Zásada

Sborník, podzim 2021

Fíla Čermák
Matěj Doležálek
Verča Hladíková
Václav Janáček
Lenka Kopfová
Terka Kučerová
Josef Minařík
Magdaléna Mišinová
Radek Olšák
Klára Pernicová
Daniel Perout
Marian Poljak
Hedvika Ranošová
Martin Raška
Michal Töpfer
Adéla Karolína Žáčková

AUTOŘI: Fíla Čermák, Matěj Doležálek, Verča Hladíková, Václav Janáček, Lenka Kopfová, Terka Kučerová, Josef Minařík, Magdaléna Mišinová, Radek Olšák, Klára Pernicová, Daniel Perout, Marian Poljak, Hedvika Ranošová, Martin Raška, Michal Töpfer, Adéla Karolína Žáčková
EDITOŘI: Matěj Doležálek, Radek Olšák
vydání první, náklad 44 výtisků
listopad 2021
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Jensenova nerovnost

Fíla Čermák

Abstrakt. Jensenova nerovnost je překvapivě silná a může pomoct, když klasické AG nerovnost nebo CS nerovnost selžou. Obecně si rozumí i se složitějšími funkcemi a díky tomu ji budete pravidelně potkávat i na vysoké škole.

Konvexní kombinace

Definice. Nechť $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ a navíc $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Pak číslo $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ nazýváme *konvexní kombinací* čísel $x_1, \dots, x_n$.

Cvičení. Rozmyslete si, že pokud je x_1 nejmenší a x_n největší z čísel $x_1, \dots, x_n$, pak leží každá konvexní kombinace těchto čísel v intervalu $\langle x_1, x_n\rangle$.

Pro práci s Jensenovou nerovností je klíčové porozumět konvexním kombinacím (bodů) v rovině.

Definice. Nechť $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ jsou souřadnice n bodů v rovině, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ a $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Pak bod o souřadnicích

$$[\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n,\ \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n]$$

nazýváme *konvexní kombinací* bodů $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$.

Cvičení. Co je množinou všech konvexních kombinací daných dvou (tří, čtyř, atd.) bodů v rovině? A co v prostoru?

Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pokud pro každou dvojici $x, y \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

řekneme, že f je *konvexní* na I.

Duálně (s opačnou nerovností) definujeme *konkávní* funkci. Pokud pro $\lambda \in (0, 1)$ platí ostrá varianta uvedené nerovnosti, mluvíme o *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) funkci.

Cvičení. Rozmyslete si, co nerovnost definující konvexnost (resp. konkávnost) znamená geometricky.

Cvičení. Zjistěte, které z elementárních funkcí jsou na některých intervalech konvexní (resp. konkávní).

Jensenova nerovnost

Věta. (Jensen) *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \dots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ taková, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, platí*

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Pro konkávní funkci platí obrácená nerovnost.

Často nám bude stačit jednodušší tvar nerovnosti, kdy jsou všechna $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \dots x_n}{n}\right).$$

Cvičení. Interpretujte obě strany nerovnosti geometricky pomocí konvexních kombinací bodů a uvědomte si, že tvrzení se tím stává téměř triviálním.

Cvičení. Rozmyslete si, kdy v Jensenově nerovnosti nastává rovnost.

Nyní si můžeme blahopřát, neboť jsme téměř zadarmo získali velmi obecně vyhlížející nerovnost, která se ukáže být silnou zbraní. Ke správnému použití Jensenovy nerovnosti je třeba umět rozhodnout, zda je daná funkce konvexní (resp. konkávní). K tomu se v praxi používá následující lemma.

Lemma. *Má-li funkce f na intervalu I nezápornou (resp. nekladnou) druhou derivaci, je f na I konvexní (resp. konkávní).*

Pokud jste o derivaci (natož o druhé derivaci) neslyšeli, nezoufejte. U jednoduchých funkcí se dá konvexnost (resp. konkávnost) dobře odhadnout z grafu, případně lze použít vhodný matematický software. Přísně korektní zdůvodnění se v tomto případě nevyžaduje ani v MO, o jednoduchých funkcích se považuje za známé, zda jsou konvexní či konkávní. Konvexní jsou například $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $\mathbb{R}^+$ nebo sudé mocniny x na $\mathbb{R}$. Typické konkávní funkce jsou $\sqrt{x}$ nebo $\log(x)$ na $\mathbb{R}^+$.

Logaritmus

Občas se při používání Jensenovy nerovnosti setkáme s logaritmem. Bude pro nás užitečný, protože svým způsobem převádí násobení na sčítání a mocnění na násobení. Přesněji o tom hovoří následující poznámka.

Poznámka. Nechť $a > 1$. Funkce $f(x) = \log_a(x)$ definovaná na $\mathbb{R}^+$ jako inverzní funkce ke $g(x) = a^x$ má následující vlastnosti:

(i) f je rostoucí ryze konkávní funkce na $\mathbb{R}^+$,
(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$,
(iii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$,
(iv) $f(x^y) = yf(x)$.

Motivační příklady

Konečně se dostáváme k úlohám. Začneme zlehka:

Příklad. Ukažte, že pro každé reálné $x > 1$ platí

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Řešení. Použijeme Jensenovu nerovnost pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, která je konvexní na $\mathbb{R}^+$, a konvexní kombinaci kladných čísel $x-1$, x, $x+1$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Dostáváme

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \geq \frac{1}{\frac{x-1}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x+1}{3}} = \frac{1}{x} \implies \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Jistě by vám nedělalo problém tuto nerovnost dokázat zcela přímočaře roznásobením. Zkusíme tedy něco těžšího – zástupce typické skupiny úloh řešitelných Jensenovou nerovností:

Příklad. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Řešení. Jensenovu nerovnost aplikujeme na funkci $f(x) = \sin x$, která je konkávní na intervalu $(0, \pi)$. Platí $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, tedy

$$\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin\beta + \frac{1}{3}\sin\gamma \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U této nerovnosti bychom již přímočařejší přístup hledali těžko. Jensenova nerovnost je pro dokazování nerovností s úhly v trojúhelníku často užitečná, neboť známe jejich součet (což je jejich nejjednodušší lineární kombinace).

Pořád je to moc snadné? Jensenova nerovnost jde použít i na dokazování nerovností mezi průměry:

Tvrzení. (AG nerovnost) *Pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Tvrzení. (AH nerovnost) *Pro nezáporná čísla* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Nyní už víme dost, abychom se mohli pustit do řešení skutečných úloh. Nezapomeňme, že Jensenova nerovnost platí pro každou konvexní (resp. konkávní) funkci, takže pokud kýžená nerovnost hned napoprvé nevyjde, není důvod házet Jensena do žita – prostě zkuste jinou funkci. Tak hurá do toho!

Úlohy na rozehřátí

Úloha 1. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b \in \langle -1, 1\rangle$ platí

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{4-(a+b)^2}.$$

Úloha 2. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b splňující $a + b = 1$ platí

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Úloha 3. Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12.$$

Úloha 4. Pro velikosti úhlů v trojúhelníků α, β, γ dokažte nerovnosti

(i) $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\gamma}{2} \leq \dfrac{3}{2}$,

(ii) $\cos\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\beta}{2} + \cos\dfrac{\gamma}{2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,

(iii) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$.

Úloha 5. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sqrt[4]{27\left(a^7+b^7+c^7\right)} \geq \sqrt[4]{a^7} + \sqrt[4]{b^7} + \sqrt[4]{c^7}.$$

Úloha 6. Kladná reálná čísla x, y splňují $x + y = 1$. Dokažte

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \geq \frac{1}{1+2xy}.$$

Úloha 7. Dokažte, že pro kladná reálná a, b, c, d splňující $a + b + c + d = 4$, platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b(b+1)} \geq \frac{8}{(a+c)(b+d)}.$$

Homogenita

Definice. Výraz $f(a,b,c)$ je *homogenní* stupně n, pokud platí, že $f(ta,tb,tc) = t^n f(a,b,c)$ pro libovolné reálné t.

V našem případě budeme vždy uvažovat čísla a, b, c a t kladná reálná. Často řešíme nerovnosti typu $f(a,b,c) \geq 0$. Homogenita nám dává velmi užitečný nástroj na vytváření podmínek a tím nám často usnadní práci. Pokud totiž řešíme nerovnost $f(a,b,c) \geq 0$ můžeme si zafixovat jednu hodnotu libovolného homogenního výrazu v a, b, c. Tedy například $a+b+c=3$, nebo $abc=1$. To je právě proto, že pokud by $a+b+c=k \neq 3$, pak můžeme za t zvolit například $\frac{3}{k}$ nebo pokud $abc=k$, tak dát $t = \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

Řešení nerovnosti $f(a,b,c) \geq 0$ pak bude ekvivalentní řešení nerovnosti $0 \leq f(ta,tb,tc) = t^n f(a,b,c)$, protože t^n můžeme pokrátit. V našem příspěvku bude homogenita vhodná zejména na normování koeficientů.

Pořádné úlohy

Jak jsme viděli v posledních dvou příkladech, občas se nám může stát, že nestačí vzít za koeficienty $\frac{1}{n}$. Například v úloze 6 jsme s úspěchem využili $x+y=1$. Co kdyby to tak ale nebylo? Vždy je možné zkusit dva jednoduché triky. Nejprve si ale upravme úlohu 6 tak, aby platila, i když $x+y \neq 1$. Jediné, co změníme, je pravá strana a to na

$$\frac{x+y}{1+\frac{2xy}{x+y}}.$$

Prvním z těchto jednoduchých triků bude *homogenizace*, kterou jsme si uvedli před chvílí. Díky ní si můžeme zvolit $x+y=1$. Upravená nerovnost z úlohy 6 ale není homogenní, a proto si budeme muset poradit jinak.

Naším druhým trikem bude *znormování* celé nerovnosti tak, aby se koeficienty sečetly na 1. V našem případě bychom celou nerovnost podělili $x+y$ a za koeficienty vzali $\frac{x}{x+y}$ a $\frac{y}{x+y}$.

Úloha 8. Ukažte, že pro kladná reálná x, y, z splňující $x+y+z=xyz$ platí

$$\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \leq \frac{3}{4}.$$

Úloha 9. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Úloha 10. Pro $a, b \geq 0$ dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

(MO 63–III–6)

Úloha 11. Ukažte, že v ostroúhlém trojúhelníku při standardním značení platí

$$a+b+c \geq \sqrt{2bc\cos\alpha} + \sqrt{2ac\cos\beta} + \sqrt{2ab\cos\gamma}.$$

Úloha 12. Pro reálná $x_1, \ldots, x_n \geq 1$ dokažte

$$\frac{1}{x_1+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}+1}.$$

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 13. Dokažte, že platí

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 14. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Karamatova nerovnost

Podobně jako můžeme vážit AG nerovnosti a když nás to přestane bavit, objevíme Muirheadovu nerovnost, tak i v případě Jensenovy nerovnosti existuje zobecnění, které se zbaví omezení, že na pravé straně odhadu je jen funkční hodnota váženého průměru čísel. Abychom tuto obecnou verzi nerovnosti mohli snadno popsat, zavedeme pojem majorizace.

Definice. Řekneme, že konečná posloupnost $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *majorizuje* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ (budeme značit $a \succ b$), když mají následující vlastnosti:

(1) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$,
(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_i$ pro všechna $1 \geq i \geq n$,
(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Věta. (Karamata) *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in I$ splňující $x \succ y$ platí*

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + \cdots + f(y_n).$$

Pro konkávní funkci platí obrácená nerovnost.

Úloha 15. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Úloha 16. Pro strany trojúhelníku a, b, c dokažte

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

(APMO 1996)

Úloha 17. Nechť $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ a $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ jsou dvě posloupnosti kladných reálných čísel splňující podmínky

$$a_1 \geq b_2, \quad a_1a_2 \geq b_1b_2, \quad a_1a_2a_3 \geq b_1b_2b_3, \quad \ldots, \quad a_1a_2\cdots a_n \geq b_1b_2\cdots b_n.$$

Dokažte že platí

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geq b_1+b_2+\cdots+b_n.$$

Úloha 18. Pokud $x_1,\ldots,x_n \in \left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\rangle$, dokažte

$$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+\cdots+\cos(2x_n-x_1) \leq \cos x_1+\cdots+\cos x_n.$$

Úloha 19. Nechť jsou $a_1,\ldots,a_n$ kladná reálná čísla. Dokažte, že platí

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Návody

1. Funkce $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je konkávní.

2. Funkce $f(x)=(x+\frac{1}{x})^2$ je konvexní.

3. Odmocnina je konkávní funkce.

4. Sinus je konkávní, cosinus taky a tangens konvexní. Pozor na jakém intervalu funkci chceme, aby předchozí věta platila!

5. Funkce $f(x)=\sqrt[4]{x}$ je konkávní.

6. Funkce $f(x)=\frac{1}{1+x}$ je konvexní.

7. Funkce $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ je konvexní.

8. Rozšiřte zlomek třetí proměnnou a uvědomte si, že funkce $f(x)=\frac{x}{x+S}$, kde $S=x+y+z$ je konkávní.

9. Zafixujte si $S=a+b+c$ a uvědomte si, že $b+c=S-a$. Alternativně použijte homogenitu.

10. Znormujte a využijte, že funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ je konvexní.

11. Nejprve zkuste kosinovou větu a potom substituci $a=\sqrt{y+z}$, $b=\sqrt{x+z}$, $c=\sqrt{x+y}$.

12. Zkuste podobný trik jako při důkazu AG nerovnosti, tj. že platí $x=e^{\ln x}$.

13. Funkce $f(x)=\frac{x^{3/2}}{S-x}$ je na intervalu $(0,S)$ konvexní, kde $S=x+y+z$.

14. Můžete použít homogenizaci, případně celé podělit. Uvědomte si, že $f(x)=\frac{1}{x}$ je konvexní.

15. Funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ je konvexní.

16. Správně si je seřaďte a nahlédněte, že jde o majorizaci.

17. Stejně jako logaritmus pomáhá měnit součet v součin, tak exponenciální funkce pomáhá měnit součin v součet.

18. Správně seřaďte (opět).

19. Logaritmus se hodí pro převod na součet. Pokud si nechcete rozmýšlet chování a-ček, tak si řekněte, že to jsou exponenciály.

Zdroje

Chtěl bych poděkovat Martinu Töpferovi, od něhož jsem velkou část příspěvku převzal.

[1] Martin Töpfer: *Jensenova nerovnost*, Hojsova stráž, 2016.
[2] AoPS: *https://artofproblemsolving.com/community*.
[3] IMOmath: *https://www.imomath.com/index.php?options=597*.

Teleskopické součty a součiny

Fíla Čermák

Abstrakt. Příspěvek se zabývá metodou teleskopických součtů a součinů a obsahuje několik příkladů na její procvičení.

Princip teleskopických součtů a součinů je založen na vhodném prodloužení výrazu, který následně upravíme tak, že dostaneme mnohem jednodušší výraz než před „prodloužením“. Ač se to na první pohled může zdát zvláštní, tato technika nám usnadní řešení řady příkladů.

Úmluva. V celém příspěvku budeme počítat s $n > 1$.

Při metodě teleskopických součtů se obvykle snažíme každý ze sčítanců přepsat ve tvaru rozdílu tak, že většina členů takto upraveného součtu se nakonec navzájem odečte.

Úloha. Určete hodnotu výrazu $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Úloha. Určete hodnotu výrazu $1!\cdot 1+2!\cdot 2+\cdots+n!\cdot n$.

Při teleskopických součinech chceme jednotlivé činitele upravit tak, aby se jich co nejvíc zkrátilo a zůstal nám pouze jednoduchý výraz.

Úloha. Dokažte, že $\left(1+\dfrac{1}{1\cdot 3}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{(n-1)\cdot(n+1)}\right)<2$.

Úloha. Dokažte, že $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$.

Příklady

Příklad 1. Určete hodnotu výrazu $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

Příklad 2. Dokažte, že platí $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Příklad 3. Dokažte, že platí $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9$.

Příklad 4. Dokažte, že $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} < 2$.

Příklad 5. Dokažte, že $\frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 4} + \frac{5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots = 1$

Příklad 6. Dokažte, že platí $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+3)} < \frac{1}{3}$.

Příklad 7. Dokažte, že

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right) = \frac{(n+1)^2}{4n}.$$

Příklad 8. Dokažte, že $\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \cdots + \frac{2019}{2017!+2018!+2019!} < \frac{1}{2}$.

Příklad 9. Určete hodnotu $\sqrt{1+1+\frac{1}{4}} + \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$.

Příklad 10. Zjednodušte

$$\frac{1}{(1+1)\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{1+1}} + \frac{1}{(2+1)\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2+1}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}+n\cdot\sqrt{n+1}}.$$

Příklad 11. Dokažte nerovnost $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Příklad 12. Dokažte, že $\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdots\frac{n^3+1}{n^3-1} < \frac{3}{2}$.

Příklad 13. Dokažte, že $\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{27}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}$.

Příklad 14. Určete hodnotu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}$, kde F_n značí n-té Fibonacciho číslo.

Příklad 15. Určete hodnotu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}$, kde F_n značí n-té Fibonacciho číslo.

Příklad 16. Dokažte, že $\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$.

Návody

1. Rozložte zlomek $\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$ na $\frac{1/2}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1/2}{n+1}$.

2. Uvědomte si, že $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$.

3. Usměrněte zlomky.

4. Znáte vzorec pro součet čísel od 1 do n?

5. Vzorec pro n by mohl být $\frac{2n-1}{2^n n!}$. Už je to jasné?

6. Zase to rozložte na parciální zlomky.

7. Převeďte na společného jmenovatele a rozložte čitatel

$$n^3 + n^2 - n - 1 = (n^2 - 1)(n + 1) = (n + 1)^2(n - 1).$$

8. Rozložte zlomek $\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!} = \frac{1}{k!(k+2)} = \frac{k+2-1}{(k+2)!}$.

9. Převeďte na společného jmenovatele a čitatel rozložte na čtverec.

10. Převeďte do tvaru $\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$ a zkuste vhodně usměrnit.

11. Vezměte si velmi podobný a o trochu vetší výraz, který by se se zadaným výrazem mohl zkrátit, konkrétně $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{100}{101}$. Zkuste zkoumat jejich součin.

12. Rozložte čitatele a jmenovatele podle vzorců $a^3 - b^3$ a $a^3 + b^3$. Poté si uvědomte, že $n^2 + n + 1 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1$.

13. Buď si uvědomte, že už jsme to dokázali, nebo to rozložte, a zkuste něco „zapomenout“.

14. Rozložte na parciální zlomky.

15. Rozložte na parciální zlomky.

16. Odhadněte zvlášť shora a zvlášť zdola. Vhodně vytkněte 2^{2m} z $\binom{2m}{m}$ tak, aby vám zbyl výraz podobný výrazu z poslední úlohy.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je z velké části převzatý z přednášek Adély Kostelecké a Aničky Mlezivové, kterým bych tímto chtěl poděkovat.

[1] Anna Mlezivová: *Teleskopické součty a součiny*, Branná, 2019.
[2] Adéla Kostelecká: *Teleskopické součty a součiny*, Lipová-lázně, 2016.
[3] Jaroslav Švrček: *O teleskopických součtech a součinech*, *https://is.muni.cz/el/1431/jaro2010/MA572/um/didmat2.pdf.*
[4] Brilliant: *Telescoping Series – Sum*, *https://brilliant.org/wiki/telescoping-series/.*
[5] Martin Balko: *Přednáška z Kombinatoriky a grafů 1*, MFF UK, 2018/2019.

Čínská zbytková věta

Matěj Doležálek

Abstrakt. Ukážeme si, jak se koukat na úlohy modulo více různých čísel naráz, jak tyto pohledy skládat dohromady, a hlavně k čemu je to všechno dobré. Dokážeme Čínskou zbytkovou větu a procvičíme dva hlavní způsoby jejího použití: vyrábění čísel s hromadou dobrých vlastností v konstrukčních úlohách a lámání problému na více menších kousků v důkazových úlohách.

Definice. Celá čísla a, b nazveme nesoudělná, pokud mezi přirozenými čísly nemají jiného společného dělitele než 1.

Tvrzení. (Bézoutova identita) *Jsou-li a, b nesoudělná celá čísla, pak existují celá x, y splňující $ax + by = 1$.*

Důkaz. Rozšířený Eukleidův algoritmus.

Tvrzení. *Pokud $a \mid bc$ a zároveň jsou a, c nesoudělná, pak už i $a \mid b$.*

Tvrzení. *Nechť jsou a, b nesoudělná a platí $a \mid c$, $b \mid c$. Potom platí i $ab \mid c$.*

Definice. Říkáme, že a, b jsou *kongruentní modulo* m, pokud $m \mid a - b$. Tento vztah značíme $a \equiv b \pmod{m}$.

Jinak řečeno: a, b jsou kongruentní modulo m, pokud po dělení číslem m dávají stejný zbytek.

Cvičení. (speciální případ zbytkovky) Jsou-li $m_1, \ldots, m_k$ po dvou nesoudělná a platí $x \equiv a \pmod{m_i}$ pro $i = 1, \ldots, k$, pak už i $x \equiv a \pmod{M}$, kde $M = m_1 \cdots m_k$.

Věta. (Čínská zbytková) *Buďte dána po dvou nesoudělná přirozená $m_1, \ldots, m_k$ a libovolná celá čísla $a_1, \ldots, a_k$. Potom existuje celé číslo x splňující*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

a všechna taková x jsou si navzájem kongruentní modulo $M = m_1 \cdots m_k$.

Cvičení. Mějme celá čísla $b_1, \ldots, b_k$ splňující $b_i \equiv \left(\frac{M}{m_i}\right)^{-1} \pmod{m_i}$ pro každé i. Potom pro $c_i = \frac{M}{m_i} \cdot b_i$ platí $c_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ a $c_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ pro $j \neq i$. Následně lze v Čínské zbytkové větě spočíst x jako $x = a_1 c_1 + \cdots + a_k c_k$.

Příklad. Jan Žižka si chtěl po velké bitvě, do které vyslal 1200 bojovníků, rychle spočítat ztráty. Nechal si proto přeživší bojovníky nastoupit postupně po třech, pěti, sedmi a jedenácti. Nejprve mu zbyli dva bojovníci, poté dvakrát po třech bojovnících a nakonec jich zbylo deset. Kolik bojovníků tedy přežilo?

Použití Čínské zbytkové věty jde rozlišit na dva hlavní přístupy. V jednom si pro nějaká čísla poručíme vlastnosti, které jsou v úloze užitečné, a zbytkovka zařídí jejich existenci. V druhém si vezmeme k srdci to, že (s jistými omezeními) kongruence platí modulo M, právě když platí modulo jednotlivá m_i. Formálně sice v obou případech děláme totéž, ale jedná o dvě různé strategie, kterými lze úlohy řešit.

Čínská zbytková věta umožňuje celočíselné proměnné poručit libovolné množství modulárních podmínek, dokud jsou příslušná modula vzájemně nesoudělná. Tu a tam se hodí umět tímto způsobem vyčarovat nejen tak ledajaké číslo, ale dokonce prvočíslo. K tomu lze užít následující kanón – poznamenejme, že jeho důkaz daleko přesahuje možnosti běžných olympiádních nástrojů.

Věta. (Dirichletova) *Nechť jsou a, n nesoudělná přirozená čísla. Potom existuje nekonečně mnoho prvočísel p splňujících $p \equiv a \pmod{n}$.*

Obecněji se Čínská zbytková věta často používá kombinováním s nějakým dalším modulárně zabarveným tvrzením. Hodit se proto může třeba následující:

Věta. (malá Fermatova) *Mějme celé číslo a a prvočíslo $p \nmid a$. Potom $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Konstrukce šikovných čísel

Úloha 1. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tice po sobě jdoucích čísel, z nichž každé je dělitelné čtvercem nějakého přirozeného čísla většího než 1.

Úloha 2. Dokažte, že pro každé přirozené n existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž žádné není prvočíselná mocnina.

Úloha 3. Uvažujme v rovině mřížové body (a, b) s celočíselnými souřadnicemi. Bod (a, b) je *viditelný*, pokud jsou a, b nesoudělná celá čísla. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje čtverec $n \times n$ mřížových bodů, z nichž žádný není viditelný.

Úloha 4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k lze zvolit $2k$ navzájem různých přirozených čísel $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ takových, že zlomky

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_k}{b_k}$$

jsou všechny v základním tvaru a tvoří aritmetickou posloupnost.

Úloha 5. Jsou dána celá čísla a, b taková, že pro všechna přirozená n platí

$$b^n + n \mid a^n + n.$$

Dokažte, že $a = b$. (ISL 2005 N6)

Úloha 6. Rozhodněte, zda lze přirozená čísla seřadit do posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ (přičemž každé přirozené číslo se vyskytne právě jednou) tak, aby pro každé přirozené n platilo $n \mid a_1 + \cdots + a_n$.

Úloha 7. Najděte všechny trojice přirozených čísel (a, b, c) takové, že pro každé přirozené n, které nemá žádného prvočíselného dělitele menšího než 2014, platí

$$n + c \mid a^n + b^n + n.$$

(ELMO SL 2014)

Úloha 8. Budiž $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkce splňující pro každá $a, b \in \mathbb{N}$:

(i) $f(a)$, $f(b)$ jsou nesoudělná, právě když a, b jsou nesoudělná.
(ii) $a \leq f(a) \leq a + 2012$.

Dokažte, že když prvočíslo p dělí $f(n)$, pak už i $p \mid n$. (USA TSTST 2012)

Úloha 9. Tabulka 2018×2018 je vydlážděna dominy 2×1. Dokažte, že lze do políček vepsat přirozená čísla tak, že:

(i) Součet dvou čísel na každém dominu je vždy stejný.
(ii) Libovolná dvě čísla, jejichž políčka sousedí stranou, jsou nesoudělná, právě pokud leží na stejném dominu. (PraSe 37–4p–8)

Rozkládání a skládání modul

Úloha 10. Jsou dána dvě různá kladná prvočísla p, q. Dokažte, že $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

Úloha 11. Dokažte, že $4a^2 + 9b^2 \equiv 1 \pmod{n}$ má pro libovolné přirozené n řešení.

Úloha 12. Je dáno přirozené číslo n. Budiž A množina těch čísel $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$, která splňují $a^2 \equiv a \pmod{n}$. Dokažte, že počet prvků A je mocnina dvojky.

(PraSe 40–3s–1)

Úloha 13. Nechť $\varphi(n)$ značí počet čísel z množiny $\{1, \ldots, n\}$, která jsou nesoudělná s n. Vyjádřete $\varphi(n)$ pro n s prvočíselným rozkladem $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$.

Úloha 14. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tice po dvou nesoudělných čísel $k_1, \ldots, k_n > 1$ taková, že $k_1 \cdot k_2 \cdots k_n - 1$ je součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. (USAMO 2008)

Úloha 15. Rozhodněte, zda existuje přirozené n takové, že pro libovolné celé číslo x nemá $x^2 + x + n$ žádného prvočíselného dělitele menšího než 2021.

Úloha 16. Jsou dána přirozená čísla $a > b > c \geq 3$ splňující

$$a \mid bc + b + c, \qquad b \mid ca + c + a, \qquad c \mid ab + a + b.$$

Dokažte, že alespoň jedno z a, b, c je složené číslo.

Úloha 17. Jsou dána přirozená čísla $n, k \geq 2$ a k-tice po dvou různých čísel $a_1, \ldots, a_k$ z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ pro $i = 1, \ldots, k-1$. Dokažte, že $n \nmid a_k(a_1 - 1)$. (IMO 2009/1)

Úloha 18. Pro konečnou množinu X přirozených čísel nechť $S(X)$ značí součet jejích prvků a $P(X)$ jejich součin. Dále uvažujme dvě konečné množiny přirozených čísel A, B takové, že $|A| = |B|$, $P(A) = P(B)$, ale $S(A) \neq S(B)$. Pokud pro každé $n \in A \cup B$ a jeho prvočíselného dělitele p platí $p^{36} \mid n$, ale $p^{37} \nmid n$, dokažte, že $|S(A) - S(B)| > 10^6$. (NIMO 2013)

Návody

1. Předepiš každému číslu čtvercového dělitele.

2. Předepiš každému číslu dva prvočíselné dělitele.

3. Poruč si pro každý bod hledaného čtverce prvočíslo, kterým mají být souřadnice soudělné.

4. Vezmi zkrácenou posloupnost $\frac{x+1}{N}, \ldots, \frac{x+k}{N}$ pro vhodná x, N. Jednotlivá b_i odliš zkrácenými prvočísly, a_i pak už odlišíš snadno.

5. Vyrob pro $a - b$ hodně prvočíselných dělitelů. Modula p a $p - 1$ jsou nesoudělná!

6. Přidávej členy po dvou – jeden zvol libovolně a jeden urči.

7. S pomocí kanónu ukaž, že $a + b - c$ má hodně prvočíselných dělitelů. Navol si zbytky v různých modulech dle libosti nejprve pro p, potom pro n.

8. Zkus nejdřív zapomenout na n, p a pomocí zbytkovky zkonstruovat takové x, že $f(x) = x$. Potom do výrobního procesu přidej $x \equiv 0 \pmod{p}$, $x \equiv 1 \pmod{n}$.

9. Vyplňuj na jednotlivá domina dvojice čísel $S \pm x_i$ podle šachovnicového obarvení. Kdekoliv má dvojice čísel být soudělná, zvol si na to zvláštní prvočíslo.

10. Podívej se zvlášť mod p a mod q.

11. Vyřeš modulo prvočíselné mocniny. Mocniny 2 a 3 jsou trochu výjimečné, ostatní jsou snadné.

12. Nejprve vyřeš prvočíselné mocniny.

13. Nejprve vyřeš prvočíselné mocniny.

14. Jen se chce, aby $x^2 + x + 1$ umělo mít hodně prvočíselných dělitelů. Pouprav důkaz existence nekonečně mnoha prvočísel.

15. Polynom $x^2 + x$ neumí modulo p nabývat všech možných hodnot – podle toho navol n mod p pro $p < 2021$.

16. Slož do modula abc.

17. Z předpokladu sporu dokaž, že buďto $a_i \equiv 0 \pmod{p^r}$ pro všechna i, nebo $\equiv 1$ pro všechna i.

18. Součin prvočísel p, pro něž $p - 1 \mid 36$. Když se místo malého Fermata použije Euler, lze odhad vylepšit až na asi $6 \cdot 10^7$.

Literatura a zdroje

[1] Lucien Šíma: *Čínská zbytková věta*, Meziměstí, 2017.

[2] Evan Chen: *The Chinese Remainder Theorem*, *https://web.evanchen.cc/handouts/CRT/CRT.pdf*.

[3] Fíla Čermák, Matěj Doležálek: *Teorie nejen čísel*, seriál MKS, 3. díl, 40. ročník.

Funkcionální dělitelnosti

Matěj Doležálek

Abstrakt. V příspěvku si představíme hromadu funkcionálních dělitelností – úloh, kde podobně jako ve funkcionálních rovnicích hledáme jako řešení nějakou funkci, avšak využíváme k tomu poznatky z teorie čísel. Postupy řešení, které si ukážeme, tak budou obnášet hlavně vhodné úpravy dělence, vlastnosti prvočísel a chytrá dosazení k výrobě prvočíselných tvarů.

Čas od času potká člověk úlohu s funkcionální rovnicí – je dána rovnost, v níž nějak (často dost složitě) figuruje neznámá funkce a která má platit pro všechny volby proměnných. Jedná se tedy o jakousi soustavu nekonečně mnoha rovnic o nekonečně mnoha proměnných.

Funkcionální dělitelnosti jsou ještě o něco exotičtější. Jak by člověk z názvu čekal, jedná se o „soustavu nekonečně mnoha dělitelností s nekonečně mnoha proměnnými“. Dělitelnost je ale slabší vztah než rovnost, a tak metody, které se hodí k řešení funkcionálních dělitelností, vypadají dost jinak než metody řešení funkcionálních rovnic. Většina úloh nevyžaduje znalost žádných pokročilých tvrzení, ale u pár výjimek se může hodit malá Fermatova, Wilsonova či Dirichletova věta.

Úlohy v příspěvku jsou seřazeny do kapitolek podle metod řešení a uvnitř kapitolky zhruba podle obtížnosti. Některé úlohy však jdou vyřešit více způsoby, proto není třeba brát rozdělení úloh do kapitol zcela striktně.

Nerovnosti

Dělitelnost se za vhodných okolností dá zeslabit na nerovnost: pokud $A \mid B$ a navíc je B nenulové, pak už $|A| \le |B|$. Speciálně když je B kladné, tak už $B = |B| \ge |A| \ge A$.

Úloha 1. Najděte všechny *omezené* funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a - b \mid f(a) - f(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 2. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + b! \mid a + f(b)!$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a + f(b) \mid f(b + f(a)),$$
$$f(a) - 2017 \mid a - 2017.$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (IMOC 2017)

Úloha 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a)^b + f(b)^a \mid a^2 + a + 2f(ab)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a + f(b)) + a \mid 2f(a) + b$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Nekonečno dělitelů nuly

Když se povede zafixovat pravou stranu dělitelnosti a vyrábět pro ni nekonečně mnoho (různých) dělitelů na levé straně, pak je tato pravá strana rovná nule – jenom nula totiž má nekonečně mnoho dělitelů. Pokud je ve vyráběných dělitelích „volná“ jen nějaká hodnota f, musíme dát pozor na to, jak vypadá obor hodnot!

Úloha 6. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a + f(b) \mid f(a) + af(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (Balkan MO 2017)

Úloha 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a + f(b) \mid f(a)^2 + af(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 8. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(b) \mid a^3 + f(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 9. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$p \mid f(n) \cdot f(p-1)! + n^{f(p)}$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a prvočíslo p. (Mexican Quarantine MO)

Úloha 10. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) \mid f(b) + a - b$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Prvočísla

Další dobrou strategií může být dosazovat prvočísla. Pokud na pravé straně dělitelnosti získáme prvočíslo nebo alespoň nějaký dobrý součinový tvar s prvočíslem, dost to omezí možnosti levé strany. Jakmile známe hodnoty funkce na nějaké nekonečné množině argumentů, lze už často úlohu snadno dořešit pomocí nekonečně mnoha dělitelů nuly.

Úloha 11. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a^2 + f(b) \mid af(a) + b$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (ISL 2013 N1)

Úloha 12. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (APMO 2019)

Úloha 13. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(x)^2 + xy \mid x^2 + xf(y)$$

pro libovolná $x, y \in \mathbb{Z}$.

Úloha 14. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(b) \mid 2(a + b - 1)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (MEMO 2016)

Úloha 15. Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$ platí, že $\max\{f(a), b\}$ je násobek čísla $f(ab)$. Rozhodněte, zda musí existovat nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ takových, že $f(k) = 1$.

Úloha 16. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a! + f(b)! \mid f(a)! + f(b!)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (BMO SL 2018)

Úloha 17. Je dáno přirozené číslo C. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná přirozená a, b splňující $a + b > C$ platí

$$a + f(b) \mid a^2 + bf(a).$$

(ISL 2019 N4)

Úloha 18. Je dáno liché přirozené číslo n. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(x) - f(y) \mid x^n - y^n$$

pro libovolná $x, y \in \mathbb{Z}$. (ISL 2011 N3)

Úloha 19. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a)^2 + f(b) \mid \left(a^2 + b\right)^2$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (ISL 2004 N3)

Úloha 20. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(ab) \mid a + bf(a)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 21. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$ je číslo $f(a) + f(b) - ab$ nenulové a dělí $af(a) + bf(b)$. (ISL 2016 N6)

Indukce

S funkcionálními dělitelnostmi se často pohybujeme nad přirozenými (nebo aspoň nad celými) čísly. Může se tedy vyplatit postupovat indukcí: pokud máme tip na předpis pro f, můžeme jej dokazovat postupně. S indukcí může pomoci prostost funkce, kterou lze často získat skrze nekonečno dělitelů nuly.

Úloha 22. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jež pro $a, b \in \mathbb{N}$ splňují ekvivalenci

$$f(a) \mid f(b) - a \quad \iff \quad a \mid b.$$

(Japonsko 2021)

Úloha 23. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f(a!) = f(a)!$ a zároveň $a - b \mid f(a) - f(b)$ pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (USAMO 2012)

Úloha 24. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(b) \mid a^2 - b^2.$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (IMOC 2017)

Úloha 25. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které jsou na[1] a splňují, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$ a prvočíslo p platí $p \mid f(a + b)$, právě pokud $p \mid f(a) + f(b)$. (ISL 2007 N5)

[1] Tedy pro libovolné $y \in \mathbb{N}$ existuje $x \in \mathbb{N}$ tak, že $f(x) = y$.

Zmenšování podílu

Většina úloh v tomto příspěvku má jedno společné – dost často se stává, že když se dopídíme k funkci, která funkcionální dělitelnost řeší, zjistíme, že po jejím dosazení nastává v dělitelnosti dokonce rovnost. Jindy je alespoň vzniklý podíl nějaký „malý“. Úlohy, které zadávají takhle „těsnou“ dělitelnost, se řeší dobře, neb tehdy je slušná šance, že půjde něco odhadnout a úloha tím padne.

Potíže se objevují, když zadaná dělitelnost není „těsná“. Co s tím? Můžeme zkusit zmenšit podíl: jestliže $A_1 \mid B_1$ a zároveň $A_2 \mid B_2$, pak i

$$A_1A_2 \mid A_1B_2 - A_2B_1.$$

Intuici za takovýmto úkonem nastiňuje vztah

$$\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2} = \frac{B_2}{A_2} - \frac{B_1}{A_1}.$$

Když jsou navíc A_1, A_2 nesoudělná, pak je dokonce jisté, že přechodem ke „složené“ dělitelnosti nepřicházíme o žádnou informaci.

Úloha 26. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + b \mid a^2 - f(b^2)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 27. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a + f(b) \mid f(a) - b^4$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 28. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(b) + f(c) - ab - bc - ca \mid af(a) + bf(b) + cf(c) - 3abc$$

pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{N}$. (IMOC 2020)

Návody

1. Dosazuj čísla se vzdáleností větší než maximum f.

2. Jednou vezmi $a = 1$, podruhé $b = f(a)$.

3. Druhá dělitelnost dává pro velká x odhad. Použij ho v první dělitelnosti spolu se symetrií.

4. Využij symetrii a omez $f(a)$. Potom už by exponenciály v děliteli měly vypadat obzvlášť podezřele.

5. Kdyby někdy nastalo $f(n) < n$, vyrob z toho spor. Potom už bude vidět, že rozdíl $f(n) - n$ je omezený.

6. Při nekonečném oboru hodnot se na pravé straně zbav $f(b)$. Při konečném oboru hodnot naopak odstraň a.

7. Stejně jako předchozí úloha, jen je třeba korektně rozmyslet poslední část.

8. Případ konečného oboru hodnot pomůže vysporovat velká mocnina dvojky.

9. $f(1)$ je nesoudělné se vším. Obecněji nahlédni, že $f(n)$ má stejné prvočíselné dělitele jako n, a dělitelnost se podstatně zjednoduší.

10. Při nekonečném oboru hodnot je $f(n) - n$ konstanta. Při konečném oboru hodnot se dívej na množiny argumentů se stejnou funkční hodnotou a omez obor hodnot.

11. Dosaď $a = b = p$ a uvaž, zda $p \mid f(p)$. Dál pomůže horní odhad $f(n)$.

12. Dosaď $a = b = p$, zbav se na pravé straně f a poté rozeber možnosti.

13. Urči $f(p)$ pomocí odhadů absolutních hodnot. Pozor na znaménka!

14. Vyrob na pravé straně prvočíslo, jeden z případů jde po troše práce vysporovat.

15. Nejprve využij velká prvočísla, potom je zkus míchat dohromady a najít spor.

16. Wilsonova věta a $f(p-1)$.

17. Najdi si dost čísel b, pro než $f(b) = kb$. To jde více způsoby, buďto trochu chytrý Dirichletův princip na prvočíslech, anebo třeba overkill s Dirichletovou větou :-).

18. BÚNO $f(0) = 0$, potom Dirichletův princip s prvočísly.

19. Vol $b = p - a^2$. Může se vyplatit brát vyšší a vyšší p.

20. Získej $f(p-1)$, potom vystřel z kanónu.

21. Dosaď $a = b = p$, uprav pravou stranu a neboj se trochu rozebírat.

22. Prostota a indukce.

23. Rozeber pár možností a pak indukuj.

24. Neomezenost, prostost, indukce.

25. Rozmysli si, že f permutuje zbytky mod p. Potom indukuj.

26. Urozebírej $f(c)$ pro $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, zkombinuj dvě dělitelnosti a indukuj s prostotou.

27. Umlať $f(1)$ a $f(2)$, následně kombinováním jejich dosazení získej odhad $f(a)$ na obě strany. Stačí, aby to fungovalo jen pro nějakou nekonečnou podmnožinu $\mathbb{N}$.

28. Nejdřív umlať $f(1)$, $f(2)$ a $f(3)$, pak zkus dosazovat s $p+1$. Skoro každý krok obnáší dost ošklivého rozebírání.

Literatura a zdroje

[1] *A treatise on functional divisibility; the power of primes!*, *https://artofproblemsolving.com/community/c989506h1942036*.

[2] Martin „Vodka“ Vodička: *Funkcionálky nad prirodzenými číslami*, *i*KS 2017, Strmilov.

Přehýbání

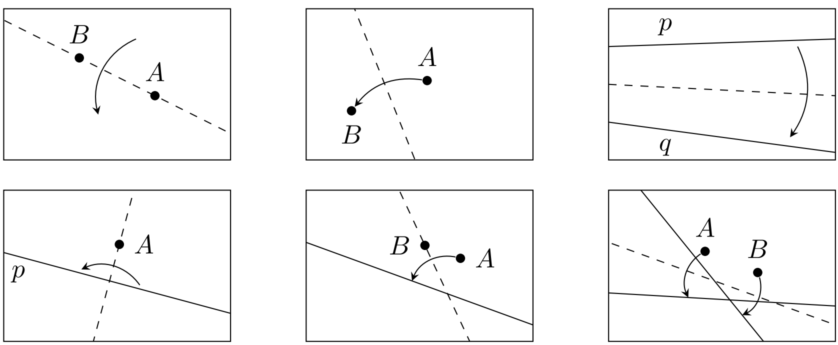
Verča Hladíková

Abstrakt. Přehýbání je netradiční problematika, v níž se snažíme sestrojit všechno možné jen pomocí ohýbání papíru (za znalosti několika axiomů).

V této přednášce máme za úkol sestrojit všechno možné jen pomocí ohýbání papíru, podobně jako při origami. Ovšem protože je přednáška matematická a ne umělecká, raději se dohodneme, jaké ohýbání bude dovolené. Určíme si šest axiomů přehýbací geometrie, tedy šest akcí, které můžeme provádět.

(A1) Máme-li dány na papíře body A a B, umíme udělat přehyb, který jimi prochází (papír přehneme v přímce procházející oběma body).
(A2) Máme-li dány body A a B, umíme udělat přehyb tak, aby ve výsledku bod A ležel na bodu B (body dáme prostě na sebe a přehneme, vytvoříme tak vlastně osu úsečky AB).
(A3) Máme-li dány dvě přímky p a q, umíme udělat přehyb takový, že p bude ležet na q.
(A4) Máme-li dán bod A a přímku p, umíme udělat přehyb kolmý na p procházející A.
(A5) Máme-li dány body A a B a přímku p, umíme udělat přehyb procházející B takový, že A bude ležet na p (to už vyžaduje jistou dávku šikovnosti, přesto to proveditelné je).
(A6) Máme-li dány body A, B a přímky p, q, umíme udělat přehyb takový, že A bude ležet na p a B na q.

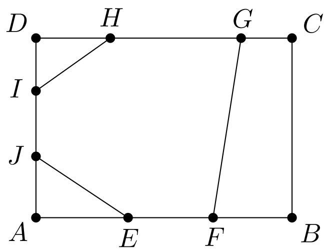
Pro názornost ještě axiomy v obrázcích:



Rozehřívací

Příklad 1. Sestrojte čtverec, máte-li dány dva jeho sousední vrcholy.

Příklad 2. Na stranách obdélníkového papíru $ABCD$ formátu A4 jsou nakreslené body E, F, G, H, I, J jako na obrázku. Poskládejte střed kružnice vepsané trojúhelníku určenému přímkami EJ, FG a HI.



Další příklady

Příklad 3. Obarvěme jednu stranu papíru bíle a druhou černě. Poskládání papíru nazveme *vyvážené*, pokud pro každý bod při pohledu shora vidíme (i skrz) stejně bílých i černých stran. Příklad: přehneme-li obdélník napůl, máme vyvážené poskládání, přehneme-li ho na třetiny, pak nikoliv.

Ukažte, že máme-li obdélník takový, že poměr délek jeho stran je racionální číslo, potom z tohoto obdélníku je možné poskládat čtverec tak, že toto poskládání bude vyvážené.

Příklad 4. Poskládejte rovnostranný trojúhelník, máte-li dány dva jeho vrcholy.

Příklad 5. Nechť $v_d > 2v_b$. Dokažte, že existuje nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že úhel u vrcholu B je větší než $180°$, výška trojúhelníku ABC z vrcholu B je rovna v_b, výška trojúhelníku ADC z vrcholu D je rovna v_d a ze čtyřúhelníku $ABCD$ lze poskládat čtyřstěn (pozor, ať neposkládáte „placku“).

Příklad 6. Je dán obdélníkový list papíru, obdélník tvořící papír označme R. Napřehýbejte **pouze pomocí axiomu (A2)** vrcholy obdélníku O takového, že O je podobný R a delší strana O má stejnou délku jako kratší strana R.

Příklad 7. Je dán čtvercový list papíru s vrcholy čtverce A, B, C, D (v tomto pořadí). Na straně AB je dán bod X_1. Napřehýbejte všechny body X_2 na straně BC takové, aby $X_1 = X_5$ při následujícím postupu skládání: Bod X_3 je bod na straně CD takový, že když přeložíme papír podél úseček X_1X_2 a X_2X_3, potom (přeložené) přímky BX_2 a CX_2 splývají; bod X_4 na straně DA a bod X_5 na AB získáme podobně.

Příklad 8. Máme dán papír ve tvaru čtverce. Zkonstruujte pravidelný osmiúhelník, jehož čtyři strany leží na stranách papíru.

Těžší příklady

Příklad 9. Mějme na papíře tři body, které tvoří trojúhelník. Poskládejte čtverec o stejném obsahu, jako má trojúhelník.

Příklad 10. Rozdělte zadaný úhel na třetiny.

Návody

1. Jak udělat kolmici a jak přenést délku strany?

2. Stačí (A3).

3. Pokud bychom přehýbali pouze rovnoběžně s jednou stranou, co musí platit, aby poskládání bylo vyvážené? Nezapomeň si rozmyslet, jak konstrukci provést pomocí axiomů.

4. Potřebuješ (A2) a (A5).

5. Najdi v čtyřstěnu trojúhelník, u kterého nemusí být splněna trojúhelníková nerovnost.

6. Potřebujete pouze 2krát použít (A2).

7. Pokud $X_1 = X_5$, rozmysli si, co za útvar musí tvořit $X_1X_2X_3X_4$.

8. Označme postupně vrcholy papíru A, B, C, D. Vrchol osmiúhelníku na AB blíže k B označme X, vrchol na AC blíže k C označme Y a konečně označme S průsečík AC s BD. Co platí o A, X, Y a S?

9. Použij Eukleidovu větu o výšce.

10. Potřebuješ (A6). Označme úhel $\sphericalangle ABC$, pak zkonstruuj tři shodné trojúhelníky, které mají společný vrchol B a mají u něho stejný úhel.

Literatura a zdroje

Přednáška je převzatá od *Monči Pospíšilové* z roku 2012, potažmo z 6. série 24. ročníku MKS: *http://mks.mff.cuni.cz/archive/24/6.pdf*.

Dirichletův princip

Václav Janáček

Abstrakt. V příspěvku je formulován Dirichletův princip a jeho možná zobecnění. Čtenář má možnost si jeho použití vyzkoušet na velkém množství příkladů i při důkazu dalších tvrzení.

Dirichletův princip (v angličtině *pigeonhole principle*, tedy „holubníkový princip“) je velmi jednoduché tvrzení, které lze využít v nejrůznějších oblastech matematiky. Použití tohoto nástroje někdy není zcela samozřejmé a může vést k zajímavým a překvapivým výsledkům.

Věta. (Dirichletův princip) *Pokud umístíme $n+1$ předmětů do n přihrádek, budou alespoň v jedné přihrádce alespoň dva předměty.*

Jak tuto větu využít? Předpokládáme-li, že žádný člověk nemá na hlavě více než milión vlasů, a vzpomeneme-li si na hodiny zeměpisu, zjistíme, že v Praze nutně musí žít dva lidé s přesně stejným počtem vlasů. Podařilo se nám tedy bez práce dokázat, že existuje dvojice lidí s určitou vlastností. Ovšem Dirichletův princip nám nijak neporadí, jak tyto dva lidi najít. Ale tak už to v matematice chodí.

Položme si nyní otázku, kolik lidí se stejným počtem vlasů bychom určitě našli v celé České republice. Odpověď nám dá (opět při dostatečných znalostech reálií) následující zobecnění:

Věta. (Dirichletův princip, obecněji) *Pokud umístíme $kn+1$ předmětů do n přihrádek, bude alespoň v jedné přihrádce alespoň $k+1$ předmětů.*

Uveďme si ještě další možné zesílení našeho výchozího tvrzení. V úlohách ovšem většinou vystačíme s některou z předchozích verzí.

Věta. (Dirichletův princip, ještě obecněji) *Mějme přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_t$, množinu X s alespoň $1+\sum_{i=1}^{t}(n_i-1)$ prvky a její rozklad na množiny $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Potom určitě existuje i takové, že X_i má alespoň n_i prvků.*

A ještě nekonečná verze:

Věta. (nekonečný Dirichletův princip) *Pokud umístíme nekonečně mnoho předmětů do konečně mnoha přihrádek, bude alespoň v jedné přihrádce nekonečně mnoho předmětů.*

Nyní už se vrhneme na úlohy, kde budeme toto tvrzení využívat. Vždy je klíčové rozmyslet si, co bude v úloze přestavovat „přihrádky“ a co rozmísťované předměty.

Příklad 1. V zásuvce je celkem 10 černých, 12 modrých a 8 šedých ponožek. Kolik jich musíme vytáhnout, abychom určitě měli alespoň jeden pár stejné barvy?

Příklad 2. Dokažte, že mezi 82 různými přirozenými čísly vždy najdu dvojici a, b tak, že $81 \mid (a - b)$.

Příklad 3. Ve čtverci 6 cm × 6 cm je náhodně rozmístěných 37 bodů. Dokažte, že vždy existuje čtverec 2 cm × 2 cm, ve kterém se nachází alespoň pět z nich.

(MKS, 14. ročník)

Příklad 4. Mějme skupinu n lidí, z nichž někteří se navzájem znají. Ukažte, že existují dva lidé, kteří znají přesně stejný počet lidí.

Příklad 5. Dokažte, že pro libovolná celá čísla a, b, c, d je výraz

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

dělitelný číslem 12.

Příklad 6. Na šachovnici 8×8 políček máme rozestavěných 33 věží. Najdeme mezi nimi pět takových, které se navzájem neohrožují? Dvě věže se navzájem ohrožují, pokud jsou ve stejném řádku nebo sloupci (i pokud je mezi nimi jiná věž).

(MKS 20–3–1)

Příklad 7. Dokažte, že když vybereme 53 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, bude mezi nimi vždy dvojice čísel s rozdílem přesně 12.

Příklad 8. Vybereme-li v rovnostranném trojúhelníku o straně a libovolně 10 bodů, pak vzdálenost některých dvou vybraných bodů je nejvýše $\frac{a}{3}$. Dokažte.

Příklad 9. Ukažte, že z libovolné posloupnosti n přirozených čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dokážeme vybrat (neprázdnou) skupinu za sebou jdoucích prvků tak, aby jejich součet byl násobkem n.

Příklad 10. Hrací plán hry „Člověče, nezlob se“ obsahuje 36 políček uspořádaných do kruhu. Kolik nejméně figurek musí být ve hře, abychom vždy mohli některou z nich vyřadit pomocí jiné nezávisle na jejich rozložení a výsledku hodu kostkou?

(MKS 20–3–2)

Příklad 11. Do políček tabulky 10×10 zapíšeme libovolná celá čísla tak, aby se žádná dvě čísla, která spolu sousedí ve stejném řádku nebo sloupci, nelišila o více než 5. Dokažte, že v tabulce se vždy najdou dvě stejná čísla.

Příklad 12. Dokažte, že z libovolné pětice vrcholů pravidelného devítiúhelníku umíme jeden odstranit tak, aby zbylé čtyři tvořily vrcholy lichoběžníku.

Příklad 13. Dokažte, že pro všechna nesoudělná čísla a a b je desetinný rozvoj $\frac{a}{b}$ konečný nebo má periodu maximálně $b - 1$.

Příklad 14. V rovině je rozmístěno $2n + 1$ bodů tak, že žádné z nich netvoří trojúhelník se všemi stranami delšími než 1. Dokažte, že nalezneme $n + 1$ bodů, které je možno uzavřít do kružnice s poloměrem 1.

Příklad 15. Po čtvercovém stole 1 m × 1 m leze 51 much. Ukažte, že s pomocí kruhového hrnce s poloměrem $\frac{1}{7}$ m můžeme chytit alespoň 3 mouchy jednou ranou.

Příklad 16. New York je kromě jiného známý i pravidelností svých ulic – má 151 severojižních a 151 východozápadních ulic, které se vždy po 100 metrech kříží. Ve městě je rozmístěno celkem 11401 telefonních automatů (ne nutně na křižovatkách). Dokážeme tam najít dva automaty, které jsou od sebe vzdálené maximálně 200 metrů chůze po chodníku? (MKS 20–3–3)

Příklad 17. Dokažte, že mezi libovolnými osmi složenými přirozenými čísly menšími než 360 existují vždy dvě čísla, která mají společného dělitele. (MKS, 14. ročník)

Příklad 18. Dokažte, že z každé $(n+1)$-prvkové podmnožiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ lze vybrat dvě různá čísla tak, že jedno dělí druhé. (MKS 20–3–7)

Příklad 19. Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost s diferencí 60, jejíž všechny prvky jsou prvočísla. (MKS 18–1–1)

Příklad 20. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n existuje jeho přirozený násobek složený jen z cifer 0 a 1. Dokážete toto tvrzení nějak zesílit?

A dvě tvrzení, vyplývající z naší oblíbené věty:

Věta. (Dirichletova o aproximaci) *Pro každé reálné číslo a a kladné číslo n existují celá čísla p, q tak, že $1 \leq q \leq n$ a $|aq - p| \leq \frac{1}{1+n}$.*

Příklad 21. (Erdős–Szekeres) Z každé posloupnosti $n^2 + 1$ různých čísel dokážeme vybrat rostoucí nebo klesající podposloupnost délky alespoň $n + 1$.

Příklad 22. Dokažte, že z libovolného šestnácticiferného čísla umíme vybrat neprázdnou skupinu za sebou jdoucích cifer, jejíž ciferný součin je druhou mocninou celého čísla. (MKS 28–5–7)

Příklad 23. Na přímce p leží postupně 6 úseků $u_1, u_2, \dots, u_6$ s délkami po řadě $d_1, d_2, \dots, d_6$, které jsou po dvou disjunktní. V jedné polorovině určené přímkou p sestrojíme body $S_1, S_2, \dots, S_6$ tak, že vrchol S_i tvoří spolu s úsečkou u_i rovnostranný trojúhelník $(i = 1, 2, \dots, 6)$. Nakonec vytvoříme kruhy se středy v bodech $S_1, S_2, \dots, S_6$ a poloměry $d_1, d_2, \dots, d_6$. Dokažte, že neexistuje bod, který by ležel ve všech šesti kruzích. (MKS 28–5–6)

Příklad 24. Mějme v rovině n bodů $x_1, \dots, x_n$ v obecné poloze[1], přičemž některé z těchto bodů jsou spojené úsečkami. *Stupněm* bodu x_k budeme nazývat počet spojnic, které z něho vedou. Dokažte, že pokud žádné dva body stejného stupně nemají společného „souseda“ a navíc je alespoň jedna dvojice bodů spojená úsečkou, pak nutně existuje bod, jehož stupeň je 1. (MKS, 14. ročník)

Příklad 25. Ukažte, že existuje přirozené číslo N tak, že každé přirozené číslo $a > N$ dokážeme „osekat“ z krajů na přirozený násobek čísla 2011. (Kanadská MO 2011)

[1]Množina bodů je v *obecné poloze*, pokud žádné tři z nich neleží na přímce.

Příklad 26. Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupince alespoň jednoho kamaráda.

(Celostátní kolo MO 2011/2012)

Příklad 27. Ukažte, že je možné obarvit prvky množiny $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ čtyřmi barvami tak, aby nešlo najít jednobarevnou desetiprvkovou aritmetickou posloupnost.

(IMO Shortlist 1987)

Příklad 28. Pravidelnému 432-úhelníku bylo 108 vrcholů obarveno červeně, 108 zeleně, 108 modře a zbylých 108 žlutě. Dokažte, že je možné najít 4 shodné trojúhelníky takové, že vrcholy jednoho jsou všechny červené, druhého žluté, třetího modré a čtvrtého zelené.

(USAMO 2012)

Příklad 29. Mějme v prostoru n bodů ($n \geq 3$), přičemž jejich spojnice jsou různě dlouhé a r z těchto úseček je obarvených. Dokažte, že potom z těchto obarvených spojnic umíme vytvořit tah[2] z alespoň $\left\lceil \frac{2r}{n} \right\rceil$ úseček, ve kterém délka úseček narůstá.[3]

(MKS 17–2–5)

[2] *Tah* je posloupnost na sebe navazujících hran, které se neopakují. Mohou se křížit.

[3] Symbol $\lceil x \rceil$ označuje *horní celou část* čísla x, tedy nejbližší celé číslo y, takové že $x \leq y$.

Návody

1. Na počtu ponožek od jednotlivých barev nezáleží.
2. Podívej se na zbytky po dělení 82.
3. Rozděl čtverec na 9 menších.
4. Může někdo znát 0 a někdo jiný $n-1$ lidí?
5. Vyřeš zvlášť dělitelnost 3 a 4.
6. Rozděl šachovnici na 8 částí.
7. Kolik nejvýše čísel může dávat jaký zbytek?
8. Vhodně rozděl trojúhelník.
9. Podívej se na skupiny začínající prvním prvkem posloupnosti.
10. Kolik nejvýše figurek může ohrožovat jedno políčko?
11. O kolik se mohou nejvýše čísla lišit?
12. Tři dvojice vybraných vrcholů mají stejnou vzdálenost.
13. Kolik je možných zbytků po dělení b?
14. Najdi nejvzdálenější body. Ostatní rozděl do dvou skupin.
15. Chceme 25 přihrádek.
16. Ve městě je 22 801 křižovatek.
17. Každé z čísel má v rozkladu prvočíslo menší než 19.
18. Jedno z čísel je dokonce 2^k-násobek jiného.
19. Zkoumej modulo 7.
20. Stačí dokonce dvě cifry 1. Tedy, skoro vždy.
21. Jak dlouhá je nejdelší rostoucí posloupnost končící daným číslem? A klesající?
22. Nula tam není. Máš 4 prvočísla, $2^4 = 16$.
23. Pokud rozděluješ málo věcí, na jedné hromádce jich bude hodně málo.
24. Podívej se na bod s největším stupněm.
25. Bude hóóódně velké.
26. V kolika z možných rozdělení nemáš ve skupině žádného kamaráda?
27. Kolik je možných aritmetických posloupností?
28. Přihrádky jsou rotace.
29. Najdi $2r$ věcí a n přihrádek.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je téměř identický s příspěvkem *Kuby Krásenského* z roku 2013, kterému tímto děkuji.

[1] Kuba Krásenský: *Dirichletův princip*, Mentaurov, 2013.

Turnaje a další grafíky

Lenka Kopfová

Abstrakt. Kdo by neměl rád puntíky a čárečky?[4] A právě jimi se v příspěvku budeme zabývat. Speciálně se zaměříme na puntíky takové, že mezi každými dvěma vede čárečka se šipkou.

Abychom si rozuměli

Definice. Konečný *orientovaný graf* G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je libovolná neprázdná konečná množina a E libovolná množina (uspořádaných) dvouprvkových podmnožin množiny V. Prvkům množiny V říkáme *vrcholy* (puntíky) a prvkům množiny E zase *(orientované) hrany* (čárečky (se šipkou)).

Graf G si můžeme představovat jako množinu puntíků a množinu šipek mezi nimi, přičemž šipku z vrcholu u do v kreslíme právě tehdy, když $(u, v) \in E$.

Poznámka. Definice orientovaného grafu nezakazuje, aby pro nějaká $u, v \in V$ vedla šipka oběma směry. Dokonce může šipka spojovat jeden vrchol se sebou samým (potom jí říkáme *smyčka*). My ale budeme předpokládat, že tyto situace nenastanou.

Představme si, že si v grafu G vybereme vrchol v. Pak mezi zbylými vrcholy existují dvě skupiny, které jsou vzhledem k v „zajímavé“. Zaprvé je to množina vrcholů, do kterých z v vedou hrany. Těmto vrcholům budeme říkat *potomci vrcholu* v a jejich množinu budeme značit $A(v)$. Analogicky budeme množinu všech vrcholů, ze kterých jdou hrany do v, značit symbolem $B(v)$ a budeme těmto vrcholům říkat *rodiče vrcholu* v.

Dále můžeme definovat vstupní stupeň $\mathrm{in}(v)$ vrcholu v jako počet rodičů vrcholu v, tedy $\mathrm{in}(v) = |B(v)|$. Obdobně definujeme výstupní stupeň $\mathrm{out}(v)$ vrcholu v jako počet jeho potomků. Tedy $\mathrm{out}(v) = |A(v)|$.

Definice. *Cesta délky* n v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost n po dvou různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a hran (v_i, v_{i+1}), $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Definice. *Cyklus délky* n, nebo také n-cyklus v grafu $G = (V, E)$, je cesta délky n v grafu G sjednocená s hranou (v_n, v_1).

Definice. Řekneme, že graf G je *turnaj*, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vede šipka. Formálněji řečeno, graf G je turnaj, pokud pro všechny $u, v \in V, u \neq v$, platí buď $(u, v) \in E$, nebo $(v, u) \in E$.

Definice. O vrcholu v v turnaji V řekneme, že je *týpek*, pokud $\mathrm{in}(v) = 0$. Dále o vrcholu $v \in V$ řekneme, že je *lama*, pokud $\mathrm{out}(v) = 0$. Týpek je tedy vrchol,

[4] $* - - - | * * - | - * - * | * * * * | * * -$, $- - | - - - | * - * | * * * | * | - - - | * * * - | - * - | * -$! :-)

ze kterého vedou hrany do všech ostatních vrcholů, a tak se z něj dá dostat do všech vrcholů grafu po nejvýše jedné hraně. Do lamy naopak vedou hrany ze všech ostatních vrcholů. Dále definujme ještě *polotýpka* jako vrchol, z nějž se dá dostat do všech vrcholů po nejvýše dvou hranách. Formálně zapsáno: v je polotýpek, pokud

$$v \cup A(v) \cup \left(\bigcup_{u \in A(v)} A(u) \right) = V.$$

Na zahřátí

Příklad 1. Ukaž, že v turnajích (a orientovaných grafech obecně) platí

$$\sum_{v \in V} \mathrm{in}(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{out}(v).$$

Příklad 2. Ukaž, že pokud v turnaji není týpek, pak v něm existuje trojcyklus.

Příklad 3. V mezigalaktické lize v páce soutěžilo šestnáct siláků. Každý soutěžil s každým právě jednou a žádný zápas neskončil remízou. Dokaž, že umíš vybrat 5 siláků a seřadit je do řady tak, že každý z nich porazil všechny siláky stojící za ním. (AoPS)

Příklad 4. Ukaž, že v každém turnaji existuje cesta přes všechny vrcholy.

Příklad 5. Ukaž, že pokud v turnaji není týpek, pak jsou v něm alespoň dva polotýpci. Musí nutně existovat tři?

Pro chytré hlavičky

Příklad 6. Hvězdná říše se sestává z 1001 planet. Každé dvě planety jsou spojeny jednosměrnými červími děrami a navíc platí, že z každé planety vychází 500 červích děr a 500 jich v ní končí. 668 planet přitom tvoří autonomní republiku. Ukaž, že se z každé planety republiky dá dostat na každou jinou, aniž by bylo nutné republiku opustit. (ARO 2004 10.6)

Příklad 7. Ukaž, že v turnajích platí

$$\sum_{v \in V} (\mathrm{in}(v))^2 = \sum_{v \in V} (\mathrm{out}(v))^2 .$$

Pozor, v orientovaných grafech toto tvrzení obecně neplatí. (Putnam 1965)

Příklad 8. Turnaj nazveme *tranzitivní*, pokud pro všechna $u, v, w \in V$ taková, že $(u, v) \in E$ a $(v, w) \in E$, platí též $(u, w) \in E$. Dokaž, že turnaj je tranzitivní právě tehdy, když neobsahuje žádný cyklus.

(A Beginner's Guide to Graph Theory 10.2.4)

Příklad 9. Dokaž, že v turnaji existuje cyklus přes všechny vrcholy právě tehdy, když existuje cesta mezi každou dvojicí vrcholů.

Příklad 10. Existují dva neizomorfní[1] turnaje se stejnými stupni všech vrcholů?

Příklad 11. Ukaž, že v turnaji n hráčů nastane právě jeden z následujících dvou případů: buď existuje n-cyklus, nebo můžeme hráče rozdělit do dvou neprázdných skupin tak, že každý hráč z první skupiny porazil každého hráče z druhé skupiny.

(KMS 11 2008)

Příklad 12. Řekneme, že orientovaný graf je *rozložitelný*, pokud lze jeho vrcholy rozdělit do dvou neprázdných podmnožin A a B takových, že pro všechna $u \in A$ a pro všechna $v \in B$ platí, že $(u, v) \in E$. Dokaž, že každý rozložitelný turnaj se dá změnou orientace jedné hrany změnit na graf, který není rozložitelný.

(variace na A Beginner's Guide to Graph Theory 10.2.3)

Příklad 13. Mějme turnaj G, který obsahuje k-cyklus. Dokaž, že v G existuje $(k-1)$-cyklus. Dále dokaž, že pokud dráček Šmáček zvolí jeden vrchol daného k-cyklu, pak zde existuje $(k-1)$-cyklus, který daný vrchol obsahuje.

Příklad 14. Mějme $n \geq m \geq 3$ a turnaj na n vrcholech, ve kterém se nevyskytuje m-cyklus. Dokaž, že lze jeho vrcholy ohodnotit čísly $1, 2, \ldots, n$ tak, že kdykoliv $a \geq b + m - 2$, pak vede hrana z vrcholu ohodnoceného číslem a do vrcholu ohodnoceného číslem b. (USA TST 2009)

Příklad 15. Mějme turnaj G. Jako jeho *barevnost* označme takové k, že lze obarvit jeho hrany k barvičkami tak, že zde neexistuje vrchol, který má vcházející a vycházející hranu stejné barvy. Urči minimum barevností všech turnajů na n vrcholech. (USA TST 2015)

Příklad 16. PraSátko dostalo jako dárek $n \geq 3$ očíslovaných bodů $1, 2, \ldots, n$ a samým nadšením se jalo mezi body kreslit modré a červené šipky. Přitom výsledek jeho snahy splňoval tato pravidla:

(i) Z každého bodu vedla šipka do každého bodu s větším číslem.
(ii) Pokud z bodu A vedla cesta do B po šipkách jedné barvy, pak mezi stejnými vrcholy nevedla cesta druhé barvy.

Kolika způsoby mohlo PraSátko přikreslit všechny šipky? (ARO 2005 11.3)

[1] Grafy A, B jsou izomorfní, pokud umíme přečíslovat vrcholy grafu A tak, aby v obou grafech vedly hrany přesně mezi stejně očíslovanými dvojicemi vrcholů.

Příklad 17. Turnaje se účastní 10 rytířů. Víme, že kdykoliv rytíř A porazil rytíře B, pak počet rytířů, kteří porazili A, sečtený s počtem rytířů, které porazil B, dá alespoň 8 (čili $\text{in}(A) + \text{out}(B) \geq 8$, kdykoliv $A > B$). Ukaž, že v celém turnaji existuje právě 40 trojcyklů.

Příklad 18. Tenisového turnaje se účastnilo $n \geq 4$ hráčů. Každí dva hráči se utkali právě jednou a nenastala žádná remíza. Čtveřici hráčů nazveme *schrecklich*, pokud jeden hráč byl poražen zbylými třemi a každý z těchto tří hráčů s posledními dvěma jednu hru vyhrál a jednu prohrál. Předpokládejme, že neexistuje schrecklich čtveřice. Dokaž, že potom

$$\sum_{i=1}^{n} (\text{out}(i) - \text{in}(i))^3 \geq 0.$$

(IMO Shortlist 2010)

Orientované grafy

Turnaj je jen speciální případ orientovaného grafu. Mohli bychom tedy očekávat, že tvrzení, která jsme dokázali pro turnaje, budou (případně v nějaké lehce pozměněné podobě) platit i pro všechny orientované grafy. Tak je tomu bohužel jen velmi zřídka. Uvědomme si totiž, že orientovaných grafů je ve srovnání s turnaji „fakt hodně“. Speciálně mohou být takové grafy nepříjemně „řídké“ (například na každou permutaci se můžeme dívat jako na orientovaný graf). Spíš než přejímání tvrzení proto bude fungovat přejímání metod. Pomocí fint, které jsme si osvojili na úlohách s turnaji, teď budeme zkoušet řešit úlohy na orientované grafy.

Příklad 19. Hrany konvexního mnohostěnu jsou orientované jednosměrnými šipkami tak, že z každého vrcholu vychází a do každého vrcholu vstupuje alespoň jedna šipka. Dokaž, že existuje stěna, na které tvoří šipky cyklus.

(KMS gama, Romania TST)

Příklad 20. Devět měst je nějak pospojováno jednosměrnými cestami, přičemž z každého města vedou právě tři cesty. Také víme, že pokud vede přímá cesta z A do B, pak určitě nevede přímá cesta z B do A. Ukaž, že existuje trojice měst, mezi kterými může Artuš jezdit neustále dokola. (Ukrajina)

Příklad 21. Je dán orientovaný bipartitní graf s partitami X, Y. V jednom kroku vybere Amir vrchol a obrátí orientaci všech hran, které vedou z, resp. do tohoto vrcholu. Ukaž, že lze po konečném počtu kroků dosáhnout stavu, kdy pro všechny vrcholy $u \in X$ platí $\text{in}(u) \geq \text{out}(u)$ a pro všechny vrcholy $v \in Y$ platí $\text{in}(v) \leq \text{out}(v)$.

(Írán 2002)

Příklad 22. Kolem kulatého stolu sedí N rytířů. Na povel každý z nich na někoho ukáže (nikdo neukazuje na sebe). Dokaž, že umíme rytířům nasadit na hlavy přilbice tří barev tak, že nikdo neukazuje na kolegu se stejně barevnou přilbicí.

Příklad 23. Z každého náměstí ve městě M vedou přesně dvě jednosměrné uličky. Dokaž, že náměstí můžou být rozdělena do 1014 čtvrtí (čtvrti můžou být i prázdné) tak, že uličky vedou vždy jen ze čtvrti do jiné čtvrti a zároveň pokud vede nějaká ulička ze čtvrti c_1 do čtvrti c_2, pak žádná ulička nevede opačně. (ARO 2002)

Příklad 24. Francouzská výzvědná služba vyslala na Kamelot 16 špehů. Každý z nich sleduje některé své kumpány (pokud špeh A sleduje B, pak B nesleduje špeha A). Kterýchkoliv 10 špehů lze očíslovat tak, že první špehuje druhého, druhý třetího atd. až desátý prvního. Dokaž, že lze podobně očíslovat i každých 11 špehů.
(Baltic Way 1994, 19/20)

Návody

1. Spočítej počet čárek s šipkou. Dvakrát.

2. Jdi po šipkách a zkracuj.

3. A je z toho úplný holubník!

4. Podívej se na nejdelší cestu.

5. Vezmi hráče s nejvíce vítězstvími. Další polotýpky hledej ve vhodném podturnaji.

6. Rozděl republiku na dosažitelnou a nedosažitelnou část. Počítej dvakrát.

7. Použij sílu a příklad 1. Nebo počítej dvakrát netrojcykly.

8. To zvládneš.

9. Podívej se na nejdelší kružnici.

10. Ano.

11. Podívej se na nejdelší kružnici.

12. Vytvoř kružnici.

13. Postupuj pozpátku. Vezmi ℓ-cyklus a sestroj z něj $(\ell+1)$-cyklus.

14. Použij sílu a příklad 8.

15. Vyjde $\lceil \log_2 n \rceil$. Najdi konstrukci a dokaž, že méně nejde.

16. Otoč červené šipky a poté seřaď všechny vrcholy tak, aby šipky vedly jen zleva doprava.

17. Ekvivalentně dokazuj, že každý rytíř vyhrál 4 nebo 5 utkání. Dál sporem.

18. Jak vypadají neschrecklich čtveřice? Počítej dvakrát. Použij sílu a příklady 1 a 7.

19. Uvaž kružnici, „uvnitř které“ už žádná není, a ukaž, že to musí být stěna.

20. Dokaž nejdřív existenci města A takového, že $\mathrm{in}(A) \geq 3$.

21. Navrhni algoritmus, který zvětšuje počet „správně směřujících“ hran.

22. Ukaž existenci rytíře R splňujícího $\mathrm{in}(R) \leq 1$, poté použij sílu a indukci.

23. V prvním kroku obarvi náměstí 13 barvami tak, aby mezi dvěma náměstími stejné barvy neexistovala cesta délky menší než 4.

24. Nejdřív odvoď, že pro každého špeha A platí $7 \leq \mathrm{in}(A) \leq 8$ a $7 \leq \mathrm{out}(A) \leq 8$.

Zdroje

Ze zdrojů, které nejsou uvedeny výše u konkrétních úloh, bych ráda zmínila příspěvek Pepy Tkadlece s názvem *Turnaje a orientované grafy.* Z něho jsem výrazně čerpala a jeho autorovi bych tímto ráda poděkovala. Také jsem čerpala z přednášky Martina Sýkory, který také čerpal z předchozího příspěvku (snad z toho nebyl vyčerpán).

Míra

Terka Kučerová

Abstrakt. V přednášce se budeme zabývat úvodem do teorie míry. Řekneme si, co je to σ-algebra, míra i měřitelné funkce. V závěru přednášky si zadefinujeme Lebesgueův integrál.

Definice. Nechť X je neprázdná množina, potom její *potenční množinou* rozumíme množinu všech jejích podmnožin. Tuto množinu značíme

$$\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Definice. Řekneme, že množina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *σ-algebra na X*, jestliže

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
(2) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$ (uzavřenost na doplňky),
(3) $\forall j \in \mathbb{N},\ A_j \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ (uzavřenost na spočetná sjednocení).

Poznámka. Dále je zajímavé, že σ-algebry jsou rovněž uzavřené na spočetné průniky. Tedy $\forall j \in \mathbb{N},\ A_j \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Úloha 1. Nechť X je neprázdná množina. Určete, které z následujících množin jsou σ-algebry na X:

(1) $\{\emptyset, X\}$,
(2) $\mathcal{P}(X)$,
(3) $\big\{\{1,2,3\},\{1\},\{2,3\},\{4\},\emptyset,\{1,2,3,4\}\big\}$ pro $X = \{1,2,3,4\}$,
(4) $\big\{\{1,2,3\},\{1\},\{2,3\},\emptyset\big\}$ pro $X = \{1,2,3\}$.

Důsledek. (průnik σ-algeber) *Nechť X je neprázdná množina. Nechť I je libovolná indexová množina. Pro $\alpha \in I$ buďte $\mathcal{A}_\alpha$ σ-algebry na X. Potom $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra.*

Důsledek. (nejmenší σ-algebra) *Nechť X je neprázdná množina a $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Potom existuje nejmenší σ-algebra, která obsahuje S. Označíme ji σS.*

Definice. Je-li X neprázdná množina, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{A} = \sigma S$, pak říkáme, že S *generuje* σ-algebru $\mathcal{A}$.

Poznámka. Na generování se dá dívat tak, že k podmnožině S postupně přidáváme prvky, ke kterým nás nutí definice σ-algebry.

Úloha 2. Najděte množinu, která generuje σ-algebru

$$\mathcal{A} = \big\{\{1,2\},\{3,4\},\emptyset,\{1,2,3,4\}\big\},$$

pokud $\mathcal{A}$ je σ-algebra na $X = \{1,2,3,4\}$.

Úloha 3. Jakou σ-algebru generuje množina $\{\{1\},\{5,6\}\}$ na $X=\{1,2,3,4,5,6\}$?

Definice. Pokud X je neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X, pak dvojici $(X,\mathcal{A})$ nazýváme *měřitelným prostorem.*

Definice. Funkce μ se nazývá *míra* na $(X,\mathcal{A})$, pokud:

(1) $\mu\colon \mathcal{A}\to\langle 0,\infty)$,
(2) $\mu(\emptyset)=0$,
(3) $\forall i\in\mathbb{N},\ A_i\subset\mathcal{A}$, kde A_i jsou po dvou disjunktní, platí

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

Úloha 4. Zjistěte, zda jsou na měřitelném prostoru $(X=\{1,2,3\},\mathcal{A}=\mathcal{P}(X))$ následující funkce míry:

(1) funkce μ_1 taková, že $\mu_1(A)=0,\ \forall A\subset X$,
(2) funkce μ_2 splňující

$$\begin{aligned} \mu_2(\emptyset)&=0,\\ \forall A\subset X,\ |A|=2:\quad \mu_2(A)&=1,\\ \forall A\subset X,\ |A|=1:\quad \mu_2(A)&=0,\\ \mu_2(X)&=2, \end{aligned}$$

(3) funkce μ_3, pro kterou platí

$$\begin{aligned} \mu_3(\{1\})=\mu_3(\{2\})=\mu_3(\{3\})&=\frac{1}{3},\\ \mu_3(\{1,2\})=\mu_3(\{1,3\})=\mu_3(\{2,3\})&=\frac{2}{3},\\ \mu_3(\{1,2,3\})&=1,\\ \mu_3(\emptyset)&=0, \end{aligned}$$

(4) funkce μ_4 splňující $\mu_4(\emptyset)=0$ a $\forall A\subseteq X,\ A\neq\emptyset\colon\ \mu_4(A)=-1$.

Definice. Trojici $(X,\mathcal{A},\mu)$, kde $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor a μ je míra na $(X,\mathcal{A})$, nazýváme *prostor s mírou.*

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A})$ a $(Y,\mathcal{B})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f\colon X\to Y$ je *měřitelné*, pokud vzor každé množiny v $\mathcal{B}$ je množina v $\mathcal{A}$.

Úloha 5. Nechť $(X,\mathcal{A})$ a $(Y,\mathcal{B})$ jsou měřitelné prostory, kde

$$\begin{aligned} X&=\{1,2,3,4\}, &\quad \mathcal{A}&=\{\{1\},\{2,3,4\},\emptyset,X\},\\ Y&=\{a,b,c,d\}, &\quad \mathcal{B}&=\{Y,\emptyset,\{a,b\},\{c,d\}\}. \end{aligned}$$

Je zobrazení $f\colon X \to Y$ dané předpisem

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c, \quad f(4) = d$$

měřitelné?

Úloha 6. Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ jsou měřitelné prostory, kde

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4\}, & \mathcal{A} &= \big\{\{2, 3\}, \{1, 4\}, \emptyset, X\big\}, \\ Y &= \{a, b, c, d\}, & \mathcal{B} &= \big\{Y, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\big\}. \end{aligned}$$

Jsou potom zobrazení $f, g\colon X \to Y$ měřitelná, pokud jsou dána předpisy

$$\begin{aligned} &f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c, \quad f(4) = d, \\ &g(1) = a, \quad g(2) = c, \quad g(3) = d, \quad g(4) = b? \end{aligned}$$

Úloha 7. Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ jsou měřitelné prostory, kde

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4\}, & \mathcal{A} &= \big\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \emptyset, X\big\}, \\ Y &= \{a, b, c\}, & \mathcal{B} &= \big\{Y, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\big\}. \end{aligned}$$

Je zobrazení $f\colon X \to Y$ dané předpisem

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c, \quad f(4) = c$$

měřitelné?

Definice. Nechť X je neprázdná množina a $A \subseteq X$. Potom definujeme *charakteristickou funkci* množiny A v množině X předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in A, \\ 0, & \text{pokud } x \notin A. \end{cases}$$

Definice. Funkce $s\colon X \to \langle 0, \infty)$ je *jednoduchá*, pokud její obor hodnot je konečná množina. Funkci s potom můžeme napsat v následujícím, tzv. *kanonickém*, tvaru:

$$s(x) = \sum_{\alpha \in s(X)} \alpha \cdot \chi_{\{x \in X \mid s(x) = \alpha\}}(x).$$

Úloha 8. Jsou následující funkce jednoduché? Pokud ano, zapište je v kanonickém tvaru.

(1) $|\sin(x)|$, pro $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$,
(2) $f(x) = 2$, pro $x \in X$,
(3) $\chi_{(-5,5)}(x) + \operatorname{sgn}(3 - x) + 6$, pro $x \in (-\infty, \infty)$,
(4) x, pro $x \in (0, 1)$.

Definice. *Rozšířenou reálnou osou* rozumíme množinu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Značíme ji $\mathbb{R}^*$.

Definice. Pro $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ definujeme *kladnou část* funkce f jako $f^+ := \max(f, 0)$ a *zápornou část* funkce f jako $f^- := \max(-f, 0)$.

Úloha 9. Určete, jaké jsou kladné a záporné části následujících funkcí:

(1) $\sin(x)$, pro $x \in \mathbb{R}$,
(2) $\operatorname{sgn}(x)$, pro $x \in \mathbb{R}$,
(3) $5 - 2x$, pro $x \in \mathbb{R}$,
(4) e^x, pro $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Je-li $A \subset \mathbb{R}$ a G je nejmenší reálné číslo splňující, že pro každé $a \in A$ platí $a \leq G$, pak se G nazývá *supremum* množiny A.

Úloha 10. Najděte suprema následujících množin:

(1) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$,
(2) $(-\infty, 5)$,
(3) $\langle -5, -1 \rangle$,
(4) $\left\{2 + \frac{1}{2+n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Poznámka. Na reálných číslech máme σ-algebru generovanou otevřenými intervaly.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom definujeme *Lebesgueův integrál* funkce f následovně:

(1) Je-li $f\colon X \to \mathbb{R}$ jednoduchá, nezáporná, měřitelná s kanonickým tvarem

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad \text{kde } E_j = \{x \in X \mid f(x) = \alpha_j\},$$

pak definujeme $I(f) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j)$.

(2) Je-li $f\colon X \to \langle 0, \infty \rangle$ měřitelná, pak definujeme

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup\{I(s) \mid 0 \leq s \leq f \text{ a funkce } s \text{ je jednoduchá měřitelná}\}.$$

(3) Je-li $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, pak definujeme $\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu$, má-li pravá strana smysl.

(4) Je-li $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ měřitelná a $E \in \mathcal{A}$, pak definujeme $\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f \chi_E \,\mathrm{d}\mu$.

Literatura a zdroje

[1] Petr Kaplický: *přednášky z Teorie míry na MFF.*

Bipartitní grafy

Josef Minařík

Abstrakt. Začneme definicí grafu a několika základních pojmů z teorie grafů. Potom přejdeme na bipartitní grafy, charakterizujeme je a popíšeme si jejich základní vlastnosti. Hlavním tématem přednášky by měla být Hallova věta a její aplikace.

Definice. *Graf* G je dán množinou *vrcholů* V a množinou *hran* $E \subseteq \binom{V}{2}$. Hrany jsou tedy neuspořádané dvojice vrcholů. Skutečnost, že graf G má vrcholy V a hrany E značíme $G = (V, E)$.

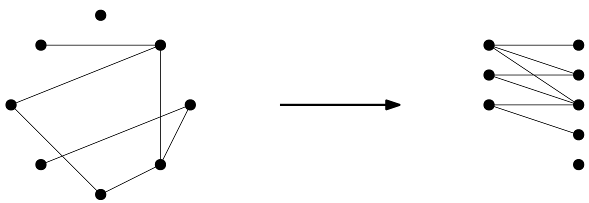
Definice. Vrchol $v \in V$ má stupeň $\deg(v) = d$, jestliže z něj vede právě d hran.

Věta. (princip sudosti) *Součet stupňů přes všechny vrcholy je roven dvojnásobku počtu hran neboli*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

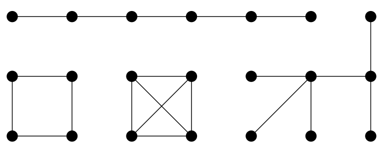
Důkaz. Každá hrana má dva koncové vrcholy, takže ji v součtu nalevo započítáme dvakrát. $\square$

Definice. Graf $G = (V, E)$ je *bipartitní*, jestliže lze jeho vrcholy rozdělit na dvě disjunktní množiny $A \cup B = V$ tak, aby pro každou hranu $\{a, b\} \in E$ platilo $a \in A$, $b \in B$.



Cvičení. Rozmyslete si, zda jsou následující grafy bipartitní.

(1) Cesty.
(2) Cykly.
(3) Úplné grafy.
(4) Stromy.



Definice. Graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E)$, jestliže $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Definice. Graf G je k-*obarvitelný*, jestliže lze jeho vrcholy obarvit k barvami tak, aby sousedící vrcholy měly různou barvu.

Cvičení. Nahlédni, že graf je bipartitní právě tehdy, když je 2-obarvitelný.

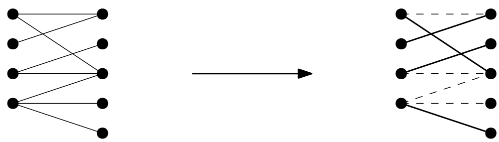
Věta. (charakterizace bipartitních grafů) *Graf G je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichou kružnici jako podgraf.*

Důkaz. Kružnice liché délky není bipartitní, určitě tedy není bipartitní ani graf, který ji obsahuje jako podgraf.

Předpokládejme, že graf G neobsahuje lichou kružnici. Hladově jej obarvíme dvěma barvami, čímž ukážeme, že je bipartitní. Začneme v libovolném vrcholu a obarvíme jej libovolně. Pak obarvíme jeho sousedy opačnou barvou. Potom jejich sousedy, kteří ještě nejsou obarvení, a tak dále. Stačí si rozmyslet, že takto dostaneme korektní obarvení.

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$, množina hran $M \subseteq E$ je *párování*, jestliže je každý vrchol obsažen v nejvýše jedné hraně z M.

Věta. (Hallova) *Nechť G je bipartitní graf s partitami A a B. Párování obsahující všechny vrcholy z A existuje právě tehdy, když pro každou $X \subseteq V$ platí $|X| \leq |N(X)|$, kde $N(X)$ značí množinu sousedů vrcholů z X.*



Lehké úlohy na grafy

Pokud je tohle tvoje první setkání s grafy, doporučuji se podívat aspoň na některé z následujících úloh. Seznámíš se při tom s několika užitečnými pojmy z teorie grafů.

Úloha 1. Popište grafy $G = (V, E)$, kde pro všechny vrcholy $v \in V$ platí $\deg(v) \leq 2$.

Definice. Graf je *souvislý*, jestliže v něm existuje cesta mezi libovolnou dvojicí vrcholů.

Úloha 2. Dokažte, že se každé dvě nejdelší cesty v souvislém grafu protínají.

Definice. O grafu řekneme, že je *strom*, jestliže je souvislý a neobsahuje žádnou kružnici.

Úloha 3. Dokažte, že pro strom $T = (V, E)$ platí $|E| = |V| - 1$.

Úloha 4. Dokažte, že stromy jsou právě ty grafy, kde mezi každou dvojicí vrcholů existuje právě jedna cesta.

Úloha 5. Dokažte, že počet *listů* (vrcholů stupně 1) ve stromě $T = (V, E)$ je aspoň nejvyšší stupeň vrcholu $v \in V$.

Úloha 6. Dokažte, že všechny nejdelší cesty ve stromě mají společný vrchol.

Definice. Nechť je $T = (V, E')$ podgraf grafu $G = (V, E)$. Jestliže je T strom, nazveme jej *kostrou* grafu G.

Úloha 7. Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.

Úloha 8. Dokažte, že graf, kde mají všechny vrcholy stupeň aspoň k, obsahuje cyklus délky aspoň $k + 1$.

Úlohy na bipartitní grafy

Úloha 9. Ukažte, že všechny podgrafy bipartitního grafu jsou také bipartitní.

Úloha 10. Dokažte, že pro bipartitní graf s partitami A a B platí

$$\sum_{a \in A} \deg(a) = \sum_{b \in B} \deg(b).$$

Úloha 11. Dokažte, že libovolný graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní podgraf $B = (V, E')$ obsahující aspoň polovinu hran, tedy $|E'| \geq \frac{1}{2}|E|$.

Úloha 12. (Mantelova věta) Dokažte, že graf na n vrcholech bez trojúhelníků, který obsahuje největší možný počet hran, je bipartitní.

Úloha 13. Dokažte, že šachovnici 8×8, které chybí dva protější rohy, nelze pokrýt dominy.

Úloha 14. Dokažte, že na nekonečnou šachovnici nelze umístit 2021 jezdců tak, aby každý ohrožoval právě 2 další.

Úloha 15. Mějme graf, kde mají všechny vrcholy stupeň nejvýše 2020. Dokažte, že lze jeho hrany obarvit 11 barvami tak, aby byly všechny jednobarevné podgrafy bipartitní.

Úloha 16. Mějme souvislý graf G. Když v G uvážíme libovolnou lichou kružnici a smažeme její hrany, G přestane být souvislý. Dokažte, že G je 4-obarvitelný. (ARO 2010)

Úloha 17. Mějme graf, na kterém můžeme dělat následující operaci: z libovolného cyklu délky 4 odstraníme hranu. Určete, kolik nejméně hran musí na konci zbýt, jestliže začínáme s úplným grafem na n vrcholech. (Shortlist 2004)

Úlohy na Hallovu větu a párování.

Definice. Graf G nazveme *regulární*, jestliže všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň.

Úloha 18. Dokažte, že každý regulární bipartitní graf obsahuje perfektní párování (párování obsahující všechny vrcholy).

Úloha 19. Nechť jsou $S_1, \dots, S_n$ podmnožiny $\{1, \dots, n\}$ takové, že sjednocení libovolných k z nich obsahuje aspoň k různých čísel. Dokažte, že existuje permutace $a_1, \dots, a_n$ taková, že $a_i \in S_i$.

Úloha 20. Mějme bipartitní graf G s partitami A a B, kde mají všechny vrcholy stupeň aspoň 1. Pro každou jeho hranu $\{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$ platí $\deg(a) \geq \deg(b)$. Dokažte, že v G existuje párování obsahující všechny vrcholy z A.

Úloha 21. O tabulce $n \times n$ řekneme, že je *permutační*, jestliže v každém políčku obsahuje 0 nebo 1 a navíc má v každém řádku i sloupci právě jednu 1. Mějme tabulku $n \times n$ vyplněnou přirozenými čísly, která má v každém řádku i sloupci stejný součet. Dokažte, že ji umíme vyjádřit jako součet několika permutačních tabulek.

Úloha 22. Mějme tabulku M o rozměrech $n \times n$ vyplněnou čísly 0, 1 a -1, která v každém řádku i sloupci obsahuje právě jednu 1 a právě jednu -1. Dokažte, že umíme přeskládat řádky a sloupce M tak, abychom dostali $-M$. (Írán 1998)

Úloha 23. V PraSeStánu se vláda rozhodla zřídit 2017 okresů o stejné rozloze. Své návrhy na rozdělení podaly dvě politické strany. Dokažte, že lze vybudovat 2017 okresních úřadů tak, aby byl v každém okrese právě jeden, ať už vláda poté zvolí kteroukoli variantu. (MKS 36-5-8)

Úloha 24. V místnosti je $2n$ lidí, z nichž některé dvojice se znají. Alice a Bob hrají hru. Alice začíná a vybere libovolného člověka. Následně se střídají v tazích a pokaždé vyberou někoho, kdo ještě nebyl vybraný a zná se s posledním vybraným člověkem. Kdo nemůže táhnout prohrál. Dokažte, že Bob má vyhrávající strategii právě tehdy, když můžeme lidi v místnosti rozdělit do dvojic, které se znají.

Úloha 25. Na planetě je 2^n zemí ($n \geq 4$). Všechny tyto země mají vlajku ve tvaru tabulky $n \times 1$, jejíž políčka jsou vybarvena žlutou a modrou barvou. Žádné dvě země nemají stejnou vlajku. Skupinu zemí nazveme *diverzní*, pokud z ní lze vybrat n různých zemí tak, abychom při poskládání jejich vlajek pod sebe v určitém pořadí dostali čtverec $n \times n$ s jednobarevnou hlavní diagonálou. Spočtěte, kolik nejméně zemí musí ve skupině být, aby už byla určitě diverzní. (Shortlist 2010)

Úloha 26. Tabulka $3n \times 3n$ je obarvena třemi barvami (červeně, zeleně a modře). Políčko na souřadnicích x, y je obarveno podle zbytku $x + y$ po dělení třemi. Teď na tabulku umístíme $3n^2$ žetonů každé barvy tak, aby na každém políčku by právě jeden. Předpokládejme, že je možné žetony přesunout tak, aby se každý posunul o vzdálenost nejvýše d a barvy byly cyklicky posunuté (červený žeton na zelenou, zelený na modrou a modrý na červenou). Dokažte, že můžeme žetony posunout tak, aby se každý posunul o vzdálenost nejvýše $d + 2$ a přitom skončil na políčku své barvy. (Shortlist 2012)

Návody

1. Je to sjednocení cest a cyklů.
2. Uvažuj dvě disjunktní nejdelší cesty a ukaž, že umíš najít delší.
3. Podívej se na počet komponent souvislosti.
4. Stačí ověřit definici stromu.
5. Každý strom obsahuje list, odstraň vrchol s nejvyšším stupněm.
6. Indukuj podle nejdelších cest. Nebo taky můžeš odebrat všechny listy.
7. Prostě odebírej hrany dokud to jde.
8. Uvaž nejdelší cestu v grafu.
9. Rozdělení na partity necháme úplně stejné.
10. Všimni si, kolikrát započítáš každou hranu na levé a pravé straně.
11. Postupně přidávej vrcholy. Nebo jdi na pravděpodobnostní metodu ;-).
12. Postupuj indukcí podle n.
13. Najdi graf, jehož vrcholy jsou políčka a domina dvoří párování.
14. Najdi bipartitní graf, jehož vrcholy jsou jezdci.
15. Použij silnější verzi úlohy výše.
16. Uvaž maximální bipartitní podgraf a dokaž, že partity jsou bipartitní.
17. Graf musí zůstat souvislý a nebipartitní.
18. Ověř Hallovu podmínku.
19. Převeď na graf, pak je to jasné.
20. Ověř Hallovu podmínku.
21. Postupuj indukcí podle součtu v řádcích a sloupcích.
22. Uvaž sjednocení obou párování.
23. Uvaž graf, který obsahuje hrany mezi dvojicemi překrývajících se okresů.
24. Uvaž největší párování.
25. Uvaž dva bipartitní grafy, jeden pro každou barvu zvlášť.
26. Rozděl tabulku na triomina 1×3, to bude jedna partista. Druhá partita budou červené žetony.

Literatura a zdroje

[1] Adrian Tang: *IMO Training 2008: Graph Theory*, *http://web.mit.edu/yufeiz/www/imo2008/tang-graph.pdf.*
[2] Viki Němeček: *Hallova věta*, Lipová-lázně, podzim 2016.

Viètovy vztahy

Josef Minařík

Abstrakt. Viètovy vztahy jsou docela silný nástroj na úlohy o polynomech a o jejich kořenech. Na přednášce si ukážeme, jak Viètovy vztahy vypadají a jak je použít při řešení úloh.

Úmluva. Pokud není řečeno jinak, koeficienty všech polynomů jsou reálné.

Začneme s jednoduchým tvrzením pro kvadratickou rovnici.

Tvrzení. *Mějme kvadratickou rovnici*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Pro její kořeny $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *platí* $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ *a* $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

Poznámka. Pro $a = 1$ dostaneme $\alpha + \beta = -b$ a $\alpha\beta = c$.

Tohle tvrzení můžeme hezky zobecnit i pro rovnice vyššího stupně. Nejdřív si ale definujme, co je to polynom.

Definice. *Polynomem stupně* n rozumíme výraz tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Reálná čísla a_i nazýváme *koeficienty* a x *proměnnou.*

Definice. Číslo $r \in \mathbb{C}$ nazveme *kořen* polynomu P, jestliže $P(r) = 0$.

Tvrzení. (důsledek základní věty algebry) *Polynom stupně* n *má právě* n *komplexních kořenů (každý kořen počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost).*

Teď už si konečně můžeme ukázat znění hlavní věty této přednášky.

Věta. (Viètovy vztahy) *Mějme polynom* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *který je stupně* n *a má kořeny* $r_1, r_2, \ldots, r_n$. *Pak pro každé* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *platí*

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} r_{i_1} \cdot r_{i_2} \cdots r_{i_k} = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Výraz na levé straně může vypadat děsivě, ale je to jenom symetrický polynom stupně k. To znamená, že vezmeme všechny součiny obsahující právě k různých kořenů a sečteme je. Zejména pro $k = 1$, resp. $k = n$ se jedná o součet, resp. součin všech kořenů. Můžeš si všimnout, že pro $a_n = 1$ jsou Viètovy vztahy o trochu přívětivější.

Úlohy pro kvadratickou rovnici

Úloha 1. Najdi kvadratickou rovnici s takovými kořeny, že jejich součet je 7 a jejich součin je 13.

Úloha 2. Označme α a β kořeny rovnice $2x^2 - 4x + 9 = 0$. Urči $\alpha^2 + \beta^2$, aniž bys tyto kořeny počítal.

Úloha 3. Nechť jsou α a β kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c$. Vyjádři $\frac{b^2-4ac}{a^2}$ pomocí α a β.

Úloha 4. Urči všechny čtveřice reálných čísel a, b, c, d, pro které platí následující dvě podmínky: rovnice $x^2 + ax + b$ má kořeny c, d a rovnice $x^2 + cx + d$ má kořeny a, b.

Úloha 5. Nechť a a b jsou různá reálná čísla splňující $a^2 + 3a = b^2 + 3b = -1$. Najdi hodnotu výrazu $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Úloha 6. Nechť jsou α a β kořeny rovnice $x^2 + 2x + 3$. Jak vypadá kvadratická rovnice, jejíž kořeny jsou $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ a $\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$?

Úloha 7. Najdi všechny trojice reálných čísel, které tvoří aritmetickou i geometrickou posloupnost.

Polynomy vyššího stupně

Úloha 8. Polynom $x^3 - ax^2 + bx - 2010$ má tři přirozené kořeny. Jaká je nejmenší možná hodnota a? (AMC 2010)

Úloha 9. Polynom $x^3 - 3x^2 + 1$ má kořeny α, β a γ. Najdi polynom třetího stupně s kořeny α^2, β^2 a γ^2.

Úloha 10. Urči součet všech kořenů polynomu $x^{2021} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2021}$. (AIME 2001)

Úloha 11. V komplexních číslech vyřeš soustavu

$$\begin{aligned} a + b + c &= -3, \\ ab + bc + ac &= 3, \\ abc &= -1. \end{aligned}$$

Úloha 12. Nechť α, β a γ jsou kořeny polynomu $5x^3 - 11x^2 + 7x + 3$. Najdi hodnotu výrazu $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Úloha 13. Polynom $P(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$ má tři různé reálné kořeny. Každý kořen $P(x)$ je také kořenem polynomu $Q(x) = x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c$. Urči hodnotu $Q(1)$. (AMC 2017)

Úloha 14. Nechť má polynom $x^3 + 3x^2 + 4x - 11$ kořeny α, β a γ a nechť má $x^3 + rx^2 + sx + t$ kořeny $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ a $\alpha + \gamma$. Urči t.

Úloha 15. Mějme polynom $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$, pro který platí, že součin dvou jeho kořenů je -32. Najdi hodnotu parametru k. (USAMO 1984)

Úloha 16. Nechť p, q jsou nezáporná celá čísla. Dokaž, že pokud jsou všechny kořeny polynomu $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1x + a_0$ přirozené, potom lze do roviny nakreslit p přímek protínajících se v právě q různých bodech. (Turnaj Měst 2020)

Úloha 17. Nechť α a β jsou dva z kořenů polynomu $x^4 + x^3 - 1$. Dokaž, že součin $\alpha \cdot \beta$ je kořen polynomu $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$. (USAMO 1997)

Úloha 18. Nechť pro n racionálních čísel platí, že hodnoty všech jejich symetrických polynomů jsou celočíselné. Dokaž, že pak každé z původních n čísel musí být celé.

Úloha 19. Urči všechna reálná a, pro která má polynom

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16$$

čtyři různé reálné kořeny tvořící geometrickou posloupnost. (Shortlist)

Úloha 20. Najdi všechny polynomy, jejichž všechny kořeny jsou reálné a jejichž koeficienty nabývají pouze hodnot ± 1. (Putnam 1968)

Návody

1. $x^2 - 7x + 13$.

2. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$.

3. Uprav zadaný výraz a dosaď do něj Viètovy vztahy.

4. Napiš si Viètovy vztahy a vyřeš soustavu.

5. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$.

6. Vyjádři součet a součin pomocí $\alpha + \beta$ a $\alpha\beta$.

7. Platí $a + c = 2b$ a zároveň $ac = b^2$.

8. $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.

9. $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$.

10. Z binomické věty spočítej koeficienty u dvou nejvyšších mocnin.

11. Najdi polynom, jehož kořeny jsou a, b, c.

12. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma) + 3\alpha\beta\gamma$.

13. Urči kořen, který má $Q(x)$ navíc, označme jej r. Potom $Q(1) = (1 - r)P(1)$.

14. $(a + b)(b + c)(a + c) = (a + b + c)(ab + bc + ac) - abc$.

15. Napiš si soustavu danou Viètovými vztahy a počítej ...

16. Rozděl přímky do několika rovnoběžných skupinek.

17. Substituuj za $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\gamma + \delta$ a $\gamma\delta$, pak to bude hezčí a jednodušší.

18. Jmenovatelé všech racionálních kořenů polynomu dělí vedoucí koeficient.

19. Všimni si, že je zadaná rovnice reciproká, takže je-li α kořenem, bude jím i $\frac{1}{\alpha}$.

20. Využij toho, že aritmetický průměr kořenů musí být aspoň tak velký, jako je velký jejich geometrický průměr.

Literatura a zdroje

[1] Alexander Remorov: *Polynomials*, 2011.
[2] Marta Kossaczká: *Vietove vzťahy*, Sklené, 2015.
[3] *Brilliant: Vieta's Formula, https://brilliant.org/wiki/vietas-formula/.*

Miquelův bod

Magdaléna Mišinová

Abstrakt. Na této přednášce budeme zkoumat Miquelův bod čtyřúhelníku a konfiguraci, v níž se vyskytuje, nazývanou The Big Picture.

Úmluva. Kružnici opsanou trojúhelníku XYZ budeme značit (XYZ).

Spirální podobnost

Než se pustíme do samotného Miquelova bodu, připomeňme si některé nástroje, které budeme potřebovat. Nejdůležitější z nich je spirální podobnost.

Definice. Spirální podobnost je zobrazení roviny definované středem S, koeficientem k a orientovaným úhlem α. Bod $X \neq S$ se zobrazí na X', pro nějž platí $\frac{|SX'|}{|SX|} = k$ a orientovaný úhel XSX' je α. Bod S se zobrazí na sebe.

Tvrzení. *Nechť W, X, Y a Z jsou čtyři body v rovině takové, že se WY a XZ protínají v bodě P. Buď Q průsečík kružnic (WXP) a (PYZ). Pak Q je střed spirální podobnosti přenášející W na Y a X na Z.*

Tvrzení. (Spirální podobnost chodí po dvou.) *Pokud Q je střed spirální podobnosti přenášející W na Y a X na Z, pak je to také střed spirální podobnosti přenášející W na X a Y na Z.*

Další nástroje

Tyto nástroje budeme potřebovat výrazně méně než spirální podobnost, takže pokud je nepochopíte, není třeba se bát.

Definice. Nechť k je kružnice se středem S a poloměrem r. Pak *kruhová inverze podle k* je zobrazení roviny, které bod $X \neq S$ zobrazí na bod X' ležící na polopřímce SX a splňující $|SX| \cdot |SX'| = r^2$.

Definice. Nechť k je kružnice se středem S. Obraz bodu $X \neq S$ v kruhové inverzi podle k označme X'. Přímku ℓ splňující $X' \in \ell$, $SX \perp \ell$ nazýváme *polárou* bodu X. Naopak X nazýváme *pólem* ℓ.

Definice. Nechť k je kružnice a XYZ trojúhelník. Řekneme, že vzhledem ke k je XYZ *selfpolar* (někdy taktéž přezdívaný *tripolární*, ale to je méně zažitý název), pokud X je pól YZ, Y je pól ZX a Z je pól XY.

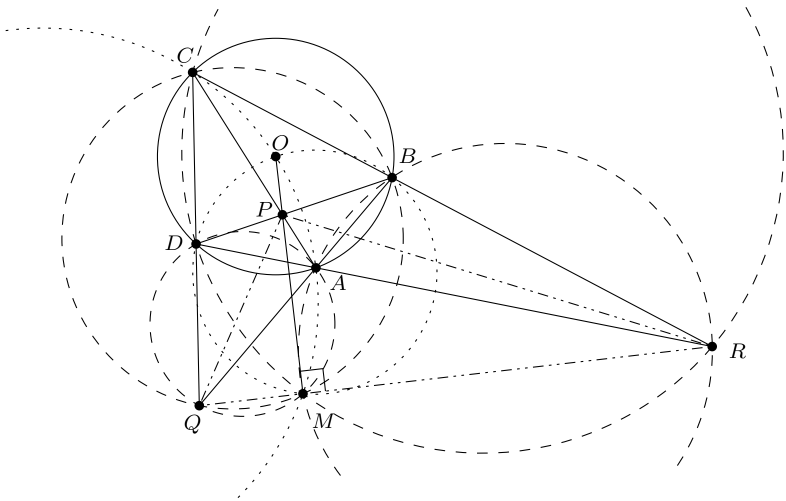
Miquelův bod

Tvrzení. *Nechť A, B, C, D jsou body v rovině v obecné poloze. Označme $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$. Potom se (ABR), (CDR), (ADQ), (BCQ) protínají v jednom bodě, který nazýváme Miquelův bod čtyřúhelníku $ABCD$.*

Poznámka. Ač často je v obrázku $ABCD$ opravdu čtyřúhelníkem tak, jak si jej obvykle představíme, tvrzení platí, i když se strany čtyřúhelníku kříží (tj. Q nebo R je vnitřní bod stran, pomocí nichž je definovaný).

Tvrzení. (The Big Picture) *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice se středem O. Dále nechť $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$. Miquelův bod $ABCD$ označíme M. Potom platí:*

(a) *M je střed spirálních podobností zobrazující AB na CD a AD na BC.*
(b) *$M \in QR$.*
(c) *$OM \perp QR$.*
(d) *P je obraz M v kruhové inverzi podle $(ABCD)$.*
(e) *trojúhelník PQR je tripolární vzhledem ke kružnici $(ABCD)$.*



Poznámka. Vlastnosti (a) a (b) lze dokázat bez inverze a polár, avšak z (c) a (d) plynou snadno.

Poznámka. Existuje ještě jedna stejnojmenná, avšak úplně jiná konfigurace, takže je třeba si je neplést.

Další vlastnosti Miquelova bodu

Úloha 1. Miquelův bod čtyřúhelníku $ABCD$ označíme M. Dokažte, že úhly AMC a BMD mají společnou osu úhlu.

Úloha 2. Paty kolmic z Miquelova bodu $ABCD$ na přímky AB, CD, BC a AD leží na jedné přímce.

Úloha 3. Pro čtyřúhelník $ABCD$ označíme $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$. Dokažte, že středy kružnic (ABR), (CDR), (ADQ), (BCQ) a Miquelův bod $ABCD$ leží na jedné kružnici.

Úloha 4. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník na kružnici se středem O a M je jeho Miquelův bod. Dokaž, že (AOC) a (BOD) se protínají v M a OM je osa úhlů AMC a BMD.

Úloha 5. Pro čtyřúhelník $ABCD$ označme $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$. Dokažte, že orthocentra trojúhelníků ABR, CDR, ADQ, BCQ leží na jedné přímce.

Úloha 6. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme průsečík úhlopříček E a Miquelův bod M. Průsečík AB a osy úhlu AEB označíme K. Dokažte, že MK půlí úhel AMB.

Miquelův bod více či méně skrytý

Úloha 7. Kružnice ω_1 a ω_2 se protínají v bodech P a Q. Pro body $A, C \in \omega_1$ a $B, D \in \omega_2$ platí, že polopřímka CD a úsečka AB se protínají v P. Polopřímka BD protíná úsečku AC v bodě X. Pro body Y a Z platí $PY \parallel BD$, $Y \in \omega_1$ a $PZ \parallel AC$, $Z \in \omega_2$. Dokažte, že body Q, X, Y, Z leží na jedné přímce. (USA TST 2007/1)

Úloha 8. Kružnice ω_1 procházející vrcholy A a B trojúhelníku ABC protíná stranu AC znovu v bodě D. Kružnice ω_2 procházející skrze A a C protíná AB v bodě E a ω_1 v bodě F. Platí, že existuje bod O takový, že $|OB| = |OC| = |OD| = |OE|$. Dokažte, že $OF \perp FA$.

Úloha 9. Kružnice se středem O prochází vrcholy B a C trojúhelníku ABC a jeho strany AB, AC protíná podruhé v M a N. Kružnice (ABC), (AMN) se podruhé protínají v K. Dokažte, že $AK \perp OK$. (IMO 1985)

Úloha 10. Pro konvexní čtyřúhelník $ABCD$ platí $|BC| = |AD|$ a $BC \nparallel AD$. Na stranách BC a AD leží postupně pohyblivé body E a F, pro něž platí $|BE| = |DF|$. Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AC \cap EF$, $R = BD \cap EF$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníku PQR pro všechny volby E a F mají kromě P další společný bod. (IMO 2005/2)

Úloha 11. Na stranách AD a BC čtyřúhelníku $ABCD$ leží postupně body E a F, pro něž platí $\frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|BF|}{|CF|}$. Přímka EF protíná polopřímky BA a CD postupně v bodech S a T. Dokažte, že kružnice (SAE), (SBF), (TCF), (TDE) se protínají v jednom bodě.

Úloha 12. Kružnice ω_1 a ω_2 se protínají v bodech O a M. Kružnice ω se středem v O protíná zbylé dvě kružnice ve čtyřech různých bodech A, B, C a D takových, že $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, $A, D \in \omega_1$ a $B, C \in \omega_2$. Přímky AB a CD se protínají v bodě N_1 a přímky AC a BD v bodě N_2. Ukažte, že $OM \perp N_1N_2$.

Úloha 13. Budiž P bod vně kružnice ω se středem O. Ať $A, B \in \omega$ a PA a PB jsou tečny k ω. Na kratším oblouku AB zvolíme bod C. Průsečíky přímek AC a BC s PB a PA označíme postupně D a E. Dokažte, že (ACE), (BCD) a (PCO) mají dva společné průsečíky.

Úloha 14. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Tečny k ω v B a C se protínají v T. Bod S leží na polopřímce BC a platí $AS \perp AT$. Body B_1 a C_1 leží na polopřímce ST tak, že $|B_1T| = |BT| = |C_1T|$ a C_1 leží mezi S a B_1. Dokažte, že trojúhelníky ABC a AB_1C_1 jsou podobné. (USA TST 2007/5)

Úloha 15. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Přímky AB a DC se protínají v bodě Q a přímky AD a BC v bodě R. Tečny z bodu R se dotýkají dané kružnice v bodech X a Y. Ukažte, že Q, X a Y leží na jedné přímce.

Úloha 16. Trojúhelník ABC má kružnici opsanou ω. Osa úhlu BAC protíná BC a ω postupně v D a L. Střed BC označíme M. Kružnice ADM podruhé protíná úsečky AB a AC v P a Q. Střed PQ označíme N. Patu kolmice z L na ND označíme H. Dokažte, že ML je tečna (HMN).

Návody

1. Spirálka.

2. Najdi spoustu tětivových čtyřúhelníků (některé díky Miquelově bod, některé díky pravým úhlům) a úhli.

3. Nakresli osy správných úseček, zaúhli a vzpomeň si na spirální podobnost.

4. Pro první část invertuj, pro druhou úhli.

5. Uvaž osovou souměrnost podle správných přímek a přiber do hry Miquelův bod $ABCD$. Kam se v osové symetrii podle strany trojúhelníka zobrazí jeho kolmiště?

6. Použij spirálku a následující větu. V trojúhelníku XYZ označme průsečík YZ a osy úhlu u X jako U. Pak platí $\frac{XY}{UY} = \frac{XZ}{UZ}$.

7. Najdi Miquelův bod $AXDP$ a úhli.

8. Najdi Miquelův bod $BECD$.

9. Uvědom si, že K je Miquelův bod, a využij jeho vlastnosti.

10. Uvědom si, Miquelovými body kterých čtyřúhelníků musí kružnice (PQR) procházet, a dokaž, že jsou stejné a nehýbají se.

11. Pomocí Miquelových bodů to převeď na průsečík jiných kružnic a použij spirálku.

12. Uvědom si, že když M bude Miquelův bod $ABDC$, bude úloha platit. Pak využij jednu z předchozích úloh.

13. Uvědom si, že to má být Miquelův bod $PDCE$, a úhli.

14. Najdi Miquelův bod BB_1C_1C.

15. Poláry.

16. Dokresli bod na ω naproti L a zjisti, čeho je to Miquelův bod. Pak úhli.

Literatura a zdroje

[1] Evan Chen: *Euclidean geometry in mathematical olympiad*, The Mathematical Association of America, 2016.
[2] Rado van Švarc: *The Big Picture*, Meziměstí, 2017.
[3] *https://artofproblemsolving.com.*

Rotace a podobná zobrazení

Radek Olšák

Abstrakt. Budeme se na přednášce zabývat tím, jak nám můžou k řešením geometrických úloh pomoci různá podobná zobrazení a jejich skládání.

Podobná zobrazení jsou zobrazení, která každý útvar zobrazí na útvar jemu *podobný*, tedy útvar se stejným tvarem. Skutečnost, že jsou si dva útvary A a B podobné, značíme $A \sim B$.

Většinou nás v tomto příspěvku budou zajímat *přímo* podobná zobrazení, tedy zobrazení zachovávající orientaci (bodů). Můžou se ale hodit i zobrazení *nepřímo* podobná. Při takovém zobrazení dochází k nějakému překlopení obrázku.

Nyní si pojďme prohlédnout různé typy podobných zobrazení.

Posunutí

Posunutí je zobrazení, které nám obrázek akorát posune v nějakém směru o nějakou vzdálenost. Pro každé posunutí platí, že když máme dvojici bodů X, Y a dvojici jejich obrazů X', Y', tak XX' a YY' jsou rovnoběžné a stejně dlouhé.

Stejnolehlost

Stejnolehlost je zobrazení, které body vzdálí k-násobně od jednoho pevného bodu. Tomuto bodu říkáme *střed stejnolehlosti*. Pro každou stejnolehlost se středem v O platí, že pro každý vzor X a jeho obraz X' body O, X, X' leží na přímce a $k \cdot |OX| = |OX'|$. Danému k pak říkáme *koeficient stejnolehlosti*. Může se hodit uvážit i záporná k, potom by polopřímky OX a OX' byly opačné.

Rotace

Rotace je zobrazení, které obrázek otočí kolem pevného bodu o pevný úhel. Tomuto bodu budeme říkat *střed rotace*. Pro každou rotaci se středem v O a o úhel α platí, že pro každý vzor X a jeho obraz X' jsou splněny rovnosti $|OX| = |OX'|$ a $|\sphericalangle XOX'| = \alpha$.

Spirální podobnost

Spirální podobnost je zobrazení, které vznikne složením rotace a stejnolehlosti, které mají stejný střed.

Překlopení?

Překlopení podle přímky p je nepřímo podobné zobrazení, které nám bod X zobrazí na bod s ním osově souměrný podle p.

Identita

Zobrazení, které nedělá nic. Sice může být na první pohled zvláštní, že se o takovém zobrazení vůbec chceme bavit, ale z té vlastnosti složení, že nic nedělá, vyplývá velké množství informací.

Skládáme zobrazení

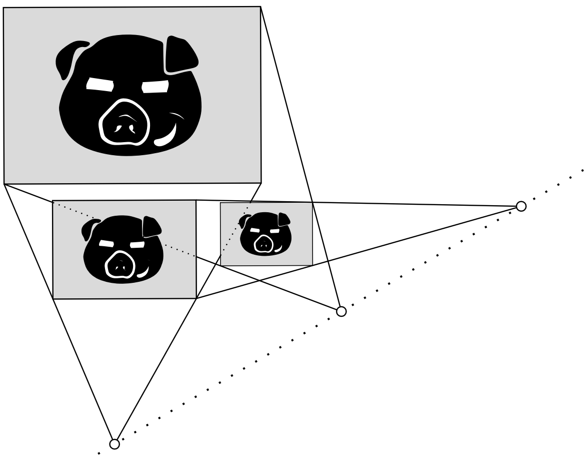
Tvrzení. *Každé přímo podobné zobrazení je posunutím, rotací, spirální podobností nebo identitou.*

Platí, že rotace a stejnolehlost jsou pouze *přísnější* případy spirální podobnosti, a nabízí se tak možnost mluvit pouze o spirálních podobnostech. Ale právě větší přísnost rotace i stejnolehlosti nám dá daleko více informací, a proto když budeme zobrazení skládat, tak je chceme popsat tím *nejpřísnějším* popisem.

Tvrzení. *Složení několika posunutí je opět posunutí.*

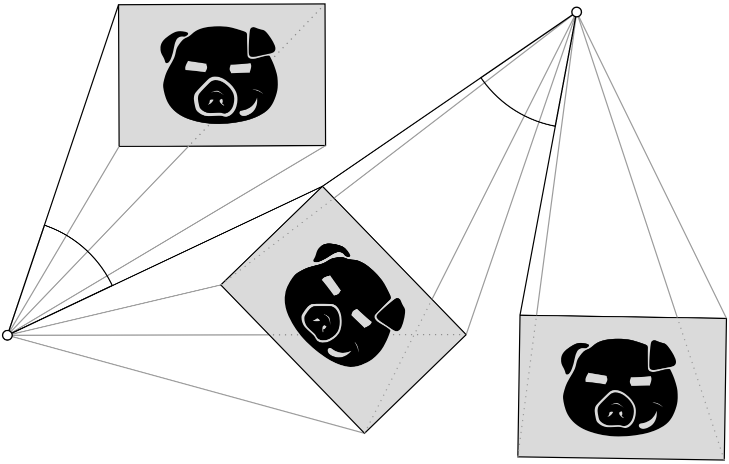
Tvrzení. *Posunutí s pevným bodem*[1] *je identita.*

Tvrzení. *Složení několika stejnolehlostí je stejnolehlost.*



Tvrzení. *Složení rotací, jejichž součet úhlů je celočíselný násobek* 360°, *je posunutí.*

[1] Pevným bodem zobrazení φ rozumíme bod X takový, že $\varphi(X) = X$.



Podobných tvrzení o skládání našich zobrazení a o tom, co se při těchto skládáních zachovává, by se dala vymyslet celá řada. Daleko lepší, než si taková tvrzení napsat a zapamatovat, je umět si podobná tvrzení rozmyslet.

Zkus si tedy promyslet, co dalšího bychom mohli ještě o skládání podobných zobrazení říci. Co všechno se zachovává – rovnoběžnost, délky úseček, … ? Například si zkus rozmyslet, jak se chová skládání podobných zobrazení s překlopením.

Rozehřívací úlohy

Úloha 1. Mějme dva čtverce $ABCD$ a $XBYZ$ sdílející vrchol B (vrcholy označme ve směru hodinových ručiček). Dokaž, že $AX \perp CY$.

Úloha 2. Nechť $ABCD$ je lichoběžník s rovnoběžnými stranami AB a CD, jeho průsečík úhlopříček označme E. Najdeme body F a G tak, aby trojúhelníky ABF a CDG byly rovnostranné a zároveň byly vně $ABCD$. Dokaž, že E, F a G leží na jedné přímce.

Úloha 3. Mějme kružnici Ω a na ní tětivu AB. Dále máme kružnici ω dotýkající se zevnitř Ω v bodě P a dotýkající se AB v bodě Q. Dokaž, že přímka PQ prochází středem oblouku AB.

Skládací úlohy

Příklad 4. Máme trojúhelník ABC. Otočíme ho podle A o nějaký úhel na trojúhelník $AB'C'$. Strany $B'C'$ a BC se protnou v bodě X. Označme O střed kružnice opsané $B'CX$. Dokaž, že $AO \perp BC'$.

Řešení. Označíme si α úhel, o který jsou trojúhelníky otočené. Tedy i úhel mezi BC a $B'C'$ je α. Ze středového úhlu je $|\sphericalangle B'OC| = 2\alpha$.

Uvažme rotaci φ se středem v A o úhel α a rotaci ψ se středem v O o úhel -2α. Pak složení $\pi = \varphi\circ\psi\circ\varphi$ je složení rotací, které mají součet úhlů roven 0, tedy složení bude posunutím. A dokonce z šikovně zvolených rotací platí, že $B \overset{\varphi}{\mapsto} B' \overset{\psi}{\mapsto} C \overset{\varphi}{\mapsto} C'$, tedy $B \overset{\pi}{\mapsto} C'$.

Uvažme bod P takový, že $\varphi(P) = O$ a označme $Q = \varphi(O)$. Takto zvolený bod má tu vlastnost, že $\psi(\varphi(P)) = \psi(O) = O = \varphi(P)$, tedy druhé zobrazení je pro něj identitou. Aplikujme na P naše zobrazení π: $P \overset{\varphi}{\mapsto} O \overset{\psi}{\mapsto} O \overset{\varphi}{\mapsto} Q$. Z rovností $|\sphericalangle PAO| = \alpha = |\sphericalangle OAQ|$ a $|AP| = |AO| = |AQ|$ vyplývá, že $\triangle APQ$ je rovnoramenný a že AO je jeho osa úhlu. Tedy platí $AO \perp PQ$. Ale protože π je posunutí, které posouvá $P \mapsto Q$ i $B \mapsto C'$, tak i $AO \perp BC'$.

Úloha 5. Mějme trojúhelník ABC, označme H jeho orthocentrum. Kružnice opsaná ACH protne AB podruhé v X. Kružnice opsaná BHA protne AC podruhé v Y. Označme O střed kružnice opsané ABC a S střed kružnice opsané HXY. Dokaž, že H, S, O leží na jedné přímce.

Úloha 6. Máme dva čtverce sdílející vrchol B. Označme jejich vrcholy A, B, C, D a X, B, Y, Z. Označme M střed YA. Dokaž, že $BM \perp CX$ a $2 \cdot |BM| = |CX|$.

Úloha 7. Nechť P je libovolný bod v trojúhelníku ABC s kružnicí opsanou ω. Pojmenujme druhé průsečíky $A' = AP \cap \omega$, $B' = BP \cap \omega$ a $C' = CP \cap \omega$. Označme F překlopení C' podle AB a E překlopení B podle AC. Nakonec označme O střed kružnice opsané PEF. Dokaž, že $AO \perp BC$.

Úloha 8. Bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC tak, že $\triangle BPC$ je rovnoramenný a úhel u P je pravý. Dále nechť $\triangle BAN$ a $\triangle CAM$ jsou rovnoramenné, s pravým úhlem u A a leží vně $\triangle ABC$. Dokaž, že $\triangle MNP$ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

Úloha 9. Mějme trojúhelník ABC. Na přímce BC leží body B, K, C, L v tomto pořadí a platí, že $|BK| = |CL|$. Označme K' bod K překlopený podle AB a L' bod L překlopený podle AC. Dále označme O střed kružnice opsané ABC. Dokaž, že $|OK'| = |OL'|$ (IGO 2021 E4)

Úloha 10. Označme H orthocentrum $\triangle ABC$ a M střed oblouku BAC obsahující A. Označme E, resp. F body na AB resp. AC takové, že H, E, F leží na přímce a $|AE| = |AF|$. Dokaž, že MH prochází středem kružnice opsané AEF.

Úloha 11. Nechť XYZ je trojúhelník. Nad stranami XY, YZ, ZX sestrojíme tři podobné trojúhelníky YXF, YDZ, EXZ. (Dávej pozor na pořadí vrcholů.) Označme po řadě M, K, L středy kružnic opsaných těmto trojúhelníkům. Dokaž, že trojúhelník KLM je s těmi sestrojovanými také podobný.

Úloha 12. Mějme trojúhelník ABC. Zvolme libovolný bod N na BC. Osa úsečky BN protne AB v X. Osa úsečky CN protne AC v Y. Označme O střed kružnice opsané ABC. Dokaž, že $AXOY$ leží na jedné kružnici.

Návody

1. Co dělá rotace se středem v B o úhel $90°$ s úsečkou AX?

2. Stejnolehlost podle bodu P taková, že AB přejde na DC.

3. Střed oblouku AB je *bod dole* na Ω a bod Q je *bod dole* na ω.

5. Všimni si, že trojúhelníky HYC a HBY jsou rovnoramenné a vzájemně podobné.

6. Použij rotace s úhly otočení $90°$ a $180°$.

7. Dokaž, že $\triangle DCB \sim \triangle DEF$. Pak jedna rotace, kterou chceš využít, je ta se středem v O.

8. Slož čtyři rotace o $90°$.

9. Slož překlopení, posunutí a překlopení a výsledek aplikuj na O.

10. Trojúhelníky HEB a HFC jsou podobné, skládej kromě rotací i spirálky.

11. Slož rotace se středy v K, L, M. Z toho získáš velikosti úhlů $\triangle KLM$.

12. S využitím rotací se středy X, O, Y získej informaci o velikosti úhlu $|\sphericalangle YXO|$.

Literatura a zdroje

[1] Radek „Riadok“ Olšák: *The power of rotation composition*, *https://artofproblemsolving.com/community/c1095548.*

Skalární a vektorový součin

Radek Olšák

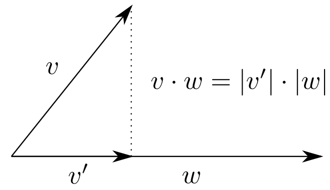
Abstrakt. V příspěvku si ukážeme, co jsou to různé součiny vektorů a jak spolu souvisí jejich geometrická představa a jejich výpočet.

Poznámka. Pro správné fungování věcí, co budeme v přednášce řešit, se bude dít, že součin „opačně orientovaných“ velikostí je záporný a obsah/objem také občas může být záporný. Hlavně u objemů nebudeme vždycky formálně říkat, kdy je co záporné, protože se chceme soustředit na podstatu věci a ne nutně na detaily s ± 1.

Definice. (vektor) V této přednášce si pod vektorem budeme představovat šipečku z počátku do nějakého bodu roviny, později i prostoru. Vektory spolu umíme sčítat tak, že zapojíme šipečky za sebe a nakreslíme novou šipečku z počátku do výsledného bodu.

Skalární součin (projekce)

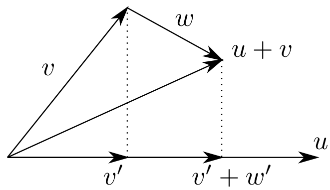
Definice. (skalární součin) Mějme vektory v, w. Promítneme kolmou projekcí v na w a vynásobíme velikost dané projekce s velikostí w. Výsledné číslo nazveme *skalární součin* a značíme ho $v \cdot w$.



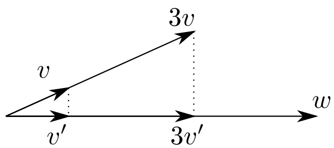
Pozorování. *Skalární součin je symetrický, tedy $v \cdot w = w \cdot v$. To není na první pohled zřejmé z naší definice, ale můžeme si všimnout, že se dá také spočítat jako $|w| \cdot |v| \cdot \cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi vektory v a w. Alternativně se symetrie dá nahlédnout i geometricky, což si ukážeme na přednášce.*

Pozorování. *Skalární součin je roven nule, právě když jsou dané vektory na sebe kolmé, nebo je nějaký z nich nulový.*

Pozorování. *Pro skalární součin platí „distributivita“, tedy $(v+w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u$.*



Pozorování. *Skalární součin se chová hezky k násobení konstantou, tedy platí $(kv) \cdot w = k(v \cdot w)$.*



Pozorování. (výpočet skalárního součinu) *Mějme vektory se souřadnicemi (a, b) a (c, d). Pak s využitím předchozích pozorování můžeme spočítat*

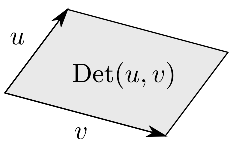
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \\
&= a \cdot x + 0 + 0 + b \cdot y = ax + by.
\end{aligned}$$

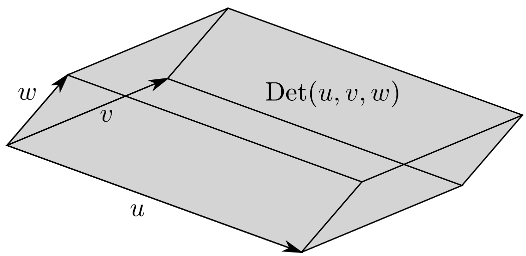
Z toho plyne, že skalární součin se počítá tak, že spolu vynásobíme příslušné složky daných vektorů a výsledky sečteme. Je docela překvapivé, jak jednoduše se dá spočítat něco tak divného, jako je projekce.

Poznámka. Obdobně to bude fungovat pro vektory libovolné dimenze.

Determinant (objem)

Definice. (determinant) Mějme dva vektory u, v v rovině. Pak označíme $\mathrm{Det}(u, v)$ obsah rovnoběžníku, který vytváří. Obdobně pokud máme tři vektory v prostoru u, v, w, tak označíme $\mathrm{Det}(u, v, w)$ objem rovnoběžnostěnu, který vytvářejí.

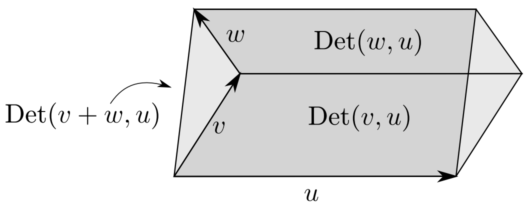




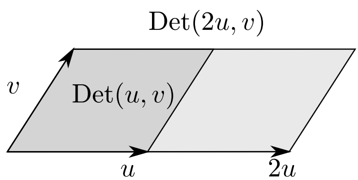
Pozorování. *2D determinant je nulový, právě když u, v leží v přímce, a 3D determinant je nulový, právě když u, v, w leží v jedné rovině.*

Pozorování. *Pro determinant platí „distributivita", tedy platí*

$$\mathrm{Det}(v + w, u) = \mathrm{Det}(v, u) + \mathrm{Det}(w, u).$$



Pozorování. *Determinant se chová hezky k násobení konstantou, takže platí* $\mathrm{Det}(ku, v) = k \cdot \mathrm{Det}(u, v)$.



Poznámka. Tady už se začínají objevovat záporné obsahy. Bylo by třeba si rozmyslet, že umíme dobře definovat, kdy má být obsah záporný a kdy kladný, tak, aby naše pozorování opravdu vždy platilo. K tomu, že to tak definovat jde, nám napomáhají mimo jiné i znaménka permutací.

Pozorování. (výpočet determinantu) *Uvažujme vektory se souřadnicemi* (a, b) *a* (x, y)*. Pak s využitím předchozích pozorování platí*

$$\operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) + \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= 0 + a \cdot y + (-b \cdot x) + 0 = ay - bx.$$

Poznámka. Tady už i ve výpočtu je potřeba vědět, jak se musí chovat ty ± 1. Můžete si to buď rozmyslet, nebo přijít na konzultaci, nebo tomu jen věřit.

Poznámka. Pomocí podobných pozorování můžeme spočítat i 3D determinant jako

$$\operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) =$$

$$= a \cdot \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right) + b \cdot \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}\right) + c \cdot \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

Je vidět, že výpočet determinantu už není tak krásný, jako byl výpočet skalárního součinu, ale bude se nám ještě hodit.

Vektorový součin

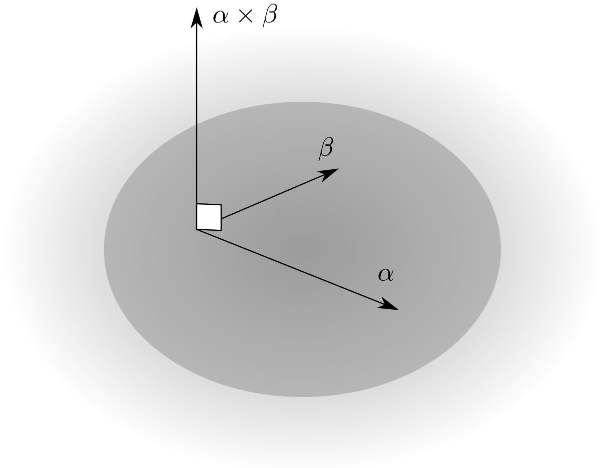
V 3D determinantu si zafixujeme dva vektory $\alpha = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$ a $\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a první vektor $\lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si představíme proměnlivý. Označíme si tuto funkci π. Pak z výpočtu determinantu a skalárního součinu vidíme, že

$$\pi(\lambda) = \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right) \\ \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}\right) \\ \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}.$$

Definice. (vektorový součin) Vektoru, který jsme použili pro skalární násobení, říkáme *vektorový součin* $\alpha \times \beta$.

Máme tedy dva způsoby výpočtu naší funkce π. Jeden je přes determinant $\pi(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda, \alpha, \beta)$ a druhý je jako skalární součin $\pi(\lambda) = \lambda \cdot (\alpha \times \beta)$. Uvažme nyní, že do π dosadíme obecný vektor ležící v rovině definované vektory α a β.

Pozorování. *Pro všechny takové vektory vyjde* $\mathrm{Det}(\lambda, \alpha, \beta) = 0$, *tedy z druhého výpočtu π máme pro všechny takové vektory i $\lambda \cdot (\alpha \times \beta) = 0$. Z toho plyne, že vektor $\alpha \times \beta$ je kolmý na rovinu definovanou vektory α a β.*



Pozorování. *Dosaďme nyní do π jednotkový vektor γ ve směru $\alpha \times \beta$. Pak z prvního výpočtu máme, že $\pi(\gamma)$ je rovno objemu rovnoběžnostěnu z vektorů γ, α a β. Ale protože γ je jednotkový a kolmý na α a β, tak je $\pi(\gamma)$ rovno obsahu rovnoběžníku mezi α a β. Ale z druhého výpočtu máme, že $\pi(\gamma)$ je rovno velikosti $\alpha \times \beta$. Takže velikost $\alpha \times \beta$ je stejná jako obsah rovnoběžníku mezi α a β.*

Diofantické rovnice

Klára Pernicová

Abstrakt. Přívlastek *diofantická* u rovnice značí, že se budeme zabývat pouze jejími celočíselnými řešeními. V přednášce se naučíme pár postupů, které se při řešení takových rovnic můžou hodit.

Kongruence

Definice 1. Nechť a, b jsou celá čísla. Řekneme, že a *dělí* b (značíme $a \mid b$), pokud $b = k \cdot a$ pro nějaké celé číslo k. V opačném případě budeme říkat a *nedělí* b (značíme $a \nmid b$).

Definice 2. Číslo $a \in \mathbb{Z}$ je *kongruentní* s číslem $b \in \mathbb{Z}$ modulo $m \in \mathbb{N}$ právě tehdy, když a a b dávají stejný zbytek po dělení číslem m. Píšeme $a \equiv b \pmod{m}$.

Definice 3. Dvě čísla nazveme *nesoudělná*, pokud jedinými celými čísly, která je obě dělí, jsou 1 a -1.

Věta 4. *Nechť a, b, k, m jsou celá čísla splňující $ak \equiv bk \pmod{m}$. Platí, že pokud jsou k a m nesoudělná, pak $a \equiv b \pmod{m}$.*

Úloha 5. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{Z}$, pro které platí $5x + 7y = 11$.

Uvedeme si dvě řešení: jedno zdlouhavé, které ale vždy povede k cíli, a druhé, které využívá vlastností kongruencí.

Řešení. (postupné vyjadřování a zpětné dosazování) Z první rovnice vyjádříme x:

$$x = \frac{11 - 7y}{5} = 2 - y + \frac{1 - 2y}{5}.$$

Protože je x celé číslo, je levá strana rovnice celé číslo, a proto je pravá strana celé číslo. Zřejmě $2 - y$ celé číslo je, takže musí existovat $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = \frac{1-2y}{5}$.

Postup opakujeme, vyjádříme nyní y:

$$y = \frac{1 - 5a}{2} = -2a + \frac{1 - a}{2}.$$

Stejným argumentem jako minule nyní musí existovat $b \in \mathbb{Z}$ takové, že $b = \frac{1-a}{2}$.

A teď vyjádříme a:

$$a = 1 - 2b.$$

Získali jsme vyjádření bez zlomku, proto můžeme začít s druhou částí, a to s dosazováním:

$$\begin{aligned} a &= 1 - 2b, \\ y &= \frac{1-5a}{2} = 5b - 2, \\ x &= \frac{11-7y}{5} = 5 - 7b. \end{aligned}$$

Řešením rovnice budou (x, y) ve tvaru $(5 - 7b,\ 5b - 2)$ pro každé $b \in \mathbb{Z}$. Úpravy byly ekvivalentní, a proto jsme našli všechna řešení a zároveň nemáme žádná navíc.

Řešení. (rychlé s kongruencemi) Chceme osamostatnit x, proto uvážíme kongruenci mod 7:

$$\begin{aligned} 5x + 7y &\equiv 11 \pmod 7, \\ 5x &\equiv 4 \pmod 7. \end{aligned}$$

Pokud bychom pracovali s rovnicí, přirozeným krokem by bylo celou rovnici vydělit číslem 5. V kongruenci tuto úpravu udělat můžeme také, protože 5 a 7 jsou nesoudělná čísla. Stále ale potřebujeme, aby byla pravá strana násobek 5, čehož docílíme přičtením vhodného násobku 7. Tento vhodný násobek bude 21. Potom můžeme pokračovat v úpravách:

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 4 \equiv 4 + 21 \equiv 25 \pmod 7, \\ x &\equiv 5 \pmod 7. \end{aligned}$$

Tuto skutečnost umíme zapsat ekvivalentně jako $x = 7b + 5$ pro libovolné $b \in \mathbb{Z}$.

Dosaďme do rovnice za x výraz v b, obdržíme $5(7b + 5) + 7y = 11$. Uvažujeme teď b jako parametr a snažíme se najít y. Platí $7y = -35b - 14$, a tedy $y = -5b - 2$. Máme řešení (x, y) ve tvaru $(7b + 5,\ -5b - 2)$ pro každé $b \in \mathbb{Z}$.

Vidíme, že jsme našli stejná řešení jako při prvním způsobu řešení (stačí si rozmyslet, že b nahradíme za $-b$).

Příklad 6. Nechť pro celá x, y platí $7 \mid (x^2 + y^2)$. Vyplývá z toho, že $7 \mid x$ a zároveň $7 \mid y$?

Příklad 7. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $4x + 14y + 21z = 5$.

Příklad 8. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $7x^2 + 5y + 14 = 0$.

Příklad 9. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $7x^2 + 5y = 13$.

Věta 10. (malá Fermatova) *Mějme prvočíslo p a celé číslo a splňující, že p nedělí a. Pak platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.*

Pokud bychom chtěli zapomenout na podmínku, že p nedělí a, pak platí $a^p \equiv a \pmod p$.

Úloha 11. Najděte všechny dvojice $a, b \in \mathbb{Z}$, které splňují $3^a \equiv 3^b \pmod{13}$.

Řešení. Podívejme se na umocňování trojky:

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod{13}, \\ 3^2 &\equiv 9 \pmod{13}, \\ 3^3 \equiv 27 &\equiv 1 \pmod{13}, \\ 3^4 &\equiv 3 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Je vidět, že pokud umocníme trojku na třetí, dostaneme jedničku. Takže vytknutím 3^k pro libovolné k splňující $3 \mid k$ nezměníme zbytek mod 13. Tedy $3^m \equiv 3^n \pmod{13}$, pokud $m \equiv n \pmod{3}$.

Ukázali jsme tedy, že pokud $a \equiv b \pmod{3}$, pak $3^a \equiv 3^b \pmod{13}$. Musíme ale ještě ukázat opačnou implikaci, abychom měli jistotu, že jsme nalezli všechna řešení.

Uvážíme nějaká a, b splňující $3^a \equiv 3^b \pmod{13}$ a budeme chtít ukázat $a \equiv b \pmod{3}$. Protože jsou 3 a 13 nesoudělná čísla, můžeme první kongruenci vydělit větším z 3^a, 3^b, BÚNO zvolme $3^b \geq 3^a$. (Obě strany stále budou celá čísla.) Získáme tak

$$3^{b-a} \equiv 1 \pmod{13}.$$

Nyní můžeme vydělit se zbytkem $(b-a) : 3 = q$ (zb. r) pro celé číslo q, kde r nabývá hodnot 0, 1 nebo 2. Potom platí

$$3^{b-a} \equiv 3^{3q+r} \equiv 3^{3q} \cdot 3^r \equiv (3^3)^q \cdot 3^r \equiv 3^r \equiv 1 \pmod{13}.$$

Zbývající případy už můžeme rozebrat zvlášť: buď $r = 0$, pak $3^0 \equiv 1 \pmod{13}$ (platí), nebo $r = 1$, pak $3^1 \equiv 3 \not\equiv 1 \pmod{13}$ (neplatí), nebo nakonec $r = 2$ a pak $3^2 \equiv 9 \not\equiv 1 \pmod{13}$. Ukázali jsme tedy, že $(b-a) : 3 = q$, jinými slovy $3 \mid (b-a)$, což nastane, právě když $a \equiv b \pmod{13}$.

Dá se nahlédnout, že tento výsledek odpovídá malé Fermatově větě, protože pokud $a \equiv b \pmod{12}$, pak $a \equiv b \pmod{3}$.

Příklad 12. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $2^x = 11 + 7y$.

Rozkládání

Budeme se snažit na jedné straně vytvořit součin, na druhé straně prvočíslo nebo nějaké číslo o málo dělitelích, případně mocninu. Nastane tím jen velmi málo možností, které stačí rozebrat.

Úloha 13. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $xy = x + y$.

Řešení. Původní rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} xy &= x + y, \\ xy - x - y + 1 &= 1, \\ (x-1)(y-1) &= 1. \end{aligned}$$

Číslo 1 má jen dva dělitele, 1 a -1, přičemž rozklady 1 jsou pouze $1 \cdot 1 = 1$ a $(-1) \cdot (-1) = 1$. Z toho získáme jediná dvě řešení: $(0,0)$ a $(2,2)$.

Příklad 14. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 = y^2 + 13$.

Příklad 15. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x(x + 2y) = p + 3y^2$, kde p je prvočíslo.

Příklad 16. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice

$$xy + yz + zx = xyz + x + y + z.$$

Příklad 17. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + 3x = y^3 - 2$.

Nekonečný sestup

Princip *nekonečného sestupu* se opírá o fakt, že neexistuje klesající posloupnost zdola omezených celých čísel (přirozená čísla, jako speciální případ, jsou zdola omezená nulou).

Samotná metoda pak předpokládá existenci řešení, jehož existence pak bude vyžadovat, aby existovalo řešení menší (v nějakém smyslu, např. v součtu proměnných). Protože ale tato řešení budou prvky zdola omezené množiny, nastane spor.

Úloha 18. Dokažte, že rovnice $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ nemá řešení v oboru přirozených čísel.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že existuje řešení (a, b, c). Máme tedy rovnici

$$a^3 + 2b^3 = 4c^3.$$

Protože jsou členy $2b^3$ a $4c^3$ dělitelné dvěma, je i a^3 dělitelné dvěma. 2 je prvočíslo, a proto $2 \mid a$, tedy a^3 je tvaru $2^3 \cdot a_1^3$ pro nějaké přirozené číslo a_1. Získáme tak rovnici

$$8 \cdot a_1^3 + 2b^3 = 4c^3.$$

Nyní můžeme rovnici vydělit dvěma, čímž získáme $4a_1^3 + b^3 = 2c^3$. Obdobným argumentem musí být b^3 dělitelné dvěma, tedy b^3 je tvaru $2^3 \cdot b_1^3$ pro nějaké přirozené b_1. Výslednou rovnicí bude $4a_1^3 + 8b_1^3 = 2c^3$.

Opět můžeme celou rovnici vydělit dvěma. Pak musí být i c^3 rovno $2^3 \cdot c_1^3$ pro nějaké přirozené číslo c_1. Po vydělení rovnice dvěma získáme původní rovnici, tentokrát s řešením (a_1, b_1, c_1), kde součet $a_1 + b_1 + c_1$ je poloviční oproti součtu původního řešení $a + b + c$. Snadno si všimneme, že jak $a_1 + b_1 + c_1$, tak $a + b + c$ jsou přirozenými čísly. A tak jsme získali nekonečnou klesající posloupnost přirozených čísel – součty proměnných v řešení. Protože ale nemůže existovat nekonečná klesající posloupnost zdola omezených celých čísel, rovnice nemůže mít žádné řešení.

Úlohu řešíme jen v přirozených číslech, tedy použití nekonečného sestupu je zcela validní. Pokud bychom řešili v celých číslech, řešení existuje (např. $(0, 0, 0)$).

Úloha 19. Dokažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že racionálním číslem je, tedy dá se zapsat jako $\frac{m}{n}$ pro celá m, n, kde čísla m a n jsou nesoudělná.

Platí tedy $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, umocněním obou stran získáme $2 = \frac{m^2}{n^2}$, ekvivalentně $2n^2 = m^2$. Protože levá i pravá strana jsou celými čísly, určitě 2 dělí m^2. Ale 2 je prvočíslo, a proto 2 dělí m, jinými slovy můžeme psát $m = 2m_1$ pro nějaké celé m_1. Dosazením do rovnice získáváme

$$2n^2 = 4m_1^2.$$

Vydělením obou stran dvěma získáme $n^2 = 2m_1^2$, z čehož analogickým argumentem platí $2 \mid n$.

V průběhu důkazu jsme ukázali, že $2 \mid m$ i $2 \mid n$, a proto $2 \mid \mathrm{NSD}(m, n)$. Z předpokladu jsou m a n nesoudělná, ekvivalentně $\mathrm{NSD}(m, n) = 1$. Z tohoto už přímo vyplývá $2 \mid 1$, což je zjevně spor.

Příklad 20. Dokažte, že $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ není racionální číslo.

Příklad 21. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + y^2 = 7z^2$.

Návody

6. Jaké zbytky dává x^2 po dělení sedmi? Dvě z těch čísel se musí sečíst na nulu.

7. Modulíme sedmičkou, abychom zjistili x.

8. Modulíme pětkou a vyjde, že $x^2 \equiv 3 \pmod 5$, což nelze.

9. Modulíme pětkou a vyjde $x \equiv 2$ nebo $3 \pmod 5$.

12. Modulte sedmičkou. Užijte malou Fermatovu větu. Vyzkoušejte malé hodnoty.

14. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

15. Najděte $(x + y)^2$ a potom vyjádřete p jako součin.

16. $(x - 1)(y - 1)(z - 1)$.

17. $(x + 1)(x + 2) = y^3$, závorky jsou pro nemalá x nesoudělné, tedy každá je rovna nějaké třetí mocnině. Ty od sebe odečteme, získáme 1 a použijeme $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

20. Umocníme. Získáme tím rovnici, ve které nás zajímá celočíselnost jediného členu.

21. Začneme jako v příkladu 6.

Literatura a zdroje

[1] Víťa Kala, Jakub „šnEk“ Opršal: *Seriál – Teorie čísel*, PraSe 2008.
[2] Pavel Turek: *Diofantické rovnice*, online soustředění, 2020.

Dělitelnost

Daniel Perout

Abstrakt. Jednou z elementárních vlastností celých čísel, kterou můžeme zkoumat, je, jestli je jedno násobkem druhého. O úroveň výše je pak hledání celočíselných zbytků po dělení. V této přednášce si osvětlíme, jak s těmito koncepty pracovat, zejména v kontextu olympiádní matematiky. K tomu posléze využijeme středně pokročilé nástroje jako malou Fermatovu větu a Eukleidův algoritmus.

Úmluva. V následujícím textu budeme uvažovat přirozená čísla bez nuly.

Základní pojmy a vlastnosti

Nejprve si zavedeme dva klíčové pojmy:

Definice 1. Nechť a, b jsou celá čísla. Řekneme, že *a dělí b* (značíme $a \mid b$), pokud $b = k \cdot a$ pro nějaké celé číslo k. V opačném případě budeme říkat *a nedělí b* (značíme $a \nmid b$).

Definice 2. Nechť a, b a n jsou celá čísla. Řekneme, že a je *kongruentní* s b modulo n (značíme $a \equiv b \pmod{n}$), pokud $n \mid (a - b)$.

Pomocí tohoto značení můžeme snadno popsat řadu vlastností, které jsou sice triviální, nicméně jsou využity (občas implicitně) v celé řadě úloh.

Pozorování 3. *Pro libovolná celá čísla a, b, c, d, n platí:*

(1) $1 \mid a$,
(2) $a \mid 0$,
(3) $a \mid a$,
(4) $a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid kb + \ell c$, *kde k, ℓ jsou libovolná celá čísla,*
(5) $a \mid b \wedge c \mid d \implies ac \mid bd$,
(6) $ab \mid c \implies a \mid c$ a $b \mid c$,
(7) $ac \mid bc \iff a \mid b$
(8) $n \mid b + c \implies b \equiv -c \pmod{n}$,
(9) $a + b \cdot n \equiv a \pmod{n}$,
(10) $a \equiv b \pmod{n} \wedge c \equiv d \pmod{n} \implies a + c \equiv b + d \pmod{n}$,
(11) $a \equiv b \pmod{n} \wedge c \equiv d \pmod{n} \implies ac \equiv bd \pmod{n}$,
(12) *Pokud je c nesoudělné*[1] *s n, pak* $ac \equiv bc \pmod{n} \implies a \equiv b \pmod{n}$,
(13) $a \equiv b \pmod{n} \iff a \equiv b \pmod{-n}$.

Takřka vždy se používají kongruence modulo $n \geq 2$, protože mod 0 si je kongruentní jen číslo samo se sebou, mod 1 jsou si kongruentní všechna čísla a záporná

[1] Nesoudělnost dvou čísel je vysvětlena v definici 23.

modula se chovají stejně jako kladná.

Prvočísla se chovají moc hezky k dělitelnosti, některé z jejich vlastností si ukážeme v lemmátku.

Lemma 4. (prvočísla a dělitelnost) *Uvažujme prvočíslo p a přirozená čísla a, b. Potom platí:*

(1) *když $p \mid ab$, pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$,*
(2) *když $p \mid a^2$, pak $p \mid a$ a také $p^2 \mid a^2$.*

Příklady a úlohy

Příklad 5. (odstrašující) Rozmyslete si, že pokud p není v předcházejícím lemmatu prvočíslo, lemma nemusí platit.

Příklad 6. Ukažte, že pro libovolné celé číslo n je $\frac{n^3-n}{6}$ také celé číslo.

Příklad 7. Najděte zbytek po dělení čísla $2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13$ číslem 28.

Úloha 8. Najděte největší přirozené číslo a takové, že $a \mid 3^{2n+1} + 1$ pro každé přirozené číslo n.

Úloha 9. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $9 \mid 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$.

Kritéria dělitelnosti

Často se nám hodí rychle určit, jestli je nějaké číslo dělitelné daným (malým) číslem. Uvedeme si ale tvrzení, která nám nejen prozradí, zda ono číslo je či není dělitelné, ale zároveň nám pomohou určit případný zbytek.

Zároveň si všimněme, že naše tvrzení jsou specifická pro desítkovou soustavu. Pro zajímavost si můžete zkusit rozmyslet, jak by to fungovalo pro jiné soustavy, či dokonce jestli jsou nějaké soustavy vhodnější z hlediska kritérií dělitelnosti.

Věta 10. (dělitelnost mocninami dvojky a pětky) *Mějme celé číslo n a přirozené číslo a. Jako poslední a-číslí čísla n chápejme takové celé číslo $k_a(n)$, které se s n shoduje na posledních a cifrách, jinde má samé nuly a je záporné právě tehdy, když je n záporné. Pak platí*

$$n \equiv k_a(n) \pmod{2^a},$$
$$n \equiv k_a(n) \pmod{5^a}.$$

Věta 11. (dělitelnost trojkou a devítkou) *Mějme celé číslo n, označme $s(n)$ jeho ciferný součet (platí $s(-n) = -s(n)$). Pak platí*

$$n \equiv s(n) \pmod{3},$$
$$n \equiv s(n) \pmod{9}.$$

Věta 12. (dělitelnost jedenácti) *Mějme celé číslo n. Označme $\bar{s}(n)$ alterovaný ciferný součet, tedy takové celé číslo, které vznikne rozdílem součtů cifer na sudých a lichých pozicích (přičemž analogicky platí $\bar{s}(-n) = -\bar{s}(n)$). Pak platí*

$$n \equiv \bar{s}(n) \pmod{11}$$

Věta 13. (dělitelnost sedmi a třinácti) *Mějme celé číslo n ve tvaru $10k + \ell$, kde k je přirozené číslo a ℓ je cifra. Pak platí:*

$$n \equiv k + 5\ell \pmod 7,$$
$$n \equiv k + 4\ell \pmod{13}.$$

Cvičení 14. Rozmyslete si, proč tato kritéria fungují.

Cvičení 15. Dala by se nějak zobecnit kritéria dělitelnosti sedmi a třinácti (např. pro libovolné prvočíslo)?

Příklady a úlohy

Příklad 16. Pro $2 \le n \le 16$ nalezněte r taková, že

$$0 \le r < n \quad \text{a} \quad 8388596 \equiv r \pmod n.$$

Úloha 17. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že $s(n^2) = 3$.

Společní dělitelé a spol.

Definice 18. Mějme celá čísla a, b. Pak jako *společný dělitel* čísel a, b označíme takové celé číslo d, pro které platí $d \mid a$, $d \mid b$.

Nezáporné celé číslo d nazveme *největší společný dělitel* čísel a, b, pokud jej dělí jejich každý společný dělitel.

Definice 19. Mějme celá čísla a, b. Pak jako *společný násobek* čísel a, b označíme takové celé číslo n, pro které platí $a \mid n$, $b \mid n$.

Nezáporné celé číslo n nazveme *nejmenší společný násobek* čísel a, b, pokud dělí jejich každý společný násobek.

Tvrzení 20. *Pro každá dvě celá čísla a, b existuje právě jeden jejich největší společný dělitel, který budeme značit $\mathrm{NSD}(a, b)$.*

Tvrzení 21. *Nechť pro celá čísla a, b (kde $ab \neq 0$) je $n = \frac{ab}{\mathrm{NSD}(a,b)}$. Pak platí, že n je celé číslo a $|n|$ je nejmenší společný násobek a a b. Pokud $ab = 0$, pak definujeme $n = 0$.*

Důsledek 22. *Nejmenší společný násobek je pro každá dvě čísla právě jeden, můžeme pro něj proto zavést notaci* $\operatorname{nsn}(a, b)$.

Definice 23. O celých číslech a, b prohlásíme, že jsou *nesoudělná*, pakliže splňují $\operatorname{NSD}(a, b) = 1$. V opačném případě říkáme, že jsou *soudělná*.

Lemma 24. *Nechť* a, b *jsou celá čísla. Pak platí*

(1) $\operatorname{NSD}(a, b) = 1 \implies \operatorname{NSD}(a + b, ab) = 1$,
(2) $\operatorname{NSD}(a, b) = \operatorname{NSD}(a, a - b)$.

Věta 25. (Bézoutova rovnost) *Mějme celá čísla* a, b, *označme* $d = \operatorname{NSD}(a, b)$. *Pak existují celá čísla* x, y *(nazýváme je Bézoutovy koeficienty) taková, že*

$$ax + by = d.$$

Obecně pak pro libovolná x', y' *platí, že* $ax' + by'$ *je násobek* d.

Jak ale najdeme d, natož Bézoutovy koeficienty x, y? K tomu nám bude sloužit tzv. *Eukleidův algoritmus*.

Definice 26. (rozšířený Eukleidův algoritmus) Mějme celočíselnou rovnici

$$ax + by = d,$$

kde a a b jsou celá čísla, $d = \operatorname{NSD}(a, b)$ a BÚNO platí $|a| \geq |b|$. Neznámé x, y, d pak umíme nalézt následujícím algoritmem:

(1) Připravíme si tabulku se třemi sloupečky, do prvního řádku napíšeme po řadě a, 1, 0 a do druhého b, 0, 1.
(2) Dokud nemáme v prvním sloupci nulu, opakujeme následující kroky:
   (2.1) Označíme k_1, k_2, k_3 a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 hodnoty v posledních dvou vyplněných řádcích tabulky.
   (2.2) Nalezneme (pomocí dělení se zbytkem) čísla q, r tak, aby $k_1 = \ell_1 \cdot q + r$ a $0 \leq |r| < |\ell_1|$.
   (2.3) Do nového řádku napíšeme po řadě čísla r, $k_2 - \ell_2 \cdot q$ a $k_3 - \ell_3 \cdot q$.
(3) Hodnoty z předposledního řádku v prvním, druhém a třetím sloupci označíme po řadě d, x, y.

Pozorování 27. *Pokud si vezmeme libovolný řádek tabulky z rozšířeného Eukleidova algoritmu a čísla v jednotlivých sloupcích označíme postupně* d', x', y', *potom platí* $ax' + by' = d'$.

Příklady a úlohy

Příklad 28. Najděte všechna celá čísla a, b, která splňují $\operatorname{NSD}(a, b) = 15$ a $\operatorname{nsn}(a, b) = 900$.

Příklad 29. Nalezněte největšího společného dělitele čísel 1980 a 3179.

Úloha 30. Najděte všechna celá čísla a, b, která splňují

$$a + b = 100 \quad \text{a} \quad \mathrm{nsn}(a, b) = 210.$$

Úloha 31. Dokažte, že zlomek $\frac{21n+4}{14n+3}$ nelze pro žádné přirozené číslo n zkrátit.

(IMO 1959)

Těžší věty na závěr

Dosud jsme se moc nezabývali vlastnostmi zbytků při mocnění, které se chovají mnohem složitěji. Nicméně máme k dispozici dvě klíčová tvrzení, která nám mohou pomoci.

Věta 32. (malá Fermatova) *Nechť p je prvočíslo a a celé číslo takové, že $p \nmid a$. Pak*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Věta 33. (Eulerova) *Nechť a a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Označme $\varphi(n)$ počet přirozených čísel menších než n, která jsou s n nesoudělná. Pak*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Můžeme si povšimnout, že malá Fermatova věta je speciálním případem Eulerovy věty, neboť pro každé prvočíslo jsou s ním všechna menší přirozená čísla nesoudělná. Jelikož se ale v úlohách často dělí prvočíslem, je vhodné tento případ zmiňovat zvlášť.

Příklady a úlohy

Příklad 34. Ukažte, že $13 \mid 2^{35} + 3^{36} + 5^{37}$.

Úloha 35. Dokažte, že pro lichá přirozená čísla n platí

$$n \mid 2^{(n-1)!} - 1.$$

Úloha 36. Najděte všechna přirozená n, pro která

$$n \mid 2^n - 1.$$

(Putnam 1972)

Cvičení

Cvičení 37. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$n \equiv 4 \pmod 7 \iff 49 \mid (n^2 + 6n + 9).$$

Cvičení 38. Nalezněte všechna přirozená čísla x, y taková, že

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{9} \quad \text{a} \quad \operatorname{nsn}(x, y) = 378.$$

Cvičení 39. Najděte největší celé číslo n takové, že

$$\frac{(n-2)^2\,(n+1)}{n-1}$$

je celé číslo. (AIME 1999)

Cvičení 40. Nalezněte všechna celá čísla x, y splňující $x^2 = 4y + 2$.

Cvičení 41. Existuje přirozené číslo n takové, že $s(2^n) = s(2^{n+1})$?

Cvičení 42. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro něž existuje přirozené číslo n takové, že platí

$$p(p+1) + q(q+1) = n(n+1).$$

Cvičení 43. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n platí $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Návody

6. Rozložte čitatel i jmenovatel na součin. Uvažte lemma 4.

7. Násobit, modulit, opakovat.

8. Uvažte výrazy $3^{2n+1} + 1$ pro n a $n + 1$ a odečtěte je od sebe. Vzniklý výraz má malý počet různých prvočíselných dělitelů. Zbytek dopočtěte pomocí $n = 1$.

9. $10^n \equiv 1 \pmod 9$, poté bude výraz před dělítkem i po dělítku dělitelný třemi, tak můžete zkrátit.

15. Rozmyslete si, že např. $n = 10k + \ell \equiv k + 5\ell \equiv k + 12\ell \equiv k - 2\ell \pmod 7$.

16. Kromě kritérií dělitelnosti využijte lemmatu 4.

17. Uvažte, co znamená, že je ciferný součet roven 3.

24.
(1) Dá se snadno dokázat obměnou.
(2) Dokažte, že množina společných dělitelů a, b je stejná jako množina společných dělitelů a, $a - b$.

29. Použijte Eukleidův algoritmus.

31. Použijte Eukleidův algoritmus na nalezení největšího společného dělitele.

34. Použijte malou Fermatovu větu na jednotlivé členy.

35. Rozmyslete si, že $\varphi(n) \mid n!$.

36. Je jen jediné. Pak zkuste využít malou Fermatovu větu.

39. Uvažujte úlohu pomocí jazyka kongruencí (modulo $n-1$). Uvažte, čemu je potom kongruentní $n - 2$ a $n + 1$.

40. Podívejte se na úlohu modulo 4.

41. Převeďte na kongruence modulo 3.

43. Uvažujte úlohu pomocí jazyka kongruencí (modulo 133). Zjistěte, čemu je kongruentní $11 \cdot 12$. Vynásobte kongruenci vhodnou mocninou 11 (nebo 12) a upravte.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek volně navazuje na příspěvek *Dělitelnost* od *Toma Novotného* a další, které jsou uvedené níže. Zároveň čerpá z hodin matematiky na střední škole vyučovaných *Alešem Kobzou*. Všem svým předchůdcům tímto děkuji.

[1] Tom Novotný: *Dělitelnost*, Paseky, 2018.
[2] Kuba Krásenský: *Dělitelnost pro začátečníky*, Domašov, 2012.
[3] Pavel Paták: *Dělitelnost v praxi*, Ramzová, 2006.
[4] Karolína Kuchyňová: *Kongruence*, Hojsova Stráž, 2016.
[5] Lenka Slavíková: *Ciferné součty*, Dobrá Voda, 2010.
[6] *Mathematical Excalibur*, *https://www.math.ust.hk/excalibur/v20_n2.pdf.*

Soustavy rovnic

Marian Poljak

Abstrakt. Příspěvek se věnuje metodám řešení soustav nelineárních rovnic, se kterými se lze často setkat např. v olympiádě. Jde zejména (ale nejen) o cyklické soustavy. Je zde popsáno několik metod a uvedeno několik příkladů na procvičení.

Snad každý se již na střední škole setkal s metodami řešení soustav lineárních rovnic. To jsou rovnice obsahující pouze součet výrazů tvaru číslo krát neznámá. Postup jejich řešení se dá popsat jednoduchým algoritmem (rovnice se prostě šikovně poodečítají, anebo do sebe dosadí), a tyto soustavy tak může rychle řešit počítač. My se proto budeme zabývat soustavami nelineárními, kde je situace o poznání komplikovanější – nemáme k dispozici žádný postup, který by fungoval na všechny rovnice. Ukážeme si zde několik metod, které se dají v určitých případech použít. Vědět, jak řešit lineární rovnice, se ale bude hodit i tady – jakmile náš problém převedeme na lineární soustavu, máme vlastně hotovo.

Často zde budeme řešit tzv. *cyklické* soustavy rovnic. Cyklická soustava rovnic s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je taková, která se cyklickou záměnu proměnných $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_3, \ldots, x_n \to x_1$ nezmění. To nám mimochodem dává možnost si libovolnou z neznámých určit jako největší či nejmenší.[1]

Všimněte si, že pokud z cyklické (či symetrické) soustavy dostaneme nějaký vztah, máme „zadarmo“ i všechny vztahy, které dostaneme jeho cyklickou (či libovolnou) záměnou.

Úmluva. Všechny rovnice budeme řešit v oboru reálných čísel, není-li explicitně řečeno jinak.

Příklad. (úplně všeho) Řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Úprava na součet čtverců

Pokud se nám ze zadané soustavy rovnic podaří úpravami získat rovnici ve tvaru „součet druhých mocnin nějakých výrazů je roven nule“, dostaneme z této rovnice podmínku na nulovost všech těchto výrazů. To nás často již přímo dovede k řešení, popř. k jednodušším rovnicím.

[1] Můžeme narazit i na *symetrické* soustavy, které se nezmění libovolnou záměnou dvou proměnných. Pak si můžeme dovolit bez újmy na obecnosti dokonce určit pořadí všech neznámých.

Úprava na součin

Ze zadané soustavy můžeme často dostat rovnici typu „součin nějakých výrazu je roven nule“. Potom víme, že některý z výrazů je nulový. Jelikož předem nevíme, který z nich to je, typicky následuje rozbor případů (tolika, kolik je výrazů v součinu). Typicky se sem dostaneme odečtením rovnic a následným rozkladem na součin.

Použití nerovností

V některých úlohách lze s výhodou použít známé nerovnosti, jako např. AG nerovnost, či Cauchy–Schwarzovu nerovnost. Pro jistotu je zde připomeneme.

Věta. (AG nerovnost) *Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná reálná čísla. Potom platí nerovnost*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

přičemž rovnost nastává, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Věta. (Cauchy–Schwarzova nerovnost) *Nechť $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla. Potom platí nerovnost*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2,$$

přičemž rovnost nastává, právě když existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $\ldots$, $a_n = \lambda b_n$.

Uspořádání pro cyklické soustavy

Princip uspořádání proměnných se hodí převážně pro cyklické soustavy, jejichž řešením jsou n-tice stejných čísel. Pomocí letmého porovnání často zjistíme, že všechny proměnné musí nabývat stejné hodnoty.

Goniometrické substituce

Když zadané rovnice silně připomínají nějaký známý goniometrický vztah, mohou pomoci goniometrické substituce. Nesetkáme se s nimi často, ale je dobré vědět, jak na ně – v tomto případě je téměř nemožné tipnout správná řešení.

Procvičení

Příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y + z &= 2, \\ y^2 + z + x &= 2, \\ z^2 + x + y &= 2. \end{aligned}$$

Příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a^5 &= b + b^5, \\ b^5 &= c + c^5, \\ c^5 &= a + a^5. \end{aligned}$$

Příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - 3y + 4 &= z, \\ y^2 - 3z + 4 &= x, \\ z^2 - 3x + 4 &= y. \end{aligned}$$

Příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3. \end{aligned}$$

Úlohy!

Úmluva. Protože cyklická soustava rovnic je jednoznačně určena první rovnicí a počtem neznámých, nebudeme vždy vypisovat všechny rovnice. Tedy např. pod pojmem „cyklická soustava o třech neznámých $x^2 = yz$" budeme myslet soustavu

$$\begin{aligned} x^2 &= yz, \\ y^2 &= zx, \\ z^2 &= xy. \end{aligned}$$

Easy

Úloha 1. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 = yz$.

Úloha 2. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x(x+1) = y(z+1)$.

Úloha 3. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 = y + z + 2$.

Úloha 4. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x + \frac{1}{y} = 2$.

Úloha 5. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x^2 + (y+z)^2 &= 4 - t^2, \\ x^4 + 3(y+1)^2 &= t - 2. \end{aligned}$$

Úloha 6. Řešte pro $x, y, z > 0$ soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ xyz &= 8. \end{aligned}$$

Medium

Úloha 7. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x = \frac{4y^2}{1+4y^2}$.

Úloha 8. Řešte cyklickou soustavu o dvou neznámých $x + y^2 = y^3$.

Úloha 9. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^4 + 1 = 2yz$.

Úloha 10. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Úloha 11. Když $a + b = 1$ a $a^2 + b^2 = 2$, kolik je $a^8 + b^8$?

Úloha 12. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 28, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 56. \end{aligned}$$

Úloha 13. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 + x - 1 = y$.

Úloha 14. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 + y^2 + z = 2$.

Úloha 15. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $(x + y)^4 = z$.

Úloha 16. Řešte soustavu rovnic v oboru celých čísel

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{y} &= z, \\ y + \frac{4}{z} &= x, \\ z - \frac{6}{x} &= y. \end{aligned}$$

Úloha 17. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^3 + 1 = 2y$.

Úloha 18. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 19^2, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0, \\ x - y + z &= 11. \end{aligned}$$

Úloha 19. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} &= \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= xy + yz + zx + 4. \end{aligned}$$

Hard

Úloha 20. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^4 + y^2 + 4 = 5yz$.

Úloha 21. Řešte cyklickou soustavu o čtyřech neznámých $x_1 - \frac{1}{x_1} = 2x_2$.

Úloha 22. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 - 3y + 3 = z$.

Úloha 23. V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 12, \\ abcd &= 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd. \end{aligned}$$

Úloha 24. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^3 = y - x + 8$.

Úloha 25. Řešte pro nezáporné neznámé x_1 až x_{2021} cyklickou soustavu

$$x_1 + \sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[4]{x_1} + \cdots + \sqrt[2021]{x_1} = x_2.$$

Úloha 26. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^5 = 5y^3 - 4z$.

Úloha 27. Určete všechny n-tice kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &= \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \cdots + \frac{n^2}{x_n} &= n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

Úloha 28. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $2x + x^2y = y$.

Úloha 29. Nechť $a, b, c, d, e > 0$ vyhovují rovnicím

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 8, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &= 16. \end{aligned}$$

Určete, jaké maximální hodnoty může nabývat e.

Úloha 30. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $a(b^2 + c) = c(c + ab)$.

Úloha 31. Pro přirozené n řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= 1, \\ x_2x_3 &= 2, \\ &\vdots \\ x_nx_1 &= n. \end{aligned}$$

Úloha 32. Určete, že $s = x + y + z$ může být jen 3 nebo 7, platí-li

$$\begin{aligned} x + \frac{y}{z} &= 2, \\ y + \frac{z}{x} &= 2, \\ z + \frac{x}{y} &= 2. \end{aligned}$$

Úloha 33. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 6x - y + z^2 &= 3, \\ x^2 - y^2 - 2z &= -1, \\ 6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Nightmare

Úloha 34. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^3 + x(y-z)^2 &= 2, \\ y^3 + y(z-x)^2 &= 30, \\ z^3 + z(x-y)^2 &= 16. \end{aligned}$$

Úloha 35. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a + b &= 9, \\ ab + c + d &= 29, \\ ad + bc &= 39, \\ cd &= 18. \end{aligned}$$

Úloha 36. Řešte pro nenulová x, y, z soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \left(x^2 + xy + y^2\right)\left(y^2 + yz + z^2\right)\left(z^2 + zx + x^2\right) &= xyz, \\ \left(x^4 + x^2y^2 + y^4\right)\left(y^4 + y^2z^2 + z^4\right)\left(z^4 + z^2x^2 + x^4\right) &= x^3y^3z^3. \end{aligned}$$

Úloha 37. Řešte pro přípustná x, y soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} &= \sqrt{\frac{20y}{x+y}}, \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} &= \sqrt{\frac{20x}{x+y}}. \end{aligned}$$

Úloha 38. Řešte pro přípustná x, y soustavu rovnic

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}},$$
$$\sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9}.$$

Úloha 39. Řešte soustavu rovnic

$$x^4 - y^4 = 240,$$
$$x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y).$$

Úloha 40. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $y(x^4 - 6x^2 + 1) = 4x - 4x^3$.

Návody

1. Vyděl první dvě rovnice.

2. Sečti a použij známou nerovnost.

3. Odečti a rozlož.

4. Sečti a použij známou nerovnost.

5. Kdy jsou jednotlivé strany těchto rovnic nezáporné a kdy ne?

6. Použij AGčko.

7. Proměnné musí být nezáporné, pravé strany jsou pak rostoucí.

8. Odečti a rozlož.

9. Udělej dolní odhad levé strany.

10. Odečti a rozlož.

11. Najdi hodnoty různých mezivýrazů, má vyjít $\frac{97}{8}$.

12. Šikovně mnohokrát odečti první rovnici od druhé a rozlož na součet čtverců.

13. Zvol si BÚNO x jako největší a porovnávej.

14. Odečti, rozlož, rozeber, má to 8 řešení.

15. Zvol si BÚNO x jako největší a porovnávej.

16. Použij celočíselnost a rozeber, má to 8 řešení.

17. Nechť je BÚNO x největší.

18. Kolik musí být $(x + y + z)^2$?

19. $(x - y)(y - z)(z - x)$.

20. Odhadni levou stranu tak, aby byly všechny výrazy druhého stupně.

21. Najdi si hezký vztah pro kotangens.

22. Dokaž, že proměnné musí být kladné, pak BÚNO nechť je x největší.

23. Použij AGčko.

24. Rozeber kladnost/zápornost proměnných a uspořádej.

25. Levé strany jsou rostoucí funkce, takže uspořádej.

26. Uspořádej a dej pozor na újmu na obecnosti.

27. Cauchy-Schwarz.

28. Najdi si nějaké hezké vztahy pro tangens.

29. Cauchy-Schwarz.

30. V jednotlivých rovnicích najdi rozdíly proměnných.

31. Rozliš liché a sudé n, chytře násob rovnice.

32. Hezky či škaredě upravuj, rozeber zvlášť $x = 1$.

33. Eliminuj y a uprav.

34. Substituuj $u = x^2 + y^2 + z^2$ a $v = xyz$.

35. Vynásob dva kvadratické monické dvojčleny.

36. Použij známé rozklady, vyděl a použij nerovnost.

37. Sečti a vyšetři extrémy obou stran, není třeba derivovat.

38. První rovnice je nerovnost.

39. Od první rovnice odečti osminásobek druhé.

40. Najdi si nějaké dost škaredé vztahy pro tangens.

Literatura a zdroje

[1] Jaroslav Švrček: *Metody řešení soustav algebraických rovnic*, *http://www.kag.upol.cz/ucitprir/texty/MetResSousAR_JS.pdf*.

[2] Tonda Češík: *Cyklické soustavy rovnic*, sborník Paseky, 2018.

Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka

Hedvika Ranošová

Abstrakt. V přednášce představíme dvě jednoduchá a krásná tvrzení o trojúhelníku, která lze nezřídka uplatnit v olympiádních úlohách, a procvičíme si je na mnoha příkladech.

Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka

Úmluva. (základní značení) Většinou budeme v $\triangle ABC$ značit O střed kružnice opsané, H orthocentrum, T těžiště, I střed kružnice vepsané. Středy stran BC, CA, AB označme M_A, M_B, M_C. Paty výšek z vrcholů A, B, C na strany BC, CA, AB budeme značit H_A, H_B, H_C. Středy úseček HA, HB, HC budeme značit M_{HA}, M_{HB}, M_{HC}. Střed Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ budeme značit N.

Úmluva. Pokud definujeme několik bodů analogickým způsobem, automaticky vše děláme „po řadě“, tedy jako první pojmenováváme střed první zmíněné úsečky atd.

Lemma. (obrazy orthocentra) *Obrazy orthocentra H v osových souměrnostech podle stran AB, BC, CA a ve středových souměrnostech podle bodů M_A, M_B, M_C leží na kružnici opsané trojúhelníku $\triangle ABC$.*

S pomocí předchozího lemmatu a stejnolehlosti nyní odvodíme dvě klíčová tvrzení. Nenechme se ale mást – i pouhá znalost tohoto lemmatu nám v olympiádních příkladech může často velmi pomoct.

Tvrzení. (Feuerbachova kružnice, kružnice devíti bodů) *V $\triangle ABC$ leží devět bodů M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, M_{HA}, M_{HB},M_{HC} na jedné kružnici. Střed N této kružnice je středem úsečky OH a její poloměr je roven polovině poloměru kružnice opsané $\triangle ABC$.*

Tvrzení. (Eulerova přímka) *V $\triangle ABC$ leží body H, T, O v tomto pořadí na jedné přímce, a to v poměru $\frac{|HT|}{|OT|} = 2$.*

Cvičení. Dokažte předchozí dvě tvrzení. Pokud už nějaké důkazy znáte, dokažte je jinak.

Jak je vidět, Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka spolu úzce souvisí, spojuje je právě dvojice stejnolehlostí, které převádí kružnici opsanou na Feuerbachovu kružnici. Nyní už přichází čas na hromadu důsledků této elegantní dvojice tvrzení. V následujících příkladech najdeme jak zajímavé olympiádní problémy, tak pěkná tvrzení z geometrie trojúhelníka.

Body v převleku

Začneme příklady, na které vlastně ani tolik geometrie potřeba není – většinou stačí nahlédnout, že některé body vystupují v různých trojúhelnících různými způsoby. Často nám také pomůže stejnolehlost, díky které nezřídka leží na jedné přímce víc bodů, než by se zprvu zdálo.

Příklad 1. Dokažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků $\triangle ABC$ a

(1) $\triangle M_A M_B M_C$,
(2) $\triangle M_{HA} M_{HB} M_{HC}$

splývají.

Příklad 2. (Hamilton's Theorem) Mějme čtveřici trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$. Dokažte, že jejich Feuerbachovy kružnice splývají a jejich Eulerovy přímky prochází jedním bodem.

Příklad 3. Body dotyku kružnice vepsané $\triangle ABC$ se stranami BC, CA, AB označme D, E, F. Orthocentrum $\triangle DEF$ označme V. Dokažte, že pak body V, I, O leží na jedné přímce. (Írán 1995)

Příklad 4. Mějme $\triangle ABC$ s orthocentrem H. Uvažme opsiště trojúhelníků $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku tvořeného těmito opsišti má stejný poloměr jako kružnice opsaná původnímu trojúhelníku.

Příklad 5. Středy kružnic připsaných ke stranám BC, CA, AB $\triangle ABC$ označme J_A, J_B, J_C. Dokažte, že středy úseček $J_A J_B$, $J_B J_C$ a $J_A J_C$ leží na kružnici opsané $\triangle ABC$.

Příklad 6. V $\triangle ABC$ označme středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BCO$, $\triangle CAO$, $\triangle ABO$ jako O_A, O_B, O_C. Dokažte, že střed kružnice opsané $\triangle O_A O_B O_C$ leží na Eulerově přímce $\triangle ABC$.

Příklad 7. Mějme $\triangle ABC$ s vepsištěm I. Uvažme středy jeho stran M_A, M_B, M_C. Dokažte, že střed Feuerbachovy kružnice $\triangle BCI$ leží na ose úhlu $\sphericalangle M_B M_A M_C$.

Angle chasing neboli úhlení

Pokud nás zrovna nenapadá nějaký trik, často je nejjednodušším přístupem dopočítat některé úhly. V geometrii (a v té olympiádní o to víc) je však typicky potřeba nejprve najít několik kružnic, které v úhlení pomohou. Často se někde v úloze nějaká Feuerbachova kružnice schovává a její odhalení a dokreslení nám výrazně usnadní práci – někdy dokonce skoro samo o sobě příklad vyřeší.

Příklad 8. Zkonstruujte $\triangle ABC$, máte-li dánu jeho kružnici opsanou, vrchol A na ní a jeho orthocentrum H.

Příklad 9. Uvažme všechny trojúhelníky s pevnou základnou a daným poloměrem kružnice opsané. Ukažte, že se jejich Feuerbachovy kružnice dotýkají pevné kružnice.

Příklad 10. V ostroúhlém různostranném $\triangle ABC$ označme P patu A–výšky, H kolmiště, O opsiště, D průsečík AO a BC a konečně M střed úsečky AD. Dokažte, že přímka PM prochází středem úsečky OH. (MO–60–A–III–5)

Příklad 11. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Tečny vedené k půlkružnici body C, D se protnou v bodě E a úhlopříčky AC, BD v bodě F. Označme M průsečík EF a AB. Dokažte, že body E, C, M, D leží na jedné kružnici. (China West 2010)

Příklad 12. Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník a H_1, H_2 orthocentra trojúhelníků ABC, ABD. Dokažte, že $H_1H_2 \parallel CD$.

Příklad 13. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se středem I se dotýká jeho stran BC, CA, AB v bodech D, E, F. Buďte Y, Z průsečíky přímek DF, DE s rovnoběžkou k BC vedenou bodem A. Středy úseček DY, DZ pojmenujme F', E'. Dokažte, že body A, E, F, I, E', F' leží na jedné kružnici. (American Mathematical Monthly)

Příklad 14. V $\triangle ABC$ s orthocentrem H a opsištěm O označme průsečík spojnice středů úseček BC, OH s osou úhlu u vrcholu A jako X. Dokažte $|\sphericalangle AXH| = 90°$.

Příklad 15. Uvažme přímku p, která prochází středem úsečky BC a orthocentrem nerovnostranného $\triangle ABC$. Tato přímka protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ v bodech A', A''. Ukažte, že orthocentra $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, $\triangle A''BC$ tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku.

Příklad 16. Mějme $\triangle ABC$ s Eulerovou přímkou l a zvolme dvě jeho strany CA, CB. Uvažme jeho střední příčku p procházející středy těchto dvou stran a spojnici q pat výšek spuštěných na tyto strany. Předpokládejme, že $p \cap q = C'$. Ukažte, že pak $CC' \perp l$. (Peru TST 2006)

Příklad 17. V $\triangle ABC$ se přímky AB, H_AH_B protínají v X, přímky BC, H_BH_C v Y a přímky CA, H_CH_A v Z. Dokažte, že pak body X, Y, Z leží na jedné přímce, které je kolmá na Eulerovu přímku $\triangle ABC$.

Příklad 18. Buď H orthocentrum $\triangle ABC$ s kružnicí opsanou ω. Bod P ležící na ω je různý od A, B, C. Průsečík přímek BH, AC označme E. Ať Q, R jsou body takové, že čtyřúhelníky $PAQB$, $PARC$ jsou rovnoběžníky v tomto pořadí vrcholů a přímky AQ, HR se protínají v X. Dokažte, že $EX \parallel AP$. (IMO Shortlist 1996)

Poměry mezi body

Často na nás úloha vybafne s nějakými poměry. Jejich správnou interpretací je mnohdy chytře zvolená stejnolehlost. Pokud jsou navíc takové body spjaté s Eulerovou přímkou, neváháme, a využijeme toho, co o ní známe.

Příklad 19. V $\triangle ABC$ označme D patu výšky na BC. Rovnoběžka s BC vedená bodem A podruhé protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ v E. Dokažte, že přímka DE prochází těžištěm $\triangle ABC$. (IMO shortlist 2011, upraveno)

Příklad 20. Dokažte, že orthocentrum a opsiště daného ostroúhlého $\triangle ABC$ mají stejnou vzdálenost od strany AB, právě když pro vnitřní úhly α, β při vrcholech A, B platí rovnost $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 3$. (MO–64–B–II–3)

Příklad 21. Je dán $\triangle ABC$ s opsištěm O, orthocentrem H a poloměrem kružnice opsané R. Ukažte, že $|OH| < 3R$. (APMO 1994)

Příklad 22. Je dán $\triangle ABC$ s průměrem kružnice opsané XX', těžištěm T a orthocentrem H. Ukažte, že přímka TX půlí úsečku HX'.

Návody

1. Vždy najděte dvojici bodů, které leží na Eulerově přímce původního i jiného trojúhelníku. Je dobré se podívat třeba na různá opsiště, kolmiště a devítiště.

2. Na Feuerbachově kružnici původního trojúhelníka najděte vždy trojici bodů, kterou prochází i ta nová. Druhé vyplývá přímo z prvního, stačí se kouknout na střed všech těchto kružnic.

3. Uvědomte si, že ve vhodné stejnolehlosti se body V, I zobrazí na I, O.

4. Uvažme opsiště všech tří trojúhelníků, které lze zkonstruovat díky stejnolehlosti podle společného devítiště. Bod H je dokonce opsištěm vzniklého trojúhelníku, shodného s původním.

5. Kdo je tady Feuerbachovou kružnicí trojúhelníku $J_AJ_BJ_C$?

6. Vepište kružnici vzniklému trojúhelníku. Pokud stále nevíte, podívejte se o tři hinty výš.

7. Dokreslete obraz bodu A podle středu M_A. Podívejte se, kde se nachází opsiště a kolmiště trojúhelníku BCI, protože oba tyto body vystupují v nějakém trojúhelníku na obrázku jako velmi známé body.

8. Co takhle zkonstruovat Feuerbachovu kružnici a podívat se, kde ji podruhé protne AH?

9. Mají totiž pevný poloměr a jejich středy leží na jedné kružnici.

10. Zobrazte H na kružnici opsanou. „Feuerbachovská“ stejnolehlost dodělá zbytek.

11. Zamyslete se nad trojúhelníkem ABF. Jaké má orthocentrum? A kde má svou Feuerbachovu kružnici?

12. Dokreslete střed kružnice opsané a těžiště obou zmíněných trojúhelníků. Pokud dokreslíte ještě dvě vhodné těžnice, bude vymalováno.

13. No jaká kružnice to asi bude? S trochou nadhledu je to zjevné – Feuerbachova. Bude se hodit orthocentrum trojúhelníka DYZ.

14. Dokreslete střed úsečky AH a pohrajte si s příslušnou Thaletovou kružnicí.

15. Nejprve najděte pravoúhlý trojúhelník $AA'A''$ a pak si rozmyslete, že vlastně hledáme jen jeho posunutí.

16. Dokreslete druhý průsečík X přímky CC' s kružnicí opsanou a ukažte, že střed úsečky XC je patou hledané kolmice, přičemž použijte kružnice nad průměry CO, CH.

17. Dokreslete všechny tři Thaletovy kružnice nad stranami trojúhelníka a nahlédněte, že zmíněné tři body leží na chordále kružnice opsané a Feuerbachovy kružnice.

18. Uvažte orthocentra trojúhelníků ABC, PBC. S pomocí vhodného posunutí ukažte, že H je orthocentrem trojúhelníka AQR, takže $\sphericalangle HXA$ je pravý. Doúhlete.

19. Dokreslete A-těžnici a pomocí podobných trojúhelníku dopočtěte poměr, ve kterém DE onu těžnici dělí.

20. Rozmyslete si, že Eulerova přímka je rovnoběžná se stranou, právě když orthocentrum leží ve třetině výšky. To ale říká daná rovnost.

21. Dokreslete Eulerovu přímku a těžiště. Dále si uvědomte, že $|OG| < R$.

22. Uvažte dvojici stejnolehlostí se středy T, H (nebo si uvědomte, že TO je těžnice trojúhelníka HXX').

Literatura a zdroje

Přednáška je zkrácenou verzí přednášky *Kuby Löwita* z PraSečího soustředění v Lipové-lázních z podzimu 2016. Tímto mu velmi děkuji.

[1] Jakub Löwit: *Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka*, Lipová-lázně, 2016.

Pravděpodobnostní metoda

Martin Raška

Abstrakt. Pravděpodobnostní metoda je způsob důkazu existence kombinatorických objektů „počítáním“. Navíc pro mnoho důležitých objektů je to jediný známý důkaz. Použití pravděpodobnosti nám oproti počítání možností nejen výpočet zjednoduší, ale poskytne nám i pokročilejší techniky, jak potřebné odhady dokázat.

Pravděpodobnostní metodu používáme hlavně pro důkaz existence nějakých matematických objektů. Místo snahy o jejich konstrukci (která mnohdy ani není známá) se pokusíme zjistit, s jakou pravděpodobností daný objekt najdeme – a pokud je nenulová, už z toho plyne jeho existence.

Definice. *Elementárním jevem* nazýváme kompletní situaci, která nastala po náhodném procesu, tedy například: „Na první kostce padla trojka, na druhé dvojka a na třetí trojka.“ *Jevem* pak nazýváme nějakou vlastnost takové situace, například: „Na první kostce padlo sudé číslo.“ Pravděpodobnost, že jev A nastal, značíme $P(A)$. Symbolem $A \cap B$ značíme, že nastal jev A a současně nastal jev B, a $A \cup B$ značí, že nastal jev A nebo nastal jev B. *Nezávislé jevy* jsou takové, pro které platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Tvrzení. (union bound) *Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou jevy (nemusí být nezávislé). Pak*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Příklad 1. V jazykové škole se vyučuje $2n$ jazyků. Každý z 500 místních učitelů umí mluvit alespoň n jazyky. Dokažte, že najdeme 14 nebo méně jazyků tak, aby každý učitel mluvil alespoň jedním z nich.

Řešení. Zvolme si náhodnou 14-tici jazyků (uspořádanou, přičemž jazyky se můžou opakovat) a pevného učitele. Pravděpodobnost, že tento učitel nezná první jazyk, je nejvýše $\frac{1}{2}$, stejně tak u druhého jazyku atd. Celkem je tedy pravděpodobnost, že tento učitel nezná ani jeden ze 14 jazyků, rovna 2^{-14}. Za pomoci tvrzení výše získáváme, že pravděpodobnost, že alespoň jeden učitel nezná ani jeden z těchto 14 jazyků, je nejvýše $500 \cdot 2^{-14}$. Tedy pravděpodobnost, že všichni učitelé znají alespoň jeden z těchto 14 jazyků, je $1 - (500 \cdot 2^{-14}) > 0$. A nyní přichází klíčová myšlenka pravděpodobnostní metody: Má-li jev nenulovou pravděpodobnost, může nastat. Tedy opravdu existuje 14-tice jazyků taková, že každý učitel mluví alespoň jedním z nich.

Příklad 2. Jsou dána nesoudělná přirozená čísla m, n. Jaký je počet cest po mřížce v obdélníku $m \times n$ z levého dolního rohu do pravého horního, které vedou jen doprava a nahoru a jsou celé pod úhlopříčkou? (MKS 26–5)

Příklad 3. Ve skupině 90 dětí má každé alespoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že lze děti rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupince alespoň jednoho kamaráda. (MO 61–III)

Příklad 4. Matematické soutěže se účastnilo 200 studentů, každý z nich řešil šest úloh. Je známo, že každou úlohu správně vyřešilo alespoň 120 studentů. Dokažte, že můžeme najít dva studenty, kteří dohromady vyřešili všechny úlohy. (IMC 2002)

Příklad 5. Ukažte, že je možné obarvit prvky množiny $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ čtyřmi barvami tak, aby neexistovala jednobarevná desetiprvková aritmetická posloupnost. (IMO 1987)

Příklad 6. V rovině je dáno 100 bodů v obecné poloze. Dokažte, že počet ostroúhlých trojúhelníků nepřekračuje 70 % počtu všech trojúhelníků. (IMO 1970)

Příklad 7. (dolní odhad na Ramseyova čísla) Dokažte, že hrany úplného grafu na $2^{k/2}$ vrcholech je možné obarvit dvěma barvami tak, aby v nich nebyl žádný úplný jednobarevný podgraf na k vrcholech.

Příklad 8. V tabulce 100×100 jsou napsaná čísla $1, 2, \ldots, 5000$, každé právě dvakrát. Dokažte, že je možné vybrat 100 čísel tak, že z každého sloupce a z každého řádku vybereme právě jedno číslo, a navíc budou tato čísla různá.

Střední hodnota

Definice. *Náhodná veličina* je reálné číslo, které spočteme na základě elementárního jevu, tedy například „číslo, které padlo na první kostce,“ nebo „počet kostek, na kterých padla trojka.“

Definice. *Střední hodnota* náhodné veličiny X je její průměrná hodnota a značí se $E(X)$. Přesněji je $E(X)$ vážený aritmetický průměr přes všechny hodnoty X na elementárních jevech, kde váhy jsou pravděpodobnosti těchto jevů.

Tvrzení. (počítání střední hodnoty)

(1) *Buď A jev a I_A náhodná veličina, která dává nulu resp. jedničku, pokud A nastal resp. nenastal. Pak $E(I_A) = P(A)$.*

(2) *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, pak $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*

(3) *Nechť X je náhodná veličina a r reálné číslo, pak $E(r \cdot X) = r \cdot E(X)$.*

Pozor! Další zobecnění tohoto tvrzení, jako například $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, již obecně neplatí.

Tvrzení 9. (použití střední hodnoty) *Buď X náhodná veličina. Pak existuje elementární jev, pro který platí $X \leq E(X)$, a také jiný elementární jev, pro který platí $X \geq E(X)$.*

Příklad 10. Nechť F je množina všech n-tic $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, kde každé A_i je podmnožinou $\{1, 2, \dots, 1998\}$. Označme $|A|$ počet prvků množiny A. Najděte hodnotu

$$\sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

(APMO 1998)

Příklad 11. V šachovém turnaji, kterého se zúčastnilo 40 hráčů, se odehrálo celkem 80 partií, přičemž žádná dvojice spolu nehrála víckrát. Ukažte pro co největší n, že existuje n hráčů, kteří mezi sebou nesehráli žádný zápas.

Příklad 12. V soutěži je a soutěžících a b porotců, kde $b \geq 3$ je liché číslo. Každý porotce hodnotí každého soutěžícího buď jako „dobrý“, nebo jako „špatný“. Předpokládejme, že k je takové číslo, že pro libovolnou dvojici porotců se jejich hlasy shodovaly u nejvýše k soutěžících. Dokažte nerovnost $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$. (IMO 1998)

Příklad 13. V turnaji n hráčů hrál každý s každým právě jednou. *Hamiltonovská cesta* je takové uspořádání n hráčů, že první porazil druhého, druhý třetího atd. Dokažte, že turnaj mohl dopadnout tak, že existovalo alespoň $\frac{n!}{2^{n-1}}$ hamiltonovských cest.

Příklad 14. Na večírku je $n \geq 2$ lidí, někteří se znají (vztah znát se je vzájemný). Dokažte, že existují dva lidé A, B takoví, že mezi zbylými $n-2$ najdeme $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ lidí, z nichž každý buď zná A i B, nebo oba nezná.

Příklad 15. Mějme graf G s n vrcholy a $m \geq 4n$ hranami. Dokažte, že kdykoli takový graf nakreslíme do roviny, bude obsahovat alespoň $\frac{m^3}{64n^2}$ průsečíků.

Návody

3. Spočítejte, s jakou maximální pravděpodobnostní se stane, že dané dítě nemá ve své skupince žádného kamaráda.

4. Zvolte náhodně dvojici studentů a spočítejte, s jakou pravděpodobnostní ani jeden z této dvojice nevyřeší danou úlohu.

5. Zvolte náhodně obarvení. S jakou pravděpodobností bude jedna vybraná aritmetická posloupnost jednobarevná?

6. Mezi pěti body v obecné poloze vždy existují alespoň 3 tupoúhlé trojúhelníky.

7. Vyberte náhodný graf. Jaká je pravděpodobnost, že na daných k vrcholech je jednobarevný podgraf?

8. Vyberte náhodně z každého sloupce a řádku právě jedno číslo. Jaká je pravděpodobnost toho, že vyberete číslo i dvakrát?

10. Vyberte náhodnou n-tici podmnožin. S jakou pravděpodobností se objeví číslo i ve sjednocení?

12. S jakou minimální pravděpodobností se dva porotci shodují na jednom určeném soutěžícím?

13. Vyberte náhodný graf a následně náhodnou permutaci hráčů. Jaká je pravděpodobnost, že v této permutaci tvoří hamiltonovskou cestu?

14. Řešte podobně jako příklad 12.

15. Použijte Eulerův vzorec, vyberte libovolné nakreslení a následně s pevně zvolenou pravděpodobností smažte každý z vrcholů.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je beze změn převzat od Filipa Bialase ze soustředění v Pasekách (2018), který jej beze změny převzal od Martina Töpfera, který jej vytvořil na soustředění ve Skleném (2015). Oběma tímto děkuji.

[1] Mirek Olšák: *Od Dirichleta k pravděpodobnosti*, sborník *i*KS, 2012.
[2] Law Ka Ho: *Probabilistic Method*, Mathematical Excalibur, 2009.
[3] Sourav Chakraborty: *Probabilistic method*, lecture notes.

Strojové učení a lineární regrese

Michal Töpfer

Abstrakt. Umělá inteligence je dnes k vidění skoro v každém oboru. Spousta firem se chlubí tím, že používá nějakou umělou inteligenci, přičemž dost často se jedná právě o strojové učení. Povíme si, co to strojové učení je, a pak si na příkladu relativně jednoduchého modelu lineární regrese ukážeme, že velká část strojového učení je vlastně aplikovaná matematika.

Strojové učení je oblast umělé inteligence, která se zaměřuje na algoritmy, které umožňují počítačovému systému „učit se".

Definice. (Mitchell, 1997) A computer program is said to learn from experience E with respect to some class of tasks T and performance measure P, if its performance at tasks in T, as measured by P, improves with experience E.

Výstupem učícího algoritmu je typicky nějaká funkce, která pro zadaná vstupní data predikuje výstupy.

Úlohy (T)

- **Klasifikace** – cílem je zařadit vstupní data do jedné z k kategorií.
- **Regrese** – pro vstupní data predikujeme (reálné) číslo.

Ohodnocení úspěšnosti (P)

Abychom poznali, jestli už se algoritmus něco naučil, potřebujeme nějak měřit, jak dobrý je v zadané úloze. Pro klasifikace se často používají metriky jako *accuracy* (podíl správných odpovědí) a *error rate* (podíl špatných odpovědí). Pro regresi většinou používáme průměrnou vzdálenost predikcí od správných hodnot, například ve formě *střední kvadratické odchylky* (MSE).

Zkušenost (E)

- **Učení s učitelem** (supervised learning) – pro vstupní data máme správné výstupy, data jsou tedy dvojice (vstup, výstup).
- **Učení bez učitele** (unsupervised learning) – pro vstupní data nemáme správné výstupy.
- **Zpětnovazebné učení** (reinforcement learning) – agent se učí ze zpětné vazby od prostředí.

Data většinou dělíme na *trénovací množinu* (na té se učíme) a *testovací množinu* (na té měříme úspěšnost učení).

Metody

V této přednášce se budeme zabývat pouze lineární regresí, nicméně obor strojového učení je velmi široký a zahrnuje celou řadu metod. Mezi nejznámější patří rozhodovací stromy (decision trees) a jejich vylepšení náhodné lesy (random forests), potom metody založené na nejbližších sousedech jako K-nearest neighbors a třeba také support vector machines. Samozřejmě nesmíme zapomenout také na neuronové sítě, které jsou v poslední době velmi využívané pro všechny možné druhy úloh.

Lineární regrese

Lineární regrese je jedním z nejjednodušších modelů pro úlohu regrese, tedy pro predikci číselného výstupu na základě číselných vstupních dat.

Trénovací množina je N příkladů vstupních a výstupních dat tvaru $(\vec{x}, y)$. Vstupní data jsou složena z několika atributů (features): $\vec{x} \in \mathbb{R}^D$ (sloupcový vektor). Výstupní data jsou čísla: $y \in \mathbb{R}$.

Hledáme hypotézu (model) h: $\mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$, která co nejlépe zachycuje vztah vstupních a výstupních dat.

Lineární regrese se omezuje na modely tvaru

$$h_{\vec{w},b}(\vec{x}) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_D w_D + b = \sum_{i=1}^{D} x_i w_i + b,$$

kde $\vec{w} \in \mathbb{R}^D$ (váhy) a $b \in \mathbb{R}$ (bias) jsou parametry modelu.

Pro zjednodušení zápisu se vstupní vektory rozšíří na dimenzi $D + 1$ přidáním jedničky. Potom můžeme bias brát jako součást vah a zapsat model jako skalární součin $h_{\vec{w}}(\vec{x}) = \vec{x}^T \vec{w}$.

Ohodnocení úspěšnosti – ztrátová funkce

Už jsme si určili, jaký tvar může mít náš model. Teď potřebujeme vybrat vhodnou sadu vah $\vec{w}$ pro zadaná vstupní data. Pro určení kvality našeho modelu si zavedeme ztrátovou (loss) funkci, která měří, jak moc náš model chybuje. Populární ztrátová funkce je *střední kvadratická odchylka* (mean squared error).

Definice. (residual sum of squares (RSS))

$$\mathrm{RSS}(\vec{w}) = \sum_{i=1}^{N} \left(h_{\vec{w}}\left(\vec{x}_i\right) - y_i\right)^2.$$

Definice. (mean squared error (MSE))

$$\mathrm{MSE}(\vec{w}) = \frac{1}{N} \mathrm{RSS}(\vec{w}).$$

Vidíme, že čím dál jsou naše predikce od skutečných hodnot, tím je ztrátová funkce větší. Chceme ji proto minimalizovat. Pro zjednodušení odvození budeme minimalizovat $E(\vec{w}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{RSS}(\vec{w})$.

Jednoduchá lineární regrese

Jednoduchá lineární regrese (simple linear regression) je označení pro modely, kde máme jen jednu vstupní proměnnou x. Model má tedy tvar

$$h_{w,b}(x) = x \cdot w + b.$$

Ztrátová funkce bude $E(w,b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i \cdot w + b - y_i\right)^2$.

Chceme mít co nejmenší chybu, proto hledáme taková w a b, pro která bude $E(w,b)$ minimální. Z analýzy víme, že v minimu funkce musí být všechny parciální derivace nulové, zkusíme je tedy spočítat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(w,b)}{\partial b} &= \sum_{i=1}^{N}\left(x_i \cdot w + b - y_i\right) = 0,\\ \frac{\partial E(w,b)}{\partial w} &= \sum_{i=1}^{N}\left(x_i \cdot w + b - y_i\right) \cdot x_i = 0.\end{aligned}$$

Rovnice můžeme upravit na

$$\begin{aligned}b &= \overline{y} - \overline{x} \cdot w,\\ w &= \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\left(y_i - \overline{y}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\left(x_i - \overline{x}\right)\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2},\end{aligned}$$

kde $\overline{x}$ značí aritmetický průměr. Tím jsme dostali vzorce pro výpočet koeficientů našeho modelu.

Příklad. Spočtěte koeficienty jednoduché lineární regrese pro data $(x,y) \in \{(5,10), (15,18), (25,14)\}$.

Minimalizace ztrátové funkce pro více vstupních proměnných

Když si trénovací příklady zapíšeme do řádků matice $X \in \mathbb{R}^{N\times D}$ a skutečné výstupy do řádků matice $Y \in \mathbb{R}^{N\times 1}$, můžeme minimalizaci zapsat jako

$$\vec{w}^* = \operatorname*{argmin}_{\vec{w}} \frac{1}{2}\,\mathrm{RSS}(\vec{w}) = \operatorname*{argmin}_{\vec{w}} \frac{1}{2}\|X\vec{w} - Y\|^2.$$

Z analýzy víme, že v minimu musí být parciální derivace podle všech složek nulové (pokud existují), takže je zkusíme spočítat.

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}_j}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{x}_i^T\vec{w} - y_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} 2\cdot\left(\vec{x}_i^T\vec{w} - y_i\right)\cdot x_{ij} = \sum_{i=1}^{N} x_{ij}\left(\vec{x}_i^T\vec{w} - y_i\right).$$

Chceme, aby všechny parciální derivace byly nulové. To znamená

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \left(\vec{x}_i^T \vec{w} - y_i \right) = 0,$$

tedy v maticové notaci

$$X^T (X\vec{w} - Y) = 0,$$

což můžeme upravit na

$$X^T X \vec{w} = X^T Y.$$

Pokud je matice $X^T X$ regulární, můžeme k ní najít inverzní matici a dostaneme řešení

$$\vec{w} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T Y.$$

Pro singulární matice se řešení dá hledat pomocí singulárního rozkladu (SVD), nebo stačí odebrat závislé atributy ze vstupních dat.

Algoritmus gradientového sestupu

V praxi nemusí být vhodné použít výše zmíněný algoritmus, protože výpočet inverzní matice může trvat dlouho. Někdy je proto lepší řešit minimalizační úlohu iterativně pomocí gradientového sestupu. Jeden krok gradientového sestupu pro minimalizaci

$$\vec{w}^* = \operatorname*{argmin}_{\vec{w}} E(\vec{w})$$

vypadá takto:

$$\vec{w} \;\leftarrow\; w - \alpha \nabla_{\vec{w}} E(\vec{w}),$$

kde α je parametr *learning rate* a $\nabla_{\vec{w}} E(\vec{w}) = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{w}_1} E(\vec{w}), \ldots, \frac{\partial}{\partial \vec{w}_D} E(\vec{w}) \right)^T$ je gradient funkce E podle proměnných $\vec{w}$.

Atributy

Lineární regrese umí modelovat jen lineární závislost výstupu na vstupních atributech. Pro složitější úlohy může být vhodné přidat nějaké nové atributy, aby model byl schopen zachytit i složitější závislosti. Model pak můžeme zapsat jako

$$h_{\vec{w}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{D'} f_i(\vec{x}) w_i,$$

kde f_i jsou funkce počítající nové atributy z původních. Časté takové funkce jsou

- $f(\vec{x}) = x_i$ (výběr jedné složky vstupu – tím dostaneme původní atributy),
- $f(\vec{x}) = x_i^2$, $f(\vec{x}) = x_i \cdot x_j$ (polynomy z původních atributů),
- $f(\vec{x}) = \log(x_i)$, $f(\vec{x}) = \sqrt{x_i}$ a další nelineární funkce,
- $f(\vec{x}) = I[a \leq x_i < b]$ (indikátor, že hodnota x_i je mezi konstantami a a b).

Více výstupů

Když máme více výstupů, můžeme pro každý výstupní atribut vytvořit vlastní model lineární regrese.

Literatura a zdroje

[1] Milan Straka: *přednášky Strojové učení pro zelenáče*, *https://ufal.mff.cuni.cz/courses/npfl129/*.
[2] Marta Vomlelová: *přednášky Strojové učení*, *https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=5765*.
[3] Barbora Hladká, Martin Holub: *přednášky Úvod do strojového učení*, *https://ufal.mff.cuni.cz/courses/npfl054*.

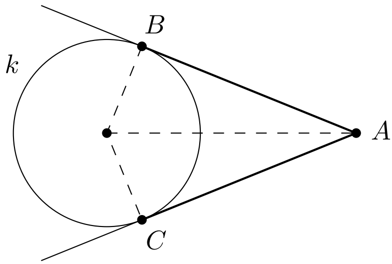
Překlápění tečen

Adéla Karolína Žáčková

Abstrakt. S tečnami se setkáváme například v olympiádní geometrii poměrně často. V přednášce se podíváme na některé jejich základní vlastnosti a ukážeme si, jak se pomocí nich dostat na zoubek i o něco těžším příkladům.

Při pohledu na příklad, kde se vyskytují tečny, bývá mnohdy první myšlenkou využít úsekové úhly, které nám tečny poskytují. Přestože úhlení je velmi častou a spolehlivou technikou v řešení geometrických příkladů, zdaleka ne vždy je elegantní a ne vždy také vede ke kýženému cíli. Ukážeme si proto některé, někdy snad trochu opomíjené vlastnosti tečen skýtající nám jinou cestu řešení.

Tvrzení. *Mějme kružnici k a bod A ležící vně kružnice. Veďme bodem A tečny ke k, body dotyku s kružnicí označme B, C. Pak $|AB| = |AC|$.*



Tvrzení. *Přímky p a q jsou společnými vnějšími tečnami kružnic k_1 a k_2. Přímka p se kružnice k_1 dotýká v bodě A a kružnice k_2 v bodě B, přímka q se kružnic dotýká v bodech C a D. Pak platí, že*

(i) $|AB| = |CD|$,

(ii) *pokud se kružnice neprotínají a jejich vnitřní tečna r protíná přímky p a q v bodech X a Y, pak $|AB| = |CD| = |XY|$.*

Tvrzení. *Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA a AB po řadě v bodech D, E a F. Potom $|AE| = |AF| = \frac{-a+b+c}{2}$.*

Tvrzení. *V trojúhelníku ABC se kružnice připsaná straně BC dotýká přímek BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Pak platí, že*

(i) $|AE| = |AF| = \frac{a+b+c}{2}$,

(ii) $|BD| = |BF| = \frac{a+b-c}{2}$, $|CD| = |CE| = \frac{a-b+c}{2}$,

(iii) *body dotyku s vepsanou a připsanou kružnicí jsou středově souměrné podle středu příslušné strany.*

První krůčky

Příklad 1. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A je poloměr vepsané kružnice roven $s-|BC|$, kde s je polovina obvodu trojúhelníku ABC.

Příklad 2. Mějme kružnici k se středem S o poloměru 1 a bod P takový, že $|PS| = 3$. Tímto bodem veďme tečny ke kružnici k, které se jí dotknou v bodech A, B. Dále si zvolme libovolný bod T kratšího oblouku AB kružnice k a jím veďme tečnu ke k. Tato tečna protne úsečky AP a BP v bodech X a Y. Určete obvod trojúhelníku PXY. (Náboj 2008)

Příklad 3. Je dán trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou k. Body X a Y leží na stranách AB a AC tak, že XY je tečna kružnice k a platí $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CA| = 8$. Určete obvod trojúhelníku AXY.

Příklad 4. Mějme trojúhelník ABC. Nakreslíme tři tečny k jeho vepsané kružnici tak, že každá odřízne jiný z vrcholů trojúhelníku. Obvody odříznutých trojúhelníků jsou 1, 2 a 3. Dokažte, že původní trojúhelník byl pravoúhlý. (MKS 32–6–3)

Příklad 5. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho obvod o, poloměr ρ kružnice připsané ke straně BC a velikost výšky v na tuto stranu. (MO 68–A–I–5)

Příklad 6. V daném trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABD se dotýká stran AB a BD v bodech K a L. Kružnice vepsaná trojúhelníku ADC se dotýká stran DC a AC v bodech M a N. Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici. (MO 64–A–I–5)

Příklad 7. Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $|AB| > |BC|$. Body K a M jsou body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD a ABC s úhlopříčkou AC. Body L a N jsou obdobně body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD a ABD s BD. Dokažte, že $KLMN$ je obdélník. (MO 54–A–I–2)

Příklad 8. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Na polopřímce opačné k polopřímce BC leží bod P takový, že $|AB| = |BP|$. Analogicky na polopřímce opačné k polopřímce CB leží bod Q takový, že $|AC| = |CQ|$. Označme J střed kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku a D, E po řadě její body dotyku s přímkami AB a AC. Předpokládejme, že polopřímky opačné k polopřímkám DP a EQ se protínají v bodě F různém od J. Dokažte, že $AF \perp FJ$. (MO 68–A–III–4)

Příklad 9. Trojúhelník ABC má obvod 8. Na stranách AB, AC jsou postupně zvoleny body D, E tak, že $DE \parallel BC$ a zároveň je DE tečnou kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Jaká je největší možná délka DE? (Kyjev TST 2019)

A jedeme dál

Tvrzení. (o tečnovém čtyřúhelníku) *Je dán čtyřúhelník $ABCD$, který má vepsanou kružnici (dotýká se všech čtyř stran). Ukažte, že $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.*

Příklad 10. Je dán rovnoběžník $ABCD$, přičemž $|AB| = 2 \cdot |BC|$. Určete všechny přímky, které dělí daný rovnoběžník na dva tečnové čtyřúhelníky.

(MO 64–A–S–2)

Příklad 11. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC se úhlopříčky AC dotýkají v jednom bodě.

Příklad 12. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|AB| + |BC| = |CD| + |AD|$. Kružnice vepsané trojúhelníkům ABD a CBD se úhlopříčky BD dotýkají v bodech X a Y. Dokažte, že body X a Y jsou stejně vzdáleny od středu úsečky BD.

Příklad 13. Na přímce a, na níž leží strana BC trojúhelníku ABC, jsou dány body dotyku všech tří jemu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané. (MO 63–B–I–3)

Příklad 14. Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D, E, F tak, aby se úsečky AD, BE, CF proťaly v jednom bodě, který označíme G. Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte.

(MO 52–A–III–2)

Příklad 15. Mějme trojúhelník ABC s obvodem 4. Na polopřímkách AB a AC označme postupně body X, Y tak, že $|AX| = |AY| = 1$ a úsečky BC a XY se protínají v bodě M. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABM, ACM má obvod 2. (Rusko 2011)

Příklad 16. Nechť Γ je kružnice se středem I a $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, jehož strany AB, BC, CD a DA jsou tečnami kružnice Γ, a Ω je kružnice opsaná trojúhelníku AIC. Polopřímka BA protíná kružnici Ω v bodě X, který leží za bodem A, a polopřímka BC protíná Ω v bodě Z, který leží za bodem C. Polopřímky AD a CD protínají kružnici Ω po řadě v bodech Y a T, které leží za bodem D. Dokažte, že

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

(IMO 2021 – 4)

Návody

1. Čím je zajímavý čtyřúhelník AP_1IP_2, kde I je střed kružnice vepsané a P_1, P_2 jsou její body dotyku s odvěsnami?

2. Co víme o úsečce PB?

3. Nechť P je bod dotyku kružnice k a strany AB. Pomůže nám pak délka úsečky AP?

4. Zkus využít poznatky z minulého příkladu.

5. Umíme z kružnice připsané získat bod A? Je pak BC tečna ještě nějaké jiné kružnice?

6. Zkus dokázat, že se osy úseček KL, LM a MN protínají v jednom bodě, konkrétně ve středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

7. Dokaž pomocí překlápění tečen, že v $KLMN$ se úhlopříčky půlí a jsou stejně dlouhé.

8. Dokaž, že F leží na kružnici opsané čtyřúhelníku $ADJE$, tedy že $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle AEF|$.

9. Zkus si vyjádřit DE pomocí BC. Najdi vrchol paraboly popisující onu kvadratickou rovnici vyjádření.

10. Dokaž, že pokud $ABCD$ není obdélník, pak takové přímky existují právě dvě, obě prochází průsečíkem úhlopříček a na rovnoběžníku vytínají úsečky délky BC. Jak je tomu pro obdélník?

11. Vyjádři si vzdálenosti bodů dotyku jednotlivých kružnic s AC a dokaž, že se rovnají.

12. Dokaž, že $|BX| = |DY|$, a zamysli se, proč tím už máme vyhráno.

13. Dokaž, že $|BX| = |CZ|$, a sestroj střed úsečky BC.

14. Uvědom si, že kružnice vepsaná čtyřúhelníku $AFGE$ je zároveň kružnicí vepsanou trojúhelníkům ABE a AFC, a vyjádři velikost tečen. Dokaž, že přímky AD, BE a CF jsou osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, a využij jejich vlastnosti.

15. Dokresli připsanou kružnici k ABC a kružnici se středem v A a nulovým poloměrem.

Literatura a zdroje

Chtěla bych moc poděkovat Aničce Doležalové a Ádě Kostelecké, z jejichž příspěvků jsem převzala velkou část přednášky.

[1] Áďa Kostelecká: *Překlápění tečen*, Horní Lysečiny, 2018.
[2] *Stránky matematické olympiády*, *http://www.matematickaolympiada.cz.*
[3] *Art of problem solving*, *https://artofproblemsolving.com.*

Obsah