsme zakázali méně přímek, než jich je v kuželu celkem. Proto existuje přímka ℓ, která je disjunktní s množinou $\bigcup \Sigma_\beta$ a zároveň leží v plášti kužele C, z toho důvodu na ní leží bod P_β a naopak neprochází bodem O.

Můžeme proto položit $\Sigma_\alpha = \Sigma_\beta \cup \{\ell\}$.

(3) Pokud je α limitní, pak $\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_\beta$.

Sjednocení $\Sigma = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \Sigma_\alpha$ z vlastnosti (ii) obsahuje všechny body až na bod O, zároveň z konstrukce v následnickém kroku obsahuje pouze disjunktní přímky, proto je Σ vyhovujícím pokrytím množiny X.

Příklad 5. (existence *dvoubodové množiny*) Ukažte, že v rovině $\mathbb{R}^2$ existuje podmnožina X, která každou přímku této roviny protne v právě dvou bodech.

Řešení. Nechť $\{p_\alpha \mid \alpha < \mathfrak{c}\}$ je množina všech přímek v $\mathbb{R}^2$. Sestrojíme posloupnost množin $\{A_\alpha \mid \alpha < \mathfrak{c}\}$, která bude pro každé $\alpha < \mathfrak{c}$ splňovat, že

(i) A_α má nejvýše dva prvky,
(ii) množina $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ neobsahuje tři body ležící na jedné přímce, a
(iii) přímka p_α protne množinu $\bigcup_{\beta\leq\alpha} A_\beta$ v právě dvou bodech.

Nechť $\alpha < \mathfrak{c}$ je ordinál. Z indukčního předpokladu množina $\{A_\beta \mid \beta < \alpha\}$ splňuje (i)–(iii). Označme $B = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ a P množinu všech přímek, které jsou určeny dvojicemi bodů z B.

Z (ii) nutně plyne, že p_α protíná B v nejvýše dvou bodech.

(1) Pokud p_α protíná B v právě dvou bodech, položíme $A_\alpha = \emptyset$.
(2) Pokud p_α protíná B v nejvýše jednom bodě, A_α musí obsahovat alespoň jeden bod ležící na p_α (aby se naplnila podmínka (iii)), ale zároveň žádný bod z $\bigcup P$ (jinak by se porušila podmínka (ii)). Stačí nám zvolit libovolné body, musíme ale ukázat, že je množina $p_\alpha \setminus \bigcup P$ neprázdná.

Platí $p_\alpha \approx \mathfrak{c}$. V B se sjednocuje nejvýše α množin, takže $B \preccurlyeq 2 \times \alpha$. Každá přímka v P je určená jednoznačně unikátní dvojicí bodů z B (ale naopak to

[7] Σ_β je množina přímek, takže $\bigcup \Sigma_\beta$ je množina všech bodů, které na nich leží.

neplatí!), tudíž $P \preccurlyeq B \times B$. Z toho celého umíme díky $\alpha < \mathfrak{c}$ říci, že

$$P \preccurlyeq B \times B \preccurlyeq (2 \times \alpha) \times (2 \times \alpha) \approx 4 \times \alpha \times \alpha \prec 4 \times \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} \approx \mathfrak{c} \approx p_\alpha.$$

Protože každá přímka z P zakáže na p_α nejvýše jeden bod (jejich průsečík), z nerovnosti $P \prec p_\alpha$ můžeme říci, že je množina $p_\alpha \setminus \bigcup P$ neprázdná, dokonce že má alespoň dva prvky (můžeme jeden odebrat a provést stejnou argumentaci). Proto do A_α dáme jeden nebo dva body z této množiny, abychom splnili podmínky (i)—(iii).

Sjednocením $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} A_\alpha$ pak dostaneme kýženou dvoubodovou množinu.

Úloha 6. Ukažte, že existuje množina bodů v rovině, kterou každá kružnice protne právě ve třech bodech.

Úloha 7. Nechť je $(X, \lhd)$ lineárně uspořádaná množina. Ukažte, že existuje obarvení množiny X dvěma barvami takové, že pro každé dva stejně obarvené body existuje třetí ležící mezi nimi, který má jinou barvu.

(Miklós Schweitzer 2003, Problem 1)

Návody

1. Zkonstruuj pro libovolnou disjunktní množinu přímek, která je menší než $\mathfrak{c}$, a pro libovolný bod přímku, která prochází tímto bodem a je s danou množinou přímek disjunktní.

2. Spoj tranzitivitu a ireflexivitu.

3. Jak pro libovolnou podmnožinu nalezneš nejmenší prvek?

4. Přirozená čísla vyřeš indukcí. Uvědom si, jak je definované přirozené číslo jako množina.

5. Indukuj podle množiny všech přímek.

6. V každém kroku přidej nejvýše jeden bod, tj. každou kružnici projdi třikrát.

7. Při indukci udržuj podmínku, aby mezi libovolně obarvenými body nebyly konečně dlouhé neobarvené úseky.

Literatura a zdroje

Pro zájemce o studium teorie množin doporučuji seriál Mirka Olšáka: *Do nekonečna a ještě dál.* Klasickým, obsáhlým, ale o poznání méně přívětivým průvodcem je také Balcar, Štěpánek: *Teorie množin.*

[1] Mirek Olšák: *Do nekonečna a ještě dál*, seriál MKS, 35. ročník.
[2] G. Eric Moorhous: *Transfinite Induction*, *https://ericmoorhouse.org/handouts/transfinite.pdf.*
[3] Sylvia Durian: *Some Transfinite Induction Deduction*, *https://math.uchicago.edu/~may/REU2018/REUPapers/Durian.pdf.*
[4] *https://artofproblemsolving.com/community/.*

H

Zdeněk Pezlar

Abstrakt. V tomto příspěvku budeme zkoumat různé vlastnosti a situace, ve kterých se může ocitnout bod $\boldsymbol{H}$. Přednáška není určená pro osoby, které se bojí výšek.

Ortocentrum či *kolmiště* je jedním ze základních a nejdůležitějších středů trojúhelníka, který se často vyskytuje v olympiádních úlohách. Mnoho úloh, které se okolo tohoto bodu točí, nevyžaduje žádnou pokročilou teorii, pouze kulišácké využití známých faktů a technik. Tyto triky si zopakujeme a využijeme na mnoha úlohách.

Přednáška je koncipována jako série příkladů, tj. budujeme celou teorii od základů. Občas se nevyhneme ošklivějším výpočtům, tak to ale v životě bývá.

Úmluva. Domluvme se, že kružnici opsanou trojúhelníku XYZ značíme (XYZ).

Základní vlastnosti

Věta. *Výšky trojúhelníka ABC se protínají v jednom bodě $\boldsymbol{H}$, o tomto bodě mluvíme jako o „$\boldsymbol{H}$“ v ABC.*

Nejprve si zopakujeme a využijeme školské poznatky o „$\boldsymbol{H}$“ v trojúhelníku. V dalších sekcích si ukážeme různé tríčky a situace, kde tento bod můžeme potkat. Pamatujte ale, že i s malou dávkou znalostí můžeme vyřešit hodně úloh. Vždycky zkoušejte hloupé[1] věci před sofistikovanějšími.

Cvičení. Bod A je „$\boldsymbol{H}$“ v $BC\boldsymbol{H}$.

Cvičení. Označme D, E, F paty výšek v ABC. Pak čtveřice bodů B, C, E, F, resp. A, E, F, $\boldsymbol{H}$ leží na kružnici. Středy těchto kružnic jsou po řadě středy BC a $A\boldsymbol{H}$.

H H 1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme postupně E, F a M, N paty výšek z B, C a středy úseček BC a $A\boldsymbol{H}$. Dokažte, že $MN \perp EF$.

Cvičení. Označme D, E, F paty výšek v ABC. Pak $\boldsymbol{H}$ je vepsiště v DEF.

[1] Není horší pocit než zjistit, že vám uteklo něco jasného.

H H 2. Ať ABC je ostroúhlý trojúhelník. Přímka $C\boldsymbol{H}$ je společnou tečnou kružnic k a l, které mají vnější dotyk v bodě $\boldsymbol{H}$ a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s AC a BC označme P a Q. Dokažte, že přímka $C\boldsymbol{H}$ je osou úhlu $\sphericalangle P\boldsymbol{H}Q$ a že body A, B, P, Q leží na kružnici.
(MO 62–B–I–3)

H H 3. Je dán trojúhelník ABC s nejkratší stranou BC. Na stranách AB, AC jsou po řadě dány body K, L tak, že $|BK| = |BC| = |CL|$. Bod M je průsečík BL s CK a bod I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že $MI \perp BC$.
(PraSe 40–3j–4)

H H 4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškou AD. Osy úhlů $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CAD$ protínají stranu BC po řadě v bodech E, F. Kružnice opsaná trojúhelníku AEF protíná strany AB, AC po řadě v bodech G, H. Dokažte, že přímky EH, FG a AD se protínají v jednom bodě. (MO 66–A–II–4)

H H 5. V trojúhelníku ABC označme D, E, F paty výšek. Ukažte, že platí

$$\frac{1}{|DE| \cdot |DF|} = \frac{1}{|AB| \cdot |BF|} + \frac{1}{|AC| \cdot |CE|}.$$

H H 6. Pro daný trojúhelník ABC označme bod D takový, že čtyřúhelník $\boldsymbol{H}ABD$ je rovnoběžník. Sestrojme bod E ležící na přímce DH takový, že přímka AC půlí úsečku HE. Bod F je dalším průsečíkem přímky AC s kružnicí (DCE). Ukažte, že $|EF| = |AH|$. (IMO shortlist 2015/G1)

Překlápění

Častý trik objevující se v milionech úloh je překlápění $\boldsymbol{H}$ podle strany nebo středu strany. Tahle jednoduchá vlastnost nás bude strašit až do konce přednášky. Vždycky, když se objeví nějaké podezřelé konstrukce spojené s $\boldsymbol{H}$ a nebo se $\boldsymbol{H}$ „vznáší“ v obrázku, překlápějte!

Cvičení. Kružnice (ABC) a $(\boldsymbol{H}BC)$ mají stejný poloměr.

Cvičení. (překlápění) Označme M střed BC. Pak obrazy $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ bodu $\boldsymbol{H}$ podle M, resp. strany BC leží na kružnici (ABC). Navíc $A\boldsymbol{H}_1$ je průměr kružnice (ABC).

H H 7. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice „$\boldsymbol{H}$“ v trojúhelníku ABC s „$\boldsymbol{H}$“ v trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD.
(MO 58–A–I–2)

H H 8. V trojúhelníku ABC s velikostmi úhlů α, β, γ a poloměrem R kružnice opsané označme D, M postupně patu výšky z A a střed BC. Ukaž, že platí $|DM| = R\sin(\beta - \gamma)$.

H H 9. V trojúhelníku ABC označme O opsiště, M střed BC. Ukažte, že platí $A\boldsymbol{H} \parallel OM$ a $|A\boldsymbol{H}| = 2 \cdot |OM|$.

H H 10. Buď ABC ostroúhlý nerovnoramenný trojúhelník, označme M střed BC, O_1 střed úsečky $A\boldsymbol{H}$ a O_2 opsiště trojúhelníku $BC\boldsymbol{H}$. Ukažte, že O_1AMO_2 je rovnoběžník. (JBMO shortlist 2014)

H H 11. V ostroúhlém nerovnoramenném trojúhelníku ABC označme P patu C na AB, O opsiště, D průsečík přímek AB a CO a konečně E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky $O\boldsymbol{H}$. (MO 60–A–III–5)

H H 12. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC a bod K na jeho kružnici opsané na druhé straně BC od A. Označme L, M obrazy K podle AB, resp. BC. Buď E druhý průsečík (ABC) s kružnicí (BLM). Ukažte, že přímky $K\boldsymbol{H}$, EM a BC prochází jedním bodem. (EGMO 2012)

Kružnice devíti bodů

Důležitá konstrukce spojená s námi studovaným bodem je kružnice opsaná patám výšek, středům stran a středům úseček spojující vrcholy trojúhelníka a $\boldsymbol{H}$. Úloha na vás může na tajňačku hodit tři z těchto bodů a implicitně zakrýt zbylých šest.

Věta. (Feuerbachova kružnice, kružnice devíti bodů) *V trojúhelníku ABC leží středy strany, paty výšek a středy úseček $A\boldsymbol{H}$, $B\boldsymbol{H}$ a $C\boldsymbol{H}$ na jedné kružnici Γ. Poloměr Γ má poloviční velikost poloměru (ABC) a její střed je střed $O\boldsymbol{H}$.*

Všimněte si, že pro libovolný bod $X \in (ABC)$ leží střed $X\boldsymbol{H}$ na Feuerbachově kružnici.

Pozorování. *Jaká je Feuerbachova kružnice v trojúhelníku $\boldsymbol{H}BC$?*

H H 13. V trojúhelníku ABC označme E, F paty výšek z B,C a M střed BC. Ukažte, že přímky ME, MF jsou tečny ke kružnici (AEF).

H H 14. V trojúhelníku ABC označme E, F paty výšek z B, C a M střed BC. Dále uvažme body P, Q na kružnici (AEF) takové, že M, P, Q leží na přímce. Ukažte, že střed PQ leží na Feuerbachově kružnici ABC.

H H 15. V úloze výše ukažte, že „$\boldsymbol{H}$“ trojúhelníku APQ leží na kružnici (ABC). (ELMO 2017)

H H 16. V trojúhelníku ABC označme D, E, F paty výšek a P střed $A\boldsymbol{H}$. Průsečík přímek EP a AB označme T a průsečík DF s B-výškou označme S. Ukažte, že $ST \perp BC$.

H H 17. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme M střed kratšího oblouku BC na (ABC) a D průsečík přímek AC a BM. Dále ať E je druhý průsečík osy $\sphericalangle ACB$ s kružnicí (BDC). Předpokládejme, že lze najít společný bod N přímky DE a kružnice (ABC) takový, že E je středem úsečky DN. Ukažte, že N je středem úsečky I_B, I_C, kde I_B, I_C jsou středy kružnic připsaných ke stranám AC, AB. (MEMO 2017)

Kladná stejnolehlost převádějící Feuerbachovu kružnici na kružnici opsanou má střed v $\boldsymbol{H}$. Tato stejnolehlost vede na další zajímavé vlastnosti trojúhelníku ABC.

H H 18. (Eulerova přímka) V trojúhelníku ABC označme jako G, O po řadě těžiště a opsiště. Pak $\boldsymbol{H}$, G a O leží na přímce v tomto pořadí, přičemž $|\boldsymbol{H}G| = 2 \cdot |OG|$.

H H 19. V trojúhelníku ABC s poloměrem kružnice opsané R označme O opsiště. Ukažte, že $|O\boldsymbol{H}| < 3R$. (APMO 1997)

H H 20. Ukažte, že se Eulerovy přímky trojúhelníků $\boldsymbol{H}BC$, $A\boldsymbol{H}C$, $AB\boldsymbol{H}$ a ABC protínají v jednom bodě.

H H 21. V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z A a K bod na (ABC) takový, že $AK \parallel BC$. Dokažte, že přímka DK prochází těžištěm ABC.

H H 22. V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z A a G těžiště. Přímka DG protíná kružnici (ABC) v bodech K, L, přičemž $AK \parallel BC$. Dokažte, že opsiště trojúhelníku ADL leží na tečně k (ABC) v A.

H H 23. Buď ABC trojúhelník s opsištěm O, přičemž $AB \neq AC$ a $\sphericalangle A \neq 90°$. Označme M a N středy po řadě AB a AC a E, F paty výšek z B a C. Označme P průsečík přímky MN s tečnou k (ABC) v A a dále označme Q druhý průsečík kružnic (ABC) a (AEF). Konečně, označme R průsečík přímek AQ a EF. Dokažte, že $PR \perp O\boldsymbol{H}$. (USA TSTST 2017)

Speciální Miguelův bod

Označme pro tuto sekci M střed úsečky BC. Značme dál X druhý průsečík přímky $M\boldsymbol{H}$ s kružnicí (ABC). Jeden průsečík přímky $M\boldsymbol{H}$ s kružnicí opsanou je bod přesně opačný A. V předchozí úloze se ukázal i ten druhý, pojďme se na něj podívat.

Cvičení 24. Ukažte, že X leží na kružnici s průměrem $A\boldsymbol{H}$.

H H 25. Označme D patu výšky z A. Ukažte, že body A, M, D a X leží na kružnici.

H H 26. Ukažte, že se přímky AX, EF a BC protínají v jednom bodě K.

Pozorování. *Bod X je Miguelův bod ve čtyřúhelníku $BCEF$.*

H H 27. Ukažte, že platí $AK \perp X\boldsymbol{H}$.

H H 28. Ukažte, že platí $AM \perp K\boldsymbol{H}$.

H H 29. Označme $\boldsymbol{H}_1$ obraz $\boldsymbol{H}$ podle BC. Ukažte, že body A, K, M a $\boldsymbol{H}_1$ leží na kružnici.

H H 30. Označme navíc D patu výšky z A a F druhý průsečík (ABC) a přímky $K\boldsymbol{H}_1$. Ukažte, že body M, F, K a X leží na kružnici.

Poznámka. Bod F je obraz tzv. A-„Humptyho“ bodu v ABC podle BC – tak nazýváme patu $\boldsymbol{H}$ na A-těžnici.

H H 31. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme v něm A_1, B_1, C_1 paty výšek. Dále označme A_2 průsečík BC a B_1C_1 a obdobně definujme B_2 a C_2. Konečně, označme D, E, F středy stran BC, AC a AB. Ukažte, že kolmice z D na AA_2, z E na BB_2 a z F na CC_2 se protínají v jednom bodě. (USA TSTST 2012)

H H 32. Buďte M, N středy AB, AC a označme P, Q průsečíky polopřímek $M\boldsymbol{H}$ a $N\boldsymbol{H}$ s (ABC). Ukažte, že se přímky BQ a CP na výšce z A.

H H 33. V ostroúhlém ABC označme O opsiště, M, N středy AB, AC a P, Q průsečíky polopřímek $M\boldsymbol{H}$ a $N\boldsymbol{H}$ s (ABC). Přímky MN a PQ se protínají v R. Dokažte, že $OA \perp RA$. (USA TSTST 2011)

Simsonova přímka

Užitečný objekt v geometrii spojený s patami výšek je tzv. *Simsonova přímka.* Díky ní získáme další zajímavé vlastnosti konfigurací, které jsme diskutovali.

Pro daný bod v rovině trojúhelníka ABC sestrojme paty jeho výšek na strany tohoto trojúhelníka. Můžeme zkoumat, kdy tyto paty tvoří trojúhelník, resp. kdy tento trojúhelník degeneruje v úsečku.

Věta. (Simsonova přímka) *Buď P bod v rovině trojúhelníku ABC. Označme K, L, M paty z P po řadě na přímky BC, AC a AB. Pak body K, L, M leží na přímce, právě pokud $P \in (ABC)$.*

H H 34. Buď $P \in (ABC)$ bod a X, Y, Z jeho paty na BC, AC, AB. Ukažte, že platí $|PA| \cdot |PX| = |PB| \cdot |PY|$.

H H 35. Je dán trojúhelník ABC. Označme A' druhý průsečík výšky z A s kružnicí opsanou ABC. Ať A'_B, A'_C jsou obrazy bodu A' podle přímek po řadě AB a AC a označme ℓ_A přímku $A'_BA'_C$. Analogicky definujeme přímky ℓ_B a ℓ_C. Dokažte, že se přímky ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C protínají v jednom bodě. (TR*i*KS 103)

H H 36. V úloze výše ukaž, že přímka ℓ_A je rovnoběžná s tečnou k (ABC) v A.

H H 37. V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z A. Ukažte, že paty kolmic z bodu D na strany AB a AC a na zbylé dvě výšky trojúhelníku ABC leží na přímce.

H H 38. Vraťme se ke značení z předchozí sekce. Ukažte, že F leží na přímce XD.

H **H 39.** Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L, M. Ukažte, že úhel $\sphericalangle LKM$ má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec. (MO 58–A–III–2)

H **H 40.** Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice se středem O a průměrem AB. Označme P, Q, R, S postupně paty kolmic z bodu Y na přímky AX, BX, AZ, BZ. Dokažte, že velikost ostrého úhlu, který svírají přímky PQ a RS, je rovna $\frac{1}{2}|\sphericalangle XOZ|$. (USAMO 2010)

Pozoruhodná vlastnost Simsonovy přímky bodu P je, že půlí úsečku spojující $\boldsymbol{H}$ a P. Následující série úloh představuje cestičku k tomuto výsledku.

H **H 41.** Buď P bod na kružnici (ABC) a $K \in (ABC)$ bod splňující $PK \perp BC$. Ukaž, že přímka AK je rovnoběžná se Simsonovou přímkou P vzhledem k ABC.

H **H 42.** Označme jako V bod „$\boldsymbol{H}$“ v PBC a jako L průsečík Simsonovy přímky P s $A\boldsymbol{H}$. Ukažte, že $LAKX$ a $A\boldsymbol{H}VP$ jsou rovnoběžníky.

Z toho odvodíme následující:

H **H 43.** Buď P bod na kružnici (ABC). Ukažte, že Simsonova přímka bodu P vzhledem k ABC půlí úsečku $P\boldsymbol{H}$.

Všimni si, jak toto tvrzení umožní rozšířit úlohu 35.

H **H 44.** Buďte P, Q body na kružnici (ABC) se středem O. Ukažte, že Simsonovy přímky bodů P, Q spolu svírají úhel $\frac{1}{2}|\sphericalangle POQ|$.

H **H 45.** Buďte P, Q protilehlé body na kružnici (ABC). Ukažte, že Simsonovy přímky bodů P, Q vzhledem k ABC jsou navzájem kolmé a že se protínají na Feuerbachově kružnici ABC.

Návody

1. Přímka MN je chordála dvou kružnic.

4. Najdi skryté „$\boldsymbol{H}$“.

5. Překlop E podle BC a kombinuj mocnosti.

6. Použij sinovou větu.

7. Překlop a najdi rovnoramenný lichoběžník.

8. Koľko je $|\sphericalangle \boldsymbol{H}_1 A \boldsymbol{H}_2|$?
9. Spočítej přímo pomocí sinové věty.
10. Ukaž, že $|A\boldsymbol{H}| = 2 \cdot |OM|$ pomocí sinové věty.
11. Překlápěj. E je střed kružnice.
12. Překlop $\boldsymbol{H}$ podle AB, BC a pak úhli.
13. Jaký je střed (AEF)?
14. Najdi vhodný průměr Feuerbachovy kružnice.
15. Najdi rovnoběžník s P, Q a dvěma „$\boldsymbol{H}$“.
16. Body S, T, E a F leží na kružnici. Je to tak.
17. Co je kružnice (ABC) vzhledem k trojúhelníku $I_A I_B I_C$?
19. Těžiště leží uvnitř trojúhelníku.
20. Všechny trojúhelníky mají shodnou Feuerbachovu kružnici.
23. Najdi potenční středy.
26. Potenční střed.
27. X leží na kružnici $(A\boldsymbol{H})$.
28. Co je $\boldsymbol{H}$ v AMX? Co by to asi mohlo být?
29. Překlápění.
30. Mocností ukaž, že M, D, F a $\boldsymbol{H}_1$ leží na kružnici.
32. Najdi potenční střed.
33. R je potenční střed. Najdi kružnici pomocí překlápění a mocnosti.
34. Podobnosť.
35. Překlápěj!
36. Protni $A'A'_B$ s BC a úhli.
37. Simsonova přímka ve Feuerbachově kružnici.
39. Doplň Simsonovu přímku a úhli.
40. Protni PQ a RS najdi cyklický pětiúhelník.
42. Úloha 7.
43. $LHXP$ je rovnoběžník.
45. Prochází středem!

Literatura a zdroje

Krutopřísně děkuji Radečkovi za krásnou vizuální stránku příspěvku.

[1] Evan Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, MAA Problem books, 2016.
[2] Martin Raška: *Simsonova přímka*, Sklené, 2019.
[3] Aditya Khurmi: *Orthocenter Bonanza*, *https://artofproblemsolving.com/community/c6t106462f6h1987061_orthocenter_bonanaza.*

Obsahy

HEDVIKA RANOŠOVÁ

ABSTRAKT. V příspěvku se podíváme na některé vlastnosti obsahů a spočítáme si několik úloh.

Úmluva. Obsah trojúhelníku ABC, resp. čtyřúhelníku $ABCD$, budeme značit jako $[ABC]$, resp. $[ABCD]$. Délku úsečky AB budeme značit jen jako AB.

Pomocná tvrzení

Na práci s obsahy budeme občas potřebovat několik lemmátek a tvrzeníček.

Lemma. *Nechť čtyři různé body A, B, C, D splňují $AB \parallel CD$. Potom $[ABC] = [ABD]$ a $[ACD] = [BCD]$.*

Úloha 1. Na stranách BC a DA rovnoběžníku $ABCD$ leží body E a F tak, že $BE = DF$. Navíc na straně CD leží bod K. Přímka EF protíná přímky AK a BK v bodech P a Q. Ukažte, že $[AFP] + [BQE] = [PKQ]$.

Tvrzení. *Přímky a a b se protínají v bodě O. Nechť ℓ_1 a ℓ_2 jsou dvě rovnoběžné přímky protínající a a b v bodech A_1 a B_1, resp. A_2 a B_2. Potom*

$$\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}.$$

Lemma. *Nechť ABC a ABD jsou trojúhelníky. Označme průsečík AB a CD jako P. Pak*

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{CP}{DP}.$$

Úloha 2. (van Aubelova věta) V trojúhelníku ABC leží bod P. Označme průsečíky AP, BP, CP s BC, CA, AB jako D, E, F. Ukažte, že potom

$$\frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC} = \frac{BP}{PE}.$$

Tvrzení. *Nechť body C a D leží ve stejné polorovině vytyčené přímkou AB a bod Q leží uvnitř úsečky CD. Označme si poměr $\frac{DQ}{DC}$ jako t. Potom*

$$[ABQ] = t \cdot [ABC] + (1 - t) \cdot [ABD].$$

Úloha 3. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ si označíme středy diagonál AC a BD jako M a N a průsečík diagonál jako E. Buď F takový bod, že $MENF$ je rovnoběžník. Dokažte, že

$$2 \cdot [ABF] = [BCE] + [DAE].$$

Jednodušší úlohy

Úloha 4. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník a body K a L, resp. M a N, leží na straně AB, resp. CD, tak, že platí $AK = KL = LB$, resp. $CM = MN = ND$. Ukažte, že $3 \cdot [KLMN] = [ABCD]$.

Úloha 5. Nechť M a N jsou středy stran AB a CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Úsečky AN a DM, resp. BN a CM, se protínají v bodě P, resp. Q. Ukažte, že $[APD] + [BQC] = [MPNQ]$. (PraSe 35–4p–5)

Úloha 6. Na stranách AB a BC trojúhelníka ABC leží body X a Y tak, že $\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC}$. Označme si průsečík úseček AY a CX jako P. Ukažte, že $[XPYB] = [APC]$.

Úloha 7. Nechť $ABCD$ je rovnoběžník, na jehož stranách AB a AD leží body E a F. Přímka EF protíná přímky CB a CD v bodech P a Q. Ukažte, že $[PAQ] = [ECF]$.

Složitější úlohy

Úloha 8. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, jehož úhly u vrcholů A a B se sečtou na $90°$. Označme střed strany CD jako M. V závislosti na délkách úseček AD a BC vyjádřete $[ABM] - [DAM] - [BCM]$.

Úloha 9. Nechť ABC je trojúhelník. Na polopřímce opačné k BC, resp. CA, resp. AB, leží bod X, resp. Y, resp. Z. Označme

$$x = \frac{XB}{BC}, \quad y = \frac{YC}{CA}, \quad z = \frac{ZA}{AB}.$$

Ukažte, že

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = (1+x)(1+y)(1+z) - xyz.$$

Úloha 10. (Newtonova přímka) Ukažte, že v tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ leží středy úseček AC a BD na přímce procházející středem kružnice vepsané.

Úloha 11. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník. Označme si K, L, M, N, P a Q postupně středy stran AB, BC, CD, DE, EF a FA. Dokažte, že pro všechny body X ležící ve vnitřku šestiúhelníku $ABCDEF$ je hodnota $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX]$ stejná.

Úloha 12. Na stranách AB a CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ leží body K a L tak, že $\frac{AK}{KB} = \frac{CL}{LD}$. Dokažte, že $[ALB] + [CKD] = [ABCD]$.

Úloha 13. Dokažte, že všechny přímky, které dělí obvod trojúhelníka ve stejném (nenulovém) poměru jako jeho obsah, procházejí jedním bodem. (PraSe 30–3j–8)

Úloha 14. Rado si nakreslil konvexní šestiúhelník. Všiml si, že pokud do něj nakreslí libovolnou z úseček spojující středy dvou protilehlých stran, rozdělí tato úsečka šestiúhelník na dva pětiúhelníky se stejným obsahem. Dokažte, že se tyto tři úsečky protínají v jednom bodě.

Úloha 15. Čtverec je rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části. Dokažte, že pokud tři z nich mají stejný obsah, pak už nutně mají stejný obsah všechny čtyři. (PraSe 36–4j–5b)

Úloha 16. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má obsah 6. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB má obsah nanejvýš 1.

Návody

1. Nalezni tři různé způsoby, jak rozdělit rovnoběžník na dvě oblasti se stejným obsahem.

2. Poměr délek změň na poměr obsahů dvěma způsoby.

3. Využij rovnoběžník $MENF$ a čtyřúhelník $[ABEF]$.

4. Využij druhé tvrzení.

5. Přičti k oběma stranám $[AMP] + [MBQ]$.

6. Převeď poměry délek úseček na poměry obsahů.

7. Dokresli další rovnoběžník.

8. Použij druhé tvrzení.

9. Nalezni dva trojúhelníky, jejichž poměr obsahů je $1 + x$.

10. Nalezni vlastnost, která platí pro všechny tři body. Pak ukaž, že body s danou vlastností leží na přímce.

11. Využij středy stran.

12. Využij druhé tvrzení.

13. Tipni si, který důležitý bod trojúhelníku to je.

14. Označme středy stran šestiúhelníku postupně $A_1, \ldots, F_1$ a K průsečík A_1D_1 a B_1E_1. Co víme o $[ABCK]$ a $[DEFK]$?

15. Uvažuj rotaci o $90°$ se středem ve středu čtverce.

16. Rozděl na dva případy podle toho, jestli se úhlopříčky protínají.

Literatura a zdroje

Příspěvek byl bez skrupulí skoro do písmene zkopírován ze stejnojmenné přednášky *Rado van Švarce* ze soustředění v Zásadě (2017), tímto mu děkuji.

Nemožné konstrukce

Martin Raška

Abstrakt. Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a zdvojení krychle jsou klasické problémy matematiky známé již z antického Řecka. Po staletí se mnoho matematiků snažilo zjistit, zdali lze tyto konstrukce provést pouze pomocí pravítka a kružítka. Až v 19. století se s nástupem analytické geometrie a algebry povedlo dokázat, že jsou tyto konstrukce obecně nemožné. Na přednášce si představíme myšlenky za těmito důkazy.

Co že se to vlastně rozumí pod pojmem konstrukce pravítkem a kružítkem? Budeme se bavit o idealizovaném kružítku, které zvládne nakreslit libovolně velkou kružnici, a nekonečném pravítku bez jakéhokoliv označení. Přesná definice je následovná:

Definice. *Konstrukcí pomocí pravítka a kružítka* myslíme konečný počet kroků, kdy s pomocí bodů, přímek a kružnic, které již byly vytvořeny v předchozích krocích, provedeme některou ze základních konstrukcí. Základními konstrukcemi jsou:

(1) Vytvoření přímky procházející dvěma body.
(2) Vytvoření kružnice se středem v jednom bodě tak, aby na ní ležel druhý bod.
(3) Vytvoření bodu, který leží v průsečíku dvou přímek (pokud se protínají).
(4) Vytvoření bodu, který leží v průsečíku kružnice a přímky (pokud se protínají).
(5) Vytvoření bodu, který leží v průsečíku dvou kružnic (pokud se protínají).

Trisekcí úhlu rozumíme rozdělení daného úhlu na tři stejné části. Kvadraturou kruhu rozumíme nalezení čtverce, který má stejný obsah jako daný kruh. Zdvojením krychle rozumíme nalezení krychle s dvojnásobným objemem než má zadaná krychle. Přesné zadání těchto problému si ukážeme na závěr.

Rychloúvod do vektorových prostorů

Definice. *Tělesem* $\mathbf{T}$ rozumíme množinu T společně s dvěma binárními operacemi „+“ a „·“ na T a dvěma různými prvky $0, 1 \in T$ takovými, že pro všechna $a, b, c \in T$ platí:

(1) $a + b = b + a$,
(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(3) $a + 0 = a$,
(4) existuje $-a \in T$ takové, že $a + (-a) = 0$,
(5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
(6) $a \cdot b = b \cdot a$,
(7) $a \cdot 1 = a$,
(8) pokud $a \neq 0$, tak existuje $a^{-1} \in T$, pro které $a \cdot a^{-1} = 1$,
(9) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Definice. Nechť $\mathbf{T}$ je těleso. *Vektorovým prostorem* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ rozumíme množinu V spolu s binární operací „+“ na V, operací „·“ násobení prvků množiny V prvky tělesa $\mathbf{T}$ a prvkem $o \in V$, které pro všechna $u, v, w \in V$ a $a, b \in T$ splňují následující:

(1) $u + v = v + u$,
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(3) $v + o = v$,
(4) existuje $-v \in V$ takové, že $v + (-v) = o$,
(5) $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$,
(6) $1 \cdot v = v$,
(7) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$,
(8) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$.

Definice. Jsou-li $v_1, v_2, \ldots, v_k$ prvky vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ a $t_1, \ldots, t_k \in T$, pak prvek

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k$$

nazýváme *lineární kombinací* prvků $v_1, v_2, \ldots, v_k$ a prvky $t_1, \ldots, t_k$ tělesa $\mathbf{T}$ nazýváme *koeficienty lineární kombinace.*

Definice. Budiž $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $X \subset V$. Pak *lineárním obalem* množiny X rozumíme množinu $\mathrm{LO}\,X$ všech lineárních kombinací prvků X. Pokud navíc $\mathrm{LO}\,X = V$, tak říkáme, že X *generuje* V.

Definice. Budiž $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Množina prvků $\{v_1, \ldots, v_k\}$ prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *lineárně závislá*, pokud je některý z prvků v_i lineární kombinací zbylých prvků $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$. V opačném případě říkáme, že je množina *lineárně nezávislá.*

Tvrzení. *Nechť $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je množina prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *Množina $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá.*
(2) *Nulový prvek $o \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinace pouze triviálním způsobem $o = 0v_1 + \cdots + 0v_k$.*
(3) *Každý prvek $u \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků $v_1, \ldots, v_k$ nejvýše jedním způsobem.*

Definice. Množina $\{v_1, \ldots, v_k\}$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá *báze*, pokud je lineárně nezávislá a generuje V.

Tvrzení. *Každý vektorový prostor* $\mathbf{V}$ *má bázi a každé dvě báze mají stejnou velikost. Této velikosti říkáme dimenze vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *a značíme ji* $\dim \mathbf{V}$.

Tělesová rozšíření

Definice. *Rozšířením těles* budeme rozumět libovolnou dvojici těles $\mathbf{T}$ a $\mathbf{S}$ takových, že $T \subseteq S$ a operace na T jsou zúžením operací na S. Tuto skutečnost značíme $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ a říkáme, že $\mathbf{T}$ *je podtělesem* $\mathbf{S}$, nebo že $\mathbf{S}$ *je rozšířením* $\mathbf{T}$.

Definice. Mějme tělesa $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ a prvky $a_1, \ldots, a_k \in S$. Pak značením $\mathbf{T}(a_1, \ldots, a_k)$ myslíme nejmenší (co do inkluze) rozšíření tělesa $\mathbf{T}$ obsahující prvky $a_1, \ldots, a_k$.

Když máme nějaké tělesové rozšíření $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$, tak množina S má přirozenou strukturu vektorového prostoru nad tělesem $\mathbf{T}$. Pro nás bude důležitá dimenze tohoto prostoru.

Definice. Mějme tělesové rozšíření $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ a dívejme se na $\mathbf{S}$ jako na vektorový prostor nad $\mathbf{T}$. Dimenzi tohoto vektorového prostoru budeme nazývat *stupeň rozšíření* a značit $[\mathbf{S} : \mathbf{T}]$.

Příklad. Určete následující stupně rozšíření a najděte nějakou bázi rozšíření:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}], \quad [\mathbb{C} : \mathbb{R}], \quad [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})], \quad [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}], \quad [\mathbb{R} : \mathbb{Q}].$$

Definice. Polynom nazveme *monický*, pokud je v něm koeficient u nejvyšší mocniny roven 1. Polynom nad tělesem $\mathbf{T}$ nazveme *ireducibilní* nad tělesem $\mathbf{T}$, pokud nejde zapsat jako součin dvou nekonstantních polynomů nad tělesem $\mathbf{T}$.

Definice. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$. Řekneme, že prvek a je *algebraický* nad $\mathbf{T}$, pokud existuje nad tělesem $\mathbf{T}$ polynom, jehož je a kořenem. V opačném případě se a nazývá *transcendentní* nad $\mathbf{T}$. *Minimálním polynomem* $m_{a,\mathbf{T}}$ *prvku* a *nad* $\mathbf{T}$ rozumíme monický polynom nad $\mathbf{T}$ nejmenšího stupně takový, že a je jeho kořen.

Tvrzení. *Buď* $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ *rozšíření těles a* $a \in S$ *algebraické nad* $\mathbf{T}$. *Pak*

(1) *minimální polynom* $m_{a,\mathbf{T}}$ *existuje, je jednoznačně určený a ireducibilní nad* $\mathbf{T}$,
(2) *prvek* a *je kořenem polynomu* f *nad* $\mathbf{T}$ *právě tehdy, když* $m_{a,\mathbf{T}} \mid f$.

Poznámka. Pokud najdeme monický ireducibilní polynom, jehož kořenem je a, pak se již nutně musí jednat o minimální polynom prvku a.

Příklad. U následujících prvků najděte minimální polynomy nad $\mathbb{Q}$:

$$7, \quad \sqrt[3]{2}, \quad i, \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Tvrzení. *Buď* $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ *rozšíření těles a* $a \in S$ *algebraické nad* $\mathbf{T}$. *Pak* $[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}] = \deg m_{a,\mathbf{T}}$, *speciálně* $\{1, a, a^2, \ldots, a^{\deg m_{a,\mathbf{T}} - 1}\}$ *tvoří bázi* $\mathbf{T}(a)$ *nad* $\mathbf{T}$.

Poznámka. Platí, že stupeň rozšíření $[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}]$ je konečný právě tehdy, když a je algebraické nad $\mathbf{T}$.

Tvrzení. (klíčové) *Buď* $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{U}$ *rozšíření těles. Pak* $[\mathbf{U} : \mathbf{T}] = [\mathbf{U} : \mathbf{S}] \cdot [\mathbf{S} : \mathbf{T}]$.

Konstrukce pravítkem a kružítkem

Klíčová myšlenka bude pomocí analytické geometrie přenést geometrické konstrukce do řeči algebry. Při konstruování pomocí pravítka a kružítka máme v základní konfiguraci dané nějaké body $b_1, b_2, \ldots$ Uvažujme jejich souřadnice $b_1 = [x_1, y_1]$, $b_2 = [x_2, y_2], \ldots$ v kartézské soustavě souřadnic. Označme $\mathbf{T}_0$ nejmenší rozšíření $\mathbb{Q}$ obsahující všechny tyto souřadnice neboli $\mathbf{T}_0 = \mathbb{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$. Přidáním bodu $X = (u_1, v_1)$ pomocí konstrukce pravítkem a kružítkem dostaneme nové těleso $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_0(u_1, v_1)$ obsahující všechny souřadnice bodů. Podobně přidáním dalšího bodu dostaneme těleso $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1(u_2, v_2)$. Takto postupně můžeme tvořit posloupnost rozšíření těles $\mathbf{T}_0 \leq \mathbf{T}_1 \leq \mathbf{T}_2 \leq \mathbf{T}_3 \leq \cdots \leq \mathbf{T}_n$, až po konečném počtu kroků skončíme.

Tvrzení. *Při značení z předchozího odstavce platí, že stupeň rozšíření* $[\mathbf{T}_n : \mathbf{T}_0]$ *je mocninou* 2.

Příklad. (duplikace krychle) Začínáme-li s body $[0, 0]$ a $[1, 0]$ v rovině, pak není možné konstrukcí pomocí pravítka a kružítka vytvořit bod $[\sqrt[3]{2}, 0]$.

Důkaz. Nechť existuje konstrukce pomocí pravítka a kružítka taková, že $\sqrt[3]{2} \in T_n$. Při značení z předchozího odstavce pak $\mathbb{Q} = \mathbf{T}_0 \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \leq \mathbf{T}_n$. Z předchozích příkladů víme, že $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$. To je nicméně spor s předchozím tvrzením a faktem, že $[\mathbf{T}_n : \mathbb{Q}] = [\mathbf{T}_n : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$, protože 3 nedělí žádnou mocninu 2.

Příklad. (trisekce úhlu) Existují úhly, které nelze pomocí konstrukce pravítkem a kružítkem roztřetit.

Důkaz. (náznak) Chceme-li roztřetit úhel α, pak je úloha ekvivalentní konstrukci bodu se souřadnicí $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$. Pomocí Moivreovy věty platí

$$\cos(\alpha) = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right).$$

Pro volbu $\alpha = 60°$ stačí ukázat, že polynom $8x^3 - 6x - 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Příklad. (kvadratura kruhu) Konstrukcí pravítkem a kružítkem nelze k zadanému kruhu sestrojit čtverec se stejným obsahem.

Důkaz. (který vlastně není důkaz) Začneme-li bez újmy na obecnosti s kruhem o obsahu 1, pak chceme sestrojit bod se souřadnicí $\sqrt{\pi}$, resp. π, protože vzdálenosti umíme konstrukcí pravítkem a kružítkem násobit. Číslo π je ale transcendentní a tedy stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}]$ je nekonečný, což je spor. Tato skutečnost byla ukázána roku 1882 panem Lindemannem a přesahuje rámec této přednášky.

Literatura a zdroje

[1] David Stanovský: *Základy algebry*, text o tělesových rozšířeních.
[2] Libor Barto a Jiří Tůma: *Lineární algebra*, skripta MFF UK.

Spirální podobnost

Adéla Karolína Žáčková

Abstrakt. Přednáška seznamuje s vlastnostmi spirální podobnosti a ukazuje použití v příkladech olympiádní geometrie.

Spirální podobnost je nejobecnější přímé podobné zobrazení roviny. Při správném úhlu pohledu umí elegantně vyřešit i spoustu těžších, těžkopádnějších problémů. My se ji v této přednášce naučíme hledat a nacházet.

Definice. *Spirální podobnost* je geometrické zobrazení vzniklé složením otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určeno středem spirální podobnosti O, orientovaným úhlem otočení $\overrightarrow{\omega}$ a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.

Vlastnosti spirální podobnosti

Tvrzení 1. (základní vlastnosti) *Pro spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ platí:*

(i) *Spirální podobnost je podobné zobrazení – obrazem přímky je přímka, obrazem čtverce je čtverec, obrazem středu úsečky je střed obrazu úsečky, obecně obrazem útvaru je jemu podobný útvar.*
(ii) *Úhel mezi přímkou a jejím obrazem je úhel otočení $\overrightarrow{\omega}$.*
(iii) *Poměr délky úsečky a jejího obrazu je roven koeficientu stejnolehlosti k.*

Tvrzení 2. (speciální případy) *Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ se při speciálních hodnotách $\overrightarrow{\omega}$ a k redukuje následovně:*

(i) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 0$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem k.*
(ii) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 180°$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem $-k$.*
(iii) *Pro $k = 1$ dostáváme otočení kolem O o úhel $\overrightarrow{\omega}$.*
(iv) *Pro $k = 1$ a $\overrightarrow{\omega} = 180°$ dostáváme středovou souměrnost se středem O.*
(v) *Žádná kombinace O, $\overrightarrow{\omega}$, k nám nedá posunutí nebo* nepřímé *zobrazení.*

Tvrzení 3. (spirální podobnosti chodí po dvou) *Nechť spirální podobnost se středem O převádí $A \mapsto C$ a $B \mapsto D$. Pak jednoznačně určená spirální podobnost, která převádí $A \mapsto B$ a $C \mapsto D$, má též střed v O. Úhel otočení a koeficient se může lišit.*

Tvrzení 4. (existence a jednoznačnost) *V rovině jsou dány body A, B, C, D takové, že $ABDC$ (v tomto pořadí!) není rovnoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí $A \mapsto C$, $B \mapsto D$.*

Lemma 5. (spirální podobnost jednoznačně určená trojúhelníkem OAA') *Buď $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ spirální podobnost zobrazující bod A na A'. Potom platí následující:*

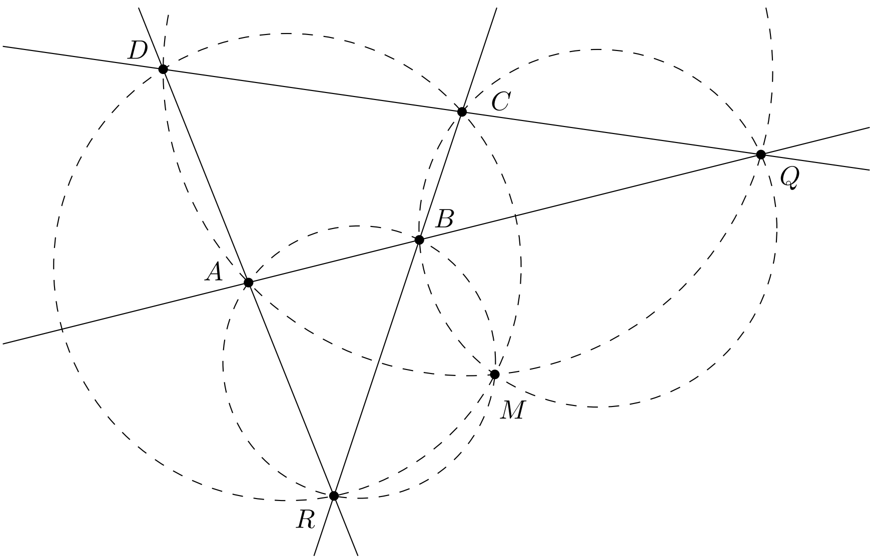
(i) *Pro různé body A jsou všechny trojúhelníky OAA' podobné.*
(ii) *Libovolný trojúhelník OAA' zpětně jednoznačně určuje spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.*

Tvrzení 6. (konstrukce středu a existence) *Buď $ABB'A'$ čtyřúhelník takový, že se přímky AB a $A'B'$ protínají v bodě Q. Potom druhý průsečík O kružnic opsaných trojúhelníkům QAA' a QBB' je střed spirální podobnosti*

$$\mathcal{S}\left(O, \sphericalangle\overrightarrow{AOA'}, \frac{|AB|}{|A'B'|}\right),$$

která zobrazuje $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$.

Tvrzení 7. (průsečík čtyř kružnic) *Buď $ABCD$ čtyřúhelník s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a CD označme Q, průsečík přímek AD a BC označme R. Potom střed spirální podobnosti M, která zobrazuje $A \mapsto D$ a $B \mapsto C$, je průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům ADQ, BCQ, ABR a CDR.*



Bod M z tvrzení 7 se pak označuje jako *Miquelův bod* čtyřúhelníku $ABCD$. Má spoustu zajímavých vlastností, ale k jeho pečlivějšímu prozkoumání bychom potřebovali další přednášku.

A jde se na to!

Úloha 1. V rovině jsou dány různě velké, stejně orientované, podobné trojúhelníky ABC a $A_0B_0C_0$. Středy úseček AA_0, BB_0, CC_0 označme po řadě A_1, B_1, C_1. Ukažte, že i trojúhelník $A_1B_1C_1$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

Úloha 2. Po třech různoběžných přímkách se pohybují rovnoměrně body A, B a C. Dokažte, že pokud jsou ve dvou různých časech trojúhelníky ABC podobné, pak jsou podobné v každém okamžiku.

Úloha 3. V rovině jsou dané dva čtverce $ABCD$ a $A_0B_0C_0D_0$. Označme A_1, B_1, C_1 a D_1 postupně středy úseček AA_0, BB_0, CC_0 a DD_0. Dokažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je čtverec.

Úloha 4. Je dán trojúhelník ABC a bod P ležící na tom oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. Paty kolmic z bodu P ke stranám BC a AC označme po řadě X a Y. Je-li M střed úsečky AB a N střed úsečky XY, dokažte, že platí $|\sphericalangle MNP| = 90°$.

Úloha 5. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, ve kterém $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDA|$ a $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle ACD|$. Dále nechť M značí střed úsečky AB. Dokažte, že $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle DBA|$. (Itálie 2010)

Úloha 6. (Ptolemaiova věta) Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označíme-li délky jeho stran AB, BC, CD, DA po řadě a, b, c, d a délky úhlopříček AC, BD po řadě e, f, pak platí $ac + bd = ef$.

Úloha 7. (Simsonova přímka) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Označme paty kolmic z D postupně na přímky AB, AC, BC jako P, Q a R. Dokažte, že P, Q a R leží na jedné přímce.

Úloha 8. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a nechť E, F jsou body postupně na stranách AD, BC takové, že dělí strany ve stejném poměru, tedy $|AE| : |ED| = |BF| : |FC|$. Přímka EF protíná přímky BA a CD postupně v bodech S a T. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE, SBF, TCF a TDE mají společný bod. (USAMO 2006)

Úloha 9. Nechť je ABC ostroúhlý trojúhelník s výškou AD. Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že body X, D, Y leží na jedné přímce a body X, D, Y, B jsou po dvou různé. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY. Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé. (PraSe 27–3–8)

Úloha 10. Stranám AB a BC trojúhelníka ABC připíšeme zvenčí podobné pravoúhelníky[1] $BKLC$ a $MNBA$. Ukažte, že přímky NC, ML a AK procházejí jedním bodem.

[1] Pravoúhelník je obdélník nebo čtverec.

Úloha 11. Úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P. Označme O_1 a O_2 středy kružnic opsaných trojúhelníkům ADP a CBP. Body M, N a O jsou postupně středy úseček AC, BD a O_1O_2. Ukažte, že O je střed kružnice opsané PMN.

Úloha 12. Je dán pětiúhelník $ABCDE$ takový, že jsou si trojúhelníky ABC, ACD, ADE podobné. Označme T průsečík přímek BD a CE. Ukažte, že přímka AT je kolmá na spojnici středů S_1 a S_2 kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE.

Úloha 13. Buď $ABCDE$ konvexní pětiúhelník takový, že jsou si trojúhelníky ABC, ACD, ADE podobné. Úhlopříčky BD a CE se protínají v T. Ukažte, že přímka AT půlí stranu CD. (IMO Shortlist 2006)

Úloha 14. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme M střed přepony a D takový bod odvěsny BC, že platí $|CD| = |CM|$. Nechť dále P značí průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům CMB a BDA, $P \neq B$. Ukažte, že přímka BP je osou úhlu ABC. (iKS 7–G1)

Úloha 15. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, P je průsečík jeho úhlopříček a body E, F jsou po řadě paty kolmic z bodu P na strany AB, CD. Nechť bod K je střed strany BC a L střed AD. Dokažte, že přímky EF a KL jsou kolmé. (USA TST 2000)

Úloha 16. Střed kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$ označme O. Úhlopříčky AC a BD se protínají v bodě P. Kružnice opsané trojúhelníkům ABP a CDP se protínají v bodech P a Q. Předpokládejme, že jsou body O, P a Q různé. Dokažte, že $|\sphericalangle OQP| = 90°$. (Čína 1992)

Úloha 17. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (IMO 2014/4)

Úloha 18. Na stranách a, b, c trojúhelníka ABC zvolíme postupně body A_1, B_1, C_1. Kružnice opsané trojúhelníkům AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 protnou kružnici opsanou podruhé v bodech A_2, B_2, C_2. Body A_3, B_3, C_3 jsou středovými obrazy bodů A_1, B_1, C_1 postupně podle středů stran a, b, c. Ukažte, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ je podobný trojúhelníku $A_3B_3C_3$. (IMO Shortlist 2006)

Návody

2. Uvaž střed spirální podobnosti O, který převádí ty dva trojúhelníky na sebe.

3. Najdi střed spirální podobnosti O, který na sebe čtverce převádí. Dokaž, že je to střed spirální podobnosti i pro $A_1B_1C_1D_1$.

4. Najdi vhodnou spirální podobnost a využij fakt, že chodí po dvou.

5. Najdi spirální podobnost a doúhli.

6. Přikresli si bod P na úhlopříčce BD tak, aby $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle CAD|$. Vyjádři si poměry podobných trojúhelníků.

7. Existuje spirální podobnost se středem v D, která zobrazí AC na PR. Dokaž, že Q leží na přímce PR.

8. Najdi spirální podobnost zobrazující $A \mapsto B$ a $D \mapsto C$ a využij tvrzení o konstrukci středu.

9. Najdi vhodnou spirální podobnost a využij Thaletovy kružnice ze zadání.

10. Vezmi vhodnou spirální podobnost a zobraz na sebe kružnice opsané našim pravoúhelníkům.

11. Vzpomeň si na první motivační příklad.

12. Vezmi spirální podobnost, která zobrazuje $\triangle ABC$ na $\triangle ADE$.

13. Označme Q průsečík BD a AC, R průsečík DA a EC. Díky *Cevově větě* stačí ukázat $|AQ| : |QC| = |AR| : |RD|$. Čtyřúhelníky $ABCD$ a $ACDE$ si odpovídají ve spirální podobnosti, tedy i jejich průsečíky úhlopříček, a jsou tak zachovány potřebné poměry.

14. Ukaž shodnost $\triangle CPD$ a $\triangle MPA$.

15. Zobraz bod P v osové souměrnosti podle CD a urči vhodnou spirální podobnost. Z vlastností podobných zobrazení lze uvažovat vhodný deltoid.

16. Dokresli body S_1 a S_2, středy úhlopříček AC a BD.

17. Uvaž trojúhelník AB_1C_1 takový, že strana BC je jeho střední příčkou. Trojúhelník ANC je spirálně podobný s BB_1M s úhlem otočení $|\sphericalangle BAC| - 180°$.

18. Postupně:

(i) Pomocí znalosti průniku kružnic jako středu spirální podobnosti ukaž, že $\triangle A_2BC \sim \triangle A_2C_1B_1$.
(ii) Označ středy úseček b, c, AA_2 postupně S_b, S_c, S_{AA_2}. Ukaž $\triangle S_{AA_2}S_cS_b \sim \triangle A_2BC$.
(iii) Pomocí tvrzení odůvodni $\triangle A_2C_1B_1 \sim \triangle S_{AA_2}S_cS_b \sim \triangle AC_3B_3$.
(iv) Ukaž shodnost odpovídajících úhlů v $\triangle A_2B_2C_2$ a $\triangle A_3B_3C_3$.

Literatura a zdroje

Chtěla bych poděkovat Hedvice Ranošové, z jejíhož příspěvku jsem převzala většinu přednášky.

[1] Hedvika Ranošová: *Spirální podobnost*, Paseky, 2018.
[2] Jaroslav Švrček, Tomáš Hrdlička: *Matematika-fyzika-informatika*, *https://mfi.upol.cz/files/28/2801/mfi_2801_001_010.pdf.*
[3] Ákos Záhorský: *Špirálka a Big Picture*, sborník *i*KS, 2020.

Obsah