Horní Lysečiny

Sborník, jaro 2018

Tonda Češík
Verča Hladíková
Jan Kadlec
Bára Kociánová
Adéla Kostelecká
Danil Koževnikov
Honza Krejčí
Jakub Löwit
Viki Němeček
Jáchym Solecký
Kuba Svoboda
Lucien Šíma
Štěpán Šimsa
Michal Töpfer

Autoři: Tonda Češík, Verča Hladíková, Jan Kadlec, Bára Kociánová, Adéla Kostelecká, Danil Koževnikov, Honza Krejčí, Jakub Löwit, Viki Němeček, Jáchym Solecký, Kuba Svoboda, Lucien Šíma, Štěpán Šimsa, Michal Töpfer
Editor: Viki Němeček
vydání první, náklad 45 výtisků
duben 2018
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Soustavy rovnic

Tonda Češík

Abstrakt. Příspěvek se věnuje metodám řešení soustav nelineárních rovnic, se kterými se lze často setkat např. v olympiádě. Jde zejména (ale nejen) o cyklické soustavy. Je zde popsáno několik metod a uvedeno několik příkladů na procvičení.

Snad každý se již na střední škole setkal s metodami řešení soustav lineárních rovnic. To jsou rovnice obsahující pouze součet výrazů tvaru číslo krát neznámá. Postup jejich řešení se dá popsat jednoduchým algoritmem (rovnice se prostě šikovně poodečítají, anebo do sebe dosadí), a tyto soustavy tak může rychle řešit počítač. My se proto budeme zabývat soustavami nelineárními, kde je situace o poznání komplikovanější – nemáme k dispozici žádný postup, který by fungoval na všechny rovnice. Ukážeme si zde několik metod, které se dají v určitých případech použít. Vědět, jak řešit lineární rovnice, se ale bude hodit i tady – jakmile náš problém převedeme na lineární soustavu, máme vlastně hotovo.

Často zde budeme řešit tzv. *cyklické* soustavy rovnic. Cyklická soustava rovnic s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je taková, která se cyklickou záměnu proměnných $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, \ldots, x_n \to x_1$ nezmění.

Úmluva. Protože cyklická soustava rovnic je jednoznačně určena první rovnicí a počtem neznámých, nebudeme vždy vypisovat všechny rovnice. Tedy např. pod pojmem „cyklická soustava o třech neznámých $x^2 = yz$“ budeme myslet soustavu

$$\begin{aligned} x^2 &= yz, \\ y^2 &= zx, \\ z^2 &= xy. \end{aligned}$$

Všimněte si, že pokud z cyklické soustavy dostaneme nějaký vztah, máme „zadarmo“ i všechny vztahy, které dostaneme jeho cyklickou záměnou.

Úmluva. Všechny rovnice budeme řešit v oboru reálných čísel.

Úprava na součet čtverců

Tato metoda je založena na následujícím jednoduchém pozorování: Pokud je součet druhých mocnin nějakých čísel roven nule, je nutně každé z těchto čísel nula. Pokud se nám tedy ze zadané soustavy rovnic podaří úpravami získat rovnici ve tvaru „součet druhých mocnin nějakých výrazů je roven nule“, dostaneme z této rovnice podmínku na nulovost všech těchto výrazů. To nás často již přímo dovede k řešení, popř. k jednodušším rovnicím.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu rovnic o dvou neznámých $x^2 + 1 = 2y$.

Úprava na součin

Druhá metoda je se opírá o fakt ještě banálnější: Pokud je součin roven nule, je některý z činitelů nulový.

Nyní tedy pro změnu budeme ze zadané soustavy chtít dostat rovnici typu „součin nějakých výrazu je roven nule“. Potom víme, že některý z výrazů je nulový. Jelikož předem nevíme, který z nich to je, typicky následuje rozbor případů (tolika, kolik je výrazů v součinu).

Příklad. Řešte cyklickou soustavu rovnic o dvou neznámých $x^2 + 1 = 2y$.

Použití nerovností

V některých úlohách lze s výhodou použít známé nerovnosti, jako např. AG nerovnost, či Cauchy–Schwarzovu nerovnost. Pro jistotu je zde připomeneme.

Věta. (AG nerovnost) *Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná reálná čísla. Potom platí nerovnost*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

přičemž rovnost nastává, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu rovnic o dvou neznámých $x^2 + 1 = 2y$.

Věta. (Cauchy–Schwarzova nerovnost) *Nechť $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla. Potom platí nerovnost*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2,$$

přičemž rovnost nastává, právě když existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $\ldots$, $a_n = \lambda b_n$.

Příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3. \end{aligned}$$

Uspořádání pro cyklické soustavy

Princip uspořádání proměnných se hodí převážně pro soustavy, jejichž řešením jsou n-tice stejných čísel. Ukážeme si zde dvě lemmata, která nám umožní uspořádání využít. První bude využitelné pro cyklické soustavy libovolně mnoha proměnných, avšak ve speciálnějším tvaru. Druhé lemma připouští obecnější soustavy, avšak pomůže nám pro soustavy maximálně tří rovnic o třech neznámých – pro více proměnných existuje mnoho různých uspořádání.

Lemma. *Buďte $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funkce rostoucí na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Potom pro řešení soustavy*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= g(x_2),\\ f(x_2) &= g(x_3),\\ &\vdots\\ f(x_n) &= g(x_1) \end{aligned}$$

na intervalu I platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu o neznámých a až z

$$a^5 = b + b^5.$$

Lemma. *Buďte $I \subseteq \mathbb{R}$ interval a $h\colon I \to \mathbb{R}$ funkce neklesající na intervalu I. Nechť funkce $F\colon I \times I \to \mathbb{R}$ splňuje pro každé $z \in I$*

$$\begin{aligned} x \le y \to F(x, z) \le F(y, z),\\ x \le y \to F(z, x) \le F(z, y). \end{aligned}$$

Potom pro řešení soustavy

$$\begin{aligned} F(x, y) &= h(z),\\ F(y, z) &= h(x),\\ F(z, x) &= h(y) \end{aligned}$$

na I platí $h(x) = h(y) = h(z)$. Je-li navíc h rostoucí, je $x = y = z$.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých

$$(x + y)^3 = z.$$

Úlohy!

Úloha 1. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 = yz$.

