Sborník Oldřichov 2009

Háňa Bendová
Jarda Hančl
Franta Konopecký
Miro Majerčík
Dominik Mokriš
Zuzka Pôbišová
Monika Pospíšilová
Michal „Kenny“ Rolínek
Tomáš Roskovec
Alča Skálová
Miško Szabados
Pavel Šalom
Luboš Štěpánek

editor : Alča Skálová
vydání první, náklad 42 výtisků
duben 2009
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Úlohy z planimetrie

Háňa Bendová

Obsahem této přednášky jsou zajímavé příkládky z planimetrie (tj. rovinné geometrie), zejména na použití shodných, případně podobných zobrazení a středových a obvodových úhlů. Tedy ta nejzákladnější geometrie, kterou vám servírují v PraSátku i v olympiádách. U takových příkladů si člověk vždycky chvíli kreslí, sem tam někde přidá nějakou čáru, otočí nějaký trojúhelník, označí všechny možné i nemožné úhly všemi možnými i nemožnými značkami a sedí a kouká do toho a kouká a kouká … a ještě přikreslí čáru … a ejhle, řešení je na světě! A jak se takové úlohy naučit řešit? Chce to jen trochu cviku. ;)

Věta. (O středovém a obvodovém úhlu) *Nechť k je kružnice se středem S a AB její tětiva. Pak velikost úhlu AOB se nemění, probíhá-li O některý z oblouků kružnice k určených tětivou AB. Navíc $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle ASB|/2$, kde úhlem ASB rozumíme vnější úhel čtyřúhelníku $AOBS$.*

Příklady

Příklad 1. Mějme čtverec $ABCD$. Označme M střed strany AB, N střed strany BC a P průsečík úseček MC a ND. Dokažte, že platí $|AP| = |AB|$.

Příklad 2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, v jehož vnější oblasti uvnitř úhlu BAC je zvolen bod M tak, že úhly AMB a AMC mají velikosti 40° a 30°. Určete velikost úhlu ACM.

Příklad 3. Je dán čtverec $ABCD$ a uvnitř něho bod P takový, že $|PA| = 2, |PB| = 3, |PD| = 1$. Určete velikost úhlu APD.

Příklad 4. V rovině máme dány body A, B, C, které neleží na přímce. Najděte bod X této roviny takový, aby součet $|AX| + |AY| + |AZ|$ byl minimální.

Příklad 5. Ve čtverci $ABCD$ jsou na stranách BC a CD zvoleny body L a M tak, že úhel LAM má velikost 45°. Úhlopříčka BD protíná přímku AL v bodě K a přímku AM v bodě N. Dokažte, že body K, L, C, M a N leží na kružnici.

Příklad 6. Na straně CD čtverce $ABCD$ je zvolen libovolný bod E a dále jsou sestrojeny body F, G tak, že $DEFG$ je čtverec sousedící se čtvercem $ABCD$ pouze hranou DE. Dokažte, že pro jakoukoli polohu bodu E na úsečce CD je odchylka přímek AE a BF rovna 45° a poměr $|BF| : |AE| = \sqrt{2} : 1$.

Příklad 7. Obdélník $ABCD$ je rozložen na tři shodné čtverce $AEHD$, $EFGH$ a $FBCG$. Určete součet $|\sphericalangle EAH| + |\sphericalangle FAG| + |\sphericalangle BAC|$.

Příklad 8. Jsou dány rovnoběžky a, b a přímka p, která je na ně kolmá a protíná je v bodech A a B. Na přímce p vně úsečky AB je dán bod P. Sestrojte přímku procházející bodem P tak, aby její průsečíky X s přímkou a a Y s přímkou b spolu se středem S úsečky AB určovaly pravý úhel XSY.

Příklad 9. Zkonstruuj čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho stran a délka úsečky XY, kde X je střed strany AB a Y střed strany CD.

Literatura

Jako zdroj vědění a hlavně příkladů mi posloužila zejména kniha *Středoškolská matematika pod mikroskopem*, jejímž autorem je jeden z mých nejoblíbenějších pedagogů na matfyzu – Emil Calda, dále sborníčkový příspěvek *Geometrické úlohy* od Filipa Jaroše (Rapotín, 2003) a v neposlední řadě známá kniha Arthura Engela *Problem-Solving Strategies*.

Kombinatorické metody v geometrii

Jarda Hančl

Úvod

Nejprve bych chtěl poděkovat Pavlu Podbrdskému, jehož příspěvek se stal mým hlavním zdrojem inspirace.

V této přednášce se budeme zabývat kombinatorickými vlastnostmi geometrických objektů. Většinou tedy budeme dokazovat věty typu „Za jistých okolností se dané objekty už nutně musí protínat“, apod. To koneckonců uvidíme během výkladu. V celé přednášce se budeme pohybovat v rámci d-rozměrných (eukleidovských) prostorů, pro názornou představu však vystačíme s rovinou či třírozměrným prostorem.

Základní definice a pojmy

Definice. (Eukleidovský prostor) *Eukleidovským prostorem dimenze d ($d \in \mathbb{N}_0$) budeme rozumět množinu $\mathbb{R}^d$ všech uspořádaných d-tic $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ reálných čísel (v případě $d = 0$ tím rozumíme jednoprvkovou množinu). Prvky eukleidovského prostoru budeme nazývat* body. *Na této množině máme dáno* sčítání, násobení reálným číslem *(obojí po složkách). Umíme tu také měřit* vzdálenosti *a* úhly. *(Vše si můžeme názorně představit na případu $d \le 3$.)*

Definice. (Afinní podprostory) *Nechť je dán d-rozměrný eukleidovský prostor. Jeho* lineárním podprostorem *rozumíme libovolnou množinu, která obsahuje počátek (tj. bod $(0, 0, \dots, 0)$) a je uzavřená na sčítání a násobení reálným číslem.* Dimenzí *lineárního podprostoru rozumíme jeho dimenzi ve smyslu vektorového prostoru (stačí, když to budeme chápat intuitivně).* Afinním podprostorem *rozumíme množinu tvaru $a + L$, kde $a \in \mathbb{R}^d$ a L je lineární podprostor $\mathbb{R}^d$. Jeho* dimenzí *rozumíme dimenzi příslušného podprostoru L.*

Každý bod v $\mathbb{R}^d$ lze zároveň chápat jako 0-dimenzionální afinní podprostor. Jednodimenzionální podprostory nazýváme přímky, *dvojdimenzionální* roviny. *Nadrovinou rozumíme $(d-1)$-dimenzionální podprostor.*

Definice. (Afinní kombinace) *Mějme body $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Jejich* afinní kombinací *rozumíme každý bod x tvaru $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ (např. afinní kombinací dvou různých bodů lze dostat přesně body přímky procházející těmito body). Řekneme, že body $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou* afinně závislé, *pokud některý z bodů lze dostat jako afinní kombinaci ostatních.*

Poznámka. Každých $d + 2$ bodů v $\mathbb{R}^d$ je afinně závislých.

Definice. (Konvexní kombinace) *Mějme body $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Jejich konvexní kombinací rozumíme každý bod x tvaru $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, kde $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ (např. konvexní kombinací dvou různých bodů lze dostat přesně body úsečky spojující tyto body). Řekneme, že body $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou konvexně závislé, pokud některý z bodů lze dostat jako konvexní kombinaci ostatních.*

Definice. (Konvexní množina) *Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní, pokud s každými dvěma body $x, y \in M$ obsahuje i celou úsečku spojující x a y. Jinými slovy, jsou-li $x, y \in M$ a $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, tak i $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$.*

Definice. (Konvexní obal) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$. Konvexním obalem množiny M rozumíme nejmenší konvexní množinu, která obsahuje M. Je to tedy průnik všech konvexních nadmnožin M. Lze ji také charakterizovat, jako množinu všech konvexních kombinací bodů z množiny M. Značíme symbolem* $\operatorname{conv}(M)$.

Definice. (Uzavřené, otevřené a kompaktní množiny) *Uzavřenou množinou budeme rozumět každou množinu F, pro kterou platí: Jsou-li $x_n \in F$ a $x = \lim x_n$, pak $x \in F$. Stačí, když tento pojem budeme chápat intuitivně. Typicky je to množina, která obsahuje všechny své „hraniční“ body. Příklady uvidíme na přednášce. Otevřenou množinou rozumíme doplněk uzavřené množiny. Kompaktní množinou rozumíme každou uzavřenou a omezenou množinu.*

To zajímavé – věty a tvrzení

Věta. (O oddělitelnosti) *Mějme dvě kompaktní konvexní podmnožiny $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^d$, které se neprotínají. Pak existuje nadrovina $H \subset \mathbb{R}^d$, která je (striktně) odděluje. Tj. množiny M_1 a M_2 leží v opačných (otevřených) poloprostorech určených nadrovinou H.*

Věta. (Radonovo lemma) *Mějme množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ obsahující $d+2$ bodů. Pak množinu A lze rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny A_1 a A_2 tak, že $\operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2)$ je neprázdná. Každý bod $x \in \operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2)$ se nazývá* Radonův bod *množiny A.*

Věta. (Caratheodoryho) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$. Pak každý bod $x \in \operatorname{conv}(M)$ lze dostat jako konvexní kombinaci nejvýše $d+1$ bodů množiny M.*

Hellyho věta

Věta. (Hellyho – konečná verze) *Nechť* $C_1, C_2, \ldots, C_n \subset \mathbb{R}^d$, $n \geq d+1$ *je konečný systém konvexních množin takový, že libovolných* $d+1$ *z nich má neprázdný průnik. Pak*

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset.$$

Věta. (Hellyho – nekonečná verze) *Nechť* $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$ *je (libovolně velký*[1]*) systém kompaktních konvexních množin v* $\mathbb{R}^d$ *takový, že každých* $d+1$ *z nich má neprázdný průnik. Pak*

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha \neq \emptyset.$$

Minkowského věta

Věta. (Minkowského věta) *Buď* $C \subseteq \mathbb{R}^d$ *symetrická (kolem počátku), konvexní omezená oblast s obsahem* $S_C > 2^d$*. Pak* C *obsahuje alespoň jeden mřížový bod různý od počátku (ze symetrie dokonce dva body).*

Poznámka. Předchozí tvrzení platí i pro obecnou mřížku.

Věta. (O dvou čtvercích) *Každé prvočíslo* $p \equiv 1 \pmod 4$ *lze zapsat jako součet dvou čtverců:* $p = a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}$.

To nejzajímavější – příklady

Příklad 1. *Pás šířky* w je část roviny ohraničená dvěma rovnoběžnými přímkami se vzdáleností w. *Šířka* množiny $X \subset \mathbb{R}^2$ je nejmenší šířka pásu obsahujícího X. Dokažte, že kompaktní konvexní množina šířky 1 obsahuje úsečku délky 1 v každém směru.

Příklad 2. Dokažte, že má-li průnik každé trojice ze souboru $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ kompaktních konvexních množin šířku alespoň 1, pak i množina $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ má šířku alespoň 1.

Příklad 3. Jestliže průnik každých 4 z konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n \subset \mathbb{R}^2$ ($n \geq 4$) obsahuje nějakou polopřímku, pak také průnik všech obsahuje polopřímku. Dokažte.

[1] Množin musí být však alespoň $d+1$.

Příklad 4. Dokažte, že jsou-li body množiny A z Radonova lemmatu v obecné poloze (tj. každých $d+1$ z nich je afinně nezávislých), pak existuje právě jeden Radonův bod množiny A.

Příklad 5. Jaké jsou možné průniky dvou (dvoudimenzionálních) rovin v $\mathbb{R}^4$? Jaký je „typický případ“? Jak je to v případě dvou nadrovin? Zkuste se zamyslet nad případem k a l-dimenzionálních afinních podprostorů $\mathbb{R}^d$.

Příklad 6. Buď $C \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní konvexní množina, buď $p \in C$. Dokažte, že existuje přímka l procházející bodem p taková, že úsečka $l \cap C$ je nejdelší ze všech úseček obsažených v C a rovnoběžných s l.

Příklad 7. Buďte $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ konečné množiny bodů a předpokládejme, že pro každou 4-prvkovou podmnožinu $S \subset X \cup Y$ lze množiny $S \cap X$ a $S \cap Y$ (striktně) oddělit přímkou. Dokažte, že množiny X a Y lze (striktně) oddělit přímkou.

Příklad 8. Mějme množinu bodů v rovině takovou, že každé tři z nich leží v nějakém uzavřeném kruhu s jednotkovým poloměrem. Dokažte, že všechny dané body leží ve společném uzavřeném kruhu s jednotkovým poloměrem.

Příklad 9. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$ je konečná množina bodů. Dokažte, že existuje centrum množiny A, tj. takový bod $x \in \mathbb{R}^d$, že každý uzavřený poloprostor, jehož hranice prochází x, obsahuje alespoň $\frac{1}{d+1}|A|$ bodů z množiny A.

Příklad 10. Dokažte, že definici centra množiny z předchozího příkladu lze přepsat následujícím způsobem: x je centrem X, právě když x leží v každém otevřeném poloprostoru μ s vlastností $|\mu \cap X| > \frac{d}{d+1}n$.

Příklad 11. Mějme zahradu tvaru kruhu o poloměru 26 metrů takovou, že v každém mřížovém bodě krom počátku (počátek = střed zahrady) stojí strom o poloměru 0.16 metrů. Dokažte, že postaví-li se majitel zahrady do jejího středu, neuvidí skrze stromy ze zahrady ven.

Příklad 12. Buď $\alpha \in (0,1)$ reálné číslo a N číslo přirozené. Dokažte, že pak existuje dvojice přirozených čísel m, n taková, že $n \leq N$ a

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nN}.$$

Příklad 13. Pokud p je prvočíslo s vlastností $p \equiv 1 \pmod 4$, pak existuje přirozené číslo t takové, že $t^2 \equiv -1 \pmod p$.

Literatura

Velkou část příspěvku tvoří příspěvek od Pavla Podbrdského, který lze nalézt v naší PraSečí knihovně na webu `http://mks.mff.cuni.cz/library`.

Při přípravě na tuto přednášku jsem částečně čerpal z přednášky J. Matouška, ke které lze najít (anglicky psané) texty na webu na adrese `http://www.ms.mff.cuni.cz/acad/kam/matousek/kvgI/dg.html`

Částečně jsem také čerpal z pěkné knížky J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2000.

Hýbání s body a pomocné limitní případy

Franta Konopecký

Úvod

Téma **hýbání s body** je netradiční, prakticky se nepřednáší. Je o technice, díky které můžete geometrické úlohy jak řešit, tak na složitá řešení přijít. Hýbání bodů a limitní případy poskytují neobyčejně silný nástroj, který funguje zhruba na třetinu všech těžších geometrických úloh, což už něco znamená. Také se dá rovnou říct, že hýbání prakticky nefunguje na konstrukční úlohy nebo úlohy, kde je pozice bodů jasně určena. Potřebujete tedy aspoň částečnou volnost. Pokud chcete být motivováni metodu se naučit, zkuste nejprve sami vyřešit *Příklad 21.* a poté si pročtěte vzorové řešení.

Jak pracovat s tímto textem

Text je koncipován tak, aby pokud možno co nejlépe objasnil výhody a samotnou techniku posouvání bodů a zároveň ji naučil čtenáře používat.

Pro dobré zažití doporučuji zkoušet techniku používat, nejprve zkusit příklady řešit bez pomoci, pak využívat hintů a na vzorová řešení se dívat až nakonec. A úplně nejdřív zkuste samozřejmě na třech podrobně zdůvodněných příkladech techniku pochopit a v oddílu **lehčí trénink** patřičně osvěžit.

Cvičení s jednoduchými pohyby

V příkladech budeme ve složitých situacích hýbat několika body naráz, proto si nejprve nacvičíme hýbání na užitečných hýbacích miniúložkách. Jejich řešení najdete v *návodech ke cvičením.*

Cvičení 1. Na zahřátí: V bodech A a B v rovině se stejnou úhlovou rychlostí (a stejným směrem) otáčí dvě nerovnoběžné přímky. Jak se pohybuje jejich průsečík?

Cvičení 2. Po ramenech pravého úhlu kloužou konce zápalky, jak se pohybuje její střed?

Cvičení 3. Jsou dány přímky p, q, na nich pevné body P, Q a dále rovnoměrně se pohybující bod R po přímce p. Jak se v závislosti na pohybu bodu R pohybuje druhý průsečík S kružnice opsané ΔPQR a přímky q?

Cvičení 4. Je dána kružnice a na ní tětiva UV. Pohybuje-li se rovnoměrně bod W po oblouku z bodu U do V, jak se pohybuje střed vepsané kružnice ΔUVW?

Cvičení 5. Uvnitř kružnice se kotůlá dvakrát menší kružnice, na níž leží bod A. Jak se pohybuje bod A?

Cvičení 6. Vedle sebe stojí dvoje stejné hodiny, akorát jedny jdou o čtvrthodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček?

Cvičení 7. Po dvou kružnicích obíhají stejnou úhlovou rychlostí body M, N (každý po jedné, začátek pohybu je v obecné poloze). Co opisuje bod X úsečky MN, pro který $|MX| = 2|NX|$?

Cvičení 8. Dvě kružnice se protínají v bodech C a D. Bodem C se otáčí přímka, která protíná kružnice v dalších bodech E a F. Jakou množinu opisuje střed úsečky EF?

Cvičení 9. Dvě kružnice se protínají v bodech C a D. Bodem C se otáčí přímka, která protíná kružnice v dalších bodech E a F. Jestliže EFG tvoří rovnostranný trojúhelník, jak se pohybuje bod G?

Vysvětlení techniky pohybů

Následují čtyři kroky, jejichž osnova může při řešení úloh hýbáním pomoct. Až si řešením vypracujete cit pro pohyb, nebude žádná osnova potřeba. K pochopení na začátku je však esenciální.

(i) Nejprve vyřešíme jednoduché speciální případy (speciální poloha bodu, rovnostranný trojúhelník, vhodné postavení ostatních bodů, symetrická pozice, atd.)
(ii) Zkoušíme, po jakých množinách se dá s body hýbat tak, aby se zachovalo zadání a pohnulo se co nejméně bodů nebo vzdáleností. Přitom si všímáme vlastností pozice bodů v úloze.
(iii) Po nalezení vhodného pohybu vyřešíme limitní (krajní) případy.
(iv) Pokusíme se závěr zobecnit do „pohnuté" pozice.

Osnovu si rovnou zažijeme na příkladech, aby se obecné poučky proměnily v činy. Začneme velmi jednoduchým.

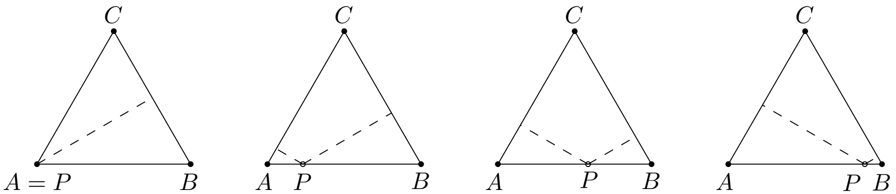
Příklad. Dokažte, že pro libovolný vnitřní bod P rovnostranného trojúhelníku ABC je součet jeho vzdáleností od stran stejný.

Řešení. Postupujme podle návodu.

(i) Speciální poloha je např. na hranici trojúhelníku nebo ve vrcholu. Ač zadání mluví jen o vnitřních bodech, vyřešení pro celý trojúhelník obsáhne i řešení zadané úlohy. Posazení do vrcholu nám řekne, že součet vzdáleností musí být roven velikosti výšky v.

(ii) Při obecném pohybu bodu P se mění všechny tři vzdálenosti. Při pohybu rovnoběžném s nějakou stranou se mění jen dvě, to bude hledaný pohyb.

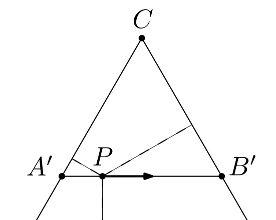
(iii) Nejkrajnější případ je vrchol trojúhelníku. Dalšími krajními případy jsou strany. Pohybujme nyní s bodem P rovnoměrně z A do B. Vzdálenost P od AC se tak rovnoměrně zvětšuje z 0 na v. Vzdálenost P od BC se naopak rovnoměrně při pohybu zmenšuje z v na 0 v krajních bodech. Už toto by téměř stačilo jako důkaz.



Obr. Ia

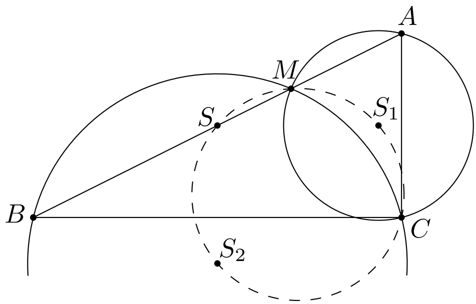
Ve skutečnosti je potřeba dokázat to líp, ale hýbání nám řeklo jak: V závislosti na délce AP se pomocí cosinu vyjádří vzdálenosti od stran a díky tomu, že se rovnoměrně zvětšují a zmenšují při pohybu, dopředu víme, že bude postup fungovat, tj. součet těchto vzdáleností vyjde konstantní.

(iv) Pohyb rovnoběžný se stranou si představme jako pohyb po straně trojúhelníku $A'B'C$, ke kterému je přilepeno $ABB'A'$. Během pohybu se vzdálenost P od AB nemění, takže se díky výsledku v $\Delta A'B'C$ nemění součet vzdáleností ani v celém ΔABC.



Obr. Ib

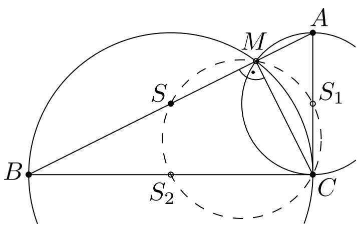
Příklad. Buď M libovolný bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S střed AB a dále S_1, S_2 středy kružnic opsaných trojúhelníkům ACM, BCM. Dokažte, že S, S_1, S_2, M, C leží na jedné kružnici. Pro které M má tato kružnice nejmenší poloměr? (MO 56-II-3)



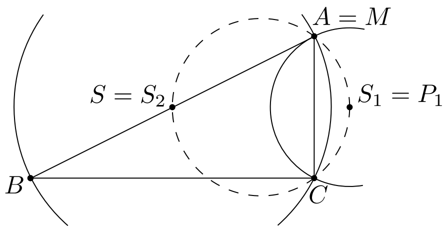
Obr. IIa

Řešení. Opět zkusme jet podle návodu. Předtím ještě označme P_1 průsečík kolmice na AC vedenou bodem A s osou strany AC a P_2 průsečík kolmice na přeponu vedenou bodem B s osou strany BC.

(i) Specifickými polohami jsou $M =$ [pata výšky z C], $M = A$, $M = B$, $M = S$. Pomocí pravých úhlů se v nich lehko ukáže platnost tvrzení. Na obrázcích vidíte první dva případy.

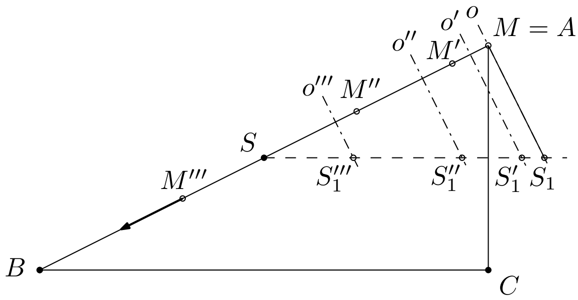


Obr. IIb



Obr. IIc

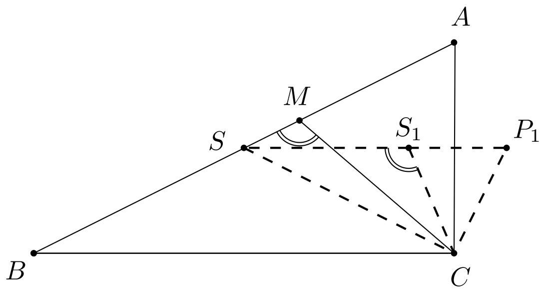
(ii) Tady nemusíme řešit jak hýbat – je jasné, že rovnoměrně bodem M po přeponě. Při tomto pohybu je dobré, že se rovnoměrně hýbou i body S_1, S_2. Bod S_1 je totiž průnik osy úsečky MA a osy strany AC. Osa úsečky MA se pohybuje poloviční rychlostí jako bod M, a díky tomu se rovnoměrně pohybuje i S_1 (kdybychom chtěli být přesní, řekli bychom, že existuje lineární závislost, kterou jde lehce vyjádřit, ale nejlépe ji uvidíme pomocí hýbání).



Obr. IId

(iii) Pro krajní polohu $M = A$ platí $S_1 = P_1$ a $S_2 = S$, pro druhou krajní polohu $M = B$ je $S_1 = S$ a $S_2 = P_2$. Obě tyto pozice bodu M splňují triviálně zadání úlohy a navíc jsou počáteční a koncovou pozicí pohybu bodu M.

(iv) Zvolme nějakou obecnou polohu bodu M. Předchozí hýbání nás navádí buď na spirální podobnost (úsečky AB a P_1S si i s pohyby bodů M a S_1 odpovídají ve spirální podobnosti se středem v C) nebo na všimnutí stejně rychlého měnění úhlů $\sphericalangle CMS$ a $\sphericalangle CS_1A$.



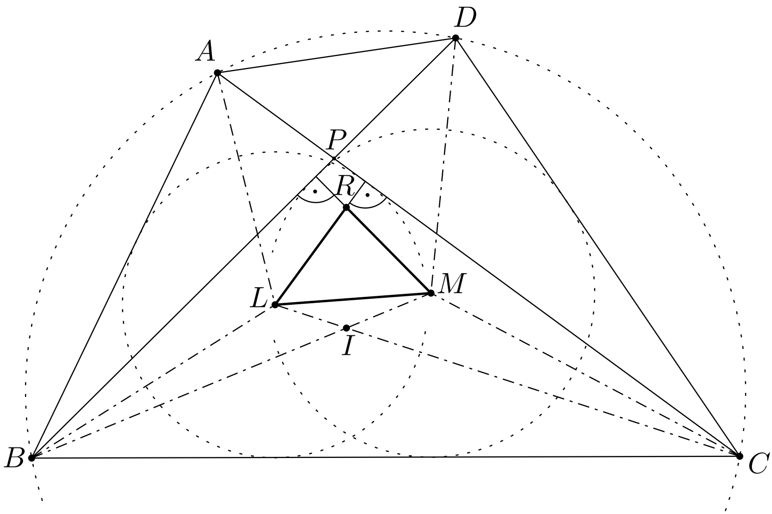
Obr. IIe

Podobnost $\Delta ABC \approx \Delta P_1SC$ dostaneme velice rychle. Z vlastností vzájemně odpovídajícího pohybu bodů M a S_1 máme

$$|AM| : |MB| = |P_1S_1| : |S_1S|,$$

což dává rovnost úhlů $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle SS_1C$ vyznačených na obrázku IIe. Rovnost zmíněných úhlů je ekvivalentní s tím, že S, M, S_1, C leží na kružnici, a analogicky se ukáže, že na téže kružnici leží i bod S_2, čímž je úloha vyřešena.

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$, v něm střed L kružnice vepsané trojúhelníku ABC a střed M kružnice vepsané trojúhelníku DBC. Označme l přímku kolmou na AC procházející bodem L, dále m přímku kolmou na BD procházející bodem M a nakonec R průsečík přímek l a m. Dokažte, že je ΔMLR rovnoramenný. (MO 56-III-2)

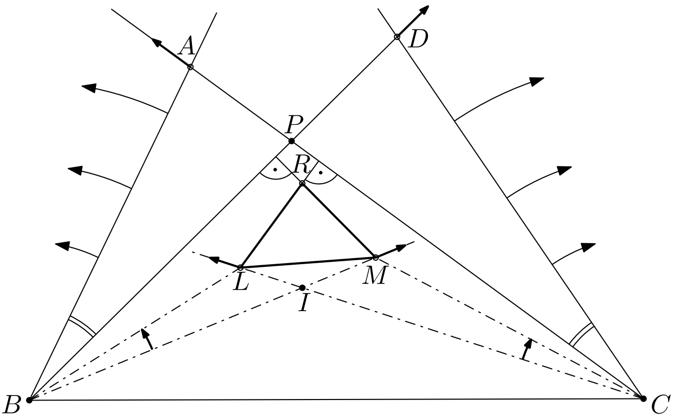


Obr. IIIa

Řešení. Označme ještě P průsečík úhlopříček a I střed vepsané trojúhelníku PBC. Dál postupujme podle návodu.

(i) V případě symetrické pozice se řešení nahlédne ze symetrie, což se bohužel nebude dát rozšířit do obecné pozice … tady tentokrát nepochodíme.

(ii)–(iii) Hýbání je v této úloze složitější. Nabízí se hýbání bodem A po kružnici (aby $ABCD$ zůstal tětivový), ale při něm se hýbou důležité body L a R příliš rozdílně. Proto (předčasně) už v kroku (ii) nahlédněme limitní pozici degenerovaného případu $A = D = P$. V ní nastane zároveň $L = M = R = I$. A teď s ní zkusme nějak pohnout, aby se body pohybovaly „hezky“. Tím hezkým pohybem je ponechání pevného trojúhelníku PBC a otáčení s polopřímkami $\mapsto BA$ a $\mapsto CD$ stejnou úhlovou rychlostí, ale opačným směrem. Při tomto pohybu zůstává $ABCD$ tětivový a body L a M se pohybují navzájem odpovídajícím způsobem po pevných osách úhlů $\sphericalangle PCB$ a $\sphericalangle PBC$.



Obr. IIIb

To už je hledaný hezký pohyb, který dořešíme v následujícím bodu.

(iv) Podle věty uu jsou trojúhelníky BIL a CIM podobné, takže poměr $|LI| : |MI| = |BI| : |CI|$ je při pohybu konstantní, což znamená, že přímka LM má při našem pohybu pořád stejný směr. Zbývá dokázat, že je to pro rovnoramennost trojúhelníku LMR ten správný směr – směr svírající se zadanými kolmicemi l a m stejný úhel; směr kolmic l, m se totiž nemění, jsou určeny přímkami AC a BD. Vlastně stačí dokázat, že $LM \perp PI$ (PI je totiž osou $\sphericalangle BPC$ a svírá s přímkami l a m stejný úhel). A $LM \perp PI$ už dostaneme po krátkém počítání úhlů (nejdříve spočtením úhlu přímek LM a BC – přes tětivový čtyřúhelník $BCML$, poté úhlu přímek BC a PI – využitím faktu, že PI je osou úhlu).

Shrnutí techniky

Při řešení úloh hýbáním **si všímejte degenerovaných případů**, **krajních poloh** a **speciálních případů**. Když se vám budou zdát jasné (že v nich zadání skoro zřejmě platí), tak s nimi zkuste nějakým způsobem pozicí pohnout, aby se body hýbaly „hezky“ a abyste dostali všechny obecné případy, na které se úloha vztahuje.

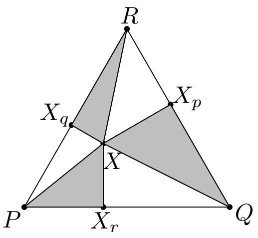
Taky pamatujte, že **samotné hýbání často nic nedokazuje**. Ale v naprosté většině případů vám dá návod, jak pomocí poměrů, podobností, posunutí, krajních případů nebo nějakých invariantních vlastností úlohu řešit.

Lehčí Trénink

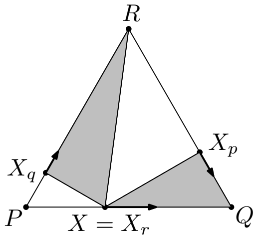
V následujících úlohách si trénujte cit pro nalezení a pochopení pohybu a jeho využití. Spíš než na samostatné řešení se soustřeďte na důkladné zdůvodnění, že vám pohyb poskytnutý v návodu už dává řešení nebo myšlenku řešení.

Příklad 1. V rovnostranném trojúhelníku PQR je uvnitř bod X. Z něj vedou na strany p, q a r kolmice s patami X_p, X_q a X_r. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků XPX_r, XQX_p a XRX_q je polovina obsahu celého trojúhelníku PQR. (Myreg 2009)

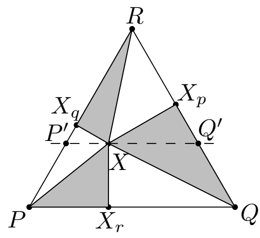
Návod.



Obr. 1a



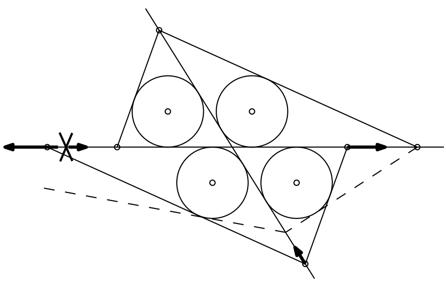
Obr. 1b



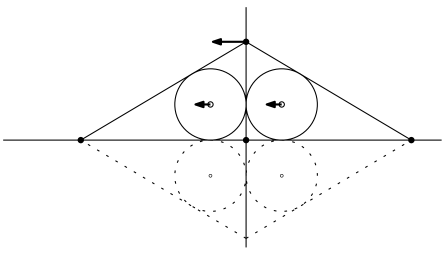
Obr. 1c

Příklad 2. Ve čtyřúhelníku $EFGH$ s průsečíkem úhlopříček P jsou trojúhelníkům EFP, FGP, GHP a HEP vepsány kružnice. Dokažte, že jestliže jsou tyto kružnice shodné, tak je čtyřúhelník kosočtvercem. (PraSe 26-6-6)

Návod. Začněte ukázkou půlení se úhlopříček (spojováním bodů do čtyřúhelníku ze symetrické pozice) a pokračujte kolmostí úhlopříček (sledováním stejného obsahu trojúhelníků, stejných poloměrů vepsaných kružnic a vzrůstajícího rozdílu v obvodu trojúhelníků (vzpomeňte na vzorec $S = (o \cdot r)/2$)).



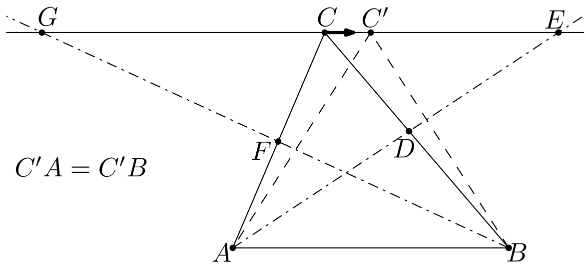
Obr. 2a



Obr. 2b

Příklad 3. ABC je trojúhelník s osami úhlů AD a BF. Přímky AD a BF protínají přímku rovnoběžnou s AB vedenou bodem C po řadě v bodech E, G. Z předpokladu $|FG| = |DE|$ vyvoďte $|CA| = |CB|$. (shortlist 1990/12.)

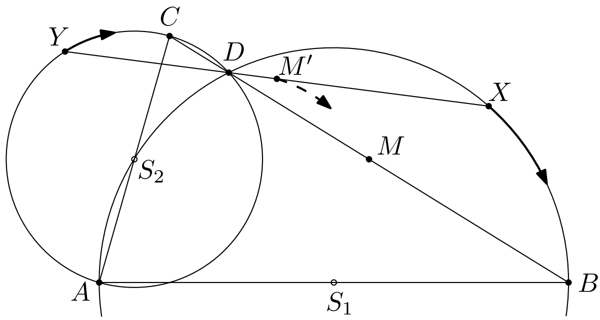
Návod. Zkoumejte vzájemnou změnu délek $|FG|$, $|DE|$ při hýbání do symetrické polohy.



Obr. 3

Příklad 4. Jsou dány kružnice k_1 a k_2 nad průměry AB a AC. Průsečíkem D obou kružnic ($D \neq A$) je vedena přímka, která protíná k_1 podruhé v bodě X ($X \neq D$) a k_2 podruhé v bodě Y. Body M a M' jsou po řadě středy úseček BC a XY. Ukažte, že $\sphericalangle AM'M$ je pravý úhel. (PraSe 26-6-8)

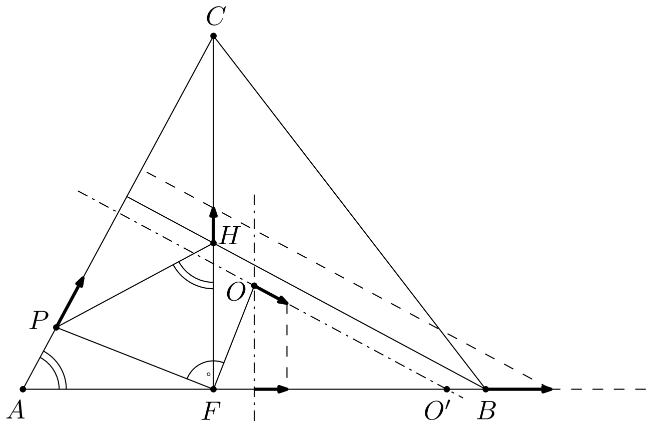
Návod. Otáčejte rovnoměrně přímkou XY a zkoumejte pohyb bodu M'.



Obr. 4a

Příklad 5. Trojúhelník ABC je ostroúhlý s $|BC| > |AC|$. Označme O střed opsané, H ortocentrum, F patu výšky z C. Přímka kolmá na FO vedená bodem F protíná stranu AC v bodě P. Ukažte, že $|\sphericalangle FHP| = \alpha$. (shortlist 1996/12.)

Návod. Začněte v limitní poloze $|BC| = |AC|$ a pohybujte se podle obrázku do limitní polohy $P = C$.



Obr. 5

Další příklady vhodné na hýbání s body

Pokud ještě pořád nejste přesvědčeni o síle prezentované metody, tak velmi doporučuji zkusit řešit **příklady 14.** a **21.** a poté si důkladně nastudovat vzorové řešení.

Lehké

Příklad 6. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní body M, N takové, že úhel MSN je ostrý. Libovolným bodem X menšího z oblouků MN veďme rovnoběžku s přímkou MS a označme Y její průsečík s úsečkou SN. Sestrojte takový bod X, pro který je obsah trojúhelníku SXY maximální. (MO 50-II-3)

Příklad 7. Který trojúhelník s jednotkovým obvodem má největší obsah?

Příklad 8. V rovnostranném trojúhelníku KLM o obsahu S je libovolně bod N. Buď K', L' a M' body po řadě na stranách KL, LM a MK takové, že $NK' \parallel MK$, $NL' \parallel KL$ a $NM' \parallel LM$. Průsečíky os úseček NK', NL' a NM' tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Ukažte, že $S = 3T$. (MO 55-I-2)

Příklad 9. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se dotýkají v bodě T a je $r_1 < r_2$. Body A, B leží po řadě na kružnicích k_1, k_2 tak, že je úhel $\sphericalangle ATB$ pravý. Dokažte, že všechny možné přímky AB procházejí jedním bodem a najděte množinu středů úsečky AB. (MO 57-II-2)

Příklad 10. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že AB je průměr kružnice opsané, O je střed AB, P je průsečík úhlopříček a platí, že $|\sphericalangle APB| = 2|\sphericalangle COD|$. Tečny v bodech C, D se protnou v dalším bodě Q. S faktem, že $|AB| = 2$, určete vzdálenost $|OQ|$. (PraSe 26-6-5)

Příklad 11. Je dán rovnoběžník, jehož stranám jsou z vnějšku připsány čtverce. Ukažte, že středy těchto čtverců tvoří další čtverec.

Příklad 12. Najděte nejlepší konstanty p, q takové, že

$$p < \frac{a + t_b}{b + t_a} < q$$

platí pro libovolný trojúhelník se stranami a, b a jim příslušnými těžnicemi t_a, t_b. (MO 57-III-6)

Střední

Příklad 13. Pro dané číslo n najděte n-úhelník, který bude mít obvod 1 a co největší obsah. (Zajímavý známý příklad)

Příklad 14. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky stejně dlouhé. Ukažte, že pokud vně každé straně připíšeme rovnostranný trojúhelník, tak jsou spojnice protějších středů těchto trojúhelníků na sebe kolmé. (shortlist 1992/5.)

Příklad 15. V nerovnoramenném trojúhelníku TUV jsou na stranách UV, TV po řadě body P, Q tak, že je čtyřúhelník $TUPQ$ tětivový. Příčky TP a UQ se protínají v bodě X. Dokažte, že leží-li bod X na výšce z bodu V, tak je už nutně ortocentrem trojúhelníku TUV. (MO 56-III-5)

Příklad 16. Ukažte, že existuje konečná množina bodů M rovině taková, že pro libovolný bod P z M existuje právě 2009 bodů množiny M, které mají od P vzdálenost 1. (shortlist 1993/1.)

Příklad 17. Buď S bod na straně AB v ostroúhlém trojúhelníku ABC a dále X, Y po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC. Najděte polohu bodu S, pro niž bude mít trojúhelník SXY minimální obsah. (MO 52-II-2)

Příklad 18. Říkáme, že kružnice k půlí kružnici l, pokud ji protíná v průměru. Jsou dány tři kružnice k_A, k_B, k_C se středy A, B, C. Ukažte, že body A, B, C leží na přímce, právě když neexistuje jednoznačná kružnice, která půlí všechny tři kružnice k_A, k_B, k_C. Dále ukažte, že pokud je více půlících kružnic, tak všechny procházejí jistými dvěma body. (shortlist někde kolem 1991)

Těžší

Příklad 19. Jsou dány rovnoběžné přímky p, q a někde mezi nimi bod A. Bod P se pohybuje po p a bod Q po q tak, že úhel $\sphericalangle PAQ$ zůstává konstantní. Ukažte, že v rovině existuje ještě jeden bod A', pro který se úhel $PA'Q$ nemění. (Pepa 2009)

Příklad 20. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s obvyklým značením úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD označme R_A. Analogicky označme R_B, R_C a R_D. Ukažte, že $R_A+R_C > R_B+R_D$ právě když $\alpha + \gamma > \beta + \delta$. (shortlist 1996/17.)

Příklad 21. Je dán trojúhelník DEF. Kružnice procházející body E, F protíná stranu DE v dalším bodě F' a stranu DF v dalším bodě E'. Buď H ortocentrum DEF a H' ortocentrum $DE'F'$. Ukažte, že se přímky EE', FF' a HH' protínají v jednom bodě. (shortlist 1995/G8)

Hinty k příkladům

Pokud dlouho bušíte do úlohy, ale i tak nechcete vidět přímo řešení, jsou tu pro vás hinty.

1. Vyřešte zvlášť pro polohu $X = X_r$ a zvlášť v $PQQ'P'$. **2.** Hint nedorazil. **3.** Chování $|AF| : |FC|$. **4.** Spirální podobnost (nebo využití pohybu vektorů $\overrightarrow{S_1X}$ a $\overrightarrow{S_2Y}$). **5.** Rovnoměrný pohyb PH, vzájemná stejnolehlost jejích různých poloh. **6.** Konstantní strana, úhel. **7.** Elipsa. **8.** Krajní případ. **9.** Stejnolehlost. **10.** $C \to B$. **11.** Start z obdélníku. **12.** Degenerovaný případ; případy $b \geq t_a$ a $t_a > b$. **13.** Elipsa a potom správně rozřezat obsah. **14.** Degenerovaný začátek, spirální podobnost. **15.** Cevova věta. **16.** Indukce. **17.** Podobnost s ABC. **18.** Mocnost. **19.** Bod A na ekvidistantě; zobrazit Q na p, pak rodina kružnic opsaných $PQ'A$. **20.** Chování $R_A + R_C - R_B - R_D$; případy $\max\{\beta, \delta\} < 90°$ a $\max\{\beta, \delta\} \geq 90°$. **21.** Pohyb průsečíkem kolmo na osu $\sphericalangle EDF$; EE', FF' rovnoběžně.

Literatura

Tento text byl sepsán bez pomoci literatury, je tedy původní. Příklady jsem čerpal především ze starších ročníků PraSátka, archivu olympiády a IMO shortlistů. V asi dvojnásobné podobě (i s kompletními řešeními příkladů a cvičení a asi patnácti dalšími obrázky) tento text zanedlouho najdete v knihovně PraSátka na našich stránkách.

Kombinatorika a pravdepodobnosť

Miro Majerčík

Tvrdenia a definície

Tvrdenie. Faktoriál $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2{\cdot}1$ je počet permutácií na n prvkovej množine.

Tvrdenie. Kombinačné číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

je počet možností, ako vybrať k rôznych prvkov z n.

Tvrdenie. Označme $P(A)$ pravdepodobnosť javu A. Potom

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(ii) $P(A \subseteq B) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
(iii) $P(\neg A) = 1 - P(A)$

Tvrdenie. Nech A, B sú náhodné javy a $P(B) \neq 0$. Potom platí

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tvrdenie. Ak sú javy A, B nezávislé, tak sú aj javy $A, \neg B$ nezávislé. Navyše platí $P(A) = P(A|B)$.

Úlohy

Príklad 1. Hádžeme šiestimi hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť že budú všetky čísla rôzne? Aká je pravdepodobnosť, že budú všetky hodené čísla nepárne?

Príklad 2. Aká je pravdepodobnosť, že vám v hre poker príde fullhouse (dvojica a trojica kariet rovnakej hodnoty) v prvých piatich kartách?

Príklad 3. Do vlaku s n vagónmi náhodne nastúpilo k ľudí ($k \geq n$). Aká je pravdepodobnosť že žiadny vagón neostane prázdny?

Príklad 4. Do divadla príde 7 ľudí. Kabát si odložia v šatni. Šatniarka im vracia kabáty náhodne. Aká je pravdepodobnosť že nikto nedostane naspäť svoj kabát?

Príklad 5. Koľko existuje priesečníkov uhlopriečok v konvexnom mnohouholníku, ak sa žiadne tri uhlopriečky nepretínajú v jednom bode?

Príklad 6. Na kružnici je $2n$ bodov. Koľkými spôsobmi ich môžeme spojiť do párov tak, aby sa úsečky nepretínali?

Príklad 7. Aká je pravdepodobnosť, že medzi n ľuďmi majú dvaja narodiny v rovnaký deň?

Príklad 8. Koľko podmnožín množiny $\{1, 2, 3 \ldots, n\}$ neobsahuje dve po sebe idúce čísla?

Príklad 9. Je možné očíslovať hrany kocky číslami od 1 do 12 tak, aby mal každý vrchol rovnaký súčet hrán, ktoré s ním susedia? Je to možné, ak jednu hranu môžeme nahradiť číslom 13?

Príklad 10. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať dve disjunktné množiny z n prvkov?

Príklad 11. Hráči A a B sú vyrovnaní pingpongoví hráči. Je pravdepodobnejšie, že hráč A vyhrá v troch hrách zo štyroch alebo v piatich hrách z ôsmich?

Príklad 12. Aký je najmenší počet vážení na zistenie najťažšieho a druhého najťažšieho kameňa zo 128 kameňov?

Príklad 13. Dokážte, že stačí 139 meraní, aby sme zistili prvý, druhý a tretí najťažší objekt z 128 objektov, ak žiadne tri nemajú rovnakú hmotnosť.

Príklad 14. Koľko existuje triangulácií konvexného n-uholníka?

Príklad 15. Aký je najmenší počet strelcov, pre ktorý ohrozia všetky políčka na šachovnici $n \times n$? A aký je najväčší počet strelcov taký, aby sa navzájom neohrozovali?

Príklad 16. V koľkých bodoch sa pretnú uhlopriečky konvexného n uholníka, ak sa žiadne tri uhlopriečky nepretnú v jednom bode?

Historie π

Dominik Mokriš

Úvod

V přednášce si uděláme prudce zajímavý výlet do historie Matematiky a číslo π nám v tom bude výtečným průvodcem. Tady ve sborníčku najdete zadání zajímavých úloh k tématu (řešit je budeme na přednášce), zejména starověkých a geometrických, abychom celou přednášku nestrávili definováním obtížných pojmů. Připojuji i stručnou historickou tabulku, abychom se vešli do sborníčku.

Úlohy

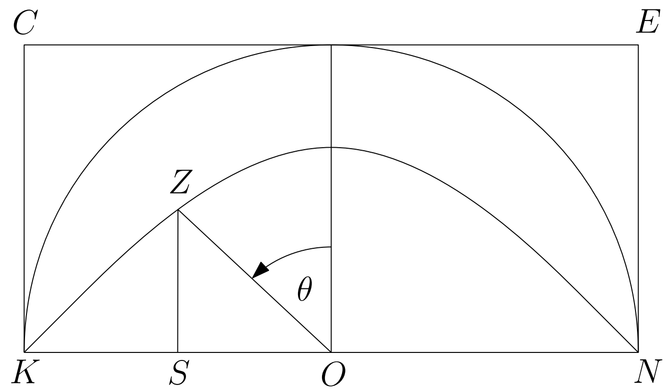
K hlavním úlohám spojeným s π patřilo provést rektifikaci kruhu (nakreslení úsečky stejné délky jako jeho obvod) a jeho kvadraturu (nakreslit čtverec o stejném obsahu), to vše pomocí pravítka bez měřítka a kružítka. Obě jsou ekvivalentní geometrickému nalezení úsečky délky π.

Lemma. (Archimedes, 3. stol. BC) *Obvod kruhu je menší, než obvod opsaného pravidelného mnohoúhelníku a větší, než obvod vepsaného pravidelného mnohoúhelníku.*

Pomocí vepsaného a opsaného 96-úhelníka dospěl Archimedes k výsledku $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$. Na přednášce odvodíme rekurentní postup, jak spočíst obvod pravidelného 2^k-úhelníka, takže si budete moci vypočítat π s libovolnou přesností. ;)

Definice. (cca 440 BC) *Hippiasova kvadratix je množina průsečíků rovnoměrně se pohybující přímky a přímky rovnoměrně se otáčející kolem počátku souřadnic (když posouvající se přímka prochází počátkem, tak obě přímky splývají, tedy $\theta = 0$). Analyticky je dána předpisem $y = x \operatorname{cotg}(\pi x/2r)$. Pozri obrázok a zkus si rozmyslet, jak by pokračovala.*[2]

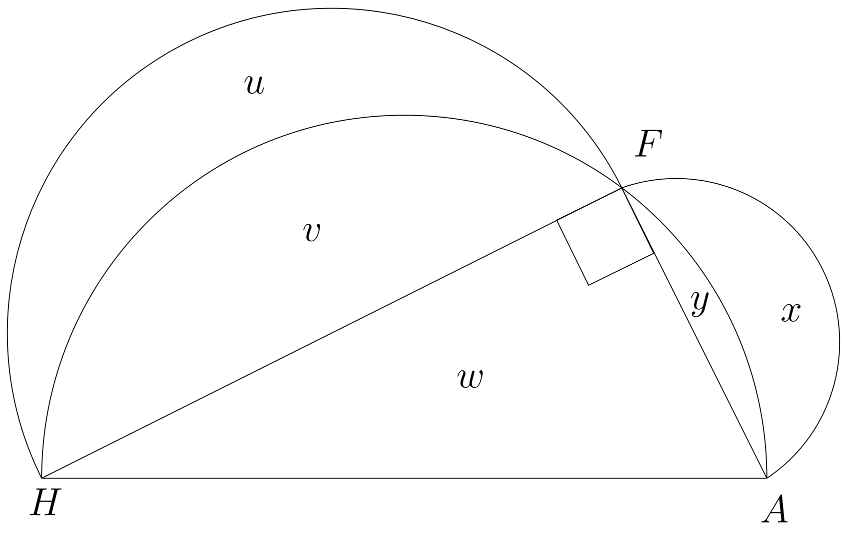
[2] Obrázek je podfuk, ve skutečnosti tam není nakreslena kvadratix ale spline, který je jí podobný.



Věta. (Pappus, Dinostratus, cca 335 BC) *Pomocí kvadratix, pravítka a kružítka jsme schopni vyřešit kvadraturu kruhu.*

Lemma. (Hippokrates z Chiu, 5. stol. BC) *Součet obsahů Hippokratových měsíčků, které leží mezi obloukem půlkružnice nad přeponou a oblouky kružnic nad odvěsnami téhož pravoúhlého trojúhelníka, je roven obsahu tohoto trojúhelníka.*

Tato úloha dávala velké naděje na řešení kvadratury kruhu, zvláště některé její modifikace (které si ukážeme, pokud zbyde čas).



Věta. (hrabě Buffon, 18. stol.) *Pravděpodobnost, že jehla délky L vrhaná ze stejné vzdálenosti na podložku s nalinkovanými rovnoběžnými čarami vzdálenosti d, kde $d < L$ je rovna*

$$P[x < \frac{1}{2} \cdot L \cdot \sin\varphi] = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \int_0^\pi \frac{\sin\varphi}{\pi \cdot \frac{d}{2}} d\varphi = \frac{2L}{\pi d}.$$

Integrálu se nelekej, budeme prostě věřit, že je roven 2. ;)

Další zajímavá vyjádření, v přednášce se jim asi věnovat nebudeme

(Wallis, 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$$

(Gregory, Leibniz, 1671–1674)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(Euler, 1735)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(Brouckner, 17. stol.)

$$4/\pi = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \cdots}}}$$

Chronologický přehled

- cca 2000 BC : Babyloňané používají $\pi = 25/8$
- cca 2000 BC : Egypťané užívají $\pi = (16/9)^2$
- 12. stol. BC : Číňané užívají $\pi = 3$
- cca 550 BC : Bible, 1. Kniha královská, verš 7,23 vede k hodnotě $\pi = 3$
- cca 440 BC : Hippokrates z Kiu počítá obsah úseče
- cca 420 BC : Hippias objevuje kvadratix
- cca 335 BC : Dinostratos používá kvadratix k výpočtu plochy kruhu
- 3. stol. BC : Archimedes určuje $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$
- 2. stol. AD : Ptolemaios užívá $\pi = 377/120$
- před 1436 : Al-Kashi ze Samarkandu počítá π na 14 míst

• 1593 : Francois Viéte vyjadřuje π jako nekonečný součin
• 1596 : Ludolph van Ceulen počítá π na 32, později 35 platných míst
• 1655 : Wallis nachází nekonečný racionální součin pro π, Brouckner ho převádí na řetězový zlomek
• 1665–1666 : Newton objevuje diferenciální a integrální počet, k tomu počítá π na nejméně 16 míst (publikováno posmrtně 1737)
• 1671 : Gregory objevuje řadu pro arcustangens
• 1674 : Leibniz pomocí této řady počítá π
• 1705 : Sharp počítá π na 72 míst
• 1706 : Machin počítá π na 100 míst, Jones poprvé zavádí označení π
• 1748 : Euler publikuje výsledek $e^{\pi \cdot i} = -1$
• 1761 : Lambert dokazuje iracionalitu π
• 1794 : Legendre dokazuje iracionalitu π^2, Vega počítá π na 140 míst
• 1840 : Liouville dokazuje existenci transcendentních čísel
• 1855 : Richter počítá π na 500 míst
• 1873 : Hermite dokazuje transcendenci e
• 1874 : Shanks počítá π na 707 míst
• 1882 : Lindemann dokazuje transcendenci π
• 1945 : Fergusson zjišťuje chybu Shanksova výpočtu na 527. místě, o dva roky později pomocí stolního kalkulátoru počítá 808 míst
• 1967 : pomocí počítače bylo vypočteno 500 000 míst

Řetězové zlomky

Dominik Mokriš

Úvod

Podíváme se na zoubek některým základním vlastnostem řetězových zlomků a zjistíme, zda jsme schopni je k něčemu využít. Záměrně ve sborníčku vynechávám některé detaily, takže není žádný problém, pokud tomu nerozumíš na první čtení. Někde neuvádím důkazy – buď je stihneme udělat na přednášce nebo se odkážeme na literaturu.

Základní vlastnosti

Nechť $a_0 \in \mathbb{Z}, a_j \in \mathbb{N}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Výraz ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$$

nazveme řetězový zlomek řádu n a abychom si ušetřili práci, budeme ho zapisovat jako $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Samozřejmě bychom mohli teorii budovat i kdybychom za a_j dosazovali nenulová reálná čísla. Výraz $[a_0; a_1, \ldots]$ nazveme nekonečný řetězový zlomek a budeme jím rozumět posloupnost řetězových zlomků řádu n.

Položme $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ a dále postupujme indukcí:

$$p_n := a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$
$$q_n := a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Dostáváme

Lemma. *Pro každé $n \geq 0$ a jakákoli kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots$ máme*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

Důkaz. Povedeme indukcí

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1 + 0} = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

$$\begin{aligned}
[a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] &= [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1/a_{n+1}] \\
&= \frac{(a_n + 1/a_{n+1})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1/a_{n+1})q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_m + q_{n-1}} \\
&= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Lemma. *Pro každé $n \geq 0$ máme $p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n$.*

Důkaz. Použijeme definující vztahy a budeme sledovat, k čemu dojdeme (algebraický postup ;)).

$$\begin{aligned}
p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n &= p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) - q_{n-1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) \\
&= -(p_{n-2}q_{n-1} - q_{n-2}p_{n-1}) \\
&= \cdots \\
&= (-1)^n (p_{-1}q_0 - q_{-1}p_0) \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

Důsledek. *Pokud $a_j \in \mathbb{N}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$, potom kladná celá čísla p_n a q_n nemají žádného společného dělitele většího, nežli 1.*

Důsledek. *Pro každé $n \geq 1$ platí*

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}.$$

Jak získáme řetězový zlomek zadaného reálného čísla a? Zde je jedna možnost:

Položme $g_1 = [a]$ (dolní celá část a, tj. a zaokrouhlené dolů), $a_1 = 1/\{a\}$ ($\{a\}$ značí zlomkovou část a, tj. $\{a\} = a - [a]$). Pak $a = q_1 + 1/a$ a odtud $a_1 = 1/(a - q_1)$. Pro a_1 celý postup zopakujeme atd. Tedy

$$q_2 = [a_1] = \left[\frac{1}{a - q_1} \right], \quad a_2 = \frac{1}{\{a_1\}}.$$

Pak platí $a_1 = q_2 + 1/a_2$. Takto můžeme postupovat buď dokud q_j nebude celé číslo pro nějaké j v případě racionálního a nebo dokud nás to bude bavit/budeme to potřebovat v případě iracionálního a. Celé to je modifikace Euklidova algoritmu. Napadá Tě lepší postup?

Věta. *Pro každé kladné racionální číslo tvaru p/q platí*

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \cdots < \frac{p}{q} < \cdots < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}$$

a dokonce platí, že každý sblížený zlomek je blíže p/q, než ten předchozí, čili

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|.$$

Jak porovnávat řetězové zlomky? Řekněme si to raději slovy. Dejme tomu, že porovnávám $a = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ a $b = [b_0; b_1, \ldots, b_n]$. Porovnávám nejprve a_1 s b_1, atd. dokud nenajdu dvojici, která se liší, řekněme $a_j > b_j$. Pokud j je liché, pak $a > b$, pokud je j sudé, je $a < b$. V případě, že by třeba b bylo nekonečné, ale na prvních n členech by se nelišilo od a, by opět záleželo na paritě. Pro n sudé $a > b$, pro n liché $a < b$. V případě, že by byly konečné oba, buď existuje člen, ve kterém se liší nebo jsou úplně stejné a tím pádem je stejná i jejich hodnota. A doufám, že jsem na žádnou možnost nezapomněl. ;)

Věta. (Lagrange) *Každou kvadratickou iracionalitu, tj. výraz ve tvaru*

$$\frac{P \pm \sqrt{N}}{Q}; \quad P, Q \in \mathbb{Z}; \quad N \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{N} \notin \mathbb{Q},$$

lze vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem (tj. takovým, kde se jednotlivé členy pravidelně opakují) a naopak hodnota každého periodického zlomku je kvadratická iracionalita.

Nemám vůbec odhad, jak budeme rychlí a kolik toho stihneme. K řetězovým zlomkům je toho spousta zajímavého, co povídat. Rád bych se ještě podíval na to, jak se pomocí řetězových zlomků řeši rovnice $ax + by + c = 0$ v celých číslech, ale to je na dlouhé povídání.

Literatura

[1] A. J. Chinčin, *Řetězové zlomky,* Přírodovědné nakladatelství Praha 1952

[2] P. Vít, *Řetězové zlomky,* Edice škola mladých matematiků, Mladá Fronta, Praha 1982

[3] M. Klazar, *Introduction to number theory*, je k disposici na `http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/ln_utc.pdf`, tady však pozor, jsou to poznámky k vysokoškolské přednášce, nemá cenu to uspěchat a snažit se to louskat teďka, máte mnohem lepší si počkat a třeba na ni časem chodit.

Cardanovy vzorce

Zuzka Pôbišová

Abstrakt

Cardanovy vzorce jsou vzorce pro nalezení kořenů kubické rovnice. Kdo z vás je už viděl někde napsané, jistě by ho nenapadlo, že něco takového lze odvodit pomocí elementární středoškolské matematiky. A přece je to možné – vždyť tyto vzorce byly známé již kolem roku 1500.

Odstranění kvadratického členu, typy rovnic

Mějme rovnici

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

potom substitucí $y = x - a/3$ vyrušíme kvadratický člen.

Dostáváme tedy 3 typy rovnic (pro $a, b > 0)^3$:

$$\begin{aligned} x^3 + ax &= b \\ x^3 &= ax + b \\ x^3 + b &= ax \end{aligned}$$

Nalezení řešení kubické rovnice

Vyjdeme tedy z rovnice

$$x^3 + px + q = 0.$$

Trik: Položíme $x := u + v$ a po úpravě dostáváme

$$u^3 + v^3 + (3uv + p) \cdot (u + v) + q = 0$$

a u, v zvolíme tak, že $uv = -p/3$. Dostáváme tedy, že $u^3 + v^3 = -q$ a zároveň $u^3v^3 = -p^3/27$. Z toho plyne, že u^3, v^3 musí být řešení kvadratické rovnice $z^2 + qz - p^3/27 = 0$ a odtud

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}} \\ v^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}} \end{aligned}$$

[3] Pomíjíme zde triviální případy, kdy je některý z dalších koeficientů nulový.

Jeden reálný kořen tedy nalezneme:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Všechna (komplexní) řešení dostáváme ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v \\ x_2 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v \\ x_3 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \end{aligned}$$

kde $\varepsilon = \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Je dobré si uvědomit, že tyto vzorce mohly být ve středověku jen sotva prakticky používány.

Nalezení řešení rovnice 4. stupně

Stejnou metodou jako minule odstraníme kubický člen a dostaneme:

$$x^4 + ax^2 + bx + d = 0.$$

Trik: Uvažujme

$$\begin{aligned} (x^2 + \frac{a}{2} + t)^2 &= (x^2 + \frac{a}{2})^2 + t^2 + 2tx^2 + at \\ &= 2tx^2 - bx + (t^2 + at + \frac{a^2}{4} - c) \end{aligned}$$

Otázka zní: Kdy je na pravé straně čtverec? Zjevně tehdy a jen tehdy, když platí $4 \cdot 2t(t^2 + at + a^2/4 - c) - b^2 = 0$. To je kubická rovnice (tu už umíme řešit), nechť je tedy t_0 její řešení. Řešení naší rovnice potom splývají s řešením kvadratické rovnice

$$x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t_0}\right).$$

Tento text je prevzatý zo zborníčku Polnička 2000, z rovnomenného príspevku Petra Šimečka.

Důkazy pomocí obarvování

Monika Pospíšilová

Úvod

Cílem přednášky je seznámit se s metodou obarvování při řešení různých matematických úloh. Přednáška v sobě neobsahuje v podstatě vůbec žádnou teorii, půjde především o řešení příkladů.

Poděkování

Příklady k této přednášce byly čerpány z příspěvku Martina Tancera, který čerpal z textu Roberta Šámala. Ten uvádí, že čerpal od Arthura Engela z knihy *Problem-Solving Strategies.* :)

Polymina

V příkladech se často vyskytují nějaká polymina. k-mino dostaneme tak, že ze čtverečkového papíru vystřihneme k čtverců držících při sobě (držení za roh se nepočítá). Pro $k = 2, 3, 4, 5 \ldots$ se často používá výrazů domino, trimino, tetramino, pentamino, ... Domino je určeno jednoznačně. Trimina jsou dvě. Tetramin je pět (osově souměrná považujme za stejná) a jistě si domyslíš, jak vypadají tetramina označená I, L, O, T a S.

Příklady

Příklad 1. Je možno z pěti tetramin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?

Příklad 2. Lze pokrýt obdélník 10×10 pomocí 25 tetramin I?

Příklad 3. Obdélníková tabulka je vyplněna tetraminy typu I a O. Pavel chce jedno z tetramin vyndat, vyměnit ho za tetramino druhého typu a těmito tetraminy opět vyplnit stejnou tabulku. Může se mu to podařit?

Příklad 4. Šachovnici 8×8 je možno vyplnit dominy $2^4 \cdot 901^2 = 12988816$ způsoby. Kolika způsoby lze vyplnit šachovnici, z níž jsme vyřízli dva protilehlé rohy?

Příklad 5. Je možno vyplnit krychli $10 \times 10 \times 10$ pomocí 250 cihel $1 \times 1 \times 4$?

Příklad 6. Obdélník $a \times b$ lze pokrýt obdélníky $1 \times n$, právě když $n|a$ nebo $n|b$. Dokažte. Kdy jej lze pokrýt obdélníky $m \times n$?

Příklad 7. Jeden z rohů čtverce $(2n+1) \times (2n+1)$ je vyříznut. Pro která n lze pokrýt zbývající čtverce dominy, z nichž polovina je vodorovně a polovina svisle?

Příklad 8. Na jedno z políček čtverce 5×5 napíšeme -1 na ostatních 24 políček 1. Jedním tahem můžeme změnit znaménko u všech čísel v nějakém čtverci $a \times a$, pro $a > 1$. Chceme docílit toho, aby na všech políčkách byla 1. Kde může být na začátku -1, aby to bylo možné?

Příklad 9. Na každém políčku šachovnice 9×9 sedí beruška. V jeden okamžik každá beruška přeleze na jedno z políček sousedícím rohem s výchozím. Některá políčka zůstanou volná. Jaký je nejmenší možný počet volných políček?

Příklad 10. Na nekonečné čtvercové síti hrajeme solitér: Na začátku máme na $n \times n$ průsečících rozmístěny dámové kameny, v každém tahu můžeme přeskočit libovolným kamenem nějakého jeho souseda (jen vodorovně či svisle), toho odstranit a přeskakujícím kamenem dopadnout na políčko za kamenem přeskakovaným (to musí být volné). Pro která n můžeme vyhrát, tj. docílit stavu, kdy zbude jediný kámen?

Příklad 11. Čtverec 7×7 je pokryt šestnácti dílky 3×1 a jedním 1×1. Kde všude může být dílek 1×1?

Příklad 12. Lze do krychle $6 \times 6 \times 6$ umístit 53 cihel velikosti $1 \times 1 \times 4$ (rovnoběžně se stěnami)?

Příklad 13. Na krychli vyznačíme vrcholy, středy stěn a stěnové úhlopříčky. Můžeme projít každý z vyznačených bodů právě jednou, smíme-li přecházet jen po stěnových úhlopříčkách?

Příklad 14. Na šachovnici $4 \times n$ neexistuje uzavřená cesta jezdcem, která by procházela každým políčkem právě jednou, dokažte.

Šestiúhelníky a vektory

Michal „Kenny“ Rolínek

Jedním z velmi mocných nástrojů na řešení geometrických úloh jsou vektory. Byť má jejich používání blízko k analytické geometrii, bývají řešení využívající vektory často velice elegantní. Na přednášce si ukážeme i takové příklady, v nichž by syntetické řešení bylo velice náročné, ovšem vektory si hravě poradí. Jak název napovídá, půjde hlavně o příklady v nichž vystupuje nějaký ten šestiúhelník.

Nejprve si dáme několik příkladů na procvičení a pochopení toho, jak vůbec vektory fungují.

Definice. *Těžištěm n-úhelníka $A_1A_2\dots A_n$ rozumíme takový bod G, pro který platí*

$$GA_1 + GA_2 + \dots + GA_n = 0.$$

Odtud již snadno vyjádříme, že

$$G = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}.$$

Příklad 1. Rozmyslete si, že platí-li pro vektory A, B, C, že

$$A + B + C = 0,$$

pak lze tyto vektory umístit do roviny tak, aby tvořily trojúhelník.

Příklad 2. Formulujte podobnou podmínku pro rovnoběžník.

Příklad 3. Ukažte, že středy stran čtyřúhelníka tvoří rovnoběžník.

Příklad 4. Buď $ABCDEF$ šestiúhelník a A', B', C', D', E', F' postupně těžiště trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB. Ukažte, že šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ má protější strany rovnoběžné a stejně dlouhé.

Příklad 5. Buď G těžiště trojúhelníka ABC a X libovolný bod uvnitř něj. Ukažte, že platí

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 3\overrightarrow{XG}.$$

Příklad 6. Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník. Označme $M_1, M_2, \dots M_6$ postupně středy stran $AB, BC, \dots, FA$. Dokažte, že $M_1M_4 \perp M_3M_6$, právě když

$$|M_5M_2|^2 = |M_1M_4|^2 + |M_3M_6|^2.$$

Příklad 7. Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník. Označme $M_1, M_2, \dots M_6$ postupně středy stran $AB, BC, \dots, FA$. Ukažte, že trojúhelníky $M_1M_3M_5$, $M_2M_4M_6$ mají společné těžiště.

Tvrzení. (O podobnosti $\triangle$) Buď ABC trojúhelník a u, v, w vektory se součtem 0 (tedy tvořící trojúhelník, například $\triangle UVW$). Pak z každé z následujících podmínek plyne, že $\triangle UVW \sim \triangle ABC$.

$$(1) \quad \frac{|u|}{|AB|} = \frac{|v|}{|BC|} = \frac{|w|}{|CA|}$$

$$(2) \quad u \parallel AB,\ v \parallel BC,\ w \parallel CA$$

A naopak, platí-li pro nějaké vektory obě podmínky, pak z nich lze sestavit trojúhelník.

Příklad 8. Buď ABC rovnostranný trojúhelník. Na jeho straně a jsou zvoleny body A_1, A_2, obdobně na stranách b a c jsou body B_1, B_2 a C_1, C_2 tak, aby šestiúhelník $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ měl všechny strany stejně dlouhé. Ukažte, že přímky A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 procházejí jedním bodem.

(IMO 2005 - problem 1)

Násobení vektorů I

Nastal čas naše znalosti o vektorech trochu rozšířit. Dosud jsme vektory pouze sčítali, nyní si povíme něco o tom, jak se dají vektory také násobit. Takové součiny existují dokonce dva.

Definice. (Skalární součin) *Máme-li vektory $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$, pak číslo $c = a_1b_1 + a_2b_2$ nazveme skalárním součinem vektorů A a B a značíme $A \cdot B$.*

Vlastnosti skalárního součinu

(i) $A \cdot B = B \cdot A$
(ii) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(tA) \cdot B = A \cdot (tB) = t(A \cdot B)$
(iii) $A \cdot A = 0 \Leftrightarrow A = 0$ jinak, vždy $A \cdot A > 0$
(iv) $|A| = \sqrt{A \cdot A}$
(v) $A \cdot B = |A| \cdot |B| \cdot \cos\varphi$, kde φ je orientovaný úhel mezi vektory A a B.
(vi) $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A \perp B$

Dá se vytušit, že skalární součin se bude hodit v příkladech, v nichž se vyskytují (nebo mají dokázat) pravé úhly. Ukažme si tedy jak.

Příklad 9. Dokažte pomocí skalárního součinu kosinovou větu.

Příklad 10. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka jsou kolmé, právě když se rovnají součty druhých mocnin protějších stran.

Příklad 11. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka jsou kolmé, právě když se rovnají délky spojnic středů protějších stran.

Příklad 12. Ukažte, že v lichoběžníku platí

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$$

kde e, f jsou délky úhlopříček.

Příklad 13. Označme M, N, P, Q postupně středy stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníka $ABCD$. Ukažte, že platí

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2\left(|MP|^2 + |NQ|^2\right).$$

Příklad 14. Dokažte, že výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě.

Násobení vektorů II

Nyní zavedeme druhý způsob, jak násobit vektory. Tentokrát za účelem jednoduše pracovat s rovnoběžností.

Definice. (Vektorový součin) *Máme-li vektory $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$, pak číslo*[4] *$c = a_1 b_2 - a_2 b_1$ nazveme vektorovým součinem vektorů A a B a značíme $A \times B$.*

Vlastnosti vektorového součinu

(i) $A \times B = -B \times A$
(ii) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$, $(tA) \times B = A \times (tB) = t(A \times B)$
(iii) $A \times B = |A| \cdot |B| \cdot \sin\varphi$, kde φ je orientovaný úhel mezi vektory A a B.
(iv) $A \times B = 0 \Leftrightarrow A \parallel B$

Nyní se již můžeme vrhnout i na ty nejtěžší příklady.

Příklad 15. Buď $ABCDE$ pětiúhelník takový, že čtyři z jeho pěti stran jsou rovnoběžné s protější úhlopříčkou. Dokažte, že totéž platí i pro pátou stranu.

Příklad 16. Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník. Označme $M_1, M_2, \ldots M_6$ postupně středy stran $AB, BC, \ldots, FA$. Dokažte, že přímky M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 procházejí jedním bodem, právě když trojúhelníky ACE a BDF mají stejný obsah.

Příklad 17. V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí, že vzdálenost středů jakýchkoliv protějších stran je rovna $\sqrt{3}/2$ násobku součtu jejich délek. Ukažte, že všechny vnitřní úhly šestiúhelníka jsou shodné.

(IMO 2003 - problem 3)

[4] Možná ses na střední škole učil, že výsledkem vektorového součinu je vektor a teď se divíš. Přísně vzato máš pravdu, nicméně pro nás nebude jeho orientace vůbec zajímavá, takže je pohodlnější s ním pracovat jako s číslem.

Příklad 18. V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí $|AD| = |BC| + |EF|$, $|BE| = |CD| + |FA|$, $|CF| = |AB| + |DE|$. Ukažte, že platí

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|FA|} = \frac{|EF|}{|BC|}.$$

(Kazachstán 2006 nebo též české výběrko 2007)

Příklad 19. Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník o obvodu P. Označme $N_1, N_2, \ldots, N_6$ postupně středy stran $AB, BC, \ldots, FA$. Šestiúhelník $N_1N_2N_3N_4N_5N_6$ má obvod P'. Má-li $N_1N_2N_3N_4N_5N_6$ shodné všechny vnitřní úhly, ukažte, že platí $P' \leq (\sqrt{3}/2)P$.

(Vietnam 2004)

Literatura

Čerpal jsem převážně z článku *Vectors conquering hexagons* od autorů *Iurie Boreica* a *Liubomira Chiriaca*. Tento a mnoho dalších článků naleznete na stránce `http://reflections.awesomemath.org/`
Dále jsem čerpal z knihy

Arthur Engel, Problem-Solving Strategies, Springer 1998

Celá část čísla

Tomáš Roskovec

Základní pojmy

Tato přednáška se bude zabývat tématem z teorie čísel, které dává do souvislosti celá čísla s reálnými pomocí dvou funkcí.

Definice. *Celá část čísla je funkce, která přiřadí reálnému číslu největší celé číslo, které jej nepřevyšuje. Značíme $\lfloor x \rfloor$.*

Poznámka. Alternativou definice je, že $\lfloor x \rfloor$ je jediné celé číslo, splňující nerovnosti

$$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Definice. *Necelá část čísla je funkce, kterou definujeme pomocí celé části jako rozdíl $\langle x \rangle := x - \lfloor x \rfloor$.*

Poznámka. Horní celou část čísla lze definovat jako nejmenší celé číslo větší nebo rovno než x, ale s tímto pojmem nebudeme během přednášky pracovat.

Několik zajímavých vlastností

Lemma. *Pro všechna x, y reálná, m celá, n přirozená platí následující nerovnosti*

$$\lfloor x + m \rfloor \le x + m < (\lfloor x \rfloor + m) + 1$$

$$\left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Lemma. *Pro každé přirozené číslo n a $x \ge n$ platí, že $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$ udává počet všech přirozených čísel dělitelných n, která nepřevyšují x.*

Lemma. *Pro n přirozené a x reálné platí následující rovnosti*

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

$$\langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \left\langle x + \frac{2}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle = \langle nx \rangle + \frac{n-1}{2}$$

Příklad. Kolik přirozených čísel menších než 1000 není násobkem 5 ani 7?

Příklad. Jakých hodnot nabývá výraz $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$?

Příklad. Dokaž nerovnosti $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1, \quad -1 \leq \langle 2x \rangle - 2\langle x \rangle \leq 0.$

Příklad. Dokaž $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$

Celá část a prvočíselný rozklad faktoriálu

Věta. *Pro libovolné prvočíslo p a n přirozené je exponent mocniny p v rozkladu čísla $n!$ na prvočísla určen vzorcem*

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$

kde k je libovolné číslo takové, že $n < p^{k+1}$.

Příklad. Kolikrát můžeme číslo 1425! vydělit beze zbytku 11? Jaká bude poslední cifra čísla po těchto děleních?

Příklad. Jaký je ciferný součet ciferného součtu čísla 154! ?

Rovnice a další příklady

Příklad. Jaké jsou kořeny rovnice $\lfloor x^3 \rfloor + \lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = \langle x \rangle - 1$?

Příklad. Najdi všechna n, pro která platí $217 = \lfloor \frac{1}{10} \rfloor + \lfloor \frac{2}{10} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{10} \rfloor$.

Příklad. Najdi řešení $\lfloor x^2 \rfloor = x$.

Příklad. Najdi řešení $\lfloor x^2 \rfloor = 2$.

Příklad. Najdi řešení $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$.

Příklad. Najdi řešení $3\lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor = 2\langle x \rangle$.

Příklad. Najdi řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \left\lfloor \sqrt{y-1} \right\rfloor^2 &= x + 1 \\ 2\left\lfloor \sqrt{y + 2\sqrt{x}} \right\rfloor^2 &= y - 1. \end{aligned}$$

Příklad. Dokažte, že následující rovnice nemá řešení $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + {} + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = 12345$

Příklad. Kolik řešení má rovnice

$$x^2 - \lfloor x^2 \rfloor = \langle x \rangle^2$$

Literatura

[1] Herman Jiří, Kučera Radan, Šimša Jaromír: *Metody řešení matematických úloh I*, Masarykova univerzita, Brno, 2001.

Magické čtverce

Tomáš Roskovec

Úvod

Magické čtverce patří k dávným matematickým hrátkám, které i přes dvoutisíciletou historii dodnes nejsou zcela prozkoumány. Během přednášky se budeme zabývat nejprve výskytem magických čtverců v historii a později i jejich matematickou stránkou. Pro začátek si zadefinujeme základní pojmy přednášky.

Definice. *Magický čtverec je čtvercová tabulka čísel, která má v každém řádku, sloupci i na obou diagonálách členy se stejným součtem. Obvykle se každé číslo smí vyskytovat v tabulce pouze jednou.*

23	28	21
22	24	26
27	20	25

Definice. *Normální magický čtverec je magický čtverec, jehož členy jsou přirozená čísla od* 1 *do* n^2.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Historie magie ve čtverci

První písemnou zmínku nalézáme v Číně, kde byla v letech 650 př.n.l sepsána legenda o *Lo Shu*. Podle tohoto starého čínského příběhu se magický čtverec objevil na zemi tak, že za obrovské potopy objevil císař *Yu* želvu, které měla na zádech vzor

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Jak jste jistě uhodli, šlo o želvu magickou, protože se jedná o normální magický čtverec o straně 3. *Lo Shu* čtverec je zajímavý mimo jiné tím, že kterýkoli magický čtverec o straně 3 lze vytvořit z *Lo Shu* pomocí zrcadlení a rotace.

Kromě této legendy nacházíme mnoho magických čtverců z kamene a z kovu v podobě amuletů používaných ve starém Egyptě, Indii i Číně. Pro všechny tyto civilizace měly čtverce pravděpodobně spíše numerologický a astrologický význam.

Později se objevily i v Persii a také mezi Araby, odkud se konečně dostávají do Evropy. Vynalézaví Arabové již dokázali zkonstruovat čtverce o straně 5 a 6.

První písemný záznam o magických čtvercích v Evropě pochází z roku 1300 od Řeka Manuela Maschopula. V roce 1450 pak Ital Luca Pacioli shromažďuje ve své práci mnoho příkladů těchto útvarů. Vrcholnou prací magického pojetí tohoto tématu publikuje v roce 1510 Heinrich Cornelius Agrippa. Jeho *Okultní filozofie* se rychle rozšířila po celé Evropě. Přiřadil magické čtverce jednotlivým planetám a popsal jejich užití v přivolávání ďáblů a andělů. Pro příklad uvedu čtverce Saturnu, Jupiteru a Marsu.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Kromě těchto opravdových čtverců odpovídajících naší definici se samozřejmě objevuje řada dalších podobných útvarů, někdy například vyplněných písmeny nebo porušujících některá pravidla.

Velmi zajímavý pohled nám nabízí čtverec Albrechta Dürera, který se v roce 1514 objevil v jeho rytině *Melancholie* . Zkuste objevit další magické vlastnosti této tabulky:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Metody konstrukce

Existuje mnoho metod konstrukce magických čtverců, zde uvedu pouze ty nejjednodušší. Magický čtverec o straně n lze zkonstruovat pro každé n kromě případu $n = 2$. Pro jiná n rozlišíme tři případy, n liché, n dělitelné 4, n nedělitelné 4 sudé.

Konstrukce pro n lichá

Umístíme jedničku na prostřední políčko první řádky. Pak postupujeme vždy diagonálně vpravo nahoru, dokud nenarazíme na obsazené políčko. V takovém případě postoupíme o jedno pole dolů a opět stoupáme po diagonále, dokud nezaplníme celý čtverec.

	1	

	1	
		2

	1	
3		
		2

	1	
3		
4		2

	1	
3	5	
4		2

	1	6
3	5	
4		2

	1	6
3	5	7
4		2

8	1	6
3	5	7
4		2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Konstrukce pro n dělitelná 4

Nejprve očíslujeme všechna pole čtverce po řádcích zleva doprava, takže v políčku vlevo nahoře bude 1, v políčku vpravo nahoře n, vlevo dole $n^2 - n + 1$ a vpravo dole n^2. Pak si rozdělíme tabulku na čtverce o straně 4. V nich si zvýrazníme obě diagonály. Nyní můžeme spárovat neoznačená políčka tak, že spojíme-li středy políček úsečkou, pak se střed této úsečky bude shodovat se středem celé tabulky. Prohodíme-li čísla v každém takovém páru, dostaneme hledaný normální magický čtverec.

1	2	3	**4**	**5**	6	7	**8**
9	**10**	**11**	12	13	**14**	**15**	16
17	**18**	**19**	20	21	**22**	**23**	24
25	26	27	**28**	**29**	30	31	**32**
33	34	35	**36**	**37**	38	39	**40**
41	**42**	**43**	44	45	**46**	**47**	48
49	**50**	**51**	52	53	**54**	**55**	56
57	58	59	**60**	**61**	62	63	**64**

1	63	62	**4**	**5**	59	58	**8**
56	**10**	**11**	53	52	**14**	**15**	49
48	**18**	**19**	45	44	**22**	**23**	41
25	39	38	**28**	**29**	35	34	**32**
33	31	30	**36**	**37**	27	26	**40**
24	**42**	**43**	21	20	**46**	**47**	17
16	**50**	**51**	13	12	**54**	**55**	9
57	7	6	**60**	**61**	3	2	**64**

Konstrukce pro sudá n nedělitelná 4

Teď nás čeká nejsložitější úkol. Pro začátek si čtverec rozdělíme na malé čtverečky o straně 2. Pak si podle algoritmu pro konstrukci čtverce s lichým n čtverečky očíslujeme 1 až n^2. Do čtverečku číslo k se pokusíme vepsat čísla $4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k$ tak, abychom dostali magický čtverec. Použijeme k tomu takzvanou LUX metodu. Čtverečky v prostřední řadě a nad ní označíme písmenem L, čtverečky v řadě pod prostřední U a zbytek X. Nakonec prohodíme označení prostředního čtverečku s tím pod ním. Podle obrázku pak doplníme čtveřice čísel v pořadí příslušejícím k danému písmenku.

L

4	1
2	3

U

1	4
2	3

X

1	4
3	2

Takto budou rozloženy čtverečky o straně 2 ve velkém čtverci:

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

Dodatek o množství

Není těžké si domyslet, že počet různých magických čtverců při zvětšení strany rychle poroste. Počty jednotlivých čtverců, kde za různé považuji čtverce, které nelze ztotožnit rotací nebo zrcadlením, jsou pro jednotlivé strany:

1	2	3	4	5
1	0	1	880	275305224

Počet čtverců o straně 6 je odhadován dokonce na $1,8 \cdot 10^{17}$.

Další útvary čtvercového ražení

Kromě těchto základních pojmů si lze zadefinovat ještě velké množství obdobných útvarů, které sice nemají tak bohatou historii, ale nabízejí mnoho dalších problémků a hříček.

Definice. *Heteročtverec je čtvercová tabulka, jejíž členy jsou přirozená čísla od 1 do n^2. Součty členů v každém sloupci, v každé řádce i na obou diagonálách jsou po dvou různé.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Dokázali byste zkonstruovat heteročtverec lichého řádu velikosti 5? Zkuste vymyslet algoritmus pro obecný lichý řád.

Definice. *Antimagický čtverec je heteročtverec, pro který lze součty členů v každém sloupci, v každé řádce a na obou diagonálách seřadit do aritmetické posloupnosti s krokem 1.*

15	2	12	4
1	14	10	5
8	9	3	16
11	13	6	7

Dodnes není vyřešeno, zda lze tyto čtverce zkonstruovat pro každé $n > 3$, ale víme, že pro 1 a 2 žádný způsob neexistuje. Neexistenci *antimagického čtverce* řádu 3 se zatím podařilo dokázat jen pomocí programu na rozbor možností.

Definice. *Panmagický čtverec je normovaný magický čtverec, který má součty na všech diagonálách stejné.*

Poznámka. V této definici bereme za diagonály všechny úhlopříčné posloupnosti polí délky n, přípustné jsou i vedoucí přes okraj tabulky.

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Literatura

`http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square`
`http://www.gaspalou.fr/magic-squares/results.htm`

Pellova rovnice

Alča Skálová

Úvod

Jako Pellova rovnice je známa rovnice

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

kde $D > 0$ je přirozené číslo, které není čtverec.[5] Řešení x, y hledáme v celých číslech.

Každá Pellova rovnice má triviální řešení $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$. My se ovšem s něčím takovým nespokojíme a na přednášce se zaměříme na hledání netriviálních řešení.

Proč nechceme čtverec?

Možná vám vrtá hlavou, proč v Pellově rovnici zavrhujeme $D \leq 0$ a $D = d^2$. Pro $D < 0$ existuje jen triviální řešení. Pro $D = 0$ jsou řešením všechny dvojice $(\pm 1, m), m \in \mathbb{Z}$. A pro $D = d^2, d \in \mathbb{N}$ si rovnici můžeme upravit na $x^2 - Dy^2 = x^2 - (dy)^2 = (x + dy)(x - dy)$. Aby se součin dvou přirozených čísel rovnal jedné, musí být obě závorky na pravé straně rovny ± 1, a tedy rovnice má opět jen triviální řešení.

Jak vidno, neděje se v těchto případech nic zajímavého, takže jim můžeme s lehkým srdcem říci sbohem a pustit se do mnohem zajímavějších věcí.

Jak to vypadá s řešením

Řešení budeme pro jednoduchost hledat pouze v přirozených číslech, neb není těžké si rozmyslet, že přidáním znamének k takovému řešení získáme řešení v číslech celých a naopak.

Věta. *Má-li Pellova rovnice netriviální řešení, pak jich má nekonečně mnoho.*

Důkaz. Mějme nějaká dvě řešení $(a, b), (e, f) \in \mathbb{N}$ rovnice $x^2 - Dy^2 = 1$. Pak dvojice (g, h) definovaná následovně

$$g + h\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})(e + f\sqrt{D})$$

[5] Čili není druhou mocninou.

je také řešením. Stačí si uvědomit, že $g - h\sqrt{D} = (a - b\sqrt{D})(e - f\sqrt{D})$ a vhodně upravit:

$$\begin{aligned} g^2 - Dh^2 &= (g + h\sqrt{D})(g - h\sqrt{D}) \\ &= (a + b\sqrt{D})(e + f\sqrt{D})(a - b\sqrt{D})(e - f\sqrt{D}) \\ &= (a^2 - Db^2)(e^2 - Df^2) \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Což je takový důkaz s bonusem – nejen, že máme dokázáno, co jsme chtěli, ale dostali jsme i návod, jak ona další řešení sestrojit.

Abychom mohli učinit další zajímavé objevy, seznámíme se nejprve s větou, která patří spíš do trochu jiné oblasti – diofantických aproximací.[6]

Věta. (Dirichlet, část 2) *Pro každé iracionální $\alpha \in \mathbb{R}$ má nerovnost*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

nekonečně mnoho racionálních řešení p/q.

Věta. (Lagrange) *Každá Pellova rovnice $x^2 - Dy^2 = 1$ má netriviální řešení.*

Na důkaz se můžete těšit na přednášce. (-: Ti, co se nemohou dočkat zatím mohou zkusit využít předchozí větu (všimněte si, že $\sqrt{D}$ je v Pellově rovnici vždycky iracionální) a Dirichletova principu. A jelikož se nám tu pan Dirichlet začíná nějak příliš roztahovat, tak ho opustíme a místo toho se podíváme na to, jak nám Pellova rovnice může pomoci řešit některé obecnější.

Zobecněná Pellova rovnice

Zobecněnou Pellovou rovnicí rozumíme rovnici

$$x^2 - Dy^2 = m,$$

kde $m \in \mathbb{Z}, D \in \mathbb{N}$ a D není čtverec. Řešení (x, y) hledáme opět v celých číslech.

Věta. *Nechť má rovnice $x^2 - Dy^2 = m$ nějaké celočíselné řešení, pak jich má nekonečně mnoho.*

Důkaz je velmi podobný důkazu první věty, akorát poslední řádek se změní na $m \cdot 1 = m$.

[6] Nenech se tím názvem vyděsit, je tu jen pro zajímavost. (-:

Literatura

Vycházela jsem ze staršího příspěvku Franty Konopeckého (najdete ho na Pra-Sečích stránkách, odkaz knihovna) a ze skript Martina Klazara *Introduction To Number Theory*, jakož i z poznámek z jeho přednášky *Úvod do teorie čísel*.

Tímto bych chtěla oběma poděkovat.

Rekurentné postupnosti

Miško Szabados

Predslov

Veľa z Vás sa už asi mnohokrát stretlo s *Fibonacciho postupnosťou* a určite ste si všimli, že na to, ako je jednoducho zadaná, spĺňa a až príliš veľa vzťahov. Medzi najzaujímavejšie z nich patria tvrdenia o deliteľnosti. Kde sa to ale berie? Čo je za tým? Na tieto otázky budeme hľadať odpoveď na prednáške a môžete sa tešiť na nečakané súvislosti.

Na záver predslovu zadám príklad, ktorý ukazuje ten najzaujímavejší vzťah, ktorý v súvislosti s rekurentnými postupnosťami poznám:

Príklad. *Perrinova postupnosť* je zadaná ako $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ a $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$. Skúste dokázať, že ak p je prvočíslo, tak p delí a_p.

Úvod

Fibonacciho postupnosť je postupnosť čísel 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... definovaná vzťahmi

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Možno Vás niekedy napadlo, či by z tohto *rekurentného* predpisu bolo možné odvodiť *explicitný* predpis, t.j. nejaký priamy vzorček pre n-té Fibonacciho číslo. Možné to je, tento vzorček sa nazýva *Binetova formula* a možno ho zapísať napríklad v tvare

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Ak neveríte, ako by niečo tak „škaredého" mohlo byť už len celočíselné pre každé n, skúste si dosadiť $n = 0, 1, 2, \ldots$ Tento explicitný vzorček nie je len hračka, môžeme sa pomocou neho o postupnosti F_n veľa dozvedieť, najmä ako rýchlo rastie. Na prednáške si ukážeme metódu, ako takéto (občas výjdu aj krajšie, nebojte sa `:-)`) vzorčeky v obdobných úlohách odvodiť.

Homogénne lineárne diferenčné rovnice

Definícia. *Homogénnou lineárnou diferenčnou rovnicou stupňa 2 (s konštantnými koeficientami) rozumieme rovnicu tvaru*

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \qquad (q \neq 0), \tag{1}$$

kde neznámou je postupnosť a_n a p, q sú nejaké pevné čísla.

Budeme hľadať všeobecné riešenia rovnice (1), t.j. všetky postupnosti komplexných čísel (ak ale kompexné čísla nepoznáš, vôbec to nevadí) $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, ktoré splňujú (1). Pokúsme sa nájsť riešenie (1) v tvare $x_n = \lambda^n$ – po dosadení do rovnice (1) dostaneme $\lambda^{n+2} = p\lambda^{n+1} + q\lambda^n \Rightarrow \lambda^2 = p\lambda + q$, teda

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0.$$

Toto je *charakteristická rovnica* rovnice (1). Pre jej korene λ_1 a λ_2 dostávame riešenia rovnice (1): $x_n = \lambda_1^n$ a $x'_n = \lambda_2^n$. Uvedomíme si, že ak máme nejaké riešenie $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ rovnice (1), potom každý jeho násobok je znovu riešením a tiež sčítaním dvoch riešení dostaneme opäť riešenie (inými slovami, riešenia (1) tvoria lineárny priestor). Ak $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dostávame všeobecné riešenie (1) ako

$$x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n,$$

kde a,b sú ľubovoľné konštanty (ukážeme si, prečo už žiadne ďalšie riešenia (1) neexistujú). Ak poznáme počiatočné hodnoty x_0, x_1, hodnoty a,b z nich jednoznačne dopočítame a máme hľadaný vzorček pre našu postupnosť. V prípade $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ si ukážeme, že aj $x_n = n\lambda$ je riešením (1) a všeobecné riešenie má tvar

$$x_n = (a + bn)\lambda^n.$$

Príklad. Nájdite všetky riešenia rovnice $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

Poznámka. Podobne sa dá postupovať pri rovniciach rádu k: pre rovnicu

$$a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + p_0 a_n, \qquad p_0 \neq 0, \tag{2}$$

spočítame korene λ_1, λ_2, ... , λ_k jej charakteristického polynómu $\lambda^k - p_{k-1}\lambda^{k-1} - - \cdots - p_1\lambda - p_0$. Ak sú tieto korene po dvoch rôzne, všeobecné riešenie dostaneme ako lineárnu kombináciu riešení $x_n^1 = \lambda_1^n$, $x_n^2 = \lambda_2^n$, ... , $x_n^k = \lambda_k^n$. Ak je nejaký koreň λ l-násobný, dá sa ukázať, že $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{l-1}\lambda^n$ sú riešenia (2), čím dostávame dokopy opäť k (nezávislých) riešení generujúcich všetky riešenia.

Nehomogénne lineárne diferenčné rovnice

Ak v našej rekurentnej rovnici vystupuje okrem násobkov a_n aj niečo iné, t.j. naša rovnica má tvar

$$a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n = f(n), \qquad q \neq 0,$$

všeobecne

$$a_{n+k} - p_{k-1}a_{n+k-1} - p_{k-2}a_{n+k-2} - \ldots - p_0 a_n = f(n), \qquad p_0 \neq 0, \qquad (3)$$

kde $f(n)$ je nejaká pevná funkcia definovaná na $\mathbb{N}_0$, situácia je o niečo zložitejšia.

Pozorovanie. Nech p_n je jedno (tzv. partikulárne) riešenie rovnice (3). Potom rovnicu (3) riešia práve tie postupnosti b_n, ktoré majú tvar $b_n = p_n + a_n$, kde a_n je riešenie rovnice (2).

Pre vyriešenie nehomogénnej rovnice nám teda stačí nájsť jedno jej riešenie (často ho proste uhádneme) a potom použiť poznatky, ktoré sme získali o homogénnych rovniciach. Nájsť partikulárne riešenie sa nám všeobecne nepodarí, ukážeme si však, ako ho hľadať v prípade, že pravá strana $f(n) = \lambda^n P(n)$, kde $P(n)$ je polynóm a λ nenulové komplexné číslo. Ak je totiž l násobnosť λ ako koreňa charakteristického polynómu ($l = 0$ ak $P(\lambda) \neq 0$), potom existuje (práve jedno) riešenie rovnice (3) v tvare $p_n = \lambda^n n^l Q(n)$, kde $Q(n)$ je polynóm. Pritom platí, že stupeň polynómu Q je rovnaký ako stupeň polynómu P.

Fibonacciho čísla

Fibonacciho postupnosť (F_n) má veľa zaujímavých vlastností. Tu sú niektoré z nich, dajú sa väčšinou dokázať indukciou (v čísle 3 treba vedieť, ako sa násobia matice, to si ukážeme na prednáške – táto vlastnosť ale dosť zjednodušuje dôkazy ďalších).

1. $F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots$
2. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$
4. $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$
5. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
6. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$
   $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1}$
7. $F_nF_{n+1} - F_{n-2}F_{n-1} = F_{2n-1}$
   $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$
8. $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$
   $F_n^2 + 2F_{n-1}F_n = F_{2n}$
   $F_n\left(F_{n+1} + F_{n-1}\right) = F_{2n}$
9. $F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$
10. $F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$
11. $m|n \Rightarrow F_m|F_n$
12. $\mathrm{nsd}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{nsd}(m,n)}$

Príklady

Príklad 1. $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1$, $(n \geq 1)$. Ukážte, že a_{2004} nie je deliteľné 4.

Príklad 2. $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = (a_{n-1}^2 + 2)/a_{n-2}$, $(n \geq 3)$. Ukážte, že všetky a_i sú celé čísla.

Príklad 3. Ukážte, že existuje jediná postupnosť kladných čísel a_0, a_1, a_2, … taká, že $a_0 = 1$, $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$, $n \geq 0$.

Príklad 4. Nech $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami. Vytvorme postupnosť $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1})$ pre $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že pre všetky k, $m \in \mathbb{N}$ platí $a_{(k,m)} = (a_k, a_m)$, kde (p, q) označuje najväčší spoločný deliteľ čísel p, q.

Príklad 5. Nájdite n-tý člen postupnosti definovanej vzťahmi $a_1 = \cos\varphi$, $a_2 = \cos 2\varphi$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} \cdot \cos\varphi - a_n$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 6. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 1$. Dokážte, že $2^k | a_n \iff 2^k | n$.

Príklad 7. $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$. Nájdite a_{2009}.

Príklad 8. Pre postupnosť a_0, a_1, a_2, ... platí, že pre všetky nezáporné m, n $(m \geq n)$ máme $a_{m+n} + a_{m-n} = (a_{2m} + a_{2n})/2$. Nájdite a_{2004}, ak $a_1 = 1$.

Literatúra

Tento príspevok vychádza z príspevku Katky Quittnerovej, ktorá vychádzala z dávnejšieho príspevku Pavla Podbrdského.

Metoda dokazování symetrických nerovností

Pavel Šalom

Dokazovat nerovnosti je velké umění. Ti z vás, kteří byli letos na celostátku a pozorně si vyslechli projev pana docenta Šimši[7] o tom určitě ví své. Předně je potřeba říci, že neexistuje žádná dobrá metoda, jak dokazovat všemožné nerovnosti. Pokusíme se však aspoň do některých metod nakouknout, abychom měli v nerovném boji s nerovnostmi šanci. Zároveň bych byl rád, kdyby tato přednáška sloužila jako ochutnávka toho, co byste přibližně mohli čekat od seriálu o nerovnostech, pokud si jej na příští rok vyberete.

Jako první věc je vždy velmi důležité si uvědomit, jaká nerovnost proti vám stojí. Jsou totiž nerovnosti různého typu – nejčastěji jsou to nerovnosti symetrické a cyklické.

Definice. *Nerovnost vyjádřená ve tvaru $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ je symetrická, jestliže se při záměně libovolných dvou proměnných nezmění, tj. $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$ a stejně tak při záměně jiných dvou proměnných.*

Definice. *Nerovnost vyjádřená ve tvaru $f(x_1, \ldots, x_n)$ je cyklická, jestliže se nezmění při takzvané cyklické záměně, tj. $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})$*

Poznámka. Výraz $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$ je symetrický, zatímco výraz $\frac{a+b}{a} + \frac{b+c}{b} + \frac{c+a}{c}$ je pouze cyklický. Výraz $a^2bc + ab^2c$ není ani symetrický, ani cyklický.

Symetrické nerovnosti jsou tedy velmi speciální. Naše povídání začneme ukázkou příkladu z IMO 2001. Soutěžící tehdy dostali za úkol dokázat nelehkou nerovnost[8]

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Ve vzorovém řešení potom stálo: nejprve dokážeme nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}$$

a následným přičtením dvou analogických nerovností dostaneme požadovanou nerovnost. Nikde se ale nepíše, jak přijít na ono magické číslo 4/3 (jiné číslo v ex-

[7] Pokud jste tam nebyli, doporučuji si na oficiálních stránkách MO jeho projev přečíst – stojí za to. :)

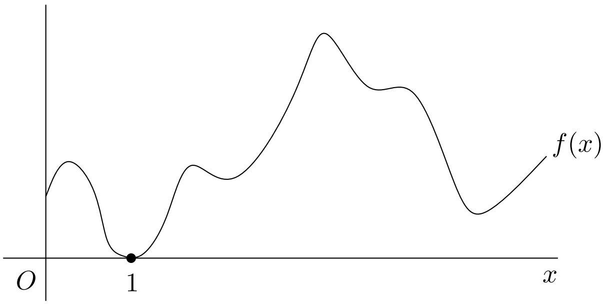
[8] Ve všech úlohách budeme předpodkládat, že všechny proměnné jsou kladná reálná čísla, nebude-li náhodou řečeno jinak.

ponentu nemá šanci na úspěch). Pokud by vás to přesto zajímalo, nezbývá, než dávat pozor na přednášce.

Budeme potřebovat následující důležitou větičku.

Věta. *Buď* $f(x) = \alpha_n x^{\beta_n} + \alpha_{n-1}x^{\beta_{n-1}} + \cdots + \alpha_1 x^{\beta_1} + \beta_0$*, kde* $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$*, taková funkce, že* $f(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \geq 0$ *a přitom* $f(1) = 0$*. Potom musí platit rovnost*[9]

$$\alpha_n\beta_n + \alpha_{n-1}\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_1\beta_1 = 0$$



Teď už se můžeme dostat k samotné metodě, o které hovoří název přednášky. Myšlenkou je odhadovat jednotlivé členy (se škaredým jmenovatelem) symetrických nerovností pomocí jednodušších výrazů, které se nám posčítají krásně, ale jejichž úplně přesný tvar neznáme. Aby z přednášky něco měli i ti, kteří se jí nezúčastní, dokončíme mezikrok ve vzorovém příkladu.

Máme tedy myšlenku, že bychom chtěli jednotlivé členy $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$ se škaredým jmenovatelem odhadnout tak, aby se tři nové členy posčítaly krásně na jedničku. Potřebujeme proto nějaký symetrický jmenovatel. Trocha praxe člověku napoví, že vhodný symetrický jmenovatel by mohl být tvaru $a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha$, kde hodnotu α zatím netušíme. Vzhledem k tomu, jak vypadá čitatel a že potřebujeme, aby se krásné výrazy posčítaly na jedničku, se dá odhadnout (opět s trochou praxe), že krásné výrazy bude vhodné hledat ve tvaru

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^\alpha}{a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha}.$$

Pokud chceme mít šanci, aby takováto nerovnost platila pro všechna kladná a, b, c musí především platit pro $b = c = 1$. Tedy přejeme si, aby aspoň platilo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}} \geq \frac{a^\alpha}{a^\alpha + 2}$$

[9]Pro ty z vás, kteří se orientují v derivacích je nejlépe si rovnost zapamatovat tak, že vlastně $f'(1) = 0$, neboť f musí v jedničce nabývat lokálního minima.

pro nějaké α. Úpravou dostaneme

$$4a^{\alpha+2} + 4a^2 - 8a^{2\alpha} \geq 0.$$

Když výraz vlevo označíme $f(a)$, pak chceme, aby bylo $f(a) \geq 0$ pro každé $a > 0$. Přitom není těžké si všimnout, že v původní nerovnosti nastává rovnost v případě $a = b = c = 1$, takže $f(1) = 0$. Jedinou naší nadějí je tedy, že dle věty je splněna rovnost

$$4(\alpha + 2) + 8 - 16\alpha = 0,$$

což překvapivě dává $\alpha = 4/3$. Zajisté vám neuniklo, že náš postup byl plný slovíček možná, asi, doufejme, a proto nezbývá, než se pokusit nerovnost pro $\alpha = 4/3$ dokázat obecně. Pokud byste si na tom vylámali zuby, přijďte na přednášku, není to však již nějak výjimečně obtížné. Obecně to však jít nemusí, pak prostě naše metoda selhává a je potřeba vymyslet lepší. :)

Další příklady, které uděláme na přednášce:

Příklad 1. (Nesbittova nerovnost, 1903)

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Příklad 2. (Rakousko, 1970)

$$\frac{a+b+c}{2} \geq \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b}$$

Příklad 3.

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq abc\,(a + b + c)$$

Příklad 4.

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Příklad 5. Nechť α, β, γ jsou úhly v trojúhelníku. Dokažte

$$\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin^2\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} \geq 9$$

Příklad 6. (Ukrajina, 2006)

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 4(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Příklad 7. (IMO 2001/2, zobecnění) Pro $\lambda \geq 8$ dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

Příklad 8.

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1$$

Zdroj: Budu rád, když si budete myslet, že jsem to vymyslel já, ale ve skutečnosti je přednáška udělána podle článku z časopisu Mathematical Reflections, který lze najít na adrese `http://reflections.awesomemath.org` .

Booleova algebra

Luboš Štěpánek

Úvod

Booleova algebra (čti „búlova“), nazvaná podle irského matematika a logika George Boolea (1815–1864), je užitečná v mnoha matematických disciplínách a má velmi široké uplatnění v technických aplikacích. Tvoří teoretický základ pro navrhování rozmanitých regulovacích a rozhodovacích systémů.

Pro nás je podstatné, že vytváří určitou zastřešující teorii pro algebru množin a algebru výroků a dobře se hodí i při řešení úloh z rekreační matematiky. Kdo umí Booleovu algebru, v množinách a výrocích se tedy neztratí. I přes svůj „odborně“ znějící název je Booleova algebra dost dobře přístupná a zajímavá i pro PraSátka, která se ze středoškolských lavic na matfyz teprve těší. `;-)`

Zavedení pojmů

Pro lepší pochopení Booleovy algebry si osvěžíme některé všeobecné pojmy, které se často zapomínají. Na přednášce je jen tak zběžně „prolétneme“ a přiblížíme si je na konkrétních příkladech, proto se nelekejte jejich rozsahu a zdánlivé formálnosti, nicméně pomůže nám vidět je před sebou napsané. `;-)`

Definice. (kartézský součin) Kartézským součinem *množin* K *a* L *nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic* $[x, y]$, *kde* $x \in K$ *a* $y \in L$. Kartézský součin *množin* K, L *označujeme* $K \times L$.

Definice. Zobrazením množiny K do množiny L *(stručně „K do L“) nazýváme každou podmnožinu T kartézského součinu $K \times L$, pro niž platí, že ke každému $x \in K$ existuje právě jedno $y \in L$ takové, že $[x, y] \in T$.*

Definice. (binární operace) *Zobrazení množiny K do množiny L, kde $K = L \times L$, nazveme* binární operace na množině L *a označíme „$z = x * y$ na L“ či „$z = x \circ y$ na L“. Binární operaci na L pak tvoří každá podmnožina U kartézského součinu $(L \times L) \times L$ taková, že ke každé uspořádané dvojici $[x, y] \in L \times L$ existuje právě jedno $z \in L$ tak, že $[[x, y], z] \in U$.*

Definice. (unární operace) *Zobrazení množiny K do množiny L, kde $K = L$, nazveme* unární operace na množině L *a označíme např. „$y = \overline{x}$ na L“ či „$y = x^*$ na L“. Unární operaci na L pak tvoří každá podmnožina V kartézského součinu $L \times L$ taková, že ke každému $x \in L$ existuje právě jedno $y \in L$ tak, že $[x, y] \in V$.*

Definice. *Prvky x, y, z náleží množině L. Operaci $u = x * y$ na L nazýváme:*

(a) komutativní, *právě když platí $x * y = y * x$.*

(b) asociativní, *právě když platí $(x * y) * z = x * (y * z)$.*

(c) distributivní *vzhledem k operaci $u = x \circ y$ na L, právě když platí $x * (y \circ z) = = (x * y) \circ (x * z)$ a zároveň $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$.*

Definice. (neutrální prvek) *Neutrálním prvkem vzhledem k operaci $u = x * y$ na L nazýváme prvek $e \in L$, pro nějž platí: Pro všechna $x \in L$ je $x * e = e * x = x$.*

Příklad 1. U binárních operací $u = x + 2y$ a $u = x^2 + y^2$ na $\mathbb{R}$ zpaměti určete, zda jsou komutativní, asociativní a zda u nich existuje neutrální prvek.

Příklad 2. Na množině $\mathbb{R}$ uvažujme notoricky známé binární operace $\max(x, y)$ a $\min(x, y)$. Zjistěte, zda jsou tyto operace komutativní, asociativní, zda je $\max(x, y)$ distributivní vzhledem k $\min(x, y)$ a naopak. Nakonec stanovte neutrální prvky pro jednotlivé operace.

Booleova algebra

Nyní už máme za sebou teoretický základ pro zavedení Booleovy algebry.

Definice. (Booleova algebra) *Množinu B a na ní definované operace budeme nazývat* Booleovou algebrou, *pokud bude splněno vše následující:*

(i) *Množina B není prázdná a je na ní definována rovnost prvků.*
(ii) *Na množině B jsou definovány dvě binární operace (říkejme jim „sčítání“ a „násobení“) a jedna unární operace (říkejme jí „doplněk“).*
(iii) *Obě binární operace jsou komutativní a asociativní.*
(iv) *Binární operace „sčítání“ je distributivní vzhledem k operaci „násobení“ a naopak operace „násobení“ je distributivní vzhledem k operaci „sčítání“.*
(v) *Ke každé z binárních operací existuje právě jeden neutrální prvek; přitom jsou oba tyto neutrální prvky navzájem různé (pro operaci „$*$“ označme neutrální prvek e^* a pro operaci „$\circ$“ ho označme e°).*
(vi) *Unární operace „doplněk“ $y = x'$ definovaná na B splňuje $x * x' = e^\circ$ a zároveň $x \circ x' = e^*$.*

Definice. (Booleova algebra alternativně) *Pokud budeme označovat prvky Booleovy algebry malými písmeny $a, b, c, ..., x, y, z$, rovnost prvků rovnítkem „$=$“, binární operaci „sčítání“ plusem „$+$“ a „násobení“ symbolem krát „$\cdot$“, unární operaci „doplněk“ budeme značit $y = x'$, dále když neutrální prvek při „sčítání“ označíme* 0 *a neutrální prvek při „násobení“ označíme* 1, *můžeme Booleovu algebru* *alternativně zadefinovat jako kompletně platnou skupinu výroků* (1) – (10)*:*

$$x + y = y + x \tag{1}$$
$$x \cdot y = y \cdot x \tag{2}$$
$$(x + y) + z = x + (y + z) \tag{3}$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \tag{4}$$
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \tag{5}$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \tag{6}$$
$$x + 0 = x \tag{7}$$
$$x \cdot 1 = x \tag{8}$$
$$x + x' = 1 \tag{9}$$
$$x \cdot x' = 0 \tag{10}$$

Takto zavedenou Booleovu algebru *budeme značit* $(B, +, \cdot, ')$.[10]

Na přednášce si ukážeme, jak dokázat platnost následujících vět vyplývajících z vlastností obecné Booleovy algebry. Všechno asi nestihneme, proto přednáška vlastně jen naznačí charakter použitelných důkazů.

Věta. *Pro každý prvek $x \in B$ Booleovy algebry platí:*

$$x + x = x \tag{11}$$
$$x \cdot x = x \tag{12}$$
$$x \cdot 0 = 0 \tag{13}$$
$$x + 1 = 1 \tag{14}$$
$$(x')' = x \tag{15}$$

Věta. *Pro všechny prvky $x, y \in B$ Booleovy algebry platí:*

$$(x + y)' = x' \cdot y' \tag{16}$$
$$(x \cdot y)' = x' + y' \tag{17}$$
$$x + xy = x \tag{18}$$
$$x \cdot (x + y) = x \tag{19}$$
$$x + x' \cdot y = x + y \tag{20}$$
$$x \cdot (x' + y) = xy \tag{21}$$

[10] Bystrý čtenář si možná všiml, že druhá definice Booleovy algebry je poněkud slabší, nevyžaduje totiž jednoznačnost neutrálních prvků pro každou operaci. Na přednášce si ukážeme, že jednoznačnost neutrálních prvků pro konkrétní binární operaci lze dokázat z axiómů (1), (2), (7) a (8).

Věta. *Nechť x, y jsou libovolné prvky množiny B. Pak platí:*

$$x + y = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0 \tag{22}$$
$$x \cdot y = 1 \iff x = 1 \wedge y = 1 \tag{23}$$
$$x = y \iff xy' + x'y = 0 \tag{24}$$
$$x = y \iff (x + y') \cdot (x' + y) = 1 \tag{25}$$

Arsenál vztahů (1) – (25) se hodí při řešení např. následujícího příkladu.

Příklad. Zjednodušte následující zápisy výrazů Booleovy algebry tak, aby obsahovaly co nejméně symbolů:

(a) $abc + [b' \cdot (a' + c)]'$,

(b) $(ab + de)' \cdot (d + e) \cdot ca \cdot (c' + b')$.

Modely Booleovy algebry

Definice. (Model Booleovy algebry) Modelem Booleovy algebry *nazveme každou neprázdnou množinu a na ní definované dvě binární a jednu unární operaci, pokud pro prvky této množiny platí všechny axiómy* (1) – (10).

Předchozí definice zároveň i naznačuje, co musí být splněno, abychom mohli nějakou množinu s jejími operacemi považovat za model Booleovy algebry.

Tvrzení. Zvolme za B množinu $\hat{M}$ všech podmnožin neprázdné množiny M, operaci sčítání, násobení a doplněk na B konkretizujme postupně jako sjednocení, průnik a doplněk na $\hat{M}$. Pak pro všechny prvky množiny $\hat{M}$ platí axiómy (1) – (10). Říkáme, že množinová algebra $(\hat{M}, \cup, \cap, ')$ je modelem Booleovy algebry $(B, +, \cdot, ')$.

Tvrzení. Zvolme za B množinu $H = \{0, 1\}$ pravdivostních hodnot výroků, operaci sčítání, násobení a doplněk na B konkretizujme postupně jako disjunkci, konjunkci a negaci na H. Pak pro všechny prvky množiny H platí axiómy (1) – (10). Říkáme, že algebra pravdivostních hodnot $(H, \vee, \wedge, \neg)$ je modelem Booleovy algebry $(B, +, \cdot, ')$.

Na základě předchozích dvou tvrzení můžeme řešit následující příklad pomocí pravidel a vět (1) – (25). U některých dalších příkladů si na přednášce aspoň trochu naznačíme i aplikaci jejich výsledků například v technické sféře.

Příklad 1. Rozhodněte, zda při standardním značení platí:

(a) $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cap B'$,

(b) $[(\neg X \vee Y) \wedge \neg X] \vee (\neg Y \vee X) \iff (X \vee \neg X)$.

Příklad 2. Buď množina $C = \{1, 2, 3, 6\}$. Definujme na C binární operace „tvoření nejmenšího společného násobku“, „tvoření největšího společného dělitele“ a unární operaci „$u = 6/x$“. Dokažte, že C s takto definovanými operacemi je modelem Booleovy algebry.

Příklad 3. V Booleově algebře $(D, +, \cdot, ')$, kde $D = \{0, 1\}$ je množina obou neutrálních prvků, řešte rovnici o jedné neznámé x:

$$((x' + 1)' + (x + 0))' = 0.$$

Příklad 4. V Booleově algebře $(D \times D, +, \cdot, ')$, kde $D = \{0, 1\}$ je množina obou neutrálních prvků, řešte soustavu rovnic o neznámých x, y:

(a)

$$\begin{aligned} (x + y') \cdot (x' + y) &= x \\ x + y &= x, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} ax + by' &= 1 \\ ay + bx' &= 1, \end{aligned}$$

kde a a b jsou parametry z D.

Příklad 5. Řešte rovnici

$$X \cap \{4, 6, 8\} = (X' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X$$

o jedné proměnné X v množině $\hat{K}$ všech podmnožin množiny $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Příklad 6. Pokuste se ukázat, že systém axiómů Booleovy algebry je závislý, tj. některé z axiomů (1) – (10) lze nahradit kombinací jiných axiómů z oné desetice. (Nápověda: Odvoďte axióm (3) z axiómů (1), (2), (5) – (10).)

Definice. (booleovská funkce) Booleovskou funkcí o n proměnných $(n \in \mathbb{N})$ *na dvouprvkové množině* $D = \{0, 1\}$ *obou neutrálních prvků nazveme zobrazení množiny* $\underbrace{D \times D \times D \times ... \times D}_{n}$ *do množiny* D.

Věta. *Pro každou booleovskou funkci* f *o* n *proměnných* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *z množiny* $D = \{0, 1\}$ *platí:*

$$\begin{aligned} f : u \quad = \quad & f(1, 1, \ldots, 1, 1) \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \quad + \\ + \quad & f(1, 1, \ldots, 1, 0) \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n' \quad + \\ & \vdots \\ + \quad & f(0, 0, \ldots, 0, 1) \cdot x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n \quad + \\ + \quad & f(0, 0, \ldots, 0, 0) \cdot x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n'. \end{aligned}$$

Příklad 7. Booleovská funkce k o třech proměnných x, y, z z množiny $D = \{0, 1\}$ je určena následující tabulkou. Určete funkci k rovnicí.

x	y	z	$k(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Literatura

Mnohem víc příkladů, hezky vysvětlená řešení a dokonce i technické aplikace, na které v tomto příspěvku nezbyl prostor, najdete v

[1] Oldřich Odvárko: *Booleova algebra*, edice Škola mladých matematiků, Praha, 1973.

Obsah