# Lysečiny

Sborník, léto 2021

Filip Čermák
Matěj Doležálek
Petr Gebauer
Verča Hladíková
Lenka Kopfová
Josef Minařík
Radek Olšák
Terka Poláková
Hedvika Ranošová
Martin Raška
Pavel Turek

Autoři: Filip Čermák, Matěj Doležálek, Petr Gebauer, Verča Hladíková, Lenka Kopfová, Josef Minařík, Radek Olšák, Terka Poláková, Hedvika Ranošová, Martin Raška, Pavel Turek
Editor: Matěj Doležálek, Radek Olšák
vydání první, náklad 40 výtisků
srpen 2021
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

# Permutační nerovnost

Filip Čermák

Abstrakt. V matematice máme fůru různých nerovností. Zkušený olympiádník je prostě vidí, na první pohled ale vůbec očividné nejsou. My se v příspěvku budeme zabývat takzvanou permutační nerovností, která je intuitivně úplně zřejmá. Od jednoduchých nerovniček nás permutační nerovnost dovede k silným nerovnostem, se kterými si už budeme moct troufnout na nejeden pořádný příklad.

## Co to je?

Ujasněme si pro začátek, co je to permutace a permutační nerovnost. Permutací $\sigma$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ myslíme nějaké její přeuspořádání. Permutace jako takové ale (kromě značení) používat vůbec nebudeme. Permutační (také *mincovní*) nerovností myslíme následující nerovnost, která platí pro libovolné dvě $n$-tice nezáporných reálných čísel.

**Věta.** *Mějme posloupnosti reálných čísel* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ *a* $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$*. Dále ať* $\sigma$ *je libovolná permutace množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$*, která přeuspořádává* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *na* $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$*. Pak*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x_1y'_1 + x_2y'_2 + \cdots + x_ny'_n \geq x_1y_n + x_2y_{n-2} + \cdots + x_ny_1.$$

Proč je permutační nerovnost tak zřejmá? Představte si následující situaci: Na stole leží $n$ hromádek bankovek, v každé hromádce jsou bankovky jedné vydávané hodnoty. Všechny tyto hromádky jsou přitom „nekonečné“. Každý z následujících $n$ dní si můžete vybrat hromádku, ze které jste zatím nikdy nic nebrali, a vzít si z ní nějaký počet bankovek. Přitom máte ale dopředu určeno, kolik bankovek si který den smíte vzít. Permutační nerovnost pak pouze jinými slovy říká, jak si v této situaci vydělat co nejvíc a jak co nejmíň.

*Důkaz.* Začneme první nerovností. Nejprve nějak náhodně popárujme dvojičky $x$ a $y$ do součinů. BÚNO $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$. Ukážeme, že pokud příslušné $n$-tice nebyly souhlasně uspořádané, postupným „opravováním“ si neuškodíme. Ať se příslušná permutace liší od té identické poprvé na indexu $i$, tedy

$y'_i = y_j$ pro $j \neq i$. Protože ale permutace byla doteď identická, leží skutečné $y_i$ ještě dál na nějakém indexu $k > i$. Ze stejného důvodu je také $j > i$. Zkusme tedy prohodit čísla $y_i$ a $y_j$, čímž získáme nějakou novou permutaci posloupnosti $y$. Tyto dvě permutace se ale liší pouze na indexech $i$ a $k$, polepšili jsme si proto přesně o

$$(x_i y_i + x_k y_j) - (x_i y_j + x_k y_i) = (x_i - x_k)(y_i - y_j) \geq 0,$$

neboť $i > j$ a zároveň $i > k$. Postupný prohazováním nakonec dostaneme posloupnosti $y$ ve správném pořadí. □

V permutační nerovnosti přitom nastává rovnost pouze tehdy, pokud po dosazení příslušných čísel za proměnné $x_i$ a $y_i$ dostaneme na obou stranách nerovnosti (před provedením násobení a sčítání) stejné výrazy (až na pořadí členů ve sčítání).

Pokud dále řekneme, že nějaké dvě posloupnosti $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $y_1, y_2, \dots, y_n$ délky $n$ jsou *souhlasně uspořádané*, myslíme tím fakt, že $x_i \geq x_j$ právě tehdy, když $y_i \geq y_j$. Obdobně definujeme *opačně uspořádané* posloupnosti. Permutační nerovnost tedy vlastně říká, že největší výsledek výrazu $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ získáme ze dvou souhlasně uspořádaných posloupností, nejmenší z opačně uspořádaných.

Permutační nerovnost přitom typicky *homogenní* výrazy odhaduje opět homogenními výrazy stejného stupně. Často nám umožní velmi jednoduše odhadovat *cyklické* výrazy pomocí jiných cyklických výrazů.

## Je to zřejmé ...

Pojďme se konečně vrhnout na první úlohy. Začneme úlohami, které často stačí pouze přejet očima. Tyto úlohy jdou typicky řešit i mnohými jinými (skoro všemi) přístupy, zkusíme se na ně ale dívat opravdu přes nerovnost permutační. Při řešení je vhodné si alespoň koutkem oka všimnout i předpokladů na proměnné – typicky je neuvádíme pro pobavení ušáků.

**Úloha 1.** Pro reálná $a$, $b$, $c$ dokažte

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

**Úloha 2.** Pro reálná $x, y, z \geq 0$ ukažte

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

**Úloha 3.** Pro reálná $x$, $y$, $z$ ukažte

$$x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 \geq x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2.$$

**Úloha 4.** Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

**Úloha 5.** Ať $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ jsou reálná čísla a $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ je permutace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Potom

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - y'_1)^2 + (x_2 - y'_2)^2 + \cdots + (x_n - y'_n)^2.$$

(IMO 1975)

**Úloha 6.** Pro kladná reálná čísla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a jejich libovolnou permutaci $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ nahlédněte

$$\frac{x_1}{x'_1} + \frac{x_2}{x'_2} + \cdots + \frac{x_n}{x'_n} \geq n.$$

**Úloha 7.** Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc}.$$

## Drobná zamyšlení

Protože už jsme si vyzkoušeli úlohy, které permutační nerovnost dělá za nás, pustíme se teď do úloh, kde musíme něco jednoduchého udělat i my.

**Úloha 8.** Pro $0 < x < \frac{\pi}{2}$ najděte minimum výrazu

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}.$$

**Úloha 9.** Na stole leží $n$ po dvou různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokažte

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

**Úloha 10.** Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a+1}{b\sqrt{b}} + \frac{b+1}{c\sqrt{c}} + \frac{c+1}{a\sqrt{a}} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

**Úloha 11.** Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} \geq 2(a+b+c).$$

**Úloha 12.** Pro reálná $x, y, z > 0$ dokažte

$$\frac{x^2-z^2}{y+z} + \frac{y^2-x^2}{z+x} + \frac{z^2-y^2}{x+y} \geq 0.$$

**Úloha 13.** Jsou dána reálná $x, y, z > 0$. Ukažte odhad

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

**Úloha 14.** Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte *Nesbittovu* nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

**Úloha 15.** Pro reálná $a, b, c > 0$ splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**Úloha 16.** Pro reálná $a, b, c > 0$ a $n$ přirozené ukažte

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

**Úloha 17.** Jsou dána reálná $a_1, a_2 \dots, a_n > 0$, pro přehlednost označme $s$ jejich součet. Potom

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

**Úloha 18.** Dána jsou reálná $a, b, c > 0$. Dokažte

$$a^a b^b c^c \geq \sqrt[3]{(abc)^{a+b+c}}.$$

Dále se z permutační rovnosti dá odvodit třeba *Cauchyho–Schwarzova* nerovnost nebo *průměrové* nerovnosti. My se však nyní přesuneme k nerovnosti *Čebyševově.*

## Čebyšev

Začneme úlohou doslova šitou na míru permutační nerovnosti, která má shodou náhod své vlastní jméno.

**Věta.** (Čebyševova nerovnost) *Ať $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ jsou $n$-tice reálných čísel. Potom*

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left( \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left( \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \geq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}.$$

*Důkaz.* Pro první nerovnost dokola sečteme všech $n$ permutačních nerovností tvaru $\sum a_i b_i \geq \sum a_i b_{i+k}$. Druhá nerovnost se dokáže analogicky. □

**Tvrzení.** *V Čebyševově nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \qquad \textit{nebo} \qquad y_1 = y_2 = \cdots = y_n.$$

Na první pohled se zdá, že Čebyševova nerovnost musí být opravdu hloupá, neboť jsme ji získali nasčítáním hromady slabých permutačních nerovností. Překvapivě je ale poměrně silná a užitečná, a to právě kvůli tomu, že se na čísla dívá „z větší výšky“. Nyní si v praxi vyzkoušíme, co tato nerovnost umí.

**Úloha 19.** Pro reálná $a$, $b$, $c$ ukažte

$$3(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^5 + b^5 + c^5)(a^3 + b^3 + c^3).$$

**Úloha 20.** Jsou dána reálná $a_1, a_2, \ldots, a_2 > 0$, která splňují $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Potom

$$\frac{a_1}{2 - a_1} + \frac{a_2}{2 - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2 - a_n} \geq \frac{n}{2n - 1}.$$

**Úloha 21.** Pro reálná $a, b, c, d > 0$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} + \frac{a^3 + b^3 + d^3}{a + b + d} + \frac{a^3 + c^3 + d^3}{a + c + d} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b + c + d} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

**Úloha 22.** Pro reálná $a, b, c > 0$ ukažte nerovnost

$$\frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} \leq \frac{3(ab + bc + ca)}{2(a + b + c)}.$$

**Úloha 23.** Mějme čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Dokažte nerovnost

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \sin a_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} \cos a_i \right) \leq \frac{n^2}{2}.$$

**Úloha 24.** Ať reálná $a, b, c, d > 0$ splňují $a + b + c + d = 4$. Potom ukažte

$$\frac{1}{11 + a^2} + \frac{1}{11 + b^2} + \frac{1}{11 + c^2} + \frac{1}{11 + d^2} \leq \frac{1}{3}.$$

**Úloha 25.** Ať $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ je $n$-tice reálných čísel, která splňují

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n} = 1.$$

Dokažte, že

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \geq (n - 1) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right).$$

**Úloha 26.** Pro reálná $a, b, c, d \geq 0$ splňující $ab + bc + cd + da = 1$ ukažte

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

(IMO Shortlist 1990)

**Úloha 27.** Reálná čísla $x, y, z \geq 0$ splňují $xyz = 1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

(IMO Shortlist 1998)

## Algebry s obrázkem

V běžném trojúhelníku platí různé vztahy mezi délkami různých úseček a různými úhly. Některé z nich přitom přímo vybízí k použití permutační či Čebyševovy nerovnosti. Některé jsou triviální, některé ne. Podívejme se na ně tedy podrobněji.

**Úloha 28.** Trojúhelník má strany s délkami $a$, $b$, $c$. Dokažte

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

**Úloha 29.** V rovině je dán $\triangle ABC$ s obsahem $S$ a délkami stran $a$, $b$, $c$. Dále označme délky výšek na tyto strany po řadě $v_a$, $v_b$, $v_c$. Dokažte nerovnost

$$a(v_b + v_c) + b(v_c + v_a) + c(v_a + v_b) \geq 12S.$$

**Úloha 30.** Délky stran $\triangle ABC$ naproti vrcholům $A$, $B$, $C$ označme popořadě $a$, $b$, $c$, velikosti úhlů (v radiánech) příslušné těmto vrcholům popořadě $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Dokažte

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{6}{\pi} \cdot (a+b+c).$$

**Úloha 31.** V rovině je dán ostroúhlý $\triangle ABC$ s ortocentrem $H$. Dokažte, že součet vzdáleností $H$ od stran trojúhelníku je roven nejvýše trojnásobku poloměru kružnice jemu vepsané.

**Úloha 32.** Délky stran a velikosti úhlů v $\triangle ABC$ označme běžným způsobem jako $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Jasnovidec nám přitom řekl, že $a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta)$. Dokažte, že $\triangle ABC$ je rovnoramenný. (IMO 1966)

**Úloha 33.** Je dán $\triangle ABC$ označený běžným způsobem. Dokažte

$$a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{2}.$$

(PraSe 29–S–5)

## Poleva na dort

Vraťme se na chvilku k permutační nerovnosti a zkusme si ji zobecnit.

**Úloha 34.** Ať jsou

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0, \qquad y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0, \qquad z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq z_n \geq 0$$

posloupnosti reálných čísel a $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$, $(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$ jsou permutace posloupností $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Potom platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y'_i z'_i.$$

Podobně můžeme permutační nerovnost zobecnit pro větší počet posloupností. Přitom je ale opravdu potřeba předpokládat nezápornost čísel. Předveďme si ještě duální verzi permutační nerovnosti, kde „zaměníme“ násobení se sčítáním.

**Úloha 35.** Jsou dána reálná čísla $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$, dále $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ je permutace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Potom

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i) \leq \prod_{i=1}^{n}(x_i + y'_i) \leq \prod_{i=1}^{n}(x_i + y_{n+1-i}).$$

Stejně jako minule, i tuto nerovnost lze zobecnit pro nezáporná čísla pro libovolný počet posloupností.

## Třešnička na dortu

Každá slušná nerovnost, která obsahuje nějaké sumy, má také svoji integrální verzi. Z původní algebraické nerovnosti ji získáme uvážením větších a větších sum, které se blíží k příslušnému integrálu.

**Věta.** (integrální Čebyševova nerovnost) *Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ mějme dvojici stejným způsobem monotónních funkcí $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}_0^+$. Potom*

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

**Poznámka.** Pokud jsou funkce $f$, $g$ monotónní opačným způsobem, dostaneme opačnou nerovnost.

**Úloha 36.** Mějme reálná $x, y > 0$ a libovolná přirozená $m$, $n$. Potom dokažte nerovnost

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n}+y^{m+n})+(m+n-1)(x^m y^n+x^n y^m) \geq mn(x^{m+n-1}y+y^{m+n-1}x).$$

**Úloha 37.** Jsou dána reálná čísla $x, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dokažte, že

$$(y-x)(\cos(2x)-\cos(2y)) \leq 4(\cos(x)-\cos(y))(\sin(y)-\sin(x)).$$

## Návody

**1.** Vezměte dvakrát stejnou trojici $(a, b, c)$.

**2.** Opačně uspořádané trojice $(x^2, y^2, z^2)$ a $(yz, zx, xy)$.

**3.** Dvě stejné (souhlasně uspořádané) trojice $(x^2y, y^2z, z^2x)$.

**4.** Vezměte dvakrát trojici $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$.

**5.** Holt roznásobte závorky, zbavte se druhých mocnin a vynásobte $(-1)$.

**6.** Posloupnosti $x_i$ a $\frac{1}{x_i}$ jsou opačně uspořádané.

**7.** Stačí vzít dvě stejné trojice $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ a upravit pravou stranu. Nebo můžete nerovnost vynásobit $abc$ a uvážit předešlou trojici společně s trojicí $bc$, $ca$, $ab$.

**8.** Uvažte kladné posloupnosti $\sin^3 x$, $\cos^3 x$ a $\cos^{-1} x, \sin^{-1} x$. Vyjde tedy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

**9.** Nejprve „setřepejte“ čísla $a_i$ dolů na čísla $1, 2, \ldots, n$ a poté očividným způsobem použijte permutační nerovnost.

**10.** Odhadněte jmenovatele jako dvojnásobky odmocnin a pak uvažte trojice $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$, $\left(\frac{1}{a\sqrt{a}}, \frac{1}{b\sqrt{b}}, \frac{1}{c\sqrt{c}}\right)$.

**11.** Zlomky si rozdělte, následně použijte na dvě trojice zlomků permutační nerovnost, která je odhadne jako $a + b + c$.

**12.** Záporné věci dejte doprava. Posloupnosti $(x^2, y^2, z^2)$ a $(\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{y+z})$ jsou souhlasně uspořádané.

**13.** Najednou to jde špatně. Zkuste ale použít permutační nerovnost dvakrát za sebou, vždy tím nejjednodušším možným způsobem.

**14.** Vynásobte nerovnost dvěma. Pokud BÚNO $a \geq b \geq c$, potom také platí $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$. Posléze sečtěte dvě permutační nerovnosti tak, aby se jmenovatele vykrátily.

**15.** Substituce $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ situaci vyjasní, přitom stále $xyz = 1$. Vynásobení dvěma a použití dvou permutačních nerovností nám dá dolní odhad $x + y + z$, který je zřejmě větší roven třem díky podmínce.

**16.** Vynásobte dvěma, pak dvakrát použijte trojice $a, b, c$ a $\frac{a^{n-1}}{b+c}, \frac{b^{n-1}}{c+a}, \frac{c^{n-1}}{a+b}$.

**17.** Vynásobte $n-1$, vezměte posloupnosti $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\left(\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \ldots, \frac{1}{s-a_n}\right)$ a sečtěte $n - 1$ cyklicky posunutých permutačních nerovností.

**18.** Nerovnost zlogaritmujte, vynásobte třemi a následně vezměte trojice $a$, $b$, $c$ a $\log a$, $\log b$, $\log c$.

**19.** Čebyšev dvou tříprvkových souhlasně uspořádaných posloupností.

**20.** Vynásobte jmenovatelem pravé strany, který interpretujte jako součet všech jmenovatelů nalevo, pak přichází na řadu Čebyšev pro opačně uspořádané posloupnosti.

**21.** Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte každý zlomek zvlášť jako $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

**22.** Vynásobte jmenovatelem pravé strany. Pak jsou posloupnosti $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ac}{a+c}, \frac{bc}{b+c}\right)$ a $(a+b, a+c, b+c)$ souhlasně uspořádané – BÚNO volte $a \geq b \geq c$, což jednoznačně určuje nerovnosti v obou trojicích. Dokazovaná nerovnost je pak odpovídající Čebyšev.

**23.** Siny a kosiny jsou opačně uspořádané, po zřejmém použití Čebyševovy nerovnosti je potřeba vynásobit vzniklou sumu dvěma a vhodné dvojice členů spojit pomocí součtových vzorců pro sinus.

**24.** Všechno převeďte nalevo, tedy od každého zlomku odečtěte $\frac{1}{12}$. Využijte faktu, že posloupnosti $(a-1, b-1, c-1, d-1)$, $\left(\frac{a+1}{11+a^2}, \frac{b+1}{11+b^2}, \frac{c+1}{11+c^2}, \frac{d+1}{11+d^2}\right)$ jsou souhlasně uspořádané, po provedení Čebyševa využijte podmínku.

**25.** Přičtěte k nerovnosti ještě jednu závorku z pravé strany, na levé straně popárujte členy se stejnými neznámými a upravte. Levou stranu pak ještě jen tak pro radost vynásobte podivnou jedničkou ze zadání. Ověřte, že můžete použít Čebyševa tak, jak byste chtěli (pozor, dá to trochu práci).

**26.** Díky podmínce je nutně $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 1$. Jmenovatele označme $A$, $B$, $C$, $D$. Dvakrát za sebou Čebyševujte – poprvé logickým způsobem na zlomky, podruhé pro rozbití sumy třetích mocnin na součin sum prvních a druhých. Druhé mocniny zmizí, dále $3(a+b+c+d) = A+B+C+D$, což jde dokončit snadnou permutační nerovností.

**27.** Z podmínky si pouze odneseme $x+y+z \geq 3$. Nejdřív použijeme jasného Čebyševa (jednu posloupnost tvoří čitatele). Označte $x+y+z = 3a$, jmenovatele celého vzniklého výrazu odhadněte shora jako $(1+a)^3$, zbývá se vypořádat s odhadem součtu třetích mocnin pomocí $a$. Až budete mít nějakou racionální funkci v $a$, použijte $a \geq 1$.

**28.** Označme $o = a+b+c$, vezměte opačně uspořádané posloupnosti $(a, b, c)$ a $(a(o-a), b(o-b), c(o-c))$. Jejich uspořádání přitom vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti. Proveďte dvě cyklické záměny a obě příslušné permutační nerovnosti sečtěte.

**29.** Protože platí $2S = av_a = bv_b = cv_c$, jsou posloupnosti $(a, b, c)$, $(v_a, v_b, v_c)$ opačně uspořádané. Použitím dvou minimalizujících permutačních nerovností společně s rovností $av_a + bv_b + cv_c = 6S$ jsme hotovi.

**30.** Ze sinové věty leží proti nejdelšími úhlu nejdelší strana, proti nejmenšímu úhlu nejkratší strana. Stačí použít Čebyševa na opačně uspořádané posloupnosti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a $\frac{b+c}{\alpha}$, $\frac{c+a}{\beta}$, $\frac{a+b}{\gamma}$.

**31.** Označme $S$ obsah a $o$ obvod trojúhelníku. Nahlédněte, že poloměr vepsané je roven $\frac{2S}{o}$. Nerovnost posléze vynásobte $o$ a použijte Čebyševa. K jeho použití je třeba si uvědomit, že vzdálenosti $H$ od stran jsou souhlasně uspořádané jako strany.

**32.** Pokud je nějaký z úhlů $\alpha$, $\beta$ tupý, příslušný tangens je záporný, pravá strana je pak moc malá. V opačném případě můžete výraz ($a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta$ odhadnout Čebyševovou (resp. dvojitou permutační) nerovností). V odhadu nastává rovnost právě tehdy, když $a = b$. Součet obou tangens nakonec odhadněte Jensenovou nerovností, čímž nám zbyde jen $a + b$.

**33.** Kosiny a protější strany jsou opačně uspořádané, můžeme je proto zčebyševovat. Zbývá odhadnout součet kosinů pomocí Jensenovy nerovnosti.

**34.** Je potřeba jít trochu do hloubky, předpoklad na nezápornost opravdu musíte využít.

**35.** Postavte se k důkaz stejně, jako k důkazu běžné permutační nerovnosti. Jedním prohozením si nepohoršíme třeba díky AG.

**36.** BÚNO $x < y$. Na intervalu $\langle x, y\rangle$ vezměte rostoucí funkce $f(t) = t^{n-1}$ a $g(t) = t^{m-1}$. Vypočtěte odpovídající určité integrály.

**37.** BÚNO $x \leq y$. Použijte spodní integrální Čebyševovu nerovnost na „opačně monotónní“ funkce $\sin(t), \cos(t)$ na intervalu $\langle x, y\rangle$.

## Literatura a zdroje

[1] Jakub Lowit: *Permutační nerovnost*, Zásada, 2017.
[2] Zdravko Cvetkovski: *Inequalities.*
[3] Michal Rolínek, Pavel Šalom: *Zdolávání nerovností.*
[4] Gabriel Dospinescu, Titu Andreescu: *Problems from the Book.*

# Počítání dvěma způsoby

Filip Čermák

Abstrakt. Počítání dvěma způsoby je velmi mocný nástroj k dokazování (nejen) kombinatorických identit. V příspěvku si ukážeme několik úloh, které lze touto technikou vyřešit a pokusíme se naučit způsob, jak řešení takových úloh vymýšlet.

Hlavní motivací pro využívání techniky počítání dvěma způsoby je elegantní přístup ke spočtení nějakého výrazu – obvykle součtu mnoha netriviálních hodnot – či odhadnutí nějakého argumentu. To provedeme tak, že vytvoříme množinu, na jejíž prvky můžeme nahlížet více způsoby. Počty odvozené z těchto pohledů budou odpovídat hledaným hodnotám, jelikož však počítáme prvky jedné množiny, musí nám vyjít stejné hodnoty, případně odhad jedné hodnoty pomocí druhé.

**Úloha.** (motivační) Na večírku si někteří lidé vzájemně potřásli rukou. Ukažte, že počet lidí, kteří si potřásli rukou lišekrát, je sudý.

*Řešení.* Představme si tento večírek jako graf. Vrcholy budou lidé a hrany mezi vrcholy budou představovat potřesení rukou. Potom chceme spočítat celkový počet incidencí – tedy dvojic (*vrchol*, *hrana*), kde se jedná o jeden z koncových vrcholů dané hrady – dvěma způsoby. Nejprve řekněme, že se jedná o součet incidencí přes všechny vrcholy. Dostaneme $\sum_{v\in V} i_v$, kde $i_v$ značí, kolikrát si potřásla rukou osoba $v$. Na druhou stranu můžeme počítat podle hran (potřesení rukou), čímž obdržíme výsledek $2\cdot|E|$, kde $E$ je množina hran. Nyní už víme, že $\sum_{v\in V} i_v = 2\cdot|E|$, z čehož pak plyne výsledek.

**Úloha.** (motivační) Spočítejte

$$1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}.$$

*Řešení.* Chceme se na tento součet podívat jako na reprezentaci nějaké situace. Kombinační čísla v součtu naznačují, že nám půjde o všechny podmnožiny $n$-prvkové množiny, přičemž každá $i$-prvková podmnožina přispívá do součtu právě $i$ (počet svých prvků). Můžeme si to představit tak, že máme trénink fotbalistů, kde se postupně sejdou všechny možné skupinky z daného $n$-členného týmu a v každé skupince vždy každý hráč vystřelí na branku.

Jde tedy o střely na branku, což odpovídá dvojicím (*skupina, hráč ze skupiny*). Jeden způsob, jak dvojice spočítat, je zvolit nejprve skupinu a poté hráče z ní – takto dostaneme součet zadaný v úloze. Druhý způsob je zvolit nejprve hráče, který bude střílet, a poté k němu doplnit nějaké hráče (klidně žádného), čímž vytvoříme skupinku. Tím máme na výběr $n$ střelců a ke každému přidáváme libovolnou podmnožinu ze zbylých $n-1$ hráčů, takže dostáváme celkem $n \cdot 2^{n-1}$ střel.

K počítání dvěma způsoby se často hodí různé kombinatorické identity, několik z nich si zde ukážeme a zkusíme odvodit.

## Kombinatorické identity

Před tím, než si začneme hrát s kombinačními čísly, bychom si je mohli zadefinovat.

**Definice.** Označme $\binom{n}{k}$ počet způsobů, jak z $n$ prvkové množiny vybrat $k$ prvků, tedy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Příklad 1.** (úvodní) Dokažte

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

**Příklad 2.** Dokažte

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Příklad 3.** Dokažte

$$\binom{n+m+1}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k}.$$

**Příklad 4.** Dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

**Příklad 5.** Dokažte

$$\binom{n}{r} r = n \binom{n-1}{r-1}.$$

**Příklad 6.** Dokažte

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

**Příklad 7.** Dokažte

$$\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{d}.$$

**Příklad 8.** (Vandermondeova identita) Dokažte

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

## Lehčí příklady

**Příklad 9.** Nechť $\mathbb{P}$ je systém všech permutací $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel 1 až $n$ takových, že žádné tři sousední prvky netvoří rostoucí posloupnost. Označme $a_i$ průměrnou hodnotu na $i$-té pozici těchto permutací, tedy

$$a_i = \frac{1}{|\mathbb{P}|} \sum_{p \in \mathbb{P}} p_i.$$

Čemu se rovná součet všech $a_i$?

**Příklad 10.** Na dětském táboře je 15 dětí. Každý den mají tři děti službu v kuchyni a platí, že každá dvojice dětí má právě jednou společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

**Příklad 11.** Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.

**Příklad 12.** Pole mřížky $21 \times 21$ jsou obarvena tak, že v každém řádku i sloupci se vyskytuje nejvýše 5 různých barev. Ukažte, že se některá z barev vyskytuje ve třech řádcích a zároveň i ve třech sloupcích.

**Příklad 13.** Označme $\mathbb{S}_n$ systém všech permutací $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel 1 až $n$. Pro permutaci $p \in \mathbb{S}_n$ označme

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_i.$$

Ukažte, že

$$4 \sum_{p \in \mathbb{S}_n} f(p) = (n^2 + n)(n+1)!.$$

**Příklad 14.** V matematické olympiádě řešilo 45 účastníků šest příkladů, každý příklad byl vyřešen právě 25 řešiteli. Ukažte, že můžeme vybrat dva účastníky, kteří dohromady vyřešili vše.

## Těžší příklady

Jelikož se dvojí počítání často využívá v důkazových metodách v teorii grafů, zavedeme si nějakou teorii, abychom byli všichni na stejné lodi.

**Definice.** *Graf* $G$ je uspořádaná dvojice množiny vrcholů $V$ a množiny hran $E$, kde každá hrana vede mezi dvěma vrcholy.

**Definice.** *Cesta* mezi vrcholy $u$ a $v$ v grafu je posloupnost vrcholů taková, že se v ní žádný vrchol neopakuje a první vrchol je $u$ a poslední $v$. *Souvislý* graf je takový, kde mezi každou dvojicí vrcholů existuje cesta. *Strom* je minimální souvislý graf, tedy mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje právě jedna cesta. Ekvivalentně je to souvislý graf, který má $|V|-1$ hran. *Kostra* grafu je podgraf, který je stromem na všech vrcholech.

**Příklad 15.** Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^{2n} i(2n+1-i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

**Definice.** *Rovinné nakreslení* grafu je takové nakreslení, kde se žádné dvě hrany nekříží mimo vrchol.

**Příklad 16.** Mějme rovinné nakreslení grafu $G$, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy $G$ jsou obarveny třemi barvami.[1] Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.

**Příklad 17.** Dokažte, že platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 .$$

**Příklad 18.** Spočítejte

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n}.$$

**Příklad 19.** V poslanecké sněmovně je 200 poslanců, kteří postupně hlasují o $n$ zákonech. Poslanec může být buď pro schválení zákona, nebo proti, nebo se může zdržet hlasování. Je známo, že pro každá dvě hlasování existuje poslanec, který v jednom hlasoval pro a v druhém proti. Označme si počet poslanců, kteří se zdrželi hlasování o $i$-tém zákonu, jako $z_i$. Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{z_i} \le 2^{200}.$$

[1] Nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tzn. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy.

**Příklad 20.** V obdélníkové tabulce $m \times n$ jsou napsána nezáporná reálná čísla, přičemž každý sloupec i každý řádek obsahuje alespoň jedno kladné číslo. Pokud se navíc řádek a sloupec protínají v políčku, kde je kladné číslo, tak je jejich součet stejný. Dokažte, že $m = n$.

**Příklad 21.** (LYM-nerovnost) Mějme $n$-prvkovou množinu $A$ a systém $\mathbb{S}$ podmnožin $A$ takový, že žádné dvě množiny z $\mathbb{S}$ nejsou v inkluzi. Dále označme $a_i$ počet $i$-prvkových množin v $\mathbb{S}$. Pak platí

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \leq 1.$$

**Příklad 22.** (Erdős–Ko–Radova věta) Nechť $k$ a $n$ jsou přirozená čísla taková, že $2k \leq n$. Dále nechť $M$ je množina $k$-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro všechny množiny $C, D \in M$ platí $C \cap D \neq \emptyset$. Dokažte, že $|M| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

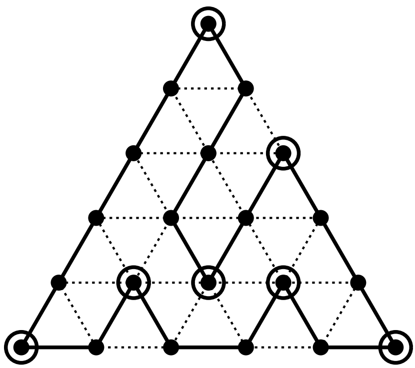
**Příklad 23.** (malá Fermatova věta) Ukažte, že je-li $p$ prvočíslo, pak

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

**Příklad 24.** (Cayleyho formule) Určete počet koster úplného grafu na $n$ vrcholech.

**Příklad 25.** Určete počet koster úplného grafu bez jedné hrany $e$.

**Příklad 26.** Rovnostranný trojúhelník o straně délky $n$ je vyplněný jednotkovou trojúhelníčkovou mřížkou. Uzavřená lomená čára vede podél této mřížky a každý vrchol mřížky potká právě jednou. Dokažte, že tato čára alespoň $(n+1)$-krát zahne do ostrého úhlu.



**Příklad 27.** Ukažte, že každý graf s $N$ vrcholy neobsahující žádné cykly délky přesně 4 má nanejvýš $\mathcal{O}(N^{3/2})$ hran.[2]

[2]Notace s $\mathcal{O}$ značí asymptotickou velikost. Zde konkrétně tedy má být hran nejvýše $cN^{3/2}$, kde $c$ je nějaká konstanta nezávislá na $N$.

## Návody

**1.** Mějme $n$ kuliček a počítejme, na kolik způsobů lze vybrat $k$ kuliček. Buď jich vybereme $k$, nebo jich nevybereme $n-k$.

**2.** Vybíráme $k+1$ kuliček z $n+1$ kuliček. První buďto vybereme, nebo ne.

**3.** Použijte podobnou ideu jako v předchozím příkladě, ale induktivně.

**4.** Vybíráte podmnožiny $n$-prvkové množiny. Každý prvek buďto vyberete, nebo ne.

**5.** Jsou dva postupy, jak z $n$ fotbalistů vybrat $r$ hrajících hráčů a jednoho kapitána.

**6.** První způsob: nejprve vybereme z $n$ hráčů $r$ hrajících a z nich $k$ útočníků.

**7.** Jde o zobecnění motivačního příkladu. Nyní je ale fixovaná proměnná $d$. Můžeme si to představit tak, že si z $n$ lidí vybíráme $k \leq d$ kamarádů a z $d$ z nich chceme vybrat na fotbal.

**8.** Máte $n$ děvčat a $m$ hochů a chcete z nich vytvořit $k$-členný tým.

**9.** Zkuste spočítat dvojice (*permutace*, *hodnota na pozici*).

**10.** Počítejte dvěma způsoby počet dvojic (*množina dvou dětí*, *den*). Nejprve fixujte množinu dětí a poté den.

**11.** Počítejte dvěma způsoby dvojice (*úloha*, *student*), ale pozor na to, že dvě informace nejsou záměnné.

**13.** Počítejte dvěma způsoby dvojice (*hodnota na pozici*, *permutace*). Ale pozor, tentokrát s koeficientem pozice.

**14.** Všimněte si, že existuje účastník, který vyřešil alespoň čtyři úlohy, a také existuje účastník, který vyřešil zbylé dvě.

**15.** Nakreslete si trojúhelník z kostiček se základnou délky $2n$, kde v $i$-tém patře leží kostičky s číslem $i$. Kostičky pak postupně od kraje trojúhelníku odebírejte.

**16.** Spočítejte dvěma způsoby počet dvojic (*trojúhelník*, *různobarevná hrana*).

**17.** Nakreslete si čtvercovou mřížku o straně $n$ a do políčka na pozici $[i, j]$ napište číslo $i \cdot j$. Sečtěte všechna čísla po řádcích a po „elkách" od rohu $[1, 1]$.

**18.** Použijte podobnou myšlenku jako u motivační úlohy, zbylou sumu už spočítat umíte.

**19.** Kolik nejvýše hlasování mohlo proběhnout, pokud by každý hlasoval pro nebo proti? Kolika způsoby lze doplnit ta hlasování, kde se někdo zdržel, tak, aby každý hlasoval?

**20.** Uvažte podtabulku tvořenou řádky a sloupci takovými, že součet čísel v každém z nich je stejný. Jaké má tato podtabulka rozměry?

**21.** Pro každou množinu $S \in \mathbb{S}$ vytvořte všechny permutace $n$ prvků takové, že prvních $|S|$ prvků bude z $S$. Těchto permutací bude nejvýše tolik jako všech permutací $n$ prvků.

**22.** Počítejte dvěma způsoby dvojice (*množina z $M$*, *permutace*) takové, že $M$ bude pro tuto permutaci cyklický interval.

**23.** Spočítejte všechny řetězce délky $p$, kde každý znak je z $a$-prvkové abecedy a nejsou v nich všechny znaky stejné. Tyto řetězce poté můžete rozdělit na skupinky po $p$.

**24.** Spočtěte dvěma způsoby počet možností, jak vytvořit zakořeněný strom s $n$ hranami orientovanými od kořene. Zkuste spočítat počet možných vytvoření z běžných stromů a také vytvářet strom po hranách.

**25.** Dvojím počítáním spočtěte dvojice (*kostra*, *hrana*).

**26.** Podívejte se na trojúhelníky špičkou vzhůru. Spočítejte dvěma způsoby délku uzavřené lomené čáry.

**27.** Počítejte dvěma způsoby počet „vidliček“, tedy trojic vrcholů $a$, $b$, $c$, kde $b$ je spojeno hranou s $a$ i s $c$.

## Další návody

**5.** Dvě možnosti: buď nejprve vybereme z $n$ hráčů $r$ hrajících a pak kapitána, nebo nejprve vybereme kapitána a potom zbytek týmu ze zbylých $r-1$ hráčů.

**6.** Druhý způsob: nejprve vybereme $k$ útočníků a potom dobereme zbytek týmu ze zbylých $r-k$ hráčů.

**7.** Počítejme dvěma způsoby: buď nejprve vybereme $k$ kamarádů a potom $d$-členný tým na fotbal, nebo naopak nejprve vybereme tým a pak nějak dobereme zbytek kamarádů.

**17.** Případně zkuste geometricky rozkládat krychle do čtverce.

**19.** Počítejte počet dvojic (*zákon*, *možný výsledek bez nerozhodných hlasů*).

**21.** Počítejte dvojice (*uspořádaná $n$-tice*, $S$), kde $S \in \mathbb{S}$ a prvních $|S|$ prvků $n$-tice je z $S$.

**25.** Využijte předchozí příklad. Uvědomte si, že počet koster v grafu je roven součtu počtů těch koster, které danou hranu $e$ obsahují, a těch, které ji neobsahují (obdobně jako v příkladu 2).

**26.** Počítejte nejprve explicitně pomocí počtu vrcholů, poté podle počtu navštívených trojúhelníků špičkou nahoru. Kdykoliv lomená čára obsahuje dvě hrany trojúhelníka špičkou nahoru, znamená to ostrý úhel.

**27.** Použijte CS nerovnost, abyste z čtverců incidencí dostali odhad na počet hran.

## Literatura a zdroje

[1] Tomáš Novotný: *Počítání dvěma způsoby*, Zásada, 2017
[2] Martin Hora: *Počítání dvěma způsoby*, Hojsova stráž, 2016.
[3] Zuzka Safernová: *Dvojí počítání*, Staré Město, 2009.
[4] Martin Balko: *Kombinatorika a grafy 1*, přednáška a cvičení MFF, 2018/19.
[5] Štepán Šimsa: *Počítání dvěma způsoby*, materiály k MO.

# p-valuace

Matěj Doležálek

Abstrakt. V teorii čísel se občas vyplatí vědět nejen to, zda jedno číslo dělí druhé, ale i jak moc ho dělí. To vystihují $p$-valuace. Postupně se naučíme počítat je v rozmanitých situacích a používat je k dokazování dělitelností a řešení rovnic.

**Definice.** Pro celá čísla $a$, $b$ říkáme, že $a$ *dělí* $b$ (značíme $a \mid b$), pokud existuje celé číslo $c$ splňující $b = ac$.

**Definice.** Pro prvočíslo $p$ definujeme $p$-valuaci celého čísla $a \neq 0$ jako největší nezáporné celé $k$ takové, že $p^k \mid a$. Značíme $v_p(a) = k$. Pro $a = 0$ budeme brát $v_p(a) = \infty$ pro každé $p$.

Tedy neformálně: $v_p(a)$ je exponent u $p$ v prvočíselném rozkladu čísla $a$. Jak uvidíme, $p$-valuace dávají způsob, jak se na situaci podívat z pohledu jednoho prvočísla. Jedná se přitom o trochu jemnější informaci než pouhý zbytek modulo $p$.

## Základní vlastnosti

**Tvrzení.** *Platí $a \mid b$, právě pokud $v_p(a) \leq v_p(b)$ pro každé prvočíslo $p$.*

**Tvrzení.** *Pro $a, b > 0$ platí $a = b$, právě když $v_p(a) = v_p(b)$ pro každé prvočíslo $p$.*

**Tvrzení.** *Platí $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.*

**Tvrzení.** *Platí $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$. Pokud navíc $v_p(a) \neq v_p(b)$, potom v předchozí nerovnosti nutně nastane rovnost. Obdobně platí totéž pro rozdíl $a - b$.*

**Cvičení.** Rozmyslete si, že $p$-valuace se dají rozumně dodefinovat i pro racionální čísla a že i po tomto rozšíření většina z předchozího stále platí.

**Cvičení.** Nahlédněte, že pro přirozené $n$ je $v_p(n) \leq \log_p n \leq n - 1$.

Obecnější podoba předchozího cvičení:

**Lemma.** *Pro každé přirozené $n$ platí odhad $n - v_p(n) \geq n - \log_p(n)$, přičemž výraz napravo je pro $n \geq 2$ rostoucí vzhledem k $n$.*

**Tvrzení.** *Přirozené číslo $a$ je $k$-tou mocninou přirozeného čísla právě tehdy, když $k \mid v_p(a)$ pro každé prvočíslo $p$.*

**Tvrzení.** *Nechť* gcd *značí největšího společného dělitele a* lcm *nejmenší společný násobek. Potom platí*

$$v_p(\gcd(a,b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}, \qquad v_p(\operatorname{lcm}(a,b)) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

**Úloha 1.** Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla $a$, $b$, $c$ platí

$$\frac{(\gcd(a,b,c))^2}{\gcd(a,b)\cdot\gcd(b,c)\cdot\gcd(c,a)} = \frac{(\operatorname{lcm}(a,b,c))^2}{\operatorname{lcm}(a,b)\cdot\operatorname{lcm}(b,c)\cdot\operatorname{lcm}(c,a)}.$$

**Úloha 2.** Jsou dána přirozená čísla $a$, $b$ taková, že

$$a \mid b^2, \quad b^2 \mid a^3, \quad a^3 \mid b^4, \quad b^4 \mid a^5, \quad a^5 \mid b^6, \quad \ldots$$

Dokažte, že $a = b$.

**Úloha 3.** Dokažte, že pro přirozená $a$, $b$, $c$, $d$ splňující $ab = cd$ platí

$$\gcd(a,c)\cdot\gcd(a,d) = a\cdot\gcd(a,b,c,d).$$

**Úloha 4.** Jsou dána přirozená $a$, $b$, $c$ splňující $a^b \mid b^c$, $a^c \mid c^b$. Dokažte, že $a^2 \mid bc$.

**Úloha 5.** Řekneme, že kladné reálné číslo je *copaté*, pokud není celé a v jeho desetinném zápisu následuje za desetinnou čárkou jen konečně mnoho nenulových číslic. Rozhodněte, zda existují copatá čísla $a$, $b$, $c$ taková, že všechna tři čísla $ab$, $bc$ i $ca$ jsou celá. (MO 64–C–II–4)

## Faktoriály a kombinační čísla

V dělitelnostech a rovnostech obsahujících faktoriály se často hodí spočítat nebo alespoň odhadnout $p$-valuaci. Vznikávají tím relativně nevábné výrazy s dolními celými částmi – občas je stačí odhadnout, jindy je třeba preciznější přístup. Základní pomůckou je Legendreova formule, zbylé dvě větičky jsou jen trochu specializovaná tvrzení plynoucí z ní.

**Tvrzení.** (Legendreova formule) *Pro každé přirozené číslo $n$ platí*

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor.$$

**Poznámka.** Součet v předchozí větě je sice formálně nekonečný, ale pro libovolné $p$ a $n$ budou od nějaké chvíle všechny členy nulové.

**Věta.** *Nechť $s_p(n)$ značí ciferný součet přirozeného čísla $n$ v soustavě o základu $p$. Potom platí $v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$.*

**Věta.** (Kummer) *Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ má $p$-valuaci rovnou počtu „přenosů jedničky do vyššího řádu" při sčítání $k$ a $n-k$ pod sebou v soustavě o základu $p$.*

**Úloha 6.** Pro prvočíslo $p$ platí $p^n \nmid ((p-1)n)!$.

**Úloha 7.** Platí $v_p(n!) \le \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor$.

**Úloha 8.** Najděte všechna přirozená $n$, pro něž $v_2(n!) = n-1$.

**Úloha 9.** Pro libovolná celá nezáporná $m$, $n$ je

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(n+m)!}$$

celé číslo.

**Úloha 10.** Dokažte, že pro přirozená $n$ platí

$$(n+1) \cdot \operatorname{lcm}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right) = \operatorname{lcm}(1, 2, \ldots, n+1).$$

**Úloha 11.** Dokažte, že existuje konstanta $c$ taková, že pro libovolná přirozená $a$, $b$, $n$ splňující $a! \cdot b! \mid n!$ nutně platí $a + b < n + c \log n$. (Erdős)

**Úloha 12.** Pro přirozené $n \ge 3$ definujme posloupnost přirozených čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ pomocí rozkladu

$$n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou prvočísla. Najděte všechna $n$, pro něž je posloupnost $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ geometrická. (MEMO 2017 T8)

### Lifting the exponent (LTE)

Podkapitolou samou pro sebe jsou valuace na rozdílech mocnin. Z velké části je vystihuje lifting the exponent lemma (zkráceně LTE), při jeho aplikování je však třeba dávat pozor na podmínky. Hodí se také tušit něco o řádech prvků modulo $p$.

**Lemma.** *Nechť je $p$ libovolné prvočíslo, $m$ přirozené číslo a $x$, $y$ celá čísla taková, že $p \nmid m, x, y$, ale $p \mid x - y$. Potom $v_p(x^m - y^m) = v_p(x - y)$.*

**Lemma.** *Nechť je $p > 2$ prvočíslo a $x$, $y$ celá čísla splňující $p \nmid x, y$, ale $p \mid x - y$. Potom $v_p(x^p - y^p) = v_p(x - y) + 1$.*

**Cvičení.** Co se na důkazu předchozího lemmatu rozbije pro $p = 2$?

**Věta.** (lifting the exponent lemma) *Nechť je $p$ liché prvočíslo, $n$ přirozené číslo a $x$, $y$ celá čísla splňující $p \nmid x, y$, ale $p \mid x - y$. Potom*

$$v_p\left(x^n - y^n\right) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

**Poznámka.** Pokud je $n$ liché, pak nahrazením $y$ za $-y$ získáme obdobné tvrzení i pro součet namísto rozdílu.

**Cvičení.** Najděte příklady dosvědčující, že při vynechání jednoho z předpokladů (lichosti $p$, dělitelnosti $p \mid x-y$ či nedělitelnosti $p \nmid x, y$) už závěr LTE nemusí platit.

**Věta.** (LTE pro dvojku) *Nechť je $n$ sudé přirozené číslo a $x$, $y$ lichá celá čísla. Potom*

$$v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2(x-y) + v_2(x+y) + v_p(n) - 1.$$

**Cvičení.** Rozmyslete si, že v LTE pro dvojku bude vždy právě jedno z $v_2(x \pm y)$ rovno 1, takže se pravá strana zjednoduší na

$$v_2(x-y) + v_2(n) \qquad \text{nebo} \qquad v_2(x+y) + v_2(n).$$

**Tvrzení.** *Budiž $p$ prvočíslo a nechť $p \nmid a, b$. Pokud je $k$ nejmenší přirozené číslo splňující $p \mid a^k - b^k$, pak pro přirozené $n$ platí $p \mid a^n - b^n$ právě tehdy, když $k \mid n$.*

**Úloha 13.** Je dáno přirozené $k$. Najděte všechna přirozená $n$ splňující $3^k \mid 2^n - 1$.

**Úloha 14.** Pro liché prvočíslo $p$, přirozené $a$ a $n \geq 2$ platí $p^n \mid a^p - 1$ právě tehdy, když $p^{n-1} \mid a - 1$.

**Poznámka.** (makroskopická) Předchozí úloha ilustruje, že LTE říká „zhruba totéž" jako cykličnost multiplikativních grup $\mathbb{Z}_{p^k}^*$ pro $k \geq 2$. V obojím se přidání $p$ do exponentu projeví posunem přesně o 1 „úroveň" výš, obojí řeší jen prvky nesoudělné s $p$ a v obojím je dvojka trochu „rozbitá" (ale ne zas tak moc).

**Úloha 15.** Dokažte, že pro každé přirozené $n$ lze zvolit přirozené $k$ tak, že

$$7^n \mid 2^k + 3^k + 4^k - 1.$$

**Úloha 16.** Prvočíslo $p$ a přirozená $a$, $n$ splňují $2^p + 3^p = a^n$. Dokažte, že $n = 1$.
(Irsko)

**Úloha 17.** Přirozená $a, n, k$ splňují $n \mid (a-1)^k$. Dokažte $n \mid a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1$.

**Úloha 18.** Najděte všechny trojice $(x, y, p)$, kde $x$, $y$ jsou přirozená čísla a $p$ prvočíslo splňující $p^x - y^p = 1$.

**Úloha 19.** Je dáno bezčtvercové[1] přirozené $n$. Dokažte, že neexistují nesoudělná přirozená čísla $x$, $y$ splňující $(x+y)^3 \mid x^n + y^n$.

**Úloha 20.** Mějme liché přirozené $n > 1$ a nesoudělná přirozená $a > b$. Dokažte, že $a^n - b^n$ má prvočíselného dělitele, který nedělí $a - b$.

**Úloha 21.** Najděte všechna přirozená $n$ splňující $2^n \mid 3^n - 1$.

**Úloha 22.** Najděte všechny dvojice přirozených čísel $(a, b)$, které splňují $b^a \mid a^b - 1$.

[1] Přirozené číslo nazýváme *bezčtvercovým*, pokud není násobkem žádného $a^2$ pro $a > 1$.

**Úloha 23.** Najděte všechna přirozená $a$, pro něž je $4(a^n+1)$ třetí mocninou celého čísla pro každé přirozené $n$.

**Úloha 24.** Pokud pro přirozená $a$, $b$, $c$ platí $c \mid a^c - b^c$, pak už i $c \mid \frac{a^c-b^c}{a-b}$.

**Úloha 25.** Buďte $a$, $b$ racionální čísla. Pokud je $a^n - b^n$ celé číslo pro nekonečně mnoho různých přirozených $n$, pak už jsou obě $a$, $b$ celá.

**Úloha 26.** Budiž $k > 1$ přirozené číslo. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených $n$ splňujících

$$n \mid 1^n + 2^n + \cdots + k^n.$$

**Úloha 27.** Najděte všechna přirozená $n$, pro která je $2^{n+2}(2^n - 1) - 8 \cdot 3^n + 1$ čtverec. (Vietnam)

## IMO úlohy

**Úloha 28.** Najdi největší mocninu 1991, která dělí číslo

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$

(ISL 1991)

**Úloha 29.** Najděte všechny dvojice přirozených čísel $(n, k)$, které splňují

$$(2^k - 1)(2^k - 2)(2^k - 4)\cdots(2^k - 2^{k-1}) = n!.$$

(IMO 2019)

**Úloha 30.** Je dána nekonečná posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ přirozených čísel taková, že

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

je přirozené číslo pro všechna $n \geq k$, kde $k$ je nějaké pevné přirozené číslo. Dokažte, že $a_n = a_{n+1}$ pro všechna $n \geq m$, kde $m$ je nějaké pevné přirozené číslo.

(IMO 2018)

**Úloha 31.** Najděte všechny trojice $(p, x, y)$, kde $p$ je prvočíslo a $x$, $y$ jsou přirozená čísla taková, že $x^{p-1} + y$ i $x + y^{p-1}$ jsou mocniny $p$. (ISL 2014)

## Návody

**1.** BÚNO si seřaď valuace, potom přímočaře počítej.

**2.** $a^n \mid b^{n+1}$ znamená $\frac{v_p(a)}{v_p(b)} \leq \frac{n+1}{n}$. V podstatě totéž jde říct s logaritmem místo valuací.

**3.** Označ si $p$-valuace jednotlivých proměnných a rozebírej jejich možné pořadí.

**4.** AG nerovnost.

**5.** Chceš nezáporné 2-valuace a 5-valuace. Dirichlet pomůže.

**6.** V Legendreově formuli zahoď celé části.

**7.** Ukonči součet u indexu $j = k$ takového, že $1 \leq \frac{n}{p^k} < p$ a využij $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

**8.** V nerovnostech z důkazu předchozí úlohy musela všude nastat rovnost.

**9.** Odhadni zvlášť každý člen

$$\left\lfloor \frac{2m}{p^j} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+m}{p^j} \right\rfloor$$

z Legendreovy formule.

**10.** Využij Kummerovu větu. Pokud $\alpha = v_p(n+1)$, pak $n+1$ zapsané v soustavě o základu $p$ končí $\alpha$ nulami.

**11.** Dělitelnost dává nerovnost (třeba) 2-valuací. Vhodně odhadni celé části v nenulových členech, těch je asymptoticky $\log n$.

**12.** Hodí se Bertrandův postulát: pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ existuje prvočíslo $p$ splňující $n < p < 2n$.

**13.** Přímočaře použij LTE. Pozor na předpoklady!

**14.** Nezapomeň na předpoklady LTE. Hodí se malá Fermatova věta: $a^p \equiv a \pmod{p}$ pro každé $a$.

**15.** Vol $k$ tak, aby vznikly dvě LTEčkové dvojice.

**16.** LTE něco poví o 5-valuaci. Dej pozor na případ $p = 2$.

**17.** LTE na $a^n - 1$. Nezapomeňte pečlivě ověřit předpoklady.

**18.** Převeď $y^p$ na pravou stranu a podívej se na $p$-valuaci.

**19.** Chceš aplikovat LTE a využít $v_p(n) \leq 1$, dej však pozor na degenerované případy související s dvojkou.

**20.** Má-li $a^n - b^n$ pouze prvočíselné dělitele, kteří dělí $a - b$, pak dovedeš odhadnout všechny $p$-valuace.

**21.** Rozkládej $3^n - 1 = (3^{n/2} + 1)(3^{n/2} - 1)$, dokud to jde.

**22.** Nejtěžší část: dokaž, že nejmenší prvočíslo $p \mid b$ také dělí $a - 1$. Potom rozliš paritu $p$, použij LTE a pečlivě odhadni $n - v_p(n)$.

**23.** Pokud má $4(a^n+1)$ lichého prvočíselného dělitele $p$, podívej se na $4(a^{pn}+1)$.

**24.** Pro každé prvočíslo $p \mid c$ rozliš případy dle toho, zda $p \mid a-b$ a zda $p \mid a, b$.

**25.** Předpokládej, že společný jmenovatel má prvočíselného dělitele, a najdi spor. Hodí se tušit něco o řádech prvků modulo $p$.

**26.** Zkus $n = p^m$, trik je ve správné volbě lichého prvočísla $p$. Zkus použít LTE na „zrcadlové“ členy.

**27.** Pojmenuj si čtverec $a^2$ a uprav na součin. Potom zkoumej 3-valuaci, zbav se $a$ a omez $n$.

**28.** Prostě si vyrob LTEčkový tvar a moc se s tím nepárej.

**29.** Pomocí 2-valuace a 3-valuace omez $k$, zbytek dorozeber.

**30.** Stačí ukázat, že nepřibývají nová prvočísla a všechny $p$-valuace jsou od nějaké chvíle nerostoucí. Rozliš případy podle toho, zda někdy (za indexem $k$) nastane $v_p(a_n) \geq v_p(a_1)$.

**31.** Připrav se na spoustu rozebírání rozbitých případů. Hlavní myšlenka je hledat velké valuace $p$ v rozdílech $y-x$ potažmo $y^p - x^p$.

## Literatura a zdroje


[1] Anh Dung „Tonda“ Le: *Lifting The Exponent lemma*, Sklené, 2015.
[2] Ákos Záhorský: *P-adické hodnoty a Lifting The Exponent Lemma*, Kunžak, 2019.
[3] Amir Hossein Parvardi: *Lifting The Exponent Lemma (LTE).*
[4] Yang P. Liu: $v_p$, MOP, 2018.

# Barvení grafů

Petr Gebauer

Abstrakt. V přednášce se budeme věnovat barvení vrcholů resp. hran grafů co nejmenším počtem barev tak, aby sousední vrcholy resp. incidentní hrany nebyly obarveny stejně.

**Úmluva.** Všechny grafy v této přednášce budou konečné a neorientované.

Začneme intuitivním vysvětlením pojmů. *Vrcholové obarvení* grafu je přiřazení barvičky každému vrcholu tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejně. Analogicky, *hranové obarvení* je přiřazení barvičky každé hraně tak, aby žádné dvě incidentní hrany neměly stejnou barvu. O grafu řekneme, že je *(vrcholově) $k$-obarvitelný*, pokud má vrcholově obarvení $k$ barvami. Dále *(vrcholovou) barevností* grafu $G$ nazveme nejmenší $k$ takové, že $G$ je $k$-obarvitelný. Analogicky definujeme pojmy *hranově $k$-obarvitelný* a *hranová barevnost.*

## Barevnost rovinných grafů

Graf nazveme *rovinným*, pokud jej lze zakreslit do roviny bez křížení hran. Pokud máme nějaké rovinné nakreslení grafu, budeme jeho *stěnou* nazývat každou oblast uzavřenou mezi nakresleními hran.

**Věta.** (Eulerova formule) *Mějme rovinné nakreslení souvislého neprázdného grafu $G$ a nechť $s$ je počet jeho stěn. Potom platí $|V_G| - |E_G| + s = 2$.*

Z Eulerovy formule plyne zajímavý odhad na počet hran neprázdného rovinného grafu: $|E_G| \leq 3|V_G| - 6$. Každá hrana totiž sousedí s maximálně dvěma stěnami, a pokud je stěn víc než 1, každá sousedí s alespoň třemi hranami, zbytek získáme úpravou nerovnosti. To znamená, že průměrný stupeň v takovém grafu je méně než 6, což znamená, že musí obsahovat nějaký vrchol stupně maximálně 5 Rozmyslete si, proč jsem nepotřeboval souvislost. Toho využijeme v následujících dvou důkazech.

**Věta.** (o 6 barvách) *Každý rovinný graf je 6-obarvitelný.*

*Důkaz.* Budeme postupovat indukcí podle počtu vrcholů. Pokud má graf maximálně 6 vrcholů, stačí každému vrcholu přiřadit jinou barvu. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro grafy na $n$ vrcholech, a mějme graf $G$ na $n+1$ Víme, že $G$ musí obsahovat nějaký vrchol $v$, který má stupeň maximálně 5. Protože $G - v$ je rovinný na $n$ vrcholech, existuje z indukčního předpokladu nějaké jeho obarvení 6 barvami. V tomto obarvení jsou sousedi $v$ obarveni maximálně pěti barvami, takže $v$ můžeme obarvit tou šestou, čímž dostaneme obarvení $G$. □

**Definice.** *Dělením grafu* $G$ nazveme graf, který vznikne z $G$ nahrazením některých hran cestami (délky alespoň 1).

**Věta.** (Kuratowského) *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje dělení $K_5$ ani $K_{3,3}$ jako podgraf.*

**Věta.** (o 5 barvách) *Každý rovinný graf je 5-obarvitelný.*

*Důkaz.* Důkaz bude podobný jako ten minulý, ale indukční krok bude trochu složitější. Opět najdeme v $G$ vrchol $v$ stupně maximálně pět. Pokud má stupeň menší než pět, můžeme postupovat stejně jako minule, předpokládejme tedy, že má stupeň 5. Kdyby mezi každými dvěma jeho sousedy vedla hrana, byl by $K_5$ podgraf $G$, tudíž $G$ by nemohl být rovinný. Mějme tedy nějaké dva vrcholy $x$, $y$ sousedící s $v$, které spolu nesousedí. Dále mějme graf $G'$, který vznikne z $G$ odebráním $v$ a přidáním hrany $xy$. Pak $G'$ je také rovinný. Zkontrahujme v něm hranu $xy$, čímž dostaneme opět rovinný graf na $n-2$ vrcholech, který je z indukčního předpokladu 5-obarvitelný. Opětovným rozkontrahováním hrany $xy$ dostaneme obarvení $G'$, ve kterém mají $x$, $y$ stejnou barvu. To znamená, že na $v$ nám opět alespoň jedna barva zbyla. □

**Věta.** (o 4 barvách) *Každý rovinný graf je 4-obarvitelný.*

### Horní odhady na barevnost obecných grafů

**Věta.** (Brooksova) *Nechť $G$ je souvislý graf, který není úplný, ani lichá kružnice, a nechť $\Delta$ je jeho maximální stupeň. Pak $G$ je $\Delta$-obarvitelný.*

Než přistoupíme k samotnému důkazu, potřebujeme si zadefinovat jeden pojem:

**Definice.** *Vrcholový řez* v grafu $G$ je množina $R \subseteq V_G$ taková, že $G - R$ je nesouvislý. Dále *(vrcholová) souvislost* grafu je velikost nejmenšího vrcholového řezu v něm (pokud takový řez existuje). Pro úplný graf na $n$ vrcholech se vrcholová souvislost typicky dodefinovává jako $n-1$.

*Důkaz.* Pro sudé kružnice tvrzení zřejmě platí. Pro ostatní grafy budeme postupovat indukcí podle počtu vrcholů. Pro tři vrcholy se musí jednat o cestu délky dva. Pro indukční krok rozlišíme několik případů podle vrcholové souvislosti:

- Vrcholová souvislost jedna: Nechť $v$ tvoří v $G$ řez. Rozdělíme $G$ podle tohoto řezu na dvě komponenty a v každé necháme kopii $v$. Každou komponentu pak obarvíme z indukčního předpokladu a přepermutujeme v ní barvy tak, aby nakonec $v$ byl ve všech komponentách obarven stejně. Pak komponenty opět spojíme, čímž získáme obarvení $G$.

- Vrcholová souvislost dva: Tento případ bude podobný, jen trochu složitější. Nechť $u$, $v$ tvoří řez v $G$, opět rozdělíme $G$ podle tohoto řezu a do každé komponenty si dáme kopie obou vrcholů a tyto komponenty obarvíme z indukčního předpokladu. Pokud mají v obou komponentách $u$ a $v$ navzájem stejnou barvu, můžeme opět přepermutovat barvy a provést spojení. Stejně tak pokud $u$ a $v$ mají v obou komponentách navzájem různou barvu. Dále tedy předpokládejme, že mají v jedné komponentě stejnou barvu a v druhé různou. Označme jako $u_1$, $v_1$ ty kopie, které mají stejnou barvu a jako $u_2$, $v_2$ ty kopie, které mají různou barvu. Pokud alespoň jeden z $u_1$, $v_1$ má stupeň maximálně $\Delta - 2$, můžeme ho přebarvit, čímž budou mít kopie $u$, $v$ v obou komponentách různou barvu. V opačném případě mají $u_1$, $v_1$ stupeň oba $\Delta - 1$ a $u_2$, $v_2$ mají oba stupeň jedna. Protože $G$ není kružnice a je 2-souvislý, má maximální stupeň alespoň tři. Soused $u_2$ nám zakazuje jednu barvu a soused $v_2$ druhou, tudíž můžeme $u_2$, $v_2$ oba obarvit tou třetí barvou a pak budou kopie $u$, $v$ mít v obou komponentách různou barvu.
- Vrcholová souvislost alespoň tři: Tento případ vyřešíme úplně jinak a nebudeme vůbec potřebovat indukční předpoklad. Najdeme v $G$ vrcholy $x$, $y$, které nesousedí, ale mají společného souseda $z$. Dále uspořádáme vrcholy $G$ tak, že $x$, $y$ budou úplně vlevo, $z$ úplně vpravo a mezi nimi budou ostatní vrcholy tak, aby každý měl alespoň jednoho souseda vpravo od sebe. Pak budeme vrcholy barvit zleva doprava $\Delta$ barvami, přičemž $x$, $y$ obarvíme stejně a dál barvíme hladově. □

Tento odhad není pro některé grafy příliš blízko skutečné barevnosti, např $K_{1,n}$ má maximální stupeň $n$, ale je 2-obarvitelný. Na druhou stranu existují libovolně velké grafy, pro které je těsný.

**Cvičení.** Pro každé $\Delta \geq 2$ najděte souvislý graf s maximálním stupněm $\Delta$, který není ani úplný, ani lichá kružnice, a jehož vrcholová barevnost je rovna $\Delta$.

**Věta.** (Vizingova) *Nechť $G$ je graf s maximálním stupněm $\Delta$. Pak $G$ je hranově $(\Delta + 1)$-obarvitelný.*

*Důkaz.* Mějme obarvení největšího možného podgrafu $G$ pomocí $\Delta$ barev a předpokládejme, že tento podgraf neobsahuje nějakou hranu $xy_0 \in E_G$. Vytvoříme obarvení většího podgrafu, a tím dostaneme spor. Každý vrchol u sebe musí mít volnou alespoň jednu barvu. Najdeme tedy nejdelší možnou posloupnost různých hran $xy_0$, $xy_1, \dots, xy_k$ takovou, že $xy_i$ je obarvena barvou, která je volná u $xy_{i-1}$. Vrchol $y_k$ musí mít volnou nějakou barvu $\alpha$.

Pokud je $\alpha$ volná i u $x$, můžeme hranu $xy_k$ přebarvit na $\alpha$, čímž se nám její barva uvolní pro $xy_{k-1}$, jejíž přebarvení uvolní barvu pro $xy_{k-2}$ atd., až přebarvení $xy_1$ uvolní barvu pro dosud neobarvenou $xy_0$, čímž dostaneme kýžené větší obarvení.

Pokud je barvou $\alpha$ obarvena nějaká hrana z $x$ různá od $xy_1, \dots, xy_{k-1}$, lze posloupnost $xy_0, \dots, xy_k$ prodloužit o tuto hranu, což je spor s její definicí.

Zbývá nám tedy případ, kdy je barvou $\alpha$ obarvena některá z hran $xy_j$ pro

$j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Nechť $\beta$ je barva volná u $x$. Podívejme se na podgraf tvořený hranami s barvami $\alpha$, $\beta$. Každá jeho komponenta musí být buď cesta, nebo kružnice. Speciálně komponenta obsahující $x$ musí být cesta, protože do $x$ nevede žádná hrana obarvená $\beta$. Označme jako $z$ druhý koncový vrchol této komponenty a prohoďme na této cestě barvy. Pokud je $z = y_{j-1}$, musela do něj vést hrana obarvená $\beta$, takže po prohození barev je u $y_{j-1}$ volná $\beta$, která je ale teď použitá na $xy_j$ – tam se moc nezměnilo. Teď je ale u $x$ volná $\alpha$, takže můžeme přebarvit posloupnost $xy_0, \ldots, xy_k$ jako v prvním případě. Pokud naopak $z \neq y_{j-1}$, je nyní $\alpha$ volná u $x$ i $y_{j-1}$, takže můžeme přebarvit posloupnost $xy_0$, … , $xy_{j-1}$. V obou případech jsme dostali větší obarvení, a tedy spor. $\square$

## Literatura a zdroje


[1] Přednášky z diskrétním matematiky na MFF UK.
[2] Přednášky z kombinatoriky a grafů 2 na MFF UK.

# To nejlepší ze stereometrie

Verča Hladíková

Abstrakt. Stereometrie známá ze školy se zabývá převážně určováním objemů a povrchů těles a konstrukcemi řezů. Stereometrie je však mnohem širší téma. Příspěvek uvádí dvacet netradičních trikových úloh všech obtížností. Obsahuje též stručné návody k řešením.

## Lehké úlohy

**Příklad 1.** Rovina protíná hrany $AB$, $AC$, $CD$ čtyřstěnu $ABCD$. Které všechny hrany ještě protíná?

**Příklad 2.** Lze meloun rozdělit na dvě části tak, aby po snědení jeho vnitřku zbyly tři kusy slupky?

**Příklad 3.** Krychli $3 \times 3 \times 3$ chceme rozkrájet na 27 jednotkových kostiček, přičemž po každém řezu můžeme všechny doposud vzniklé části libovolně přeskládat. Kolik řezů je na to minimálně potřeba?

**Příklad 4.** Jsou dány dvě brambory libovolného tvaru a velikosti. Dokažte, že lze vytvarovat drát tak, aby se dal těsně přiložit ke kterékoliv z nich.

## Nesnadné úlohy

**Příklad 5.** Je dán kužel s vrcholem $V$ a bodem $A$ na kraji podstavy o poloměru jedna a $|VA| = 3$. Beruška leze nejkratší možnou cestou z bodu $A$ po plášti kužele opět do bodu $A$ tak, že obleze celý kužel. Určete, v jaké vzdálenosti od $V$ je beruška ve chvíli, kdy je k $V$ nejblíže. (PraSe 26–3–5)

**Příklad 6.** Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body $B$, $C$, $D$ veďme postupně roviny kolmé na $AB$, $AC$, $AD$ a označme $A'$ jejich průsečík. Body $B'$, $C'$, $D'$ definujeme obdobně. Ukažte, že čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou shodné. (PraSe 26–3–8)

**Příklad 7.** Vrcholy pravidelného čtyřstěnu jsou obarveny zelenou barvou. Nejdříve obarvíme zeleně všechny body, které leží na přímce s některými dvěma zelenými, následně provedeme tutéž operaci ještě jednou. Jsou teď všechny body prostoru zelené? (Prase 29–7–4)

**Příklad 8.** Lze prostor rozřezat na jednotkové krychle tak, aby existovala krychle, která žádnou celou svou stěnu nesdílí s právě jednou krychlí? (Turnaj Měst)

**Příklad 9.** Lze do krychle vyvrtat takovou díru, aby skrz ni bylo možno prostrčit druhou stejně velkou krychli?

**Příklad 10.** V prostoru je dán bod. Jaké je nejmenší $n$ takové, že do prostoru lze rozmístit $n$ disjunktních koulí (neobsahujících onen bod) tak, aby zcela zakrývaly výhled z tohoto bodu (tj. aby libovolná polopřímka z něj vycházející protínala alespoň jednu z koulí)?

**Příklad 11.** Existují v prostoru krychle a rovina tak, že vzdálenosti vrcholů této krychle od dané roviny jsou (v nějakém pořadí) čísla $1, 2, \ldots, 8$?

**Příklad 12.** V prostoru jsou dány dva různě velké pravidelné dvacetistěny tak, že některých šest z jejich vrcholů tvoří vrcholy pravidelného osmistěnu. Určete poměr velikostí dvacetistěnů. (Sharygin 2010)

**Úloha 13.** Krychle $20 \times 20 \times 20$ je složena z 2000 kvádříků tvaru $2 \times 2 \times 1$. Ukažte, že ji lze propíchnout jehlou, která bude procházet protějšími stěnami a nepropíchne žádný kvádřík. (Turnaj Měst 1988)

**Příklad 14.** V prostoru je dáno $n$ jednotkových koulí. Na každé z nich obarvíme ty body, ze kterých není vidět žádná z ostatních koulí. Dokažte, že součet vybarvených ploch je roven povrchu jednotkové koule.

## Obtížné úlohy

**Příklad 15.** Na letišti se za zavazadla (tvaru kvádru) platí úměrně tomu, jaký mají součet délek svých tří rozměrů. Lze ušetřit tím, že své zavazadlo zabalíme do jiného? Tedy existují kvádry $K$ a $L$ takové, že $K$ se vejde do $L$ a přitom má $K$ větší součet délek hran než $L$?

**Příklad 16.** Existuje mnohostěn $P$ a bod $O$ mimo něj tak, že z bodu $O$ není vidět žádný vrchol $P$?

**Příklad 17.** Ukažte, že existuje 2021 konvexních mnohostěnů, které lze umístit do prostoru tak, aby se každé dva dotýkaly a přitom žádné tři neměly společný bod. (PraSe 29–8–7b)

**Příklad 18.** Uvnitř jednotkové koule se středem $O$ je dán konvexní $n$-stěn $P$ obsahující $O$. Ukažte, že součet vzdáleností $O$ od stěn $P$ je nejvýše $n-2$. (Rumunsko)

**Příklad 19.** Určete nejmenší počet prken o šířce 10 cm, jimiž lze zakrýt studnu o průměru 1 m. Prkna lze klást přes sebe.

**Příklad 20.** Lze mezi dvě rovnoběžné roviny umístit nekonečně mnoho shodných konvexních mnohostěnů tak, aby se po odstranění rovin žádný mnohostěn nemohl pohnout bez toho, že by se pohnuly i nějaké jiné? (Moskva 2000)

## Návody

**1.** Na kterých stranách od roviny leží které body?

**2.** Ano.

**3.** Podívejte se na prostřední krychličku.

**4.** Myšlenkově brambory protněte.

**5.** Rozstřihněte plášť podle $VA$.

**6.** Vyřešte analogii ve 2D.

**7.** Ne, existují právě 4, které nejsou obarvené.

**8.** Ano.

**9.** Ano. Podívejte se podél tělesové úhlopříčky.

**10.** Jsou potřeba 4.

**11.** Ano, použijte binárku a najděte rovinu, která má vzdálenosti $0, 1, \ldots, 7$.

**12.** Rozmyslete si, že nemůžou být 4 a více bodů z jednoho dvacetistěnu. Najděte dva rovnostranné trojúhelníky v dvacetistěnu.

**13.** Je $3 \cdot 19^2$ možných vpichů a žádný nemůže být narušen jen jedním kvádříkem (parita).

**14.** Vezměte rovinu libovolného směru se všemi sférami na jedné straně a rovnoběžně s ní pohybujte, dokud se nedotkne nějaké sféry.

**15.** Neexistují.

**16.** Existuje, nejprve to zkus s více mnohostěny a pak je spojte.

**17.** Zkuste to nejprve s 2021 úsečkami ve 2D.

**18.** Vzpomeňte si, že povrch vrchlíku jednotkové koule je $2\pi \cdot h$, kde $h$ je jeho výška.

**19.** Je jich potřeba alespoň 10. Promítněte prkna do povrchu nějakého tělesa.

**20.** Jde to, skládejte tam čtyřstěny.

## Další návody

**1.** Protíná ještě $BD$.

**2.** Uvažte válcovou díru skrz.

**3.** Na samotnou prostřední krychličku je potřeba šest řezů a šest zřejmě stačí. Lze též pozorovat velikost největšího dílu.

**5.** Nejkratší cest je úsečka $AA'$. Dopočítáním vyjde vzdálenost $1,5$.

**6.** Thaletova kružnice/sféra a středová souměrnost.

**7.** Postavte si čtyřstěn stranou $AB$ dolů a $CD$ nahoru. Body na rovině obsahující $CD$, která je rovnoběžná s $AB$ neumíme obarvit pomocí bodů na těchto dvoupřímkách.

4 body které neumíme obarvt jsou právě průniky 3 rovin, které zíkáme jako výše s jinou kombinací stran.

**8.** Vydlážděte prostor standardně, vyberte si jednu krychli a „rozposuňte" šest přilehlých neprotínajících se „komínů".

**9.** Vidíme šestiúhelník o straně délky $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ do kterého se vejde čtverec o straně délky jedna.

**10.** Analogie ve 2D. Opište bodu čtyřstěn a výhled přes každou stěnu zakryjte jednou koulí (o hodně různých poloměrech). Uvědomte si, že tři koule nestačí.

**11.** Rovina $x+2y+4z=0$ se „odklání" od směrů os rychlostmi v poměru $1:2:4$. Čísla 0 až 7 lze zapsat ve dvojkové soustavě. Rovinu lze o 1 vzdálit.

**12.** Žádné tři vrcholy dvacetistěnu netvoří pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, takže „dělba" vrcholů osmistěnu musí být $3:3$, a to na dva rovnostranné. Dvacetistěn obsahuje rovnostranné trojúhelníky jen dvou velikostí, poměr jejich velikostí je jako úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku ku straně, tedy $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

**13.** Zároveň každý kvádřík blokuje jediný vpich. Konečně $3\cdot 19^2\cdot 2=2166>2000$.

**15.** Uvažte objemy $\varepsilon$-okolí obou kvádrů. Pro každé $\varepsilon$ je objem $\varepsilon$-okolí vnějšího kvádru větší (obsahuje $\varepsilon$-okolí toho vnitřního uvnitř sebe), takže (úvahou o obrovském $\varepsilon$) musí mít větší koeficient u vedoucího členu $\varepsilon^2$ (členy s $\varepsilon^3$ se odečtou).

**16.** Ke každé stěně krychle přilepte rovnoběžně s jistými jejími hranami dlouhou tenkou destičku tak, aby se její konce při pohledu ze středu krychle „schovaly" za destičky přilepené k jiným stěnám. Odmyslete si krychli a šest destiček spojte „mosty", které nebudou z jejího středu vidět.

**17.** Úsečky rozšiřte na konvexních mnohoúhelníky ve 3D, které budou všechny svislé a každý další se bude dotýkat všech předchozích „zespodu". Mnohoúhelníky poté doplňte na velmi placaté jehlany.

**18.** Vrchlíky odřezané všemi stěnami zakrývají (s překryvem) povrch celé koule, takže součet jejich povrchů je větší než $4\pi$ a součet jejich výšek než dva.

**19.** Uvažme polokouli nad studnou. Svislý průmět každého prkna určuje kulový polopás o pevném povrchu (ten totiž závisí jen na tloušťce pásu, nikoliv na jeho pozici

– odečítáme kulové vrchlíky). Je potřeba zakrýt celou polokouli, tedy je potřeba alespoň deset prken. Tolik stačí.

**20.** Skládejte pravidelné čtyřstěny do jedné vrstvy do jakési mřížky tak, aby měly jednu hranu „dole“ a jednu „nahoře“ a byly do sebe „zaklíněné“.

## Literatura a zdroje

Tento příspěvek je takřka beze změn převzat od *Pepy Tkadlece*, který jej vytvořil na soustředění v Oldřichově (2012) a kterému tímto děkuji.

# Teorie her

Lenka Kopfová

Abstrakt. Teorie her obecně zkoumá rozhodování v situacích, kde máme více hráčů, kteří se navzájem ovlivňují. V tomto příspěvku se podíváme především na hry, v nichž se všichni hráči rozhodují najednou. Podíváme se také na zub Nashovu ekvilibriu a stručně si načrtneme, jak za téměř jednu stránku důkazu získal John Forbes Nash Jr. Nobelovu cenu.

## Hry v normálním tvaru

**Definice.** *Hra v normálním tvaru* je trojice $(P, A, u)$, kde:

(i) $P$ je množina $n$ hráčů,
(ii) $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, přičemž $A_i$ je množina dostupných akcí hráče $i$,
(iii) $u = (u_1, \ldots, u_n)$ je $n$-tice, kde $u_i : A \to \mathbb{R}$ je hodnotící funkce hráče $i$.

*Strategie* je obecně předpis pro hráče, jak se zachovat. Strategii hráče $i$ budeme značit $s_i$.

**Definice.** *Ryzí strategie* hráče $i$ jsou prvky množiny jeho dostupných akcí $A_i$.

**Definice.** *Smíšená strategie* hráče $i$ je libovolná pravděpodobnostní distribuce nad $A_i$. Tedy pokud $|A_i| = k$, pak lze smíšenou strategii $s_i$ zapsat jako $k$-tici nezáporných čísel $(s_i(a_1), \ldots, s_i(a_k))$, kde $\sum_1^k s_i(a_j) = 1$. Výraz $s_i(a_j)$ pak představuje pravděpodobnost, se kterou hráč $i$ vybere akci $a_j$.

**Poznámka.** Na ryzí strategii se dá nahlížet jako na speciální případ strategie smíšené.

**Definice.** Mějme hru v normálním tvaru a nechť hráč $j$ hraje podle smíšené strategie $s_j$. *Očekávaná výhra* hráče $i$ pak je

$$u_i(s) = \sum_{(a_1, \ldots a_n) \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} s_j(a_j).$$

## Příklady

**Příklad.** (kámen, nůžky, papír)

| | kámen | nůžky | papír |
|---|---|---|---|
| kámen | $0, \quad 0$ | $-1, \quad 1$ | $1, \; -1$ |
| nůžky | $1, \; -1$ | $0, \quad 0$ | $-1, \quad 1$ |
| papír | $-1, \quad 1$ | $1, \; -1$ | $0, \quad 0$ |

**Příklad.** (vězňovo dilema)

| | zapírat | zradit |
|---|---|---|
| zapírat | $-3, \quad -3$ | $-25, \quad -1$ |
| zradit | $-1, \; -25$ | $-10, \; -10$ |

**Příklad.** (matching pennies)

| | panna | orel |
|---|---|---|
| panna | $1, \; -1$ | $-1, \quad 1$ |
| orel | $-1, \quad 1$ | $1, \; -1$ |

**Příklad.** (manželský spor)

| | box | opera |
|---|---|---|
| box | $2, \quad 1$ | $0, \quad 0$ |
| opera | $0, \quad 0$ | $1, \quad 2$ |

**Příklad.** (hra na zbabělce)

| | úhyb | rovně |
|---|---|---|
| úhyb | $0, \quad 0$ | $-1, \quad 1$ |
| rovně | $1, \quad -1$ | $-10, \; -10$ |

## Nashovo ekvilibrium

**Definice.** *Nejlepší odpověď* hráče $i$ vzhledem ke strategii ostatních hráčů $s_{-i}$ je smíšená strategie $s_i$ taková, že $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ pro libovolnou smíšenou strategii $s'_i$.

Nejlepší odpověď tak říká, jakou strategii bychom měli jako $i$-tý hráč zvolit, pokud známe strategie ostatních hráčů.

**Definice.** *Nashovo ekvilibrium* hry v normálním tvaru je takový soubor strategií $(s_1, \ldots, s_n)$, že pro každého hráče $i$ je $s_i$ nejlepší odpovědí na soubor strategií ostatních hráčů $s_{-i}$.

Nashovo ekvilibrium je tedy v nějakém smyslu rovnovážný stav hry. Pokud totiž pro $i$-tého hráče zafixujeme strategie ostatních hráčů, tak změnou svojí strategie nikdy nezíská vyšší hodnotu. Protože toto platí pro všechny hráče, nikomu se nevyplatí svou strategii měnit.

**Poznámka.** Při hře dvou hráčů je políčko ryzím Nashovým ekvilibriem, pokud v daném řádku nikde není větší výplata pro druhého hráče a v daném sloupci nikde není větší výplata pro prvního hráče.

## Nashova věta

**Věta.** (Brouwerova o pevném bodu) *Mějme kompaktní konvexní*[1] *množinu $X$ v $\mathbb{R}^d$ a spojitou funkci $f : X \to X$. Pak existuje bod $x_0 \in X$ takový, že $f(x_0) = x_0$, tedy $x_0$ je pevný bod zobrazení $f$.*

**Věta.** (Nashova) *Každá hra v normálním tvaru má Nashovo ekvilibrium.*

*Důkaz.* (náznak) Uvažujme množinu přípustných akcí $i$-tého hráče $A_i$ jako množinu $k$ bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^{k-1}$, kde $k = |A_i|$. Pak množina smíšených strategií hráče $i$ odpovídá konvexnímu mnohostěnu s vrcholy ve zvolených bodech – označme jej $S_i$. Pro každého hráče $i$ a jeho akci $a_i \in A_i$ definujme funkci

$$\varphi_{i,a_i}(s) = \max\big\{0,\ u_i(a_i, s_{-i}) - u_i(s)\big\}.$$

Konečně definujme funkci $f : S \to S$, kde $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, předpisem $f(s) = s'$, kde

$$s'_i(a_i) = \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{\sum\limits_{b_i \in A_i} (s_i(b_i) + \varphi_{i,b_i}(s))} = \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{1 + \sum\limits_{b_i \in A_i} (\varphi_{i,b_i}(s))}.$$

Tímto máme kompaktní konvexní množinu $S$ a na ní definované spojité zobrazení $f$. Stačí si tedy rozmyslet, že pevný bod při daném zobrazení odpovídá Nashovu

[1] Ve skutečnosti nám stačí, že daná množina není děravá.

ekvilibriu. Pak dle Brouwerovy věty existuje pevný bod, a tedy i Nashovo ekvilibrium. □

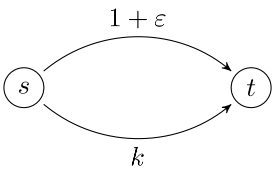
Následující lemma lze použít k důkazu Brouwerovy věty.

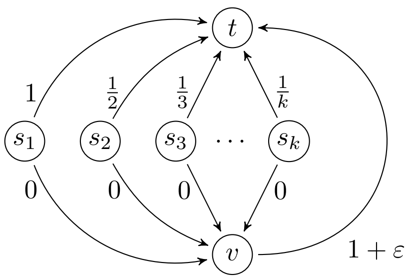
**Lemma.** (Spernerovo) *Mějme trojúhelník $ABC$ a nějakou jeho triangulaci $T$. Vrcholy $T$ obarvěme libovolně červenou, zelenou a modrou tak, aby body na $AB$ neměly červenou barvu, body na $BC$ neměly zelenou barvu a body na $CA$ neměly modrou barvu. Potom v $T$ existuje různobarevný trojúhelník.*

## Trochu náhodné příklady

**Příklad 1.** (Cournotův model) Mějme dvě firmy, které chtějí vyrábět plyšová tuleňátka, a nechť jsou zadány parametry $a$, $b$, $c$. Každá z firem si zvolí množství tuleňátek, které vyrobí – tato množství označme $q_1$ a $q_2$. Náklady na výrobu jednoho tuleňátka přitom udává parametr $c$. Poté se spočte prodejní cena tuleňátek jako $p = a - b(q_1 + q_2)$. Kolik tuleňátek má vyrobit druhá firma, pokud ví, kolik jich vyrobí první firma? Jaké je Nashovo ekvilibrium?

**Příklad 2.** Mějme zadanou nějakou dopravní síť jako orientovaný graf s cenami. Hráč $i$ má zadané dva vrcholy $s_i$, $t_i$, které chce propojit. Všichni hráči si naráz zvolí cestu, kterou dané dva vrcholy spojí. Následně musí každý hráč za stavbu cesty zaplatit, přičemž pokud je nějaká hrana sdílena více hráči, tak se její cena rozdělí mezi ně. Jaká jsou Nashova ekvilibria pro následující grafy?




**Příklad 3.** Na ulici se nachází $n \geq 2$ lidí, kteří si všichni všimnou zraněného muže. Každý člověk buď muži pomůže, nebo ne. Pokud nikdo nepomůže, všichni dostanou výplatu 0. Pokud někdo pomůže, tak ti, co nepomohli, dostanou výplatu 1, zatímco ti, co pomohli, dostanou výplatu $1 - c$ pro $c \in (0, 1)$. Jaké je symetrické Nashovo ekvilibrium?

## Literatura a zdroje

[1] Martin Balko: *Algorithmic game theory*, Přednáška a cvičení MFF, 2020/21.
[2] Tim Roughgarden: *Stanford lecture*, *https://timroughgarden.org/f13/f13.html*
[3] Alča Skálová: *Teorie her*, seriál 32. ročníku.

# Celé části

Josef Minařík

Abstrakt. Příspěvek popisuje základní vlastnosti funkcí celá a zlomková část čísla. Krom definice a popisu základních vlastností příspěvek obsahuje také mnoho příkladů na základní typy úloh souvisejících s těmito funkcemi.

**Definice.** Jako funkci $\lfloor x \rfloor$ definujeme (zjevně jednoznačně dané) celé číslo, pro které platí $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Toto číslo pak nazýváme *dolní celou částí $x$* (slovíčko „dolní" se občas vynechává).

**Definice.** *Zlomková* (někdy též *necelá* nebo *desetinná*) *část čísla $x$* se definuje jako $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Tedy například $\lfloor 1{,}17 \rfloor = 1$, $\{1{,}17\} = 0{,}17$, $\lfloor -3{,}7 \rfloor = -4$, $\{-3{,}7\} = 0{,}3$. Důležité je, že funkce celá část není zaokrouhlování. Zaokrouhlování je ve skutečnosti funkce $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$. Dolní celá a zlomková část mají mnoho vlastností, které jsou sice obvykle více či méně zřejmé, ale rozhodně se hodí mít je na paměti.

**Tvrzení.** *Pokud $x$ a $y$ jsou reálná čísla a $n$ celé číslo, pak platí následující tvrzení.*

(i) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
(ii) $\{x + n\} = \{x\}$.
(iii) *Dolní celá část je neklesající funkce, tj. pokud $x \leq y$, pak $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.*
(iv) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
(v) $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$.
(vi) *Pokud jsou $x$ a $y$ nezáporná čísla, pak $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$.*
(vii) *Pokud $n \neq 0$, pak $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.*
(viii) *Číslo $\lfloor x \rfloor$ je vždy celé.*
(ix) $0 \leq \{x\} < 1$.

Doporučuji čtenáři se nad všemi tvrzeními alespoň na chvíli zamyslet a uvědomit si, že platí.

## Skákání a intervaly

Jednou ze základních vlastností celé části je, že je „zblízka konstantní", tj. mění svou hodnotu jen při přechodu přes celé číslo, což se nestává příliš často. Toho se dá využít pro důkaz mnohých vztahů, a to hned dvěma způsoby. Prvním je „skákání“. To spočívá v důkazu indukcí, ve kterém využíváme tvrzení typu „tento člen se nemění/mění konstantně, s výjimkou případu, kdy …“ Druhý způsob spočívá v rozdělení čísel do skupin (dle zlomkové části či velikosti) tak, aby výraz, se kterým pracujeme, byl v celém intervalu konstantní. Poté buď projdeme všechny možnosti, nebo to prostě vyřešíme algebraicky v obecném intervalu.

**Úloha 1.** Jako $a_n$ si označme $n$-té nejmenší přirozené číslo, které není čtverec. Ukažte, že

$$a_n = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

**Úloha 2.** Pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ dokažte rovnost

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \cdots + \lfloor \log_n n \rfloor.$$

($i$KS 2013/2014)

**Úloha 3.** Pro všechna reálná čísla $x$ a přirozená čísla $n$ dokažte rovnost

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

(Hermite)

**Úloha 4.** Pro všechna reálná $x$ ukažte rovnost

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3}{6} \right\rfloor.$$

**Úloha 5.** Pro všechna přirozená $n$ ukažte rovnosti

(i) $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$, (Kanada 1987)

(ii) $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n+8} \rfloor$. (Írán 1996)

## Rovnice a odhady

Pravděpodobně nejrozšířenějším druhem úloh zabývajících se celými a zlomkovými částmi jsou rovnice. Obvykle platí, že pokud se v rovnici vyskytnou všechny tři čísla $x$, $\lfloor x \rfloor$ a $\{x\}$, chcete se jednoho z nich zbavit použitím nějakého tvaru rovnice $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Obvykle se snažíte zbavovat členu, který je „nejjednodušší“ (má nejnižší stupeň, roznásobení dá nejméně práce atp.). Pokud jsou na tom všechny přibližně stejně, bývá obvykle nejlepší zbavovat se členu $x$. Důvod je ten, že o $\{x\}$ víte, že leží na intervalu $\langle 0, 1)$, o $\lfloor x \rfloor$ víte, že je to celé číslo, ale o $x$ nevíte skoro nic. Pokud máte rovnici s členy $\lfloor x \rfloor$ a $\{x\}$, obvykle je správná cesta celý výraz odhadnout shora a zdola pomocí $0 \leq \{x\} < 1$, získat interval, ve kterém leží $\lfloor x \rfloor$ a protože je to celé číslo, stačí vyzkoušet všechny možnosti. Občas existuje i rychlejší řešení, ale většinou bývá dosti trikové.

Nakonec, pokud pracujeme s rovnicí bez zlomkových částí, dá se občas použít (dosti mlhavé) „tvrzení“ $\lfloor x \rfloor \approx x$. To nám občas poradí s tím co máme s rovnicí dělat. Při skutečném dokazování se poté využije konkrétnější tvar $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

**Úloha 6.** Nalezněte všechna reálná čísla $x$ taková, že $\lfloor x \rfloor^2 + 4\{x\}^2 = 4x - 5$.

**Úloha 7.** Nalezněte všechna reálná čísla $x$ taková, že

$$\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{\lfloor x \rfloor}.$$

**Úloha 8.** Nalezněte všechny trojice reálných čísel $(x, y, z)$ takové, že

$$\begin{aligned} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} &= 1{,}1, \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z &= 2{,}2, \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor &= 3{,}3. \end{aligned}$$

(Rumunsko 1979, Austrálie 1999)

**Úloha 9.** Nalezněte všechna reálná čísla $x$ taková, že $\lfloor x^2 + 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 + 2\lfloor x \rfloor$.
(Indie 2009)

**Úloha 10.** Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel $(a, b)$ takových, že

$$\left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^2 + b^2}{ab} \right\rfloor + ab.$$

(IMO shortlist 1996)

**Úloha 11.** Nechť $x$ je reálné číslo. Ukažte, že $x$ je celé číslo právě tehdy, když pro všechna přirozená čísla $n$ platí

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor = \frac{n(\lfloor x \rfloor + \lfloor nx \rfloor)}{2}.$$

## Sudost a dělení

Další z oblíbených typů úloh s celou a zlomkovou částí se zabývá dělením/dělitelností celými čísly. Pokud jde o dělitelnost, zajímá nás většinou dělitelnost dvojkou. Užitečný trik v tomto případě je binární zápis. V tu chvíli je totiž celá část čísla před desetinou čárkou a zlomková za desetinnou čárkou. Sudost/lichost v tu chvíli určuje poslední cifra před desetinnou čárkou. Často ovšem ani tento trik nepomůže a je třeba mít jednoduše vhled do toho, jak celá část čísla funguje. Pokud jde o práci s celými/zlomkovými částmi zlomku, užitečným trikem je fakt, že $b \cdot \{a/b\}$ je zbytek po dělení čísla $a$ číslem $b$, zatímco $\lfloor a/b \rfloor$ je počet násobků $b$ menších nebo rovných $a$.

**Úloha 12.** Ukažte, že následující posloupnosti obsahují nekonečně mnoho sudých a lichých čísel:

(i) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \left\lfloor \frac{3}{2} a_n \right\rfloor$,

(ii) $a_n = \lfloor 2^n \sqrt{2} \rfloor + \lfloor 2^n \sqrt{3} \rfloor$. (Čína, 2008)

**Úloha 13.** Je číslo $\left\lfloor (1+\sqrt{2})^{2010!} \right\rfloor$ sudé, nebo liché? (MKS 30–1–7)

**Úloha 14.** Pro dvojici nenulových reálných čísel $a$, $b$ platí, že pro libovolné přirozené $n$ je číslo $\lfloor an + b \rfloor$ sudé. Ukažte, že $a$ je sudé celé číslo.

**Úloha 15.** Ukažte, že pro dvojici nesoudělných přirozených čísel $p$, $q$ platí

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

(Gauss)

**Úloha 16.** Nechť $p$ je prvočíslo a $s$ je přirozené číslo menší než $p$. Dokažte, že $s \mid p-1$ právě tehdy, když neexistují přirozená čísla $m$, $n$ taková, že $m < n < p$ a

$$\left\{ \frac{sm}{p} \right\} < \left\{ \frac{sn}{p} \right\} < \frac{s}{p}.$$

(USA 2006)

## Myšmaš

Přestože se v olympiádách a na soutěžích některé druhy úloh objevují častěji než jiné, každou chvíli je zadána absolutně **originální** úloha. A co pak s tím? V tu chvíli jediný způsob, kterým se dá připravit, je mít dobrý vhled do daného oboru. A ten se získá jen počítáním dalších originálních příkladů. Dolní celá a zlomková část jsou naneštěstí (nebo naštěstí?) tak jednoduché funkce, že se na ně dají vymyslet mraky originálních, neobvyklých a šťavňatých úloh.

**Úloha 17.** Nalezněte polynom $P(x, y)$, který není identicky rovný nule, ale zároveň pro libovolné $x$ platí $P(\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor) = 0$.

**Úloha 18.** Ukažte, že pro každé přirozené $n$ platí

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \cdots + \{\sqrt{n^2-1}\} + \{\sqrt{n^2}\} \leq \frac{n^2-1}{2}.$$

(Rusko 1999)

**Úloha 19.** Nechť $\alpha$ a $\beta$ jsou kladná iracionální čísla taková, že $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Nechť $a_i = \lfloor i\alpha \rfloor$ a $b_i = \lfloor i\beta \rfloor$. Ukažte, že každé přirozené číslo leží v právě jedné z těchto posloupností, a to právě jednou. (Beatty)

**Úloha 20.** Nechť $x_1$ je racionální číslo větší než jedna. Nechť

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\lfloor x_n \rfloor}.$$

Ukažte, že tato posloupnost obsahuje přirozené číslo. (Rusko 2007)

**Úloha 21.** Nalezněte všechny funkce na reálných číslech takové, že pro libovolnou dvojici reálných čísel $x$, $y$ platí

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor.$$

(IMO 2010)

**Úloha 22.** Vyčíslete součet

$$\left\lfloor \frac{2^0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor.$$

(Rusko 2000)

**Úloha 23.** Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reálných čísel splňuje vztah

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \{a_i\}.$$

Ukažte, že existuje $N$ takové, že pokud $n \geq N$, pak $a_{n+2} = a_n$.
(IMO shortlist 2006)

**Úloha 24.** Nechť $a_0$ je přirozené číslo. Pokud $5 \mid a_n$, pak $a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$, jinak $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{5} a_n \rfloor$. Ukažte, že existuje $N$ takové, že pokud $n \geq N$, pak $a_{n+1} > a_n$.
(Rusko 2003)

**Úloha 25.** Nechť

$$a_n = \frac{1}{n} \left( \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \right),$$

kde $n$ je přirozené číslo. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho $n$ takových, že

(i) $a_{n+1} > a_n$,
(ii) $a_{n+1} < a_n$. (IMO shortlist 2006)

**Úloha 26.** Konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$ celých čísel nazveme *cool*, pokud existuje $x$ takové, že $a_k = \lfloor kx \rfloor$ pro všechna $k$ mezi 1 a $n$. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ je cool posloupnost. Potom člen $a_k$ (kde $1 \leq k \leq 1000$) nazveme *nutný* právě tehdy, když posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b$ je cool právě tehdy, když $b = a_k$. Kolik nejvíce nutných členů může obsahovat tato posloupnost? (USA TST 2013)

## Literatura a zdroje

Tento příspěvek je téměř identický s příspěvkem *Rada van Švarce* z roku 2014, kterému tímto děkuji.

[1] Rado van Švarc: *Dolní celá a zlomková část čísla*, Uhelná Příbram, 2014.

# Úlohy s tabulkami

Josef Minařík

Abstrakt. Seznámíme se s několika technikami, jak řešit úlohy v tabulce. Budeme se věnovat zejména barvení a převádění na úlohy v grafu. Kromě toho se nám určitě budou hodit i jiné klasické kombinatorické techniky jako třeba počítání dvěma způsoby, paritní argumenty nebo indukce.

Začneme klasickou tabulkovou úlohou.

**Příklad.** Dokažte, že šachovnici $8 \times 8$, které chybí dva protější rohy, nelze pokrýt dominy.

*Řešení.* Všimneme si, že každé domino pokryje právě jedno bílé a právě jedno černé políčko. Šachovnice bez protějších rohů ovšem neobsahuje stejný počet černých a bílých políček, takže nelze pokrýt dominy.

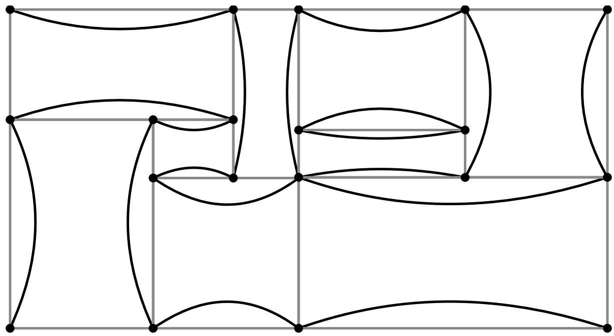
Dále si předvedeme tvrzení, které sice není úplně tabulkové, ale lze na něm hezky demonstrovat techniky, které budeme na přednášce využívat.

**Tvrzení.** (Rectangle Tiling Theorem) *Jestliže lze obdélník rozdělit na několik menších obdélníků tak, že všechny mají aspoň jednu stranu celočíselné délky, má i původní obdélník aspoň jednu stranu celočíselné délky.*

Tohle tvrzení dokážeme hned několika způsoby. Ve sborníku si důkazy jenom nastíníme, na přednášce tvrzení dokážeme pořádně.

*Důkaz.* (barvící) Obdélník označme $R$ a umístěme jej do počátku souřadnicové soustavy. Rovinu obarvíme šachovnicově se čtverečky velikosti $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Nyní si všimneme, že obdélník, který má jednu stranu celočíselnou, pokrývá stejně velkou černou a bílou plochu. To ale znamená, že i náš obdélník $R$ musí pokrývat stejně velkou bílou i černou plochu. Uvažme obdélník $R'$, jehož délky stran budou zlomkové části délek stran původního obdélníku $R$. Obdélník $R'$ musí také zakrývat stejně velkou bílou a černou plochu. Pro něj už snadno vidíme, že jedna z jeho stran musí být celočíselná. $\square$

*Důkaz.* (grafový) Uvážíme graf, jehož vrcholy budou rohy obdélníků. Dále pro každý obdélník kromě $R$ uvážíme dvojici protilehlých stran celočíselné délky (i kdyby měl obdélník všechny strany celočíselné délky, vezmeme jenom jednu dvojici), to budou hrany našeho grafu. Rohy obdélníku $R$ mají stupeň 1, všechny ostatní vrcholy mají stupeň 2 nebo 4. Teď začneme v libovolném rohu $R$ a hladově půjdeme po hranách tak daleko, jak to půjde, aniž bychom šli po nějaké hraně dvakrát. Nutně skončíme v nějakém jiném rohu $R$, čímž je tvrzení dokázáno, protože jsme chodili jenom po hranách celočíselné délky. □



Poslední důkaz bude za pomoci komplexní analýzy. Určitě se nelekejte, pokud vám tento důkaz připadá děsivý, je tady spíš jenom pro zajímavost a pro zbytek přednášky není vůbec důležitý.

*Důkaz.* (komplexní) Mějme obdélník, jehož levý dolní a pravý horní vrchol mají souřadnice $[a, c]$ a $[b, d]$. Uvažme integrál

$$\int_a^b \int_c^d e^{2i\pi(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b e^{2i\pi x}\,\mathrm{d}x \int_c^d e^{2i\pi y}\,\mathrm{d}y.$$

Ukážeme, že tento integrál je nulový právě tehdy, když je některá strana obdélníku celočíselná. Z toho už bude snadno plynout dokazované tvrzení. Pomocí pár úprav ukážeme

$$\int_a^b e^{2i\pi x}\,dx = 0 \iff e^{2i\pi a} = e^{2i\pi b},$$

což je ekvivalentní $a - b \in \mathbb{Z}$. □

## Barvení

**Úloha 1.** Lze tabulku $10 \times 10$ vyplnit T-tetrominy?

**Úloha 2.** Schodištěm velikosti $n$ nazvěme část šachovnice $n \times n$, která je součástí hlavní diagonály nebo je dole od ní. Kolik nejméně cest je potřeba na pokrytí schodiště? Cesta je posloupnost políček sdílejících stranu.

**Úloha 3.** Je možné tabulku $2021 \times 2021$ vydláždit vodorovnými obdélníky $2 \times 1$ a svislými $1 \times 3$?

**Úloha 4.** Tabulka $m \times n$ je vyplněna dlaždicemi $2 \times 2$ a $1 \times 4$. Dokažte, že nemůžeme jednu dlaždici $2 \times 2$ nahradit dlaždicí $1 \times 4$, ani když ostatní dlaždice libovolně přeskládáme.

**Úloha 5.** Na nekonečnou tabulku položíme 2021 čtverců $n \times n$, mohou se překrývat. Dokažte, že počet políček zakrytých lichým počtem čtverců je aspoň $n^2$.

**Úloha 6.** Nechť lze tabulku $m \times n$ pokrýt kostkami $1 \times k$. Dokažte, že potom $k$ dělí $m$ nebo $n$.

**Úloha 7.** Mějme nekonečnou šachovnici a v ní nějaký útvar $P$ skládající se z několika políček, který lze vydláždit S-tetrominy. Dokažte, že když $P$ vydláždíme S a Z-tetrominy, musíme použít sudý počet Z-tetromin. (Shortlist 2014 C4)

## Grafy

**Úloha 8.** Je na nekonečnou šachovnici možné umístit 2021 jezdců tak, aby každý ohrožoval právě 2 jiné?

**Úloha 9.** Mějme čtvercovou budovu obsahující $2021 \times 2021$ místností, mezi místnostmi sdílejícími stěnu mohou být dveře. Je možné, aby každá místnost obsahovala právě dvoje dveře?

**Úloha 10.** V tabulce $n \times n$ je $2n$ políček červených. Dokažte, že existuje posloupnost červených políček $P_1, \ldots, P_k$ taková, že úsečka $P_i P_{i+1}$ (cyklicky, tedy $P_{k+1} = P_1$) je střídavě svislá a vodorovná.

**Úloha 11.** V tabulce $m \times n$ jsou vybraná některá políčka. Dokažte, že lze vybraná políčka obarvit červeně a modře tak, aby byl v každém sloupci i řádku rozdíl počtu červených a modrých políček nejvýše 1.

**Úloha 12.** Tabulka $m \times n$ je vyplněna nezápornými reálnými čísly, přičemž v každém řádku i sloupci je aspoň jedno kladné číslo. Dále platí, že pokud je v nějakém políčku kladné číslo, je součet čísel v odpovídajícím řádku a sloupci stejný. Dokažte, že $m = n$.

**Úloha 13.** Nechť je $m$ a $n$ liché, tabulka $m \times n$ je rozdělena na domina, jedno rohové políčko zbývá volné. Domina můžeme posouvat, pak dokažte, že lze prázdné políčko dostat do libovolného rohu.

**Úloha 14.** Určete nejmenší $k$, pro které lze obarvit $k$ políček tabulky $2n \times 2n$ červeně tak, aby platilo následující. Existuje právě jedno vydláždění dominy takové, že žádné domino neobsahuje dvě červená políčka. (Shortlist 2016 C8)

## Další úlohy

**Úloha 15.** Na šachovnici $2020 \times 2020$ je umístěno 2020 šachových dam tak, že se žádné dvě navzájem neohrožují. Ukažte, že se v každém z rohových čtverců $1010 \times 1010$ nachází alespoň jedna dáma.

**Úloha 16.** Alice a Bob hrají hru na šachovnici $n \times n$, na začátku jsou všechna políčka bílá, jenom levé dolní je černé a stojí na něm věž. Alice a Bob v každém tahu pohnou věží na bílé políčko a obarví jej na černo. Kdo nemůže táhnou, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii, jestliže začíná Alice?

**Úloha 17.** Dokaž, že tabulku $2^n \times 2^n$ s jedním chybějícím políčkem lze vydláždit L-triominy.

**Úloha 18.** Tabulka $6 \times 6$ je vydlážděna dominy. Dokažte, že je možné ji rozříznout svisle nebo vodorovně tak, aby nebylo porušeno žádné domino.

**Úloha 19.** Šachovnice $8 \times 8$ je vydlážděna dominy. Dokažte, že počet vodorovných domin, jejichž levé políčko je bílé, je stejný jako počet domin, jejichž pravé políčko je bílé.

**Úloha 20.** Na šachovnici $2021 \times 2021$ stálo 2021 věží tak, že se žádné dvě neohrožovaly. Všechny se proměnily v jezdce, udělaly jeden tah a změnily se zpátky na věže. Dokažte, že se už nějaké dvě nutně musí ohrožovat.

**Úloha 21.** Tabulka $100 \times 100$ je obarvena černě a bíle. Všechna políčka na okraji jsou černá a navíc žádný čtverec $2 \times 2$ není jednobarevný. Dokažte, že existuje čtverec $2 \times 2$, který je obarvený šachovnicově. (Rusko 2017)

**Úloha 22.** V tabulce $n \times n$ je $n - 1$ nakažených políček. V každém kroku se nakazí všechna políčka, která sousedí s aspoň dvěma nakaženými. Dokažte, že aspoň jedno políčko zůstane zdravé.

**Úloha 23.** Tabulka $n \times n$ je vyplněna čísly 1 až $n$, každé je v ní $n$-krát. Dokažte, že existuje řádek nebo sloupec, který obsahuje aspoň $\sqrt{n}$ různých čísel.

## Návody

**1.** Nejde to, použijeme klasické šachovnicové obarvení a tetromin tam musí být 25.

**2.** Konstrukce na $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ je triviální, optimalita plyne z šachovnicového obarvení.

**3.** Obarvi řádky třemi barvami.

**4.** Děravé šachovnicové obarvení.

**5.** Použij $n^2$ barev tak, aby každý čtverec obsahoval právě jedno políčko od každé barvy.

**6.** Použij jediné tvrzení z přednášky nebo obarvi diagonály nebo zvol komplexní odmocniny z jedničky jako váhy.

**7.** Najdi vhodné diagonální a sloupcové obarvení.

**8.** Najdi graf a využij obarvení.

**9.** Uvaž graf, jehož vrcholy jsou místnosti, a obarvi vrcholy šachovnicově.

**10.** Uvaž bipartitní graf, jehož vrcholy jsou sloupce a řádky.

**11.** Najdi graf, odstraň z něj cykly a pak to vyřeš pro strom.

**12.** Najdi ohodnocený graf a dokaž to po komponentách.

**13.** Uvaž graf, jehož vrcholy jsou políčka s oběma lichými souřadnicemi, hrana vede mezi políčky, mezi kterými je domino. Je to strom.

**14.** Odpověď je $2n$. Najdeme kouzelný graf, vrcholy budou políčka. Hrany budou domina a jejich obrazy podle hlavní diagonály. Uvaž cykly protínající hlavní diagonálu.

**15.** Dámy musí být v protilehlých čtvercích, potom máme málo diagonál.

**16.** Záleží na paritě $n$, políčka popárujeme.

**17.** Indukce.

**18.** Může nějaký řez protnout jenom jedno domino?

**19.** Stejná myšlenka jako v předchozí úloze, přidá se šachovnicové obarvení.

**20.** Sečti souřadnice všech věží.

**21.** Spočítej hrany oddělující černé a bílé políčko.

**22.** Obvod.

**23.** AH nerovnost.

## Literatura a zdroje

[1] Matthew Brennan: *Grids and Related Problems*, Canadian IMO Training, 2018.

[2] Stan Wagon: *Fourteen Proofs of a Result About Tiling a Rectangle*, The American Mathematical Monthly, 1987.

# Levely a hmotné body

Radek Olšák

Abstrakt. Levely a hmotné body jsou dvě metody dívání se na geometrické úlohy. Levely jsou o tom si obrázek otočit tak, aby správně přímky byly vodorovné, a hmotné body souvisí s těžišti. Obě metody hodně souvisí s poměry délek úseček.

**Poznámka.** V tomto příspěvku budeme pro jednoduchost značit $XY$ délku úsečky $XY$ (standardní značení je $|XY|$).

## Hmotné body

**Příklad 1.** (páka) Kde je potřeba podepřít houpačku, když na jednom konci sedí Pepa, který váží 40 kg, a na druhém konci sedí Michal, který váží 70 kg?

**Příklad 2.** Na jednom konci houpačky sedí Vláďa, který váží 60 kg. Houpačka je podepřená ve dvou pětinách (blíže k Vláďovi). Když si na druhý konec houpačky sedla neznámá slečna, s překvapením zjistili, že jsou oba v rovnováze. Kolik slečna váží?

**Příklad 3.** Najděte alespoň dvěma způsoby „těžiště“ trojúhelníka $ABC$, v němž vrcholy $A$, $B$, $C$ váží (v tomto pořadí)

(i) 2, 1, 1. (ii) 3, 4, 5.

**Příklad 4.** Ukažte, že těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Navíc ověřte, že se dělí v poměru 1 : 2.

**Příklad 5.** V pravidelném čtyřstěnu určete poměr, v němž těžiště dělí každou výšku.

V následujících úlohách (není-li určeno jinak) bude vždy $ABC$ trojúhelník s vnitřním bodem $P$. Body $X$, $Y$ a $Z$ budou postupně průsečíky přímek $AP$, $BP$ a $CP$ s odpovídajícími stranami.

**Příklad 6.** Je-li $BX : XC = 3 : 1$ a $CY : YA = 3 : 2$, v jakém poměru je $AZ : ZB$?

**Příklad 7.** Je-li $BX : XC = 2 : 1$ a $CY : YA = 1 : 2$, v jakém poměru je $BP : PY$?

**Příklad 8.** Je-li $BP : PY = 3 : 1$ a $CP : PZ = 1 : 1$, v jakém poměru je $AP : PX$?

**Příklad 9.** Je-li $AZ : BZ = 2 : 1$ a $AY : YC = 1 : 1$, v jakém poměru dělí přímka $AX$ úsečku $YZ$?

**Příklad 10.** (Cevova věta) Mějme na stranách $BC$, $CA$, $AB$ trojúhelníka $ABC$ po řadě dány body $X$, $Y$, $Z$. Přímky $AX$, $BY$, $CZ$ se protínají v jednom bodě právě tehdy, když

$$\frac{BX \cdot CY \cdot AZ}{XC \cdot YA \cdot ZB} = 1.$$

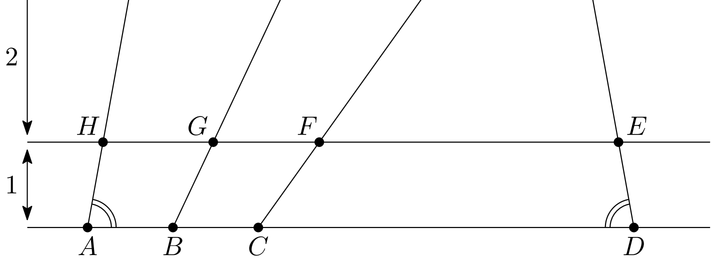
**Příklad 11.** Mějme trojúhelník $ABCD$. Označme $P$, $Q$, $R$, $S$ po řadě středy stran $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Sestrojme bod $T$ jako průsečík $PR$ a $QS$. Označme ještě dále $U$, $V$ středy úhlopříček $AC$ a $BD$. Ukažte, že $T$ je střed úsečky $UV$.

**Příklad 12.** Bod $X$ zobrazíme ve středové souměrnosti podle středu strany $BC$. Podobně $Y$ zobrazíme podle středu strany $CA$ a $Z$ podle středu strany $AB$. Obrazy označíme postupně $X'$, $Y'$, $Z'$. Dokažte, že se přímky $AX'$, $BY'$ a $CZ'$ protnou v jednom bodě.

## Levely

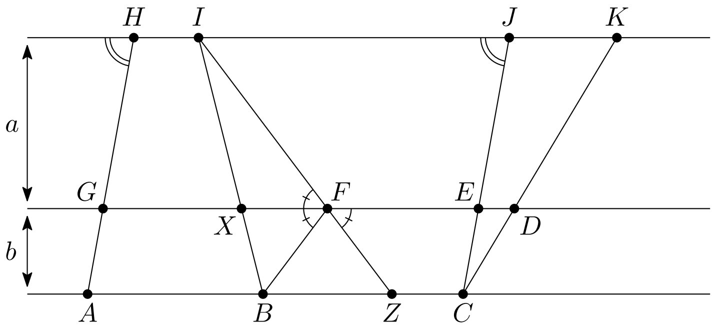
**Příklad 13.** Rozhodněte, která tvrzení v obrázku platí:

(i) $AH/HI = 1/2$, (ii) $JG/IH = 1/1$, (iii) $LE/FC = 2/1$,
(iv) $JB/BG = 2/1$, (v) $LD/IA = 1/1$, (vi) $BG/BJ = 1/3$,
(vii) $FK/KC = 2/3$, (viii) $KC/FC = 2/1$, (ix) $IH/ED = 2/1$.



**Příklad 14.** Rozhodněte, která tvrzení v obrázku platí:

(i) $AG/AH = b/(a+b)$, (ii) $BF = FZ$, (iii) $IF/FB = a/b$,
(iv) $CE/EJ = CD/DK$, (v) $IF/BX = a/b$, (vi) $JE/JC = a/b$,
(vii) $CE/DK = b/a$, (viii) $ED/JK = b/a$, (ix) $FI/FB = XI/XB$.




**Příklad 15.** Je dán trojúhelník $ABC$. Označme $A'$ obraz bodu $A$ v osové souměrnosti podle $BC$ a $M$ střed strany $AB$. Dále buď $P$ průsečík $MA'$ a strany $BC$. Je-li $MP = 3$, určete $PA$.

**Příklad 16.** Na ramenech $AB$, $AC$ rovnoramenného trojúhelníka $ABC$ jsou postupně dány body $K$, $L$ tak, že $BK = \frac{1}{3}CL$ a $KL = 6$. Označme $P$ průsečík $KL$ a prodloužení základny $BC$. Určete $PK$.

**Příklad 17.** Na straně $AB$ ostroúhlého trojúhelníka $ABC$ jsou dány body $K$, $L$ tak, že $AK = KL = LB$. Podobně jsou na straně $AC$ dány body $M$, $N$ tak, že $AM = MN = NC$. Dokažte, že $LN$ půlí $KC$.

**Příklad 18.** Na stranách $AB$, $AC$ trojúhelníka $ABC$ jsou dány po řadě body $K$, $L$ tak, že $BK/AB = 1/3$ a $CL/AC = 1/4$. Označme $M$ střed úsečky $KL$ a $N$ průsečík $AM$ a $BC$. Určete $NM/NA$.

**Příklad 19.** V trojúhelníku s obsahem 100 označme $X$ střed těžnice $AM$ a $Y$ střed těžnice $BN$. Je-li $Z$ střed úsečky $XY$, určete obsah $ABZ$.

**Tvrzení 20.** *Osa vnitřního úhlu v trojúhelníku $ABC$ u vrcholu $A$ protíná $BC$ v $D$. Dokažte, že*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

**Tvrzení 21.** *Osa* **vnějšího** *úhlu u trojúhelníku $ABC$ u vrcholu $A$ protíná $BC$ v $D$. Dokažte, že*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

**Příklad 22.** Je dán trojúhelník $ABC$ a body $M$, $N$ po řadě na stranách $AB$, $BC$ tak, že

$$2 \cdot \frac{CN}{BC} = \frac{AM}{AB}.$$

Kolmice na $MN$ vedená bodem $N$ protne stranu $AC$ v bodě $P$. Dokažte, že $PN$ je osa úhlu $MPC$.

**Příklad 23.** V trojúhelníku $ABC$ označme $M$ střed strany $BC$. Bodem $M$ vedeme rovnoběžku s osou vnitřního úhlu u $A$. Dokažte, že tato rovnoběžka půlí obvod trojúhelníka $ABC$.

**Příklad 24.** Úsečku $AB$, která se dotýká kružnice $k$ v bodě $A$, otočíme podle středu kružnice $k$ na úsečku $A'B'$. Ukažte, že přímka $AA'$ prochází středem úsečky $BB'$.

**Příklad 25.** Na ramenech $AB$, $AC$ rovnoramenného trojúhelníka $ABC$ jsou dány $K$, $L$ tak, že $KL = BK + CL$. Rovnoběžka se stranou $AC$ vedená středem $M$ úsečky $KL$ protne základnu $BC$ v $N$. Určete velikost úhlu $KNL$.

**Příklad 26.** (Menelaova věta) Je dán trojúhelník $ABC$. Na přímkách $BC$, $CA$, $AB$ jsou dány postupně body $D$, $E$, $F$ tak, že právě dva leží na stranách $\triangle ABC$. Pak body $D$, $E$, $F$ leží na jedné přímce právě tehdy když

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

## Literatura a zdroje

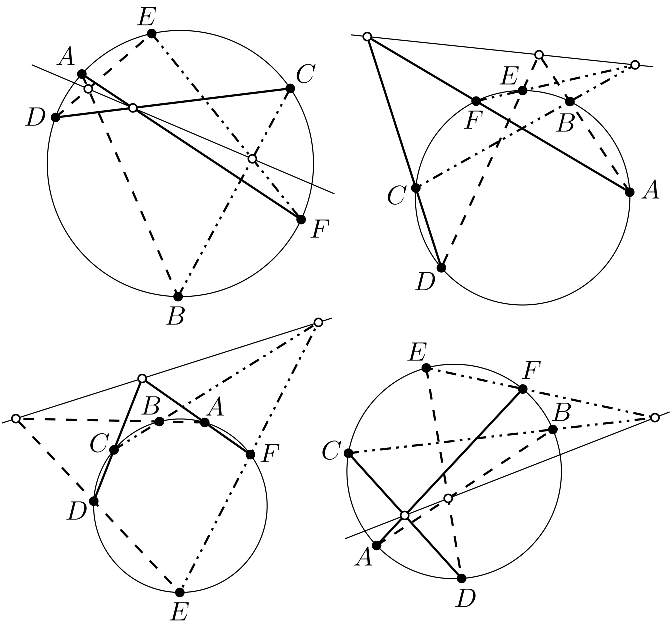
Příspěvek je skoro doslovně zkopírován z hodin matematického klubu, který v mých základoškolských letech probíhal. Tímto bych rád poděkoval jeho organizátorům *Pavlu Šalomovi*, *Pepovi Tkadlecovi* a *Michalu „Kennymu“ Rolínkovi.*

# Pascal chasing

Radek Olšák

Abstrakt. Pascalova věta má obrovské množství podob a může často (většinou omylem) proklouznout do úloh v různých olympiádách. Řešení pak umí být velmi stručná, obsahující tak 6 nebo 12 písmenek :-).

**Věta.** (Pascal nejčastější forma) *Nechť body $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ leží na kružnici. Pak $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ leží na jedné přímce.*



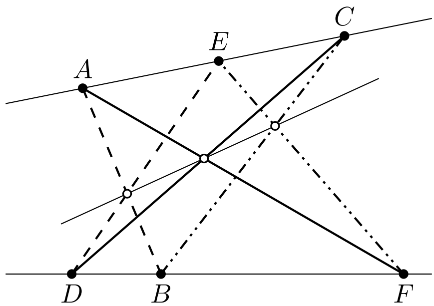

**Věta.** (Pascal obecný) *Body $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ leží na jedné* **kuželosečce** *právě tehdy, když $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ leží na jedné přímce.*

**Poznámka.** Protože se jedná o projektivní větu, tak si rozšiřujeme svět tak, aby se všechny rovnoběžné přímky protínaly v jednom novém bodě. Takže je třeba se nebát, když hledáme průsečík a přímky jsou náhodou rovnoběžné :-).

*Důkaz.* Pro zájemce na konzultacích. □

**Věta.** (Pappus) *Máme body $A$, $C$, $E$ ležící na jedné přímce a body $B$, $D$, $F$ na druhé. Pak $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ leží na jedné přímce.*

*Důkaz.* Pascal, kde kuželosečka je degenerovaná ve dvě přímky. □




## Příklady

**Příklad 1.** (Kyiv mathematical festival 2021) Mějme $\omega$ kružnici opsanou trojúhelníku $ABC$, $E$ je střed oblouku $AC$ a $F$ je střed oblouku $AB$. Přímky $AF$ a $BE$ se protnou v $P$. Analogicky, $CF$ a $AE$ se protnou v $R$. Tečna k $\omega$ v $A$ protne $BC$ v $Q$. Dokažte, že $P$, $Q$, $R$ leží na jedné přímce.

**Příklad 2.** (2015 Mock USAJMO shortlist G5) Čtyři body $A$, $B$, $C$, $D$ leží na kružnici se středem v $O$. Body $X$ a $Y$ leží postupně na $AB$ a $AD$ tak, že $CX \perp CD$ a $CY \perp BC$. Dokažte, že $O$, $X$, $Y$ leží na jedné přímce.

**Příklad 3.** Mějme rovnoběžník $ABCD$. Na přímce $AB$ je zvolen bod $X$ a na přímce $AD$ je zvolen bod $Y$. Označme $Z$ překlopené $A$ podle středu $XY$. Dokažte, že přímky $XD$, $BY$ a $CZ$ prochází jedním bodem.

**Příklad 4.** Buď $ABC$ ostroúhlý trojúhelník a $k$ jeho kružnice opsaná. Označme $t_A$, $t_B$, $t_C$ tečny ke $k$ v postupně $A$, $B$, $C$. Dokažte, že $AB \cap t_C$, $BC \cap t_A$ a $CA \cap t_B$ leží na jedné přímce.

**Příklad 5.** (Austrian Regional Competition For Advanced Students 2019, P2) Na kružnici leží body $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ tak, že $|AB| = |BD|$. Označme $P$ průsečík diagonál $AC$ a $BE$. Přímky $BC$ a $DE$ se protnou v $Q$. Dokažte, že $PQ \parallel AD$.

**Příklad 6.** Mějme trojúhelník $ABC$ s kružnicí opsanou $\omega$. Označme $\Omega$ kružnici dotýkající se zevnitř $\omega$ a stran $AB$ a $AC$ postupně v bodech $T$,$B_1$, $C_1$. Dokažte, že střed $B_1C_1$ je střed kružnice vepsané $ABC$.

**Příklad 7.** Mějme konstrukci z předchozí úlohy. Označme $M_A$ střed oblouku $BC$. Dokažte, že $BC$, $TM_A$ a $B_1C_1$ prochází jedním bodem.

**Příklad 8.** Na kružnici opsané trojúhelníku $ABC$ jsou zvoleny body $D$ a $E$. Přímky $AD$ a $AE$ protnou $BC$ postupně v $X$ a $Y$. Označme $D'$ a $E'$ postupně překlopené $D$ a $E$ podle osy strany $BC$. Dokažte, že $D'Y$ a $E'X$ se protínají na kružnici opsané.

**Příklad 9.** (ELMO 2014 Shortlist G4) Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s kružnicí opsanou $\omega$. Označme $E$, resp. $F$ průsečíky tečny v $A$ s $CD$, resp. $BC$. Dále $G = BE \cap \omega$, $H = BE \cap AD$, $I = DF \cap \omega$ a $J = DF \cap AB$. Dokažte, že $GI$, $HJ$, $AE$ a tečna k $\omega$ v $C$ se protínají v jednom bodě.

**Příklad 10.** Mějme bod $P$ uvnitř trojúhelníka $ABC$. Rovnoběžky se stranami trojúhelníka skrz $P$ protnou postupně strany trojúhelníka v šesti bodech. Dokažte, že těchto šest bodů leží na jedné kuželosečce.

**Příklad 11.** Označme $O$ střed kružnice opsané $ABC$ a $I$ střed kružnice vepsané. Mějme přímku $d$ procházející $I$ takovou, že $d \parallel BC$. Dále označme $d'$ přímku různou od $d$ takovou, že $d \parallel d'$ a $d'$ protíná kružnici opsanou v bodech $M$, $N$. Označme druhý průsečík $IM$ a opsané jako $E$ a druhý průsečík $AI$ a opsané jako $S$. Dále $AN \cap d = P$. Dokažte, že $P$, $E$, $S$ leží na jedné přímce.

**Příklad 12.** (IGO 2016 Medium 4) Nechť $\omega$ je kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku $ABC$ ($|\sphericalangle BAC| = 90°$). Tečna k $\omega$v $A$ protne $BC$ v $P$. Označme $M$ střed oblouku $AB$ na opsané a druhý průsečík $PM$ a $\omega$ jako $Q$. Tečna k $\omega$ v bodě $Q$ protne $AC$ v $K$. Dokažte, že $|\sphericalangle PKC| = 90°$.

**Příklad 13.** Je dán trojúhelník $ABC$ a střed jeho kružnice opsané $O$. Označme $N$ střed oblouku $AC$ a $M$ průsečík tečny k opsané v $N$ s $AB$. Nechť $D$ je druhý průsečík $MC$ a opsané a $P = NB \cap AC$. Dokažte, že $AN$, $DB$ a $PM$. prochází jedním bodem.

**Příklad 14.** (ISL 2004) Mějme kružnici $\omega$ a přímku $d$ mimo ni. Označme $AB$ průměr $\omega$ takový, že $AB \perp d$ ($B$ je blíže $d$). Na $\omega$ zvolme bod $C$. Označme $D = AC \cap d$. Jedna z tečen k $\omega$ z $D$ se dotýká $\omega$ v $E$ ($E$ leží ve stejné polorovině jako $B$ vzhledem k $AC$). Označme $F = BE \cap d$. Přímka $AF$ protne $\omega$ podruhé v $G$. Dokažte, že překlopený $G$ podle $AB$ leží na $CF$.

**Příklad 15.** Máme trojúhelník $ABC$ s kružnicí opsanou $\omega$. Označme $D$ patu výšky z $C$. Tato výška protne $\omega$ podruhé v $E$. Osa úhlu $\sphericalangle BAC$ protne $AB$ ve $F$ a $\omega$ v $G$. Přímka $GD$ protne $\omega$ podruhé v $H$ a přímka $HF$ protne $\omega$ podruhé v $I$. Dokažte, že $|AI| = |EB|$

**Příklad 16.** Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$ s body dotyku $E$, $F$, $G$, $H$. Pak $AC$, $BD$, $EG$, $FH$ prochází jedním bodem.

**Příklad 17.** (Lithuania TST 2016 P4) Označme $D$ patu výšky v $ABC$ a $L$ průsečík osy $\sphericalangle BAC$ s $BC$. Přímka $AL$ protne kružnici opsanou $\omega$ podruhé v $M$. Přímka $MD$ protne $\omega$ podruhé v $N$ a přímka $NL$ protne $\omega$ podruhé v $E$. Dokažte, že $AE$ je průměr $\omega$.

**Příklad 18.** (APMO 2021 P3) Mějme $ABCD$ tětivový čtyřúhelník s kružnicí opsanou $\omega$. Diagonály $AC$ a $BD$ se protnou v $E$. Nechť $L$ je střed kružnice dotýkající se přímek $AB$, $BC$, $CD$ a $M$ je střed oblouku $BC$ na $\omega$. Dokažte, že připsiště $\triangle BCE$ naproti $E$ leží na přímce $LM$.

**Příklad 19.** Mějme trojúhelník $ABC$ a bod $P$. Označme body $A_1 = PA \cap BC$, $B_1 = PB \cap AC$ a $C_1 = PC \cap AB$. Dále označme $A_2$ střed $PA$, $B_2$ střed $PB$ a $C_2$ střed $PC$. Nakonec budiž $K$, $L$, $M$ středy stan $AB$, $BC$, $CA$. Dokažte, že $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$, $K$, $L$ leží na jedné kuželosečce.

**Příklad 20.** (APMO 2008 P3) Označme $\omega$ kružnici opsanou $ABC$. Kružnice skrz $A$ a $C$ protne strany $BC$ a $BA$ v $D$ a $E$. Přímky $AD$ a $CE$ protnou $\omega$ podruhé v $G$ a $H$. Tečny k $\omega$ v $A$ a $C$ protnou $DE$ postupně v $L$ a $M$. Dokažte, že $LH$ a $MG$ se protínají na $\omega$.

**Příklad 21.** Máme trojúhelník $ABC$ se středem kružnice opsané $O$. Označme $A_1$ a $B_1$ paty výšek z $A$ a $B$. Dále nechť $M$ a $N$ jsou středy stran $AC$ a $BC$. Zvolme $X$ na $BB_1$ tak, že $MX \perp AB$ a analogicky $Y$ na $AA_1$ tak, že $NY \perp AB$. Označme $P = A_1M \cap B_1N$ a $Q = XN \cap YM$. Dokažte, že $P$, $O$, $Q$ leží na jedné přímce.

**Příklad 22.** Zvolme bod $D$ na oblouku $BC$ kružnice opsané $\triangle ABC$. Zvolme $E$ uvnitř trojúhelníků $ABC$ a $ADC$ tak, že $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle BCE|$. Kružnice opsaná $ADE$ protne $AB$ podruhé v $K$. Přímky $EK$ a $BC$ se protnou v $L$, přímky $EC$ a $AD$ se protnou v $M$ a přímky $BM$ a $DL$ se protnou v $N$. Dokažte, že $|\sphericalangle NEL| = |\sphericalangle NDE|$.

**Příklad 23.** (výběrko 2020) Mějme trojúhelník $ABC$ s výškami $AD$, $BE$, $CF$. Označme $E'$ a $F'$ překlopené $E$ a $F$ podle výšky $AD$. Označme $X = BE' \cap CF'$ a $Y = BF' \cap CE'$. Dokažte, že $XF$ a $YE$ se protínají na $BC$.

**Příklad 24.** Mějme trojúhelník $ABC$ s ortocentrem $H$ a středy stran $AB$, $AC$ označené postupně $M$, $N$. Označme středy $BH$, $CH$ postupně $I$, $J$. Dále nechť $K = MH \cap IJ$ a $L = HN \cap IJ$. Označme $X = CK \cap NI$ a $Y = BL \cap MJ$. Nakonec budiž $Z = BX \cap CY$. Dokažte, že $AZ$ prochází středem Feuerbachovy kružnice (kružnice opsaná $MNIJ$).

## Návody

**1.** Pascal!

**2.** Pascal!

**3.** Pascal?

**4.** Pascal!

**5.** Pascal!

**6.** Dokresli středy oblouků $AB$ a $AC$.

**7.** Pascal!

**8.** Pascal!

**9.** Pascal!!

**10.** Pascal!

**11.** Pascal!

**12.** $AQQMCA$, $ABCMMQ$.

**13.** $NNBDCA$

**14.** Protni $GE \cap BC$.

**15.** Pascal!

**16.** Pascal!

**17.** Dokaž, že $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle EAC|$.

**18.** Dokresli správná dvě vepsiště a připsiště kolem $M$.

**19.** Pascal!!!!

**20.** $ABXHCA$ a další.

**21.** Leží na $OH$.

**22.** $AD \cap BE = X$, pak se podívej na kružnici $XLDCE$.

**23.** Pascal!!!

**24.** $BCXYMNH$ leží na jedné kuželosečce.

## Literatura a zdroje

[1] Carl Joshua Quines: *Pascal's theorem*, *https://cjquines.com/files/pascals.pdf*
[2] *https://artofproblemsolving.com/*

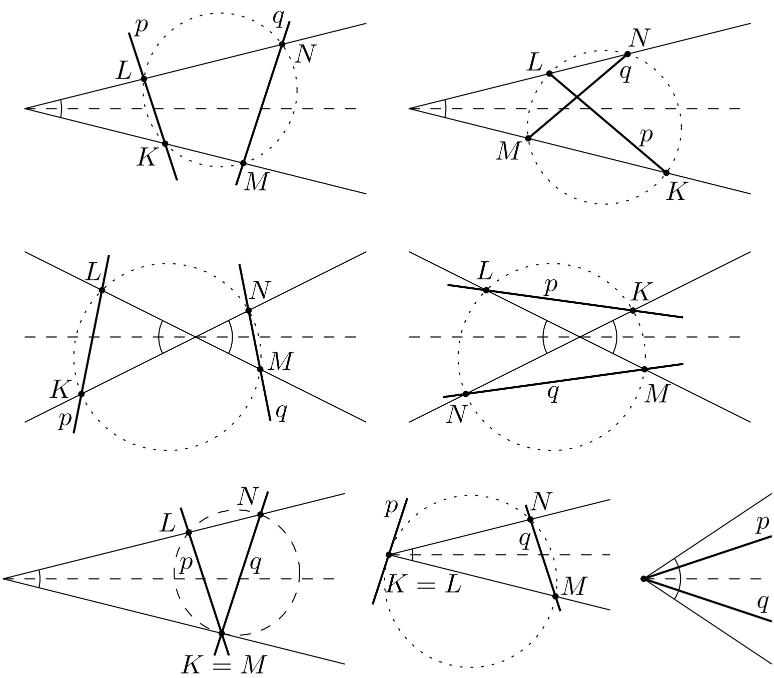
# Antirovnoběžnost

TERKA POLÁKOVÁ

ABSTRAKT. Příspěvek vysvětluje pojem antirovnoběžnosti a jeho využití při řešení některých geometrických úloh.

**Definice.** Je dán úhel $XVY$ a jeho osa $o$.[1] Přímky $p$ a $q$ nazveme *antirovnoběžné* v úhlu $XVY$, pokud pro osový obraz $p'$ přímky $p$ podle $o$ platí $p' \parallel q$.

**Tvrzení.** *Přímky $p$ a $q$ jsou antirovnoběžné v daném úhlu, právě když nastane jedna ze situací zachycených na následujících obrázcích.*




[1] Za úhel budeme považovat i dvojici rovnoběžných přímek. V tom případě osou úhlu rozumíme osu pásu mezi rovnoběžkami.

**Tvrzení.** *Pokud jsou $p$ a $q$ antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům, pak mají tyto úhly kolmé či rovnoběžné osy.*

**Tvrzení.** *Pokud jsou $p$ a $q$ antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům, pak dvojice antirovnoběžných přímek v těchto úhlech splývají.*

## Připomenutí

**Definice.** *Ortocentrem* trojúhelníku rozumíme průsečík jeho výšek. *Střed kružnice opsané* trojúhelníku je průsečík os jeho stran. *Střed kružnice vepsané* trojúhelníku je průsečík os jeho vnitřních úhlů

**Definice.** Mějme oblouk $AB$ na kružnici $k$ se středem $S$. Úhel, jehož vrchol leží v $S$ a jehož ramena procházejí body $A$ a $B$, se nazývá *středový úhel k oblouku $AB$.*

**Definice.** Mějme oblouk $AB$ na kružnici $k$ se středem $S$. Úhel, jehož vrchol leží na kružnici $k$ (a není to bod $A$ nebo $B$) a jehož ramena procházejí body $A$ a $B$, se nazývá *obvodový úhel k oblouku $AB$.*

Pro středový a obvodový úhel u toho samého oblouku platí, že středový úhel je dvojnásobkem obvodového úhlu.

**Definice.** Mějme oblouk $AB$ na kružnici $k$ se středem $S$. Úhel, který svírá úsečka $AB$ s tečnou ke kružnici $k$ v bodě $A$ (nebo $B$, je to stejné), se nazývá *úsekový úhel k oblouku $AB$.*

**Tvrzení.** *Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když je splněna jedna z následujících podmínek:*

(i) *Součet protějších úhlů je* $180°$.
(ii) *Jedna z jeho stran je vidět ze zbylých vrcholů pod stejným úhlem.*

## Lehké příklady

**Příklad 1.** Na kružnici $k$ je dána tětiva $AB$. Označme $S$ střed kratšího oblouku určeného body $A$ a $B$. Bodem $S$ vedeme dvě různé přímky, které protnou $AB$ a $k$ ve čtyřech dalších bodech. Ukažte, že tyto čtyři body leží na kružnici.

**Příklad 2.** Máme dány dvě kružnice $k$ a $l$ a body, ve kterých se protínají, označíme $P$, $Q$. Libovolně zvolíme bod $A$ na kružnici $k$. Potom přímky $AP$ a $AQ$ protínají kružnici $l$ v bodech $B$ a $C$. Dokažte, že tečna ke kružnici $k$ v bodě $A$ je rovnoběžná s přímkou $BC$.

**Příklad 3.** Ať $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Buď $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že osy úhlů $\sphericalangle AQB$ a $\sphericalangle BPC$ jsou na sebe kolmé.

**Příklad 4.** Jsou dány kružnice $k$, $l$, které se protínají v bodech $A$, $B$. Označme $K$, $L$ po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod $B$ je vnitřním bodem trojúhelníku $AKL$. Na kružnicích $k$ a $l$ zvolme po řadě body $N$ a $M$ tak, aby bod $A$ byl vnitřním bodem úsečky $MN$. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka $MN$ je tečnou kružnice opsané $\triangle AKL$.

(Domácí kolo MO 2010)

**Příklad 5.** Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a kružnici $\omega$ jemu opsanou. Bodem $D$ vedeme kolmici na přímku $AC$. Bod, ve kterém se kolmice protne se stranou, označíme $E$ a bod, ve kterém se kolmice protne s $\omega$, označíme $F$. Nechť $l$ je kolmice na přímku $BC$, která prochází bodem $F$. Kolmice na přímku $l$ procházející bodem $A$ protíná přímku $l$ v bodě $G$ a kružnici $\omega$ v bodě $H$. Průsečík přímek $GE$ a $FH$ označíme $I$ a průsečík přímek $GE$ a $CD$ označíme $J$. Dokažte, že body $C$, $F$, $I$ a $J$ leží na jedné kružnici.

**Příklad 6.** Mějme ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Nechť $A_1$ je takový bod, že platí $A_1 \in BC$ a $AA_1$ je výška $\triangle ABC$. Obdobně zvolíme bod $B_1 \in AC$ tak, aby $BB_1$ byla výškou $\triangle ABC$. Ortocentrum $\triangle ABC$ označme $H$. Zvolme body $A_2$, $B_2$ takové, že $A_2 \in HB$, $B_2 \in HA$, úsečka $A_1A_2$ je výškou trojúhelníku $HBA_1$ a úsečka $B_1B_2$ je výškou trojúhelníku $HB_1A$. Dokažte, že jsou úsečky $A_2B_2$ a $AB$ rovnoběžné.

**Příklad 7.** Budiž $ABCD$ lichoběžník se základnami $AD$ a $BC$. Označme $O$ průsečík jeho úhlopříček a $o$ osu $\sphericalangle BOC$. Dále označme obrazy bodů $B$, $C$ v osové souměrnosti podle $o$ jako body $B_1, C_1$. Dokažte, že úhly $\sphericalangle BDB_1$ a $\sphericalangle CAC_1$ jsou stejně velké.

**Příklad 8.** Budiž $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Body $P$, $Q$ jsou po řadě paty kolmic z vrcholu $A$ na přímky $BC$ a $CD$. Body $R$ a $T$ jsou po řadě paty kolmic z vrcholu $D$ na přímky $AB$ a $BC$. Dokažte, že bodům $P$, $Q$, $R$, $T$ lze opsat kružnice.

**Příklad 9.** Budiž $ABCD$ tětivový čtyřúhelník takový, že přímky $BA$ a $CD$ se protínají v bodě $P$. Na přímce $CD$ libovolně zvolíme body $E$ a $F$. Nechť $G$ je střed kružnice opsané $\triangle ADE$ a $H$ je střed kružnice opsané $\triangle BCF$. Dokažte, že pokud body $A$, $B$, $F$, $E$ leží na jedné kružnici, pak lze body $P$, $G$, $H$ proložit přímku.

## Izogonalita

**Definice.** Je dán úhel $XVY$ a jeho osa $o$. Pokud jsou $p$ a $q$ antirovnoběžné přímky v úhlu $XVY$, pro které platí $V \in q$ a $V \in p$, pak říkáme, že jsou přímky $p$ a $q$ *izogonální* v úhlu $XVY$.

**Tvrzení.** *V $\triangle ABC$ je $H$ ortocentrum v $\triangle ABC$ a $O$ střed kružnice opsané. Pak jsou $AH$ a $AO$ izogonální v úhlu $BAC$.*

## Těžší příklady

**Příklad 10.** Předpokládejme, že v $\triangle ABC$ výška a těžnice z vrcholu $A$ dělí $\sphericalangle BAC$ na třetiny. Určete vnitřní úhly v $\triangle ABC$.

**Příklad 11.** V $\triangle ABC$ platí, že výška, těžnice a osa úhlu z vrcholu $A$ dělí $\sphericalangle BAC$ na čtvrtiny. Určete vnitřní úhly v $\triangle ABC$.

**Příklad 12.** Úhlopříčky $AC$ a $BD$ tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v bodě $P$ . Středy kružnic opsaných čtyřúhelníků $ABCD$, $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle CDP$ a $\triangle DAP$ označíme postupně jako $O$, $O_1$, $O_2$, $O_3$ a $O_4$. Ukažte, že $OP$, $O_1O_3$ a $O_2O_4$ procházejí jedním bodem.

## Poděkování

Příspěvek je upravenou verzí příspěvku *Antirovnoběžnost* od Michala „Kenny“ Rolínka, kterému tímto děkuji.

## Literatura a zdroje

[1] Michal „Kenny“ Rolínek: *Antirovnoběžnost*, Oldřichov, 2012.

# Statistika

Hedvika Ranošová

Abstrakt. V této přednášce se podíváme na několik základních poznatků z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky – zákon velkých čísel, normální rozdělení a centrální limitní větu. Důraz je zde kladen zejména na motivaci a historický kontext, ve kterém byly tyto koncepty objeveny.

## Zákon velkých čísel

Přestože pravděpodobnosti můžeme přiřazovat libovolné objekty, budeme se zabývat pouze případy s celými nebo reálnými čísly.

**Definice.** *Diskrétním rozdělením pravděpodobnosti* myslíme (zjednodušeně) přiřazení každé hodnotě z předem dané množiny její pravděpodobnost. Funkce, která daných hodnot nabývá s předepsanou pravděpodobností, se nazývá *náhodná veličina* a značíme ji $X$.[1]

Součet všech přiřazených pravděpodobností musí být 1 neboli jsme si na 100 % jisti, že nějaká událost nastane.

**Definice.** Rozdělení, kde jednička nastává s pravděpodobností $p$ a nula s pravděpodobností $1 - p$, se nazývá *alternativní.* Pro jednoduchost značíme $\mathrm{Alt}(p)$.

**Úloha 1.** Jak vypadá alternativní rozdělení, kde jedničku si zapíšeme, právě když

(i) nám padne panna na spravedlivé minci?
(ii) hodíme na dvou kostkách součet jedenáct?
(iii) se první člověk, kterého potkáme, jmenuje Pavel? Jak se tato odpověď liší pokud neuvažujeme celou ČR, ale jen přítomné na soustředění?

**Úloha 2.** Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka, je $\frac{1}{6}$. Jaká je pravděpodobnost, že v sedmi hodech padnou dvě šestky? A jaká je pravděpodobnost, že v $n$ hodech padne $k$ šestek?

[1] Náhodnou veličinu si můžeme představit jako konkrétní generátor náhodných čísel, kostku nebo minci, rozdělení pak jako manuál takového generátoru.

**Definice.** Rozdělení, které číslu $k$ mezi 0 a $n$ přiřadí pravděpodobnost

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

nazýváme *binomickým* rozdělením a značíme $\mathrm{Bin}(n,p)$.

Rozdělení si můžeme hezky zanést do histogramu, kde ke každému číslu nakreslíme tak vysoký sloupec, jak je číslo pravděpodobné. Pro popis náhodných veličin si dále zavedeme dvě užitečné charakteristiky. *Střední hodnota* udává průměrnou hodnotu a spočteme ji jako vážený průměr

$$\mathrm{E}(X)=\sum_k k\cdot P_k,$$

kde $P_k$ značí pravděpodobnost toho, že nám vyjde $k$. Oproti tomu *rozptyl* popíše variabilitu dat, tedy vzdálenost od střední hodnoty

$$\mathrm{var}(X)=\sum_k (k-\mathrm{E}(X))^2\cdot P_k.$$

**Úloha 3.** (filosofická) Proč jako míru variability dat nepoužíváme

$$\sum_k (k-\mathrm{E}(X))\cdot P_k$$

či druhou mocninu nenahradíme absolutní hodnotou?

**Úloha 4.** Spočtěte střední hodnotu a rozptyl $\mathrm{Alt}(\frac{1}{5})$, respektive $\mathrm{Alt}(p)$ a $\mathrm{Bin}(3,\frac{1}{5})$, respektive $\mathrm{Bin}(n,p)$.

Jak by vypadala situace, kde bychom kostkou házeli dál a dál a zapisovali si padlé šestky?

**Věta.** (slabý zákon velkých čísel pro binomické rozdělení) *Zvolme si $p\in(0,1)$ a libovolnou toleranci $\varepsilon>0$. Označme $X_n$ náhodnou veličinu s rozdělením $\mathrm{Bin}(n,p)$. Pak pravděpodobnost toho, že $|X_n-pn|\le\varepsilon n$, je větší než $1-\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$.*

**Věta.** (silný zákon velkých čísel) *Mějme posloupnost stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin $X_1$, $X_2$, … se střední hodnotou $a$. Symbolem $\overline{X}_n$ označme aritmetický průměr prvních $n$ veličin. Pak se $\overline{X}_n$ s rostoucím $n$ blíží hodnotě $a$.*

### Rozdělení chyby měření

Pokud chceme popisovat rozdělení na intervalu (nebo na celé reálné přímce), nevystačíme si s pouhým přiřazováním pravděpodobností každé hodnotě.[2] Můžeme ale rozumně změřit pravděpodobnost intervalu. Takové rozdělení pak umíme popsat nějakou funkcí na daném definičním oboru, aby pravděpodobnost daného intervalu odpovídala obsahu plochy pod funkcí na daném intervalu.

**Úloha 5.** (filosofická) Jak by vypadala funkce, kterou bychom popsali rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$?

**Úloha 6.** (motivační, podle skutečné události) Astronom Piazzi v roce 1801 poprvé pozoroval planetku Ceres a stihl za krátký čas udělat 24 pozorování její polohy. Gauss dále ukázal, že dráha planetky je dána rovnicí šestého stupně. Jaká dráha Cerery je nejpravděpodobnější, jsou-li Piazziho měření zatížená chybou?

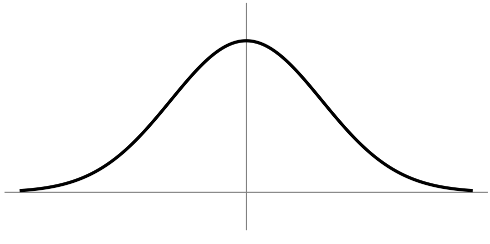
Rozdělení chyby si tehdejší matematici představovali jako spojitou funkci $P(x)$, která přiřadí chybě o velikosti $x$ její pravděpodobnost. Po funkci navíc požadovali, aby funkce měla maximum v bodě 0 a aby byla sudá, tedy pravděpodobnost chyby $-x$ a $+x$ bude stejná.

Takových funkcí je ale mnoho a žádný z matematiků neuměl obhájit, která je ta pravá. Gauss přidal další požadavek, kterým se inspiroval z fyziky. Chce-li fyzik změřit nějakou věc, udělá více měření a následně použije jejich aritmetický průměr. Hledáme tedy takovou funkci, kde je aritmetický průměr nejpravděpodobnější.

**Definice.** Rozdělení dané funkcí

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

se nazývá *normální* rozdělení s rozptylem $\sigma^2$. Standardně přidáváme ještě parametr $\mu$ značící posunutí po ose $x$, rozdělení značíme $N(\mu, \sigma^2)$. Funkci pak říkáme *Gaussova* křivka.

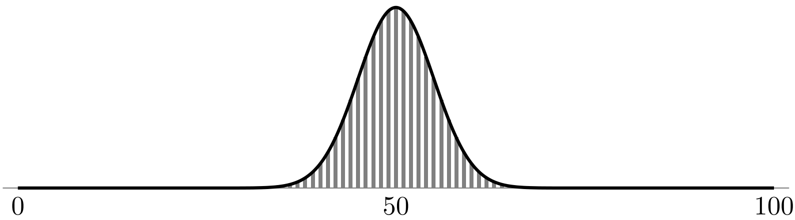


Gauss pak spočítal dané parametry, aby pravděpodobnost, že se Piazzi dopustil právě těch chyb, jakých se podle Gausse dopustil, byla co největší. Maximalizujeme tedy pravděpodobnost daných chyb, čímž ale minimalizujeme součet jejich druhých mocnin. Tento postup se nazývá *metoda nejmenších čtverců*, a používá se typicky v případech, kdy máme více pozorování než volných parametrů.

[2] Těch čísel je zkrátka příliš mnoho, i kdybychom vzali jen interval $(0,1)$.

## Centrální limitní věta

**Úloha 7.** Máme sto semínek slunečnice a každé vyklíčí s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Jak vypadá rozdělení pravděpodobnosti? Jaká je střední hodnota a rozptyl? Jaká je pravděpodobnost, že nám vyroste alespoň 80 rostlinek? Co když do histogramu přikreslíme Gaussovu křivku s parametry $\mu = 50$ a $\sigma^2 = 25$?




**Věta.** (Moivreova-Laplaceova CLV) *Pro dostatečně velké $n$ dovedeme rozdělení* $\mathrm{Bin}(n, p)$ *dobře aproximovat normálním rozdělením* $N(np, np(1-p))$.

Že to funguje, jen protože má binomické rozdělení tvar jako kopeček? Binomické rozdělení můžeme vyrobit jako součet náhodných veličin s alternativním rozdělením. Co kdybychom sčítali něco jiného? Zase to od nějaké chvíle začne připomínat Gaussovu křivku. A to je přesně centrální limitní věta:

**Věta.** *Mějme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1$, $X_2, \ldots$ se střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2 > 0$, pak $\sum_{i=1}^{n} X_i$ se dá pro dostatečně velké $n$ aproximovat pomocí $N(n\mu, n\sigma^2)$.*

Centrální limitní větu tedy skoro nezajímá, s jakým rozdělením začínáme, vždycky se po chvíli vynoří Gauss a ulehčí nám práci. Plocha pod Gaussovou křivkou se ale nedá jednoduše spočítat, proto se v praxi úloha převede na normální rozdělení $N(0, 1)$, a správná hodnota se najde v tabulkách nebo ji spočítá software.

**Úloha 8.** Na večírek přijde sto hostů. Víme, že každý host chce sníst nezávisle na ostatních nula chlebíčků s pravděpodobností 20 %, jeden s pravděpodobností 50 % a dva s pravděpodobností 30 %. Kolik máme nakoupit chlebíčků, aby s pravděpodobností aspoň 99 % na všechny zbylo?

## Závěr

Statistika obsahuje mnohem více zajímavých výsledků, než kolik jich může pojmout přednáška na soustředění. Pokud nechcete čekat, až Vám o nich řeknou na vysoké škole, doporučuji vznikající skripta *Anina Belana*, kde je všechno dopodrobna vysvětleno i bez předchozích znalostí pokročilé matematiky. Tímto mu také děkuji za podklady a inspiraci.

## Návody

**1.** Pravděpodobnost panny je $\frac{1}{2}$. Na dvou kostkách nám může padnout 36 různých možností, šest pro každou kostku. Součet jedenáct dají pouze dvě. Pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{18}$. V ČR s populací 10,65 milionů obyvatel je 200 997 Pavlů, tedy 1,89 procenta. Na sousu bude nejspíš o něco vyšší procento.

**2.** Vybereme v kterých dvou hodech padly šestky, na to se hodí kombinační číslo (nebo hrubá síla). V každém pokusu je pravděpodobnost buď $\frac{1}{6}$, nebo $\frac{5}{6}$.

**3.** První možnost je k ničemu a vrátí pokaždé to samé. Druhá je z pohodlnosti, že se nám nelíbí ta špička u absolutní hodnoty, která ztěžuje práci.

**4.** Obecně je střední hodnota $p$ a rozptyl $p(1-p)$ pro alternativní a $np$ a $np(1-p)$ pro binomické.

**5.** Třeba jako takový stupínek, mimo interval bychom nechali nulu a uvnitř intervalu by nabývala vždy jedné.

**7.** Normální rozdělení krásně odpovídá histogramu binomického rozdělení.

## Literatura a zdroje

[1] Anino Belan: *Kde sa vzala pravdepodobosť a štatistika?*, ŠPMNDaG, 2021. Vznikají na *https://www.smnd.sk/anino/statistika/statistika.pdf*.
[2] Danil Koževnikov a Vašek Rozhoň: *Pravděpodobnost*, seriál 38. ročníku.
[3] Petr Šimeček: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, seriál 23. ročníku.

# Cauchy–Schwarzova nerovnost

Martin Raška

Abstrakt. Zkráceně CS nerovnost – jeden z nejmocnějších nástrojů pro odhadování algebraických výrazů. I když nerovností na mezinárodních soutěží ubývá, umět používat CS nerovnost je velmi důležité a pro úspěšného olympionika to představuje nutnost. Přitom si tyto techniky lze poměrně lehce osvojit – rozpoznat, jestli nám v nějakém příkladě bude CS nerovnost užitečná, není zas tak těžké. Její aplikace je potom už jen otázkou cviku. Tak pojďme na to!

**Věta.** (Cauchy–Schwarzova nerovnost) *Nechť $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou libovolná reálná čísla. Pak platí*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

*Důkaz.* Uvažujme dvě $n$-tice libovolných reálných čísel $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$.

$$P(x) = (a_1x - b_1)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$$

je zřejmě nezáporný výraz pro libovolné reálné $x$. Jelikož je zároveň v proměnné $x$ kvadratický, je jeho diskriminant nekladný. Tedy

$$(2a_1b_1 + \dots + 2a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \leq 0,$$

což je ekvivalentní znění CS nerovnosti. □

**Poznámka.** Rovnost nastává právě tehdy, když existuje reálné $\lambda$ splňující $b_i = a_i\lambda$ pro všechna $i$ od jedné do $n$.

**Příklad 1.** Dokažte nerovnost $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ pro kladná $a$, $b$, $c$.

**Příklad 2.** Pro $x$, $y$, $z$ reálná dokažte $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$.

**Cvičení 3.** (základní a užitečné fígle) Dokažte:

(1) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,
(2) $n(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2$ pro $a_i \in \mathbb{R}$,
(3) $(a_1 + \dots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$ pro $a_i \in \mathbb{R}^+$,
(4) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$ pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$,
(5) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$ pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která to má smysl.

**Příklad 4.** Dokažte pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Cauchy–Schwarzova nerovnost má dva obzvlášť užitečné tvary – oba jsou sice ekvivalentní jejímu znění, ale výrazně usnadňují intuici.

**Tvrzení.** (CS zlomkobijec) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nezáporná a $b_1, b_2, \ldots b_n$ kladná. Pak platí*

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

**Příklad 5.** Buďte $a$, $b$, $c$, $d$ kladná čísla splňující $a+b+c+d = 1$. Ukažte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Irská MO)

**Příklad 6.** Pro kladná čísla $a$, $b$, $c$ dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

**Příklad 7.** Nechť $a$, $b$, $c$ jsou kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

**Tvrzení.** (CS na odmocniny) *Buď $n$ přirozené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ čísla kladná reálná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

**Cvičení 8.** Dokažte následující nerovnosti pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

(i) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$,

(ii) $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}$.

**Příklad 9.** Kladná čísla $x, y, z \geq 1$ splňují $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokažte

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.$$

## Střední příklady

**Příklad 10.** Určete všechny $n$-tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \dots + \frac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2.$$

(Kraj MO 1981/1982)

**Příklad 11.** Ukažte, že pro kladná reálná $a$, $b$, $c$ splňující $a + b + c = 1$ platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

**Příklad 12.** Pro kladná reálná $a$, $b$, $c$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

(Turnaj měst 1998)

**Příklad 13.** Pro nezáporná reálná $a$, $b$ dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

(Celostátko MO 2014)

## Těžší příklady

**Příklad 14.** Nechť $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ jsou reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$a + b + c + d + e = 8,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Určete, jaké nejvyšší hodnoty může nabývat $e$. (7. USAMO 1978)

**Příklad 15.** Ukažte, že pro $x, y, z \geq 1$ platí

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x(yz+1)}.$$

**Příklad 16.** Pro kladná reálná $a$, $b$, $c$ dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

**Příklad 17.** Kladná reálná $x$, $y$, $z$ splňují $x^2+y^2+z^2 \geq 3$. Dokažte

$$\frac{x^3}{\sqrt{y^2+z^2+7}}+\frac{y^3}{\sqrt{z^2+x^2+7}}+\frac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2+7}} \geq 1.$$

**Příklad 18.** Mějme kladná reálná $a$, $b$, $c$, že $abc=1$. Dokažte

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^5+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^5} \leq 3.$$

(IMO 2005)

**Příklad 19.** Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a$, $b$, $c$ platí

$$\frac{c^2-ab}{4a^2+b^2+4c^2}+\frac{a^2-bc}{4a^2+4b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{a^2+4b^2+4c^2} \geq 0.$$

## Návody

**7.** V čitatelích chceš netriviální druhou mocninu.

**9.** Odmocniny nalevo poděl a vynásob příslušnou proměnnou.

**12.** Zkus si jen tak pro zábavu roznásobit $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

**13.** V zadání jsou zlomky i odmocniny. Co použít zlomkobijce i odmocninový tvar najednou?

**14.** Odhadni vztah mezi součty druhých a prvních mocnin u prvních čtyřech proměnných pomocí CS.

**15.** Dvakrát použij CS ve tvaru $\sqrt{((x-1)+1)(1+(y-1))} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}$.

**17.** Klasicky odhadni zlomkobijcem a odmocninami tak, aby pak šlo $a^2+b^2+c^2$ substituovat jednou proměnnou, která bude v nerovnostech figurovat sama.

**18.** Odhadni jmenovatele pomocí CS, ať se zbavíš pátých mocnin (použij podmínku v zadání ;-)).

**19.** Odečti od každého zlomku jednu čtvrtinu, ať dostaneš v čitateli druhou mocninu. Použij zlomkobijce „naopak".

## Literatura a zdroje

Tento příspěvek velmi mírným rozšířením příspěvku od *Mariana Poljaka*, kterému bych tímto chtěl poděkovat!

[1] M. Rolínek, P. Šalom: *Zdolávání nerovností*, PraSečí seriál, 29. ročník.
[2] David Hruška: *Diskriminant a Cauchy–Schwarzova nerovnost*, Hojsova Stráž, 2016.
[3] J. Švrček, P. Calábek: *Metody řešení soustav algebraických rovnic.*

# Kombinatorická geometrie

Martin Raška

Abstrakt. Úlohy z kombinatorické geometrie se objevují napříč olympiádní i vysokoškolskou matematikou. Mohou být hravé, zajímavé, těžké i poučné. Jejich krása a prokletí tkví v tom, že v geometrickém zadání často dostáváme víc informací, než potřebujeme (a než chceme). Na nás samotných pak zůstává břemeno určit, co je v úloze ve skutečnosti důležité, a toto prozření využít k jejímu zdárnému vyřešení.

## Tipy

Řešení úloh z kombinatorické geometrie je zábavné, ale může být i velmi náročné. Celá úloha totiž mnohdy stojí pouze na povšimnutí si, co je v ní důležité.

V celé přednášce si vystačíme „jenom“ s kombinatorickou geometrií v rovině – zábavná je na to dost. A ve všemožných soutěžích se typicky vyskytují hlavně rovinné úlohy. Například nejtěžší úlohy na IMO bývají nezřídka právě kombinatorické geometrie.

Na olympiádní úlohy z kombinatorické geometrie neexistují žádné všespásné postupy. Proto i my budeme trénovat jejich řešení téměř bez jakékoli teorie. Přece jen se ale hodí zformulovat pár myšlenek, které mohou pomoct.

- *Spojitost*
  V mnoha případech je intuitivní něčím začít spojitě hýbat – např. posouvat, otáčet či nafukovat. Pouze je potřeba dávat pozor, aby naše argumenty opravdu byly pravdivé a přehledné. Speciálně se může hodit takzvaná *diskrétní spojitost*: umíme-li s něčím hýbat, aby se celočíselný výsledek měnil vždy pouze o $\pm 1$, a umíme-li dosáhnout nějakých hodnot $m$, $n$, pak už umíme dosáhnout i libovolné hodnoty mezi nimi.

- *Extremální princip*
  Občas je prostě potřeba odněkud začít – tak proč třeba nezačít od toho nejmenšího? Nebo největšího? Zprava? Zleva? Ze shora? Nebo odjinud? Přijít na dobrý začátek je občas většina řešení.

- *Invarianty*
  Když má člověk dokázat, že něco nenastane, je šikovné najít invariant či monovariant, který to zakáže.

- *Chytré počítání*
  Čas od času je nutné na obrázku něco spočítat. Pointou ale bývá spočítat to chytře. Různé triky připomínající počítání dvěma způsoby často ušetří dost práce.
- *Konvexní obaly*
  Má-li člověk divnou množinu bodů v rovině, uvážení konvexního obalu může situaci výrazně zpřehlednit.
- *Triangulace*
  Každý mnohoúhelník lze rozřezat na trojúhelníky. To někdy opět pomůže při práci s body uvnitř. (Pokud zrovna nemáte co dělat, důkladně si rozmyslete, že i nekonvexní mnohoúhelníky skutečně nějakou triangulaci mají.)
- *Obarvování*
  Udělat si v úloze pořádek šikovným obarvením je často všechno, co je potřeba.
- *Dirichletův princip*
  Používá se tak, jak by člověk čekal – jakmile máme několik bodů v uzavřené oblasti, z Dirichletova principu jsou některé z nich blízko.
- *Algoritmizace*
  Nejjednodušší způsob, jak sepsat řešení, někdy může být nalezení jednoduchého algoritmu, který úlohu řeší.
- *Pravděpodobnost*
  Konečná pravděpodobnost je jen kombinatorika v plesových šatech. Triková práce s pravděpodobností může zpřehlednit nejednu úvahu.
- *Indukce*
  Ta se hodí vždycky. Občas ji ale můžeme provádět i podle netradičních parametrů. Zároveň se někdy hodí induktivně dokazovat silnější tvrzení, než jaké nás zajímá.

… a cokoli dalšího.

### Folklor

Pro začátek si dáme pár provařených úložek, které mají celkem pěkná řešení. Pokud ale řešení některé z nich neznáte, vymyslet ho může chvíli trvat …

**Příklad 1.** Rozdělte čtverec na 13 shodných částí.

**Příklad 2.** Na opačných stranách úsečky délky $d$ jsou mraveniště s $m$ a $n$ mravenci. Ti vybíhají proti sobě ve vteřinových intervalech konstantní rychlostí jednotka za sekundu. Když se dva mravenci srazí, oba se otočí a běží zpět. Když některý přeběhne kraj úsečky, spadne na zem. Za jak dlouho všichni mravenci popadají?

**Příklad 3.** Z tabulky $2^n \times 2^n$ někdo ukradl jedno políčko. Dokažte, že zbytek tabulky umíme pokrýt pomocí rohových triomin ze třech čtverečků.

**Příklad 4.** V rovině je několik bodů, které neleží na jedné přímce. Ukažte, že existuje kružnice procházející alespoň třemi z nich, která ve svém vnitřku neobsahuje žádný další.

**Příklad 5.** Uvnitř konvexního $2n$-úhelníka sedí liška. Ze všech vrcholů po ní najednou vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokažte, že některá strana byla zasažena dvakrát.

**Příklad 6.** Na kružnici jsme náhodně vyznačili $n$ bodů. Jaká je šance, že všechny leží na jedné půlkružnici?

**Příklad 7.** Po kruhovém rybníčku plave kachnička. Na obvodu číhá liška, která je čtyřikrát rychlejší, ale bojí se do vody. Kachnička umí vzlétnout a uletět jen ze souše. Podaří se jí mlsné lišce uniknout?

**Příklad 8.** Kruhovou studnu s průměrem 1 metr chceme zakrýt dřevěnými prkny širokými 10 centimetrů. Kolik jich je nejméně potřeba?

## Přímočařejší úložky

**Příklad 9.** Na kluzišti trénuje hokejista. Má tři puky, které leží ve vrcholech nedegenerovaného trojúhelníku. Pokaždé si jeden vybere a odpálí ho tak, aby proletěl mezi zbylými dvěma. Může je 2019-tým odpalem vrátit do původní polohy?

**Příklad 10.** Čtvercový dort s rozměry $6 \times 6$ je pokrytý kousky čokolády $2 \times 1$. Dokažte, že ho vždy můžeme rozkrojit, aniž bychom krájeli kousek čokolády.

**Příklad 11.** Body roviny jsou obarveny dvěma barvami. Najděte rovnostranný trojúhelník se stejně barevnými vrcholy.

**Příklad 12.** V rovině leží několik mnohoúhelníků tak, že se každé dva protínají. Najděte přímku, která je protíná všechny.

**Příklad 13.** Martin k narozeninám dostal kruhový dort a hned se rozhodl polovinu z něj darovat Zuzce. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků, z nichž $2k$ bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že Martin i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (MKS 33–5–5)

**Příklad 14.** V rovině je dána konečná množina bodů $S$ taková, že každý trojúhelník s vrcholy v $S$ má obsah nejvýše 1. Dokažte, že celá $S$ se dá schovat do trojúhelníku o obsahu 4. (Putnam 2016)

**Příklad 15.** Uvnitř konvexního mnohoúhelníku $M$ je dán bod $O$. Dokažte, že kolmá projekce bodu $O$ na některou stranu $M$ leží uvnitř této strany.

**Příklad 16.** V rovině je dán bod $A$ a několik mnohoúhelníků, přičemž každé dva z nich se protínají. Dokažte, že existuje kružnice se středem v $A$, která je protíná všechny.

**Příklad 17.** V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů v obecné poloze. Uvažujme vnitřní úhly trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech a velikost toho nejmenšího označme $\varphi$. Pro dané $n$ najděte největší možné $\varphi$. (MO 64–A–II)

**Příklad 18.** Máme dvě kružnice s obvodem 1000. Na jedné je vyznačeno 1000 bodů, na druhé několik oblouků s celkovým součtem délek nejvýše 1. Dokažte, že na sebe umíme kružnice položit tak, aby všechny vyznačené body ležely mimo vnitřky vyznačených oblouků.

**Příklad 19.** Pejsek rozkousal pravidelný $4n$-úhelník na konečně mnoho rovnoběžníků. Dokažte, že některý z nich je ve skutečnosti obdélník. (Brkos XXI–6–4)

## Zajímavější úložky

**Příklad 20.** V rovině leží body $O$, $A_1$, $A_2$, …, $A_{2018}$ tak, že žádné tři z nich neleží na společné přímce. Ukažte, že počet trojúhelníků $A_iA_jA_k$, které obsahují bod $O$, je sudý.

**Příklad 21.** V obdélníku $R$ je dáno $n$ růžových bodů tak, že spojnice žádných dvou z nich není rovnoběžná s žádnou stranou $R$. Rádi bychom rozřezali $R$ na obdélníčky se stranami rovnoběžnými se stranami $R$ tak, aby žádný z nich neobsahoval růžový bod ve svém vnitřku. Ukažte, že jich musí být alespoň $n + 1$.

(IMO Shortlist 2014)

**Příklad 22.** Rozmístění 4027 bodů v rovině nazveme *kolumbijským*, jestliže je 2013 z nich červených, 2014 modrých a žádné tři neleží v přímce. Skupina přímek pro takové rozmístění je *dobrá*, pokud neprochází žádným bodem rozmístění a žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev. Najděte nejmenší $k$ takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění existuje skupina $k$ dobrých přímek. (IMO 2013–2)

**Příklad 23.** Nechť $n$ je přirozené číslo. V rovině se pase $n$ bodových kraviček a $n$ bodových oveček. Žádná tři zvířátka neleží na jedné přímce. *Balanční přímkou* nazveme přímku procházející jednou ovečkou a jednou kravičkou tak, že na každé straně od přímky je stejně oveček jako kraviček. Ukažte, že existují alespoň dvě balanční přímky. (USAMO 2005)

**Příklad 24.** V zátoce je 18 majáků, každý dokáže osvítit úhel $20°$. Dokažte, že je lze natočit tak, aby osvítily celou zátoku.

**Příklad 25.** V rovině je 2017 přímek tak, že žádné tři z nich neprochází jedním bodem. Šnek Turbo sedí v nějakém bodě na právě jedné z nich a začne se po nich plazit následujícím způsobem: pohybuje se daným směrem po jedné přímce, dokud nenarazí na první průsečík; v něm zahne po druhé přímce doprava či doleva, přičemž výběr tohoto směru střídá. Může se stát, že Turbo projede nějakou úsečku postupně v obou směrech? (EGMO 2017–3)

**Příklad 26.** V rovině leží $n \geq 2$ úseček tak, že se každé dvě protínají a žádné tři neprochází stejným bodem. Pepa si vybere jeden konec každé úsečky a posadí do něj žábu čelem ke druhému konci. Pak $(n-1)$-krát tleskne. Při každém tlesknutí žáby skočí do následujících průsečíků na svých úsečkách. Pepa by chtěl žáby rozmístit tak, aby žádné dvě z nich nikdy neseděly na stejném místě.

(i) Dokažte, že pro liché $n$ se to Pepovi vždy podaří.

(ii) Dokažte, že pro sudé $n$ Pepa nemá šanci. (IMO 2016–6)

## Návody

**1.** Projeďte ho skartovačkou.

**2.** Co kdyby skrz sebe uměli proběhnout?

**3.** Indukce.

**4.** Konvexní obal a nafukování.

**5.** Liška sedí uvnitř nějakého trojúhelníka jisté dobře zvolené triangulace.

**6.** Nejdřív vždy náhodně vyberte průměr a pak až jeden z jeho krajních bodů.

**7.** Na vnitřním rybníčku se čtvrtinovým poloměrem je kachnička rychlejší.

**8.** Zacpěte studnu sférou. Plocha kulového vrchlíku s výškou $v$ je rovna $2\pi rv$.

**9.** Orientace trojúhelníka.

**10.** Každý řez krájí sudý počet čokolád.

**11.** Trojúhelníková síť.

**12.** Promítněte na přímku.

**13.** Diskrétní spojitost.

**14.** Začněte s trojúhelníkem s vrcholy v $S$ s maximálním obsahem.

**15.** Nejbližší strana.

**16.** Nafukujte.

**17.** Vezměte bod na konvexním obalu s velkým úhlem.

**18.** Na druhé kružnici si vyberme bod $O$. Které polohy bodu $O$ na první kružnici zakazují vyznačené body?

**19.** Cesty z rovnoběžníků spojují protilehlé strany.

**20.** Co se stane s paritou, když $O$ překročí úsečku?

**21.** Každému růžovému bodu přiřaďte rohy křižovatek tvaru T, které vidí.

**22.** Dva body jde oddělit od zbytku dvěma přímkami. Zkuste naopak střídavě rozmístit všechny body na kružnici.

**23.** BÚNO jsou na konvexním obalu jenom ovečky. Diskrétní spojitost.

**24.** Rozděl si přímkou majáky na poloviny a majáky z jedné poloroviny zkus pokrýt tu druhou. (Alternativa: kouzla se skalárními součiny.)

**25.** Dvojobarvení oblastí, barva odpovídá směru obcházení.

**26.** Seřaďte si úsečky podle jejich směrů.

## Literatura a zdroje

Celý příspěvek je výtahem z *i*KSkového příspěvku od *Kuby Löwita*, kterému tímto děkuji – máte-li chuť na další příklady, tak je tam naleznete i s dalšími zdroji :-).

[1] Kuba Löwit: *Kombinatorická geometrie*, Sborník *i*KS, 2019

# Konečná tělesa

Pavel Turek

Abstrakt. V moderní algebře je zvykem studovat abstraktní struktury a funkce mezi nimi. My se podíváme na takzvaná tělesa a pokusíme se klasifikovat všechna konečná tělesa. Jelikož základním kamenem konečných těles jsou polynomy, tak díky odvedené práci budeme o trochu více rozumět polynomům modulo prvočíslo.

## Základní definice

**Definice.** *Binární operace* na množině $S$ je funkce, která přiřazuje libovolné uspořádané dvojici prvků $S$ nějaký prvek $S$.

**Definice.** *Těleso* je množina $F$ společně s dvěma binárními operacemi „+“ a „·“ a dvěma různými prvky 0, 1 takovými, že pro všechna $a, b, c \in F$ platí:

(1) $a + b = b + a$,
(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
(3) $a + 0 = a = a + 0$,
(4) existuje $-a \in F$ takové, že $a + (-a) = 0 = (-a) + a$,
(5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
(6) $a \cdot b = b \cdot a$,
(7) $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$,
(8) pokud $a \neq 0$, tak existuje $a^{-1} \in F$, pro které $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$,
(9) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

**Definice.** *Homomorfismus* je funkce $\varphi$ mezi dvěma tělesy $F$ a $K$ taková, že pro všechna $a, b \in F$ platí:

(1) $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(1) = 1$,
(2) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
(3) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Pokud je $\varphi$ bijekce, řekneme, že $\varphi$ je *isomorfismus a že tělesa $F$ a $K$ jsou isomorfní.*

**Tvrzení.** *Každý homomorfismus je prostá funkce.*

Předchozí tvrzení nám říká, že homomorfismus páruje jedno těleso s podmnožinou jiného tělesa, a to „hezky“ vzhledem k oběma operacím. V takovém případě řekneme, že $F$ je isomorfní podtělesu $K$. Méně formálně budeme používat terminologii, že $F$ je podtěleso $K$.

**Definice.** *Charakteristika* tělesa je rovna minimálnímu počtu jedniček, které je třeba sečíst, abychom získali nulu. Pokud takový počet neexistuje, řekneme, že charakteristika je 0.

**Věta.** (malá Fermatova) *Pokud je $F$ konečné těleso s $n$ prvky, tak pro libovolný nenulový prvek $a$ platí $a^{n-1} = 1$.*

**Tvrzení.** *Je-li $F$ konečné těleso, tak jeho velikost je mocnina prvočísla.*

## Polynomy

**Definice.** Pro těleso $F$ definujeme $F[X]$ jako množinu polynomů s koeficienty v $F$. Na této množině existují obvyklé binární operace sčítání a násobení polynomů. Též můžeme definovat obvyklým způsobem stupeň polynomu.

Poznamenejme, že $F[X]$ není těleso, jelikož axiom (8) neplatí, například pro $X \in F[X]$. Jelikož cílem této přednášky je sestavovat tělesa, budeme muset trochu modifikovat $F[X]$.

**Definice.** Nenulový polynom $f \in F[X]$ nazveme *ireducibilním*, pokud má kladný stupeň a nelze zapsat jako součin dvou polynomů s kladným stupněm v $F[X]$.

**Věta.** *Každý monický polynom $f \in F[X]$ lze jednoznačně zapsat jako součin monických ireducibilných polynomů.*

**Definice.** Pro polynom $f \in F[X]$ budeme značit množinu polynomů v $F[X]$ modulo $f$ jako $F[X]/(f)$. Takto získáme operace sčítání a násobení polynomů modulo $f$.

**Tvrzení.** *Pokud $F$ je těleso a $f$ jeho ireducibilní polynom, tak $F[X]/(f)$ je též těleso.*

**Důsledek.** *Máme-li $n$-prvkové těleso $F$ a ireducibilní polynom $f$ stupně $k$ nad $F$, tak $F[X]/(f)$ je těleso o velikosti $n^k$.*

## Rozkladová tělesa

**Definice.** Nechť $L$ je těleso a nechť $K$ je jeho podtěleso. Pokud $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou prvky $L$, tak $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je nejmenší podtěleso $L$ obsahující $K$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (jinými slovy je to průnik podtěles $L$ obsahujících $K$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$).

**Tvrzení.** *Je-li $L$ těleso a $K$ jeho podtěleso a $\alpha \in L$ je kořenem ireducibilního polynomu $f \in K[X]$, tak $K(\alpha)$ je isomorfní $K[X]/(f)$.*

**Definice.** Nechť $K$ je těleso a $f$ nenulový polynom nad $K$. *Rozkladové těleso* $f$ je těleso $L$ takové, že platí:

(1) $f$ je součin lineárních polynomů nad $L$,
(2) existují kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ polynomu $f$ takové, že $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

**Věta.** *Pro každé těleso $K$ a nenulový polynom $f \in K[X]$ existuje odpovídající rozkladové těleso. Navíc každá dvě rozkladová tělesa $f$ jsou isomorfní.*

**Tvrzení.** *Je-li $F$ konečné těleso a $f$ ireducibilní polynom nad $F$, tak $f$ nemá mnohonásobný kořen ve svém rozkladovém tělese.*

## Klasifikace konečných těles

**Definice.** Celá čísla modulo prvočíslo $p$ tvoří těleso, které značíme $F_p$.

**Definice.** Pro prvočíslo $p$ a přirozené číslo $n$ definujme $F_{p^n}$ jako rozkladové těleso polynomu $X^{p^n} - X$ nad $F_p$.

**Věta.** *Konečná tělesa jsou právě tělesa $F_{p^n}$ pro prvočísla $p$ a přirozená čísla $n$.*

**Tvrzení.** *$F_{p^m}$ je podtěleso $F_{q^n}$ právě tehdy, když $p = q$ a $m \mid n$.*

**Důsledek.** *Pokud je $q > 1$ mocnina prvočísla a $f$ ireducibilní polynom stupně $n$ nad $F_q$, tak $F_{q^n}$ je rozkladové těleso $f$ a $f \mid X^{q^n} - X$.*

**Důsledek.** *Pokud je $q > 1$ mocnina prvočísla a $n$ přirozené číslo, tak $X^{q^n} - X$ je rovno součinu ireducibilních monických polynomů v $F_q$, jejichž stupeň dělí $n$.*

**Úloha.** Ukažte, že polynom $X^3 + X + 1$ je ireducibilní v $F_{7^d}$ pro libovolné $d$ nedělitelné 3.

*Řešení.* Dosazením se přesvědčíme, že daný polynom nemá kořen v $F_7$. Tedy jelikož je stupně tři, tak je ireducibilní nad $F_7$ (jinak by nějaký jeho ireducibilní faktor byl lineární).

Pro obecné $F_{7^d}$, kde $d$ není dělitelné 3, kdyby $f$ nebyl ireducibilní, tak má v tomto tělese kořen, označme jej $\alpha$. Poté $F_{7^d}$ obsahuje $F_7(\alpha)$, což je isomorfní $F_7/(f)$, tedy má velikost $7^3$, a proto je dle klasifikace isomorfní $F_{7^3}$. Ale $F_{7^d}$ neobsahuje toto těleso, jelikož $3 \nmid d$.

## Příklady

**Příklad 1.** Nechť $\alpha \in F_4 \setminus F_2$. Určete všechna přirozená čísla $n$, pro které má polynom $X^2 + \alpha X + 1$ kořen v $F_{2^n}$.

**Příklad 2.** Dokažte, že pro každé konečné těleso $F$ a přirozené číslo $n$ existuje ireducibilní polynom $f \in F[X]$ stupně $n$.

**Příklad 3.** Nechť $p$, $q$ jsou prvočísla a

$$f = X^{(p^q-1)-(p-1)} + X^{(p^q-1)-2(p-1)} + X^{(p^q-1)-3(p-1)} + \cdots + X^{p-1} + 1$$

je polynom nad $F_p$. Ukažte, že $f$ je roven součinu $\frac{p^q-p}{q}$ ireducibilních polynomů stupně $q$.

**Příklad 4.** Ukažte, že pro prvočíslo $p$ a přirozené číslo $n$ je funkce $\varphi : F_{p^n} \to F_{p^n}$ daná předpisem $\varphi(x) = x^p$ isomorfismus.

**Příklad 5.** Zvolme mocninu prvočísla $q > 1$ a přirozené číslo $n$. Pokud $f$ je polynom stupně $n$ nad $F_q$, dokažte, že $f$ dělí $\left(X^{q^{n!}} - X\right)^n$.

**Příklad 6.** Kolik je monických ireducibilních polynomů stupně 30 v $F_3$?

**Příklad 7.** Pro prvočíslo $p$ sestrojte těleso $F$, které je *algebraicky uzavřené*, tedy libovolný nekonstantní polynom $f \in F[X]$ je součinem lineárních polynomů.

**Příklad 8.** Uvažujme $\alpha \in F_{25} \setminus F_5$ a $\beta \in F_{125} \setminus F_5$. Ukažte, že v $F_{5^6}$ platí

$$X^3 + \alpha X + \beta \mid X^{5^{36}-1} - 1.$$

## Návody

**1.** Ukažte, že daný polynom je ireducibilní a najděte prvně nejmenší $n$ takové, že daný polynom má kořen v $F_{2^n}$.

**2.** Využijte klasifikaci a najděte vhodný polynom jako dělitel $X^{s^n} - X$, kde $F = F_s$.

**3.** Všimni si, že $f(X) \cdot (X^p - X) = X^{p^q} - X$.

**4.** Využijte binomickou větu a toho, že charakteristika je $p$.

**5.** Ukažte, že každý ireducibilní faktor $f$ dělí vhodný polynom.

**6.** Jak získat tyto polynomy? Použij polynomy $X^{3^d} - X$, kde $d$ je dělitel 30.

**7.** Vezměte vhodné sjednocení těles $F_{p^{a_1}} \subset F_{p^{a_2}} \subset F_{p^{a_3}} \subset \cdots$

**8.** Ukažte nejdříve, že $X^3 + \alpha X + \beta$ nemá kořen v $F_{25}$. Poté ukažte, že nemá mnohonásobný kořen.

## Literatura a zdroje

[1] Filip Čermák a Matěj Doležálek: *Teorie nejen čísel*, seriál 40. ročníku.
[2] Přednášky Galois Theory.

# Symetrické polynomy

Pavel Turek

Abstrakt. Určitě jste se již setkali s úlohami, kde figurovaly výrazy symetrické ve svých proměnných. Naším cílem bude představit si základní techniky, které se vždy hodí u takových úloh vyzkoušet. Konkrétně si ukážeme využití elementárních symetrických polynomů a Viètových vztahů.

Základním pojmem této přednášky je polynom v několika proměnných. Pokud máme proměnné $x_1, x_2, \dots, x_n$, tak polynom v těchto proměnných je součet konečně mnoha členů $cx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$, kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou nezáporná celá čísla a $c$ je libovolné reálné číslo. Tedy například máme polynomy ve dvou proměnných $x^3y - 5y$ či $x^2 + 3xy + y^2$. Povšimněme si, že výměnou proměnných $x$, $y$ dostaneme opět polynom. V prvním případě je to nový polynom $xy^3 - 5x$. V druhém případě dostaneme $y^2+3xy+x^2$, tedy polynom se nezmění. Takové polynomy se často objevují v různých úlohách a budou tématem této přednášky.

**Definice.** *Symetrický polynom* v $n$ proměnných je takový polynom, který se nezmění po libovolné permutaci svých proměnných.

Dalším příkladem je polynom

$$(x-2y^2z^3)^2+(x-2z^2z^3)^2+(y-2x^2z^3)^2+(y-2z^2x^3)^2+(z-2x^2y^3)^2+(z-2y^2x^3)^2+xyz$$

tří proměnných $x$, $y$, $z$. Poznamenejme, že to ovšem není symetrický polynom čtyř proměnných $x$, $y$, $z$, $w$. Dalším důležitým příkladem jsou elementární symetrické polynomy. Mějme $n$ proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, poté *elementární symetrické polynomy* v těchto proměnných jsou

$$\begin{aligned}
e_1 &= x_1 + \cdots + x_n,\\
e_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,\\
&\vdots\\
e_n &= x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}$$

**Věta.** *Každý symetrický polynom v $n$ proměnných se dá zapsat jako polynom v elementárních symetrických polynomech $e_1, e_2, \dots, e_n$. Zároveň je takovýto zápis jednoznačný.*

Ponaučení z této věty je, že jakmile se setkáme s nějakou rovnicí či nerovnicí, která je symetrická ve svých proměnných, tak je vhodné vždy zkusit, zda není rozumné přejít z proměnných k elementárním symetrickým polynomům. U nerovnic poté lze využít známé nerovnosti formulované pro elementární symetrické polynomy (například AG nerovnost $(e_1/n)^n \geq e_n$). U rovnic se najdou hodnoty elementárních polynomů a poté je potřeba navrátit se k původním proměnným. K tomu slouží *Viètovy vztahy*:

**Tvrzení.** *Pro proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a jejich elementární symetrické polynomy platí*

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n.$$

**Úloha.** V oboru reálných čísel řešte soustavu dvou rovnic $x^2 - xy + y^2 = 7$ a $x^2y + xy^2 = -2$.

*Řešení.* V elementárních symetrických polynomech mají rovnice tvary $e_1^2 - 3e_2 = 7$ a $e_1e_2 = -2$. První rovnice přenásobená polynomem $e_1$ poté dá $e_1^3 + 6 = 7e_1$. Tato kubická rovnice má očividné kořen 1, a tedy lze přepsat jako $(e_1 - 1)(e_1^2 + e_1 - 6)$, čímž dostaneme tři řešení $(e_1, e_2) = (1, -2)$, $(2, -1)$, $(-3, \frac{2}{3})$. Jelikož je $e_1$ vždy nenulové (takže přenásobení $e_1$ byla ekvivalentní úprava), všechny tři dvojice jsou řešením a k nalezení $x$, $y$ musíme vyřešit kvadratické rovnice

$$t^2 - t - 2 = 0, \qquad t^2 - 2t - 1 = 0, \qquad t^2 + 3t + \frac{2}{3} = 0.$$

Tím dostaneme jako řešení $(x, y)$ neuspořádané dvojice

$$(-1, 2), \qquad \left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right), \qquad \left(\frac{-3 - \sqrt{19/3}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{19/3}}{2}\right).$$

Než se dostaneme k příkladům, zmíníme ještě důležité identity, které nám pomohou vyjádřit symetrické polynomy tvaru $x_1^k + \cdots + x_n^k$.

**Věta.** (Newtonovy identity) *Nechť $n$ je přirozené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proměnné. Označme $S_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Poté pro $1 \leq k \leq n$ platí*

$$S_k - e_1 S_{k-1} + e_2 S_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} e_{k-1} S_1 + (-1)^k k e_k = 0$$

*a pro $k > n$ platí*

$$S_k - e_1 S_{k-1} + e_2 S_{k-2} - \cdots + (-1)^n e_n S_{k-n} = 0.$$

## Příklady

**Příklad 1.** Najděte reálná řešení soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 = 5,$$
$$x^3 + y^3 = 9.$$

**Příklad 2.** Sestavte kvadratickou rovnici s kořeny rovnými osmým mocninám kořenů rovnice $t^2 - t + 7 = 0$.

**Příklad 3.** Najděte reálná $x$, pro která $\sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 4$.

**Příklad 4.** Reálná čísla $a$, $b$ splňují, že rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má dva různé reálné kořeny a jejich rozdíl (v nějakém pořadí) je kořenem $x^2 - ax + b + 1 = 0$. Dokažte, že $b > 3$, a vyjádřete oba původní kořeny v závislosti na $b$.

**Příklad 5.** Najděte všechna reálná $s$, pro něž rovnice $4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$ má čtyři různé reálné kořeny a součin dvou z nich je roven $-2$.

**Příklad 6.** Jsou dány kvadratické polynomy $f$, $g$. Tři ze čtyř reálných kořenů kvartické rovnice $f(g(x)) = 0$ jsou $-22$, $7$ a $13$. Určete všechny možné hodnoty čtvrtého kořene.

**Příklad 7.** Pokud kladná reálná čísla splňují $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, ukažte, že

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + \frac{1}{c + ab} = \frac{2}{\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)}.$$

**Příklad 8.** Po dvou různá reálná čísla $a$, $b$, $c$ splňují

$$a(a^2 - abc) = b(b^2 - abc) = c(c^2 - abc).$$

Ukažte, že $a + b + c = 0$.

**Příklad 9.** Reálná čísla $x$, $y$, $z$ splňují rovnost $x + y + z = xyz$. Dokažte

$$x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) = 4xyz.$$

**Příklad 10.** Pro reálná $a$, $b$ ukažte, že $a^3 + b^3 + (a + b)^3 + 6ab = 16$, právě tehdy když $a + b = 2$.

**Příklad 11.** Pro reálná $x$, $y$ splňující $x^3 + y^3 \le 2$ dokažte, že $x + y \le 2$.

**Příklad 12.** Pro $x$, $y$, $a$ reálná čísla platí $x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = a$. Najděte všechny možné hodnoty $a$.

**Příklad 13.** Reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$ splňují $a + b + c + d = 0$ a $a^7 + b^7 + c^7 + d^7 = 0$. Najděte všechny možné hodnoty $(a + b)(a + c)(a + d)$.

**Příklad 14.** $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ jsou reálná čísla, pro která má polynom

$$x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

všechny kořeny reálné. Najděte všechny možné hodnoty $f$.

**Příklad 15.** Polynom $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ má všechny koeficienty nezáporné a všech $n$ jeho kořenů je reálných. Ukažte, že $p(2) \geq 3^n$.

## Návody

**1.** Převeď na rovnice elementárních symetrických polynomů. Hodí se tipnout si jedno řešení.

**2.** Newtonovy vztahy.

**3.** Použij substituci, kde nahradíš obě odmocniny proměnnými.

**4.** Pokud jsou $\alpha$, $\beta$ koření první rovnice, pak má druhá rovnice kořeny $\alpha - \beta$ a ...

**5.** Rozděl kořeny do dvou páru a urči hodnoty elementárních symetrických polynomů těchto párů.

**6.** Rozděl kořeny do dvou páru a použij lineární koeficient $g$.

**7.** Jde to trikově, ale jde to prostě spočítat. Trochu užitečná je substituce $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$.

**8.** Pomocí podmínky najdi vhodnou kubickou rovnici, která má kořeny $a$, $b$, $c$.

**9.** Opravdu to stačí vyjádřit v elementárních symetrických polynomech.

**10.** Použij $e_1^2 \geq 4e_2$.

**11.** Elementární symetrické polynomy a nerovnost $e_1^2 \geq 4e_2$ přijdou vhod.

**12.** Buď klasicky přejdi k elementárním symetrickým polynomům, nebo použij $(x+y)\left(x^5+y^5\right) = \left(x^3+y^3\right)^2$.

**13.** Podmínky by měly ukázat, že $e_3 = 0$ nebo $e_2^2 = e_4$. Co víš o polynomu s kořeny $a$, $b$, $c$, $d$ v prvním případě? V druhém případě použij vhodné nerovnosti anebo se podívej na součet čtvrtých mocnin.

**14.** Dokaž, že jsou si všechny kořeny rovny.

**15.** Rozmysli si, že kořeny jsou záporné, a rozlož na součin lineárních polynomů. Poté každý z nich odhadni ve 2 tak, aby šlo použít, že součin kořenů je 1.

## Literatura a zdroje

[1] Titu Andreescu: *105 Algebra Problems*, XYZ Press, LLC, 2013.
[2] Pavel Calábek: *Symetrické polynomy*, Jevíčko, 2013.

# Obsah