Úloha 2. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x(x+1) = y(z+1)$.

Úloha 3. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^4 + y^2 + 4 = 5yz$.

Úloha 4. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x = \dfrac{4y^2}{1+4y^2}$.

Úloha 5. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 - 3y + 4 = z$.

Úloha 6. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - 3y + 3 &= z, \\ y^2 - 3z + 4 &= x, \\ z^2 - 3x + 5 &= y. \end{aligned}$$

Úloha 7. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 = y + z + 2$.

Úloha 8. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x + y^2 = y^3$.

Úloha 9. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Úloha 10. Řešte soustavu rovnic pro $x, y, z > 0$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ xyz &= 8. \end{aligned}$$

Úloha 11. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 28, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 56. \end{aligned}$$

Úloha 12. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých v kladných číslech

$$x + \frac{1}{y} = 2.$$

Úloha 13. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^2 + x - 1 = y$.

Úloha 14. V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 12, \\ abcd &= 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd. \end{aligned}$$

Úloha 15. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^3 + 1 = 2y$.

Úloha 16. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^3 = y - x + 8$.

Úloha 17. Řešte cyklickou soustavu v nezáporných neznámých x_1 až x_{2018}

$$x_1 + \sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[4]{x_1} + \cdots + \sqrt[2018]{x_1} = x_2.$$

Úloha 18. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $x^5 = 5y^3 - 4z$.

Úloha 19. Řešte cyklickou soustavu o třech neznámých $(x + y)^4 = z$.

Literatura a zdroje

[1] Jaroslav Švrček: *Metody řešení soustav algebraických rovnic*, *http://www.kag.upol.cz/ucitprir/texty/MetResSousAR_JS.pdf*
[2] Vít „Vejtek“ Musil: *Cyklické soustavy rovnic*, sborník Mentaurov, 2013.
[2] Honza Krejčí: *Cyklické soustavy rovnic*, sborník Sklené, 2016.

Dirichletův princip

Verča Hladíková

Abstrakt. V příspěvku jsou uvedeny dvě základní verze Dirichletova principu. Dále čtenářům představuje příklady jím řešitelné od těch nejjednodušších po složitější. Jedná se hlavně o úlohy z teorie čísel, druhá část se věnuje problémům souvisejícím s geometrií.

Tvrzení s mnoha jmény

Tvrzení, které se za chvíli naučíme využívat, poprvé publikoval německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Už dříve ho pravděpodobně znali jiní, koneckonců toto pravidlo vypadá jednoduše a je velmi intuitivní. Přesto však v matematice nachází široké využití. Sám Dirichlet jej publikoval v rámci své práce o teorii čísel.

Tvrzení. (Dirichletův princip) *Máme-li $n+1$ objektů, které umístíme do n přihrádek, alespoň v jedné přihrádce musí být alespoň dva objekty.*

Poznámka. Toto pravidlo neříká vůbec nic o konkrétních počtech objektů v přihrádkách. Klidně můžeme všechny umístit do jedné přihrádky, nebo do každé jeden a do jedné dva. Stejně tak nám tvrzení nepomůže při hledání přihrádky, ve které je více objektů. Je to prostě jen libovolná jedna z n.

Kromě Dirichletova se princip často nazývá přihrádkový, zásuvkový či holubníkový. V posledním případě se pak uvádí verze s $n+1$ holuby a n místy v holubníku. Možná i proto Dirichletův princip vypadá jako zábavné a nevážné tvrzení.

Ještě si uvedeme obecnější verzi, která mluví o skupinách holubů, a rovnou si ji dokážeme:

Tvrzení. (Zobecněný Dirichletův princip) *Máme-li $kn+1$ holubů a n holubníků, pak alespoň v jednom holubníku musí být alespoň $k+1$ holubů.*

Důkaz. Dokážeme sporem. Představme si, že v každém holubníku je nanejvýš k holubů. Snadno můžeme postupně sečíst počty holubů v jednotlivých holubnících. Sčítáme tedy n čísel menších nebo rovných k. Tento součet bude menší nebo roven kn, což je ve sporu s tvrzením, že máme $kn+1$ holubů.

Intuitivní použití

Na Dirichletově principu je zajímavé, že ho lidé používají naprosto samozřejmě. Nevědí sice, jak se jmenuje, ale $n+1$ hostů ke stolu s n židlemi nikdo nebude chtít usadit. Jedna ze známých úloh se například ptá: *V prádelníku máme rozházené černé a bílé ponožky. Kolik ponožek musíme vytáhnout, abychom i poslepu měli určitě dvě ponožky stejné barvy?*

Můžeme si představit, že vytažené ponožky rozdělujeme na dvě hromádky podle barev. To budou naše přihrádky. Samotné ponožky jsou hledané objekty. A chceme-li, abychom měli s jistotou dvě ponožky stejné barvy, tedy v některé přihrádce dvě ponožky, bude naše $n = 2$. Musíme tedy vytáhnout alespoň $n + 1 = 3$ ponožky, což nám nejspíš bylo jasné už od začátku.

Hledání přihrádek

V běžných situacích je sice přihrádkový princip intuitivní, jeho síla ale spočívá v problémech, které už neumíme rychle vyřešit. Potom se opravdu hodí mít toto tvrzení zformulované. Nejtěžší bývá uvědomit si, které objekty vystupují jako přihrádky a které jako objekty. Zkusíme si jejich hledání u pár jednoduchých příkladů, abychom to měli snazší v těch komplikovanějších.

Vysvětlete následující:

(1) Je-li v místnosti třináct lidí, alespoň dva se narodili ve stejném měsíci.

(2) Pokud na soustředění přijelo 25 účastníků ze čtyř různých měst, pak alespoň sedm z nich bydlí ve stejném městě.

(3) Jestliže se chce patnáct lidí svézt čtyřmi auty, pak v jednom autě musí jet alespoň čtyři lidé.

(4) Na večírek jsou pozvaní hosté, z nichž se někteří nově (vzájemně) seznámí. Vždy se takto aspoň dva hosté seznámili se stejným počtem lidí.

Odpovězte:

(1) Kolik lidí musíme uvažovat, aby určitě aspoň tři z nich měli narozeniny ve stejný den?

(2) Na přednášku jsou přihlášeni čtyři studenti. Pokaždé na ni přijde nějaká skupinka z nich, vždy aspoň jeden. Kolik musí být aspoň přednášek, aby se dvakrát potkalo stejné složení lidí?

(3) Házeme třemi šipkami na terč. Je rozdělený na pět pásem, postupně od středu za pět, čtyři, tři, dva a jeden bod. Pokud se netrefíme, nedostaneme bod žádný. Kolikrát musíme hodit, abychom dvakrát získali stejný počet bodů?

Úlohy s čísly

Příklad 1. Máme 49 přirozených čísel. Ukažte, že mezi nimi najdeme dvě, jejichž rozdíl je dělitelný 48.

Příklad 2. Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost s diferencí 60, jejímiž členy jsou samá prvočísla. (MKS 18–1–1)

Příklad 3. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje číslo v desítkové soustavě zapsané pomocí nul a jedniček jako $111\ldots1000\ldots0$, které je dělitelné n.

Příklad 4. Je-li n nesoudělné s 10, pak dokonce existuje jeho násobek zapsaný v desítkové soustavě jen pomocí jedniček: $111\ldots1$. Dokažte.

Příklad 5. Máme n přirozených čísel. Dokažte, že z nich můžeme vybrat podmnožinu tak, že součet vybraných čísel je dělitelný n.

Příklad 6. Mějme 10 po dvou různých dvojciferných celých čísel. Dokažte, že potom umíme najít její dvě disjunktní neprázdné podmnožiny takové, že součet v obou podmnožinách je stejný. (IMO 1972)

Příklad 7. (Erdős a Szekeres) Máme-li přirozená čísla od 1 do 101 napsaná v libovolném pořadí, pak je možné vyškrtat 90 z nich tak, že zbude monotónní posloupnost. Dokažte.

Příklad 8. (Erdős a Szekeres podruhé – obecnější verze) Z každé posloupnosti délky aspoň $(m-1)(n-1)+1$ můžeme vybrat klesající podposloupnost délky m nebo rostoucí podposloupnost délky n.

Příklad 9. Dokažte, že z 52 přirozených čísel lze vybrat dvojici, jejíž součet nebo rozdíl bude dělitelný 100. Je to možné i pro 51 přirozených čísel?

Příklady s trochou geometrie

Příklad 10. Máme-li pět bodů s celočíselnými souřadnicemi, pak střed úsečky spojující některé dva body bude opět bod s celočíselnými souřadnicemi. Dokažte.

Příklad 11. Kolik nejméně potřebujeme bodů s celočíselnými souřadnicemi v prostoru, aby platilo totéž?

Příklad 12. V každém pravidelném $2n$-úhelníku existuje úhlopříčka, která není rovnoběžná s žádnou stranou.

Příklad 13. Máme zahradu o rozměrech 20×15 metrů. Chceme do ní nasadit stromy tak, aby mezi každými dvěma byla vzdálenost aspoň pět metrů. Kolik nejvíce se do zahrady vejde stromů?

Příklad 14. Po stole o straně jeden metr leze 51 much. Ukažte, že umíme na stůl položit hrnec o poloměru $1/7$ metru tak, abychom chytili vždy alespoň tři mouchy.

Příklad 15. Umístíme-li pět bodů do rovnostranného trojúhelníku, určitě budou dva od sebe vzdálené nanejvýš o délku poloviny strany.

Příklad 16. Na stole tvaru čtverce 1×1 metr je umístěno několik koláčků ve tvaru kruhu (možná se někde překrývají, ale jistě nepřesahují okraj stolu). Celkový obvod všech koláčků je 10 metrů. Ukažte, že je možné jedním řezem nožem (tj. jednou přímkou) protnout alespoň čtyři koláčky.

Příklad 17. Kolem kulatého stolu je rozestaveno patnáct židlí. U každého místa je cedulka se jménem hosta, který má na dané židli sedět. Poté, co se hosté usadí, se zjistí, že žádný z nich nesedí na svém místě. Dokažte, že je možné pootočit stůl tak, aby aspoň dva hosté zároveň seděli na správných místech.

Literatura a zdroje

[1] Bára Kociánová , *Dirichletův princip*, Staré Město 2015
[2] David Stanovský, *Dirichletův princip*, Knihovna MKS
[3] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998
[4] Jan Vaňhara,
Dirichletův princip neboli princip holubníků, invarianty a obarvení, *http://www.talnet.cz/documents/18/408e53bd-d27c-4e63-8b62-65ecc4a6e2b9*

Komplexní přednáška

Jan Kadlec

Abstrakt. Tato komplexní přednáška se pokusí co nejjednodušším způsobem podat komplexní čísla – říct, co to je a odkud se to vzalo, a z celkem jednoduchých věcí dostat vše potřebné. Ukážeme si, že na známém a pro prvoposluchače těžko stravitelném faktu $i^2 = -1$ není vlastně nic zvláštního a je to jen jednoduchá geometrie, respektive otočení. Propojíme svět geometrie a algebry, a dostaneme tak oba základní tvary komplexních čísel. Ke konci první části se možná dostaneme i k třetímu, exponenciálnímu, tvaru a naši komplexní přednášku tímto komplexně uzavřeme. V druhé části dokončíme, co jsme nestihli a pojedeme dále, třeba i do světa ~~reálného~~ komplexního vstříc fyzice či kvantovce ;-).

Motivace

V dávných dobách Pythagorejců znamenala přepona v rovnoramenném pravoúhlém jednotkovém trojúhelníku katastrofu. Tedy přesněji její délka, neboť $\sqrt{2}$ nebylo možno zapsat jako podíl dvou přirozených čísel. Problém se povedlo vyřešit až o pár staletí později rozšířením čísel o množinu iracionálních a vytvořením čísel reálných, $\mathbb{R}$. Podobný problém nastal s odmocninou ze záporného čísla. Třeba vyřešit jednoduchou rovnici $x^2 + 1 = 0$ nebylo v $\mathbb{R}$ možné. Pomohlo až zavedení komplexní jednotky, i, a vznik množiny komplexních čísel, $\mathbb{C}$. Pojďme nyní udělat totéž.

Úmluva. Dále v tomto textu předpokládáme, že a, b, c a d jsou reálná čísla, u, w a z jsou čísla komplexní a n je číslo přirozené.

Definice. (Komplexní jednotka) *Komplexní jednotka*, i, je takové číslo, pro které platí $i^2 = -1$.

Definice. (Komplexní číslo) Každé číslo z, které lze zapsat ve tvaru $z = a + bi$, nazveme *číslem komplexním*, a nazveme *reálnou částí* komplexního čísla a b nazveme jeho *imaginární částí.*

Sčítání a násobení funguje stejně jako v reálných číslech, tj.

(I) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$
(II) $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

Cvičení.

(1) Dokaž (II).

(2) Ukaž, že platí všechny následující vztahy známé z $\mathbb{R}$:

a) $w + (u + z) = (w + u) + z$,
b) $w(uz) = (wu)z$,
c) $w(u + z) = wu + wz$,
d) $w + 0 = w$ a $w1 = w$.

(3) (Dělení) Ukaž, že platí: $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Zkus to vynásobením obou stran výrazem $(c + id)$ (nebo snad $(c - id)$?).

Příklad 1. Dokažte, že pro libovolná komplexní čísla a, b, c, d, e, f platí

$$a(b(c(d(ef)))) = ((((ab)c)d)e)f.$$

(MKS 19–7–1)

První dostaveníčko s komplexy – rovnice

Věta. (Základní věta algebry) *Každý nekonstantní polynom nad komplexními čísly má kořen.*

Věta. (Trochu jinak) *Každý polynom stupně n má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů/řešení.*

Příklad 2. (Návrat k motivaci) Vyřeš rovnici $x^2 + 1 = 0$ v $\mathbb{C}$.

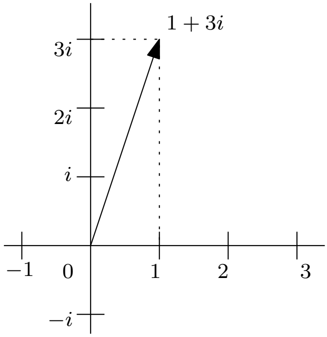
Příklad 3. (Kvadratická rovnice) Vyřeš rovnici $x^2 + 2x + 5 = 0$ v $\mathbb{C}$.

Cvičení. Odvoď Viètovy vztahy pro komplexní čísla. Vyjdi z řešení kvadratické rovnice.

Příklad 4. Nechť a, b jsou reálné parametry. Najdi všechna (komplexní) řešení rovnice $x^4 + (2a + 2b)x^3 + (3 + 4ab)x^2 + (4a + 2b)x + 2 = 0$. (MKS 19–7–5)

Rovina pana Wessla, Arganda, Warrena, Gausse, ještě na někoho jsem zapomněl?

Všichni tito pánové přišli se skvělým vynálezem, s komplexní rovinou. Mějme vodorovnou, reálnou, osu x, na kterou budeme vynášet reálnou část komplexního čísla, a k ní kolmou, komplexní osu y, na kterou budeme vynášet imaginární část. Pak bude číslo $z = a + bi$ reprezentováno bodem (x, y) v této rovině (viz obrázek). Pro případ $b = 0$ dostáváme pouze reálnou osu, tedy *ryze reálná* čísla, pro $a = 0$ pro změnu čísla *ryze komplexní*.

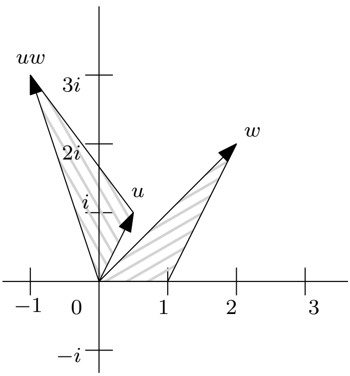


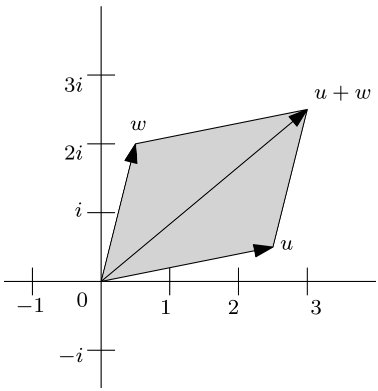
A hurá na geometrii. Předtím ještě rychlá úloha.

Úloha. Nechť a, b jsou komplexní čísla taková, že $|a| = |b| = 1$. Urči hodnotu výrazu $|a-b|^2 + |a+b|^2$. (MKS 23–7–1)

Čmáráníčko

Magie pomalu přichází. Při geometrickém zobrazení komplexních čísel se nám ze sčítání stane sčítání vektorů, tedy vznikne nám rovnoběžník, a z násobení nám vzniknou dva podobné trojúhelníky (viz obrázek).





Co více, sčítání je nyní jen „pouhé“ posunutí, bez rotace a bez škálování. A co se stalo s násobením?

Zkusme nyní přejít k jiným souřadnicím, třeba polárním.

Poznámka. Úhel $\vartheta \in \langle 0, 2\pi)$ může být libovolně zvětšen či zmenšen o 2π a dostaneme se na totéž místo. To nám možná nyní překáží, ale je to vlastnost v pokročilejší matematice velmi využívaná.

Poznámka. (Výuková) V textu budu používat hodně πsmenek z řecké abecedy, protože jako malý matematik jsem se tak pasivně naučil řeckou abecedu a to se mi pak nejen v Řecku celkem hodilo (a vám by se to taky hodit mohlo) ;-).

Definice. (Parametry) Vzdálenost bodu v komplexní rovině od počátku souřadného systému budeme značit r a platí, že $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagorova věta), kde $|z|$ budeme nazývat *absolutní hodnotou* komplexního čísla z. Dále označme ϑ úhel, který svírá daný vektor odpovídající bodu z s reálnou osou x měřeno proti směru hodinových ručiček.

Pak

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta.$$

Geometrický tvar komplexního čísla už je přede dveřmi. Stačí dát vše dohromady a dostáváme druhé vyjádření komplexního čísla.

Definice. (Goniometrický tvar) Každé komplexní číslo $z = a + bi$ lze zapsat ve tvaru $z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, kde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je *absolutní hodnota* komplexního čísla a číslo φ z rozmezí $[0, 2\pi)$ nazýváme jeho *argumentem*.

Poznámka. Převod čísel mezi tvary se děje přes úpravu výše zmíněných rovnic, tedy: $\cos\vartheta = \frac{a}{|z|}, \sin\vartheta = \frac{b}{|z|}$.

Příklad 5. Najdi všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která $|z| = 1$ a $\left|z^2 + z + 1\right| = 1$. (MKS 19–7–3)

Příklad 6. Dokaž vztah $\sin^2\xi + \cos^2\xi = 1$.

Příklad 7. Najdi přirozené číslo n, pro které platí $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$. (Náboj 2008, Úloha 44)

Exponenciální tvar

Při násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru jsme převedli násobení na sčítání (vynásobili jsme absolutní hodnoty a sečetli argumenty). To je podobný postup jako při použití logaritmu či exponenciály ($\log(ab) = \log(a) + \log(b)$). Po komplexní exponenciále tedy budeme vyžadovat, aby $a^{w+z} = a^w \cdot a^z$ pro $a \neq 0$. Problém nastává s nejednoznačností řešení, jak jsme si ukázali výše, je zde mnoho řešení. Zavedením základu e se vyhneme této nejednoznačnosti, proč a jak to funguje dalece přesahuje rámec a smysl této přednášky. Komplexní exponenciála je definována jako $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Bez důkazu uvedeme i další důležitou vlastnost a to tu, že pro libovolné komplexní $w \neq 0$ existuje takové z, že $w = e^z$, neboli máme inverzní funkci, komplexní logaritmus. Libovolné číslo z lze převést na tvar $z = \log(r) + i\vartheta$, tedy poté $w = e^z = e^{\log(r)+i\vartheta} = e^{\log(r)}e^{i\vartheta} = re^{i\vartheta}$. Podíváme-li se na předchozí vyjádření v polárních souřadnicích a na jednotkovou kružnici, dostáváme:

Tvrzení. (Eulerova formule) $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$.

A to už je jen kousek ke známé větě, kterou si můžeš jako cvičení dokázat ;-).

Věta. (Moivreova) *Pro φ a celé číslo n platí následující rovnost:*

$$(re^{i\varphi})^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$$

.

Poznámka. Tato věta se používá pro výpočet mocnin i odmocnin komplexních čísel. Pozor, odmocniny nejsou jednoznačné! $\sqrt[n]{z}$ je vlastně řešení rovnice $x^n - z = 0$ a polynom n-tého stupně může mít (a v tomto případě pro $z \neq 0$ má) n různých komplexních kořenů.

Úloha. (Rozehřívací) Spočti $\sin 36°$. Tj. napiš ho jako výraz, ve kterém se vyskytují pouze číselné konstanty, sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocniny.

(MKS 21–3–2)

Řešení. Využijeme Moivreovu větu. Z této věty dostáváme, že

$$\begin{aligned}\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5 &= \\ &= \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x \\ &+ 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x.\end{aligned}$$

Porovnáním imaginárních částí předchozího výrazu a dosazením $1 - \sin^2 x$ za $\cos^2 x$ dostáváme vzorec $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.

Dosaďme $x = 36°$ a označme si $y = \sin x$. Dostáváme rovnici $16y^5 - 20y^3 + 5y = 0$ s kořeny $y_1 = 0$, $y_{2,3,4,5} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}$. Hledaná hodnota je $0 \leq \sin 36° \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45°$, a tak $\sin 36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Příklad 8. Urči v $\mathbb{C}$ hodnotu výrazu $\sqrt{-1}$.

Příklad 9. (Binomická věta) Řeš v $\mathbb{C}$ rovnici $x^3 - 8 = 0$. Řeš algebraicky i geometricky. Řešení zanes do roviny.

Příklad 10. (Binomická věta podruhé) Řeš v $\mathbb{C}$ rovnici $ax^n - b = 0$. Řeš algebraicky i geometricky. Řešení zanes do roviny.

Příklad 11. Řeš v $\mathbb{C}$ rovnici $x^3 - 10x^2 + 10x - 9 = 0$. Řeš algebraicky i geometricky. Řešení zanes do roviny.

Úloha. (Součtové vzorce) Pomocí Eulerova (exponenciálního) tvaru odvoď vzorec pro $\cos 2x$.

Řešení. Dosaďme do definičního vztahu: $e^{i2\alpha} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$. Dále platí, že $e^{i2\alpha} = (e^{i\alpha})^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha$. Tyto dva výrazy se rovnají a pro rovnost komplexních čísel platí, že jsou si rovny, právě když se rovnají jejich reálné a jejich imaginární části. Tedy

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - \sin^2 \alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Cvičení. (Další součtové vzorce) Odvoď součtové vzorce pro výrazy $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$.

Příklady

Příklad 12. (i pro i-mocné) Spočti i^i.

Příklad 13. (i pro π-mocné) Spočti $e^{2\pi i}$.

Příklad 14. (Eulerova formule) Dokaž $e^{\pi i}+1=0$.

Příklad 15. (Magnetické kvantové číslo) Při řešení jednoduchého příkladu z kvantovky se pro rotující částici vyrojí následující rovnice $e^{\pm im2\pi}=1$. Jaké je její řešení? Připomíná ti výsledek něco z chemie?

Příklad 16. (Další vzorečky) Odvoď vzorec pro $\cos 3\zeta$.

Příklad 17. (Vektory) Najdi šest (tři dvojice) na sebe kolmých, jednotkových vektorů dimenze dva.

Příklad 18. (Pro drsňáky) Uprav na co nejjednodušší tvar výraz

$$0^2\binom{n}{0} + 3^2\binom{n}{3} + 6^2\binom{n}{6} + \cdots + (3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor)^2\binom{n}{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x, tj. největší celé číslo takové, které je menší nebo rovno x. (MKS 23–7–8)

Návody

1. Využij bod 2b) ze cvičení.

3. Číslo -16 lze zapsat jako $16i^2$.

3. Viètovy vztahy jsou: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

5. Využij goniometrického tvaru, nechceš-li řešit řešit polynom čtvrtého stupně ;-).

6. Využij jednotkové kružnice a Pythagorovy věty.

7. Může se hodit, že pro komplexní čísla v rovině platí $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \vartheta$, kde ϑ je úhel od osy x. Dále to zkus přepsat do součinu čísel v goniometrickém tvaru.

8. Využij Moivreovu větu pro mocninu $\frac{1}{2}$.

11. Pomoci může součinový tvar $(x-9)(x^2-x+1)=0$.

12. Využij $e^{i\log(i)}$.

14. Využij exponenciální tvar a goniometrický tvar nebo výsledek předchozího příkladu.

16. A co třeba rozložit $e^{3i\zeta}$? (Nebo jsem chtěl poradit $(e^{i\zeta})^3$? Ach ta skleróza…)

17. Dva vektory jsou kolmé $\iff$ je jejich skalární součin roven 0. Dobrý začátek jsou vektory $(1,0),(0,1)$.

18. Nejprve začít kombinatorickou úvahou a pak využít vše z komplexních čísel. Je to dloooooouhé.

Literatura a zdroje

[1] Roger Penrose: *The Road to Reality*, Alfred A. Knopf, 2004.
[2] MKS, 19. ročník, 7 série, Úvod k sérii.
[3] Jan Krejčí: *Komplexní čísla*, Meziměstí, 2017.
[4] Vita Smid: *Odvození běžných goniometrických vzorců*, *http://ze.phyr.us/cs/deriving-common-trigonometric-identities/*

Rovinné křivky

Bára Kociánová

Abstrakt. Jak správně definovat křivku? Co je to tečný a normálový vektor, křivost křivky, oskulační kružnice? Po přečtení tohoto příspěvku budeš nejen znát tyto pojmy, ale hlavně budeš umět načrtnout křivky na základě jejich parametrického popisu a vlastností.

Co je to křivka?

To ví přece každý. Čára, kterou nakreslíme na papír a není rovná. Tak proč o tom ztrácet více slov?

Protože abychom mohli křivky zkoumat, potřebujeme přesnější pojmy. K pořádnému zavedení ale středoškolské znalosti nestačí, takže se budeme snažit najít rovnováhu mezi přesností a srozumitelností.

Předně křivkou nebudeme rozumět tu nakreslenou čáru, ale zobrazení z intervalu $I \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$. Pokud si n-rozměrný prostor zatím neumíš představit, nemusíš se bát. V této přednášce budeme uvažovat jen rovinu ($n = 2$). Tak ještě jednou symbolicky:

Definice. *Parametrickou křivkou* nazveme spojité zobrazení $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Množinu bodů $\{\varphi(t), t \in I\}$ nazveme *obrazem křivky* φ a označíme $\langle\varphi\rangle$. Budeme říkat, že je křivka *hladká*, pokud je zobrazení φ nekonečněkrát diferencovatelné, což značíme $\varphi \in C^\infty$.

Obrazu křivky budeme někdy říkat také křivka, z kontextu bude vždy jasné, co zrovna myslíme.

Hladkost zjednodušeně znamená, že pokud zobrazení zderivujeme, dostaneme spojité zobrazení, které když zderivujeme, dostaneme spojité zobrazení ... A tak dále. Hladká se takové křivce říká proto, že nemá žádné zuby ani rohy. Například tedy přímka nebo kružnice jsou hladké křivky, ale naopak jakýkoli n-úhelník hladkou křivkou není – můžeme ale říct, že je *po částech hladkou křivkou*, protože se skládá z úseček, které jsou hladké. K úvodu této části je tedy potřeba poznamenat, že obraz křivky může být klidně čára, která vůbec není křivá. Později třeba o přímce řekneme, že má nulovou křivost. Nejdříve si ale budeme chvíli kreslit.

Pro úplnost ještě dodejme, že křivka se dá popsat i jinak než parametricky, například implicitně, rovnicí. Je to podobné jako v analytické geometrii, která se probírá na střední škole. Obecná přímka se tak dá popsat například rovnicí $ax + by + c = 0$ nebo parametricky jako množina bodů $\{(A, B) + t \cdot (u, v), t \in \mathbb{R}\}$. V této přednášce se ale jinými způsoby zápisu křivek zabývat nebudeme.

Kreslíme!

Nejjednodušší rovinnou křivkou je přímka, třeba $\varphi(t) = (t, 2t)$. Jak je zvykem, první souřadnice značí body na x-ové ose, kdežto druhá na y-ové. Zobrazuje-li tedy φ do roviny interval $\langle -1, 3\rangle$, znamená to, že obraz této křivky začíná v bodě $\varphi(-1) = (-1, 2 \cdot (-1))$ a končí v bodě $\varphi(3) = (3, 2 \cdot 3)$. Protože první souřadnice φ je jen identické t, můžeme tuto křivku chápat prostě jako vykreslení funkce $y = 2x$ pro $x \in \langle -1, 3\rangle$.

Kdybychom měli na stejném intervalu jinou křivku $\psi(t) = (-3t, t)$, budeme kreslit nezvyklou funkci $x = -3y$, neboli pro jednotlivé body na y-ové ose budeme hledat odpovídající hodnoty na x-ové ose.

Takhle by to ale nebylo moc zajímavé. Kdyby vždy v jedné souřadnici bylo t, nemohli bychom třeba nakreslit protínající se křivku nebo kružnici. Kouzlo křivek totiž spočívá v tom, že jejich souřadnice mohou být libovolnými funkcemi parametru t, tedy klidně obskurnosti jako

$$\varphi(t) = (\cos^4(e^t) - 5\sin(t), \cos((t+8)^2) - t).$$

Jenže takové už si nedokážeme představit a potřebujeme nějaký matematický software, který křivku vykreslí za nás. Proto se budeme zabývat spíše jednoduššími křivkami.

Příklad 1. Načrtni obrazy následujících rovinných křivek.

(1) $\varphi_1(t) = (3t, 2t)$, $t \in \langle -1, 1\rangle$
(2) $\varphi_2(t) = (2 - t, t)$, $t \in \langle 0, 2\rangle$
(3) $\varphi_3(t) = (t, \sin t)$, $t \in \langle -\pi, \pi\rangle$
(4) $\varphi_4(t) = (2t + 5(1-t), t + 3(1-t))$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
(5) $\varphi_5(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
(6) $\varphi_6(t) = (\sin t, 2\cos t)$, $t \in \langle 0, 4\pi\rangle$
(7) $\varphi_7(t) = (\cos t, \cos 2t)$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$
(8) $\varphi_8(t) = (\sin 2t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

Důležité je uvědomit si, že různé parametrizace můžou dávat stejné obrazy křivek. Zkus si například nakreslit $\varphi(t) = (t, 3t)$, $t \in I = \langle 0, 1\rangle$ a $\psi(t) = (\frac{1}{3}t, t)$, $t \in J = \langle 0, 3\rangle$.

Toto pozorování se dá zobecnit:

Tvrzení. *Nechť $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ je křivka a $\alpha : J \to I = \alpha(J)$ „rozumné“ zobrazení jednoho intervalu na druhý. Pak $\varphi(\alpha(t)) : J \to \mathbb{R}^n$ je také křivka, která má navíc stejný obraz jako $\varphi(t)$.*

Rozumné v tomto případě znamená, že je toto zobrazení α spojitě diferencovatelné a jeho inverzní zobrazení je také spojitě diferencovatelné. Speciálně je tedy prosté. Tomuto zobrazení se říká *reparametrizace*.

Pro výše uvedené křivky φ a ψ je reparametrizace $\alpha(t) = \frac{1}{3}t$. Skutečně, $\alpha(J) = \alpha(\langle 0, 3\rangle) = \langle 0, 1\rangle = I$ a $\varphi(\alpha(t)) = \varphi(\frac{1}{3}t) = (\frac{1}{3}t, t) = \psi(t)$.

Speciálním případem je opačná reparametrizace $\alpha : I \to I$, $I = \langle a, b\rangle$, $\alpha(t) = a(t-a)/(b-a) + b(b-t)/(b-a)$, která křivku jen převrátí. Začneme v koncovém bodě původní křivky a vrátíme se do počátečního.

Příklad 2. Zjisti, které z následujících křivek mají stejný obraz, a najdi jejich reparametrizaci.

(1) $\varphi_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in I_1 = \langle 0, 2\pi\rangle$
(2) $\varphi_2(t) = (\sin(-t), 3\sin(-t))$, $t \in I_2 = \langle 3\pi/2, 2\pi\rangle$
(3) $\varphi_3(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in I_3 = \langle \pi/2, 5\pi/2\rangle$
(4) $\varphi_4(t) = (4t+2, 12(t+1/2)$, $t \in I_4 = \langle -1/2, -1/4\rangle$
(5) $\varphi_5(t) = (2t, 6t)$, $t \in I_5 = \langle 0, 1/2\rangle$

Tečné a normálové vektory

Pojem tečny ke kružnici jistě znáš. Je to prostě přímka, která se kružnice dotýká v daném bodě. Tečným vektorem je potom směrový vektor této přímky (respektive oba dva opačné vektory). Podobně se dá zavést pojem tečný vektor obecné křivky. Ze dvou směrových vektorů přímky tečné ke křivce v daném bodě si ale vybereme vždy ten „ve směru parametrizace“. Nicméně pokud křivka není hladká, tečnu v nějakém bodě vůbec nemusí mít. Není jasné, co by měla být tečna ke čtverci v jeho vrcholu. Proto nyní budeme potřebovat předpoklad hladkosti křivky.

Přesněji uvádí pojem tečného vektoru následující definice, která zároveň dává návod, jak takový vektor pro konkrétní křivku najít.

Definice. *Tečný vektor* k hladké křivce $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ v bodě t_0 je vektor

$$\tau(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{||\varphi'(t_0)||} = \frac{(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), \ldots, \varphi_n'(t_0))}{||(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), \ldots, \varphi_n'(t_0))||}.$$

Pokud nevíš, co znamená čárka u funkce, věz, že značí derivaci, a smiř se s tím, že můžeš pro derivace prostě používat vzorečky uvedené na konci tohoto příspěvku. V této přednášce budeme potřebovat derivace funkcí jen počítat a postačí nám intuitivní představa, že „derivace funkce dává tečný vektor“. Navíc je ale potřeba tento vektor znormovat, abychom mohli budovat další teorii.

Problém nastane, pokud je derivace v daném bodě nulová. Nulový vektor je totiž teoreticky tečný ke všem křivkám ve všech bodech, nicméně to nedává žádnou informaci. Budeme proto uvažovat jen takové křivky, jejichž derivace v žádném bodě není nula. Nazývají se *regulární.*

Hledání tečného vektoru si vyzkoušíme na příkladu jednotkové kružnice. Ta se dá parametrizovat například jako $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Z obrázku snadno i bez derivací zjistíme, že tečným vektorem v bodě $(1, 0)$ neboli v bodě $\varphi(0)$ je vektor $\tau = (0, 1)$. Pomocí definice nejprve najdeme derivaci křivky $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ a dosadíme do ní $t = 0$. Dostaneme opět $\tau(0) = \varphi'(0) = (-\sin 0, \cos 0) = (0, 1)$.

Pokud bychom ale chtěli najít tečný vektor třeba v bodě $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, z obrázku už bychom tečný vektor určili těžko. Podle definice ale stačí jen najít t, pro které je hodnota $\cos t = \frac{1}{2}$, $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, což je $t = \frac{\pi}{3}$. Pak už snadno najdeme tečný vektor $\tau\left(\frac{\pi}{3}\right) = \varphi'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Příklad 3. Najdi tečné vektory k následujícím křivkám v daných bodech (křivky jdou vždy z nějakého intervalu, do kterého dané body patří).

(1) $\varphi_1(t) = (4t, t^2)$ v bodech $t_0 = 0$, $t_1 = 1$
(2) $\varphi_2(t) = (2t, 3\sin t)$ v bodech $t_0 = 0$, $t_1 = \pi/4$
(3) $\varphi_3(t) = (2\cos t, \sin t)$ v bodech $t_0 = \pi/4$, $t_1 = \pi/2$
(4) $\varphi_4(t) = (t\cos t, \sin t)$ v bodech $t_0 = 0$, $t_1 = \pi$

Dalo by se říct, že normálový vektor je prostě kolmý vektor k tečnému. Ale v rovině jsou takové dva a v prostoru dokonce nekonečně mnoho, kdežto my bychom chtěli mít normálový vektor určený jednoznačně. Který tedy vybrat?

Definice. *Normálový vektor* ke křivce $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ v bodě t_0 je vektor $n(t_0) = \tau'(t_0)$.

Pro kružnici je $\tau'(t) = (-\cos t, -\sin t)$, tedy v bodě $(1, 0)$ máme normálový vektor $n(0) = \tau'(0) = (1, 0)$, což bychom také mohli odhadnout z obrázku. V bodě $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ je normálový vektor $n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tau'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{3}, -\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Příklad 4. Najdi normálové vektory pro stejné křivky a body jako v předchozím příkladu.

Křivost

Co znamená, že je jedna křivka křivější než jiná? Intuitivně je nám to jasné, přímka je míň křivá než kružnice o poloměru 1000 a ta je zase méně křivá než jednotková kružnice. Jde nějak o to, jak prudce ta čára na papíře zahýbá... A jak to říct pořádně?

Definice. *Křivost* regulární křivky $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ v bodě t_0 je $\kappa(t_0) = \frac{||\tau'(t_0)||}{||\varphi'(t_0)||}$. Body s nulovou křivostí nazveme *inflexními body* křivky.

Pro kružnici je křivost všude stejná, a to pro jednotkovou kružnici $\kappa(t) = \frac{||\tau'(t)||}{||\varphi'(t)||} = \frac{1}{1} = 1$.

Příklad 5. Nakresli následující křivky a vyznač na nich zadané body. Nejdříve je zkus intuitivně seřadit podle křivosti, potom ji přesně spočítej.

(1) $\varphi_1(t) = (t, 5\sin t)$ v bodě $t_0 = \pi/2$
(2) $\varphi_2(t) = (\cos^3 t, 4\cos^3 t)$ v bodě $t_0 = \pi/2$
(3) $\varphi_3(t) = (10\cos t, 10\sin t)$ v bodě $t_0 = \pi/2$
(4) $\varphi_3(t) = (\cos t, 30\sin t)$ v bodě $t_0 = \pi/2$

Podobně jako máme tečné vektory, můžeme definovat něco jako „tečné kružnice“, kterými bychom chtěli křivku v daném bodě aproximovat.

Definice. Pokud t_0 není inflexním bodem křivky φ, nazveme $\rho(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$ *poloměrem křivosti* a kružnici se středem $\varphi(t_0) + \rho(t_0)n(t_0)$ a poloměrem $\rho(t_0)$ nazveme *oskulační kružnicí.*

Pro kružnici je oskulační kružnice sama původní kružnice. Obecně křivka a její oskulační kružnice mají v daném bodě stejnou tečnu i křivost.

Příklad 6. U křivek a bodů zadaných v předchozím příkladě najdi oskulační kružnice, pokud křivost křivky v daném bodě není nulová.

Kreslíme složitější křivky

Na rozdíl od prvního příkladu teď můžeš ke kreslení křivek využít všechny nástroje zmíněné v tomto příspěvku. Uvidíš, že s pomocí tečných vektorů třeba snadno zjistíš, v jakém směru křivka začíná, a oskulační kružnice ti zase umožní přesněji načrtnout nějaký záhyb.

Příklad 7.

(1) $\varphi_1(t) = (\cos t, \cos t \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
(2) $\varphi_2(t) = (\sin(2t), \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
(3) $\varphi_3(t) = (t \sin(5t), t \cos(5t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
(4) $\varphi_4(t) = (\cos^2 t \sin t, \cos t \sin^2 t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
(5) $\varphi_5(t) = (\cos(3t), \sin(2t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
(6) $\varphi_6(t) = (t \cos(5t), t^2 \sin(5t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Potřebné základy

Bod o souřadnicích (a, b) ztotožňujeme s vektorem vedoucím z počátku do bodu (a, b). Jeho velikost spočítáme jako $||(a, b)|| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Analogicky v jiných dimenzích.

Užitečné vztahy pro derivace v tomto příspěvku jsou především: $\cos' t = -\sin t$, $\sin' t = \cos t$, $(t^n)' = nt^{n-1}$.

Dále platí $(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t)$, $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ a $\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}$. Derivace složené funkce je $(f(g(t))' = f'(g(t))g'(t)$, například $\cos(t^2) = -\sin(t^2)2t$.

Literatura a zdroje

[1] prof. RNDr. Jan Rataj, *Geometrie*, *http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/DG/geom_text.pdf*

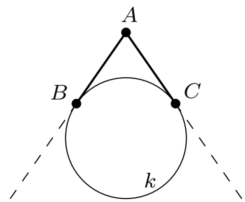
Překlápění tečen

Adéla Kostelecká

Abstrakt. Příspěvek obsahuje několik úloh na využití shodnosti délek tečen.

Na přednášce si ukážeme několik příkladů na překlápění tečen. Budeme se opírat o následující tvrzení.

Tvrzení. *Ať k je kružnice a A je bod vně k. Veďme bodem A tečny ke kružnici k a body dotyku označme B a C. Pak $|AB| = |AC|$.*



Tvrzení. *Přímky p a q jsou společnými vnějšími tečnami kružnic k a l. Přímka p se dotýká kružnic k a l v bodech A a B a přímka q se jich dotýká v bodech C a D. Pak $|AB| = |CD|$.*

Tvrzení. *Přímky p a q jsou společnými vnějšími tečnami kružnic k_1 a k_2. Přímka p se kružnice k_1 dotýká v bodě A a kružnice k_2 v bodě B, přímka q se kružnic dotýká v bodech C a D. Pak platí*

(i) $|AB| = |CD|$,

(ii) *pokud se kružnice neprotínají a jejich vnitřní tečna r protíná přímky p a q v bodech X a Y, pak $|AB| = |CD| = |XY|$.*

Tvrzení. *Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA a AB po řadě v bodech D, E a F. Potom $|AE| = |AF| = \frac{-a+b+c}{2}$.*

Tvrzení. *V trojúhelníku ABC se kružnice připsaná straně BC dotýká přímek BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Pak platí*

(i) $|AE| = |AF| = \frac{a+b+c}{2}$,

(ii) $|BD| = |BF| = \frac{a+b-c}{2}$, $|CD| = |CE| = \frac{a-b+c}{2}$,

(iii) *body dotyku s vepsanou a připsanou kružnicí jsou středově souměrné podle středu příslušné strany.*

Příklad 1. Mějme kružnici k se středem S o poloměru 1 a bod P takový, že $|PS| = 3$. Tímto bodem veďme tečny ke kružnici k, které se jí dotknou v bodech A, B. Dále si zvolme libovolný bod T kratšího oblouku AB kružnice k a jím veďme tečnu ke k. Tato tečna protne úsečky AP a BP v bodech X a Y. Určete obvod trojúhelníku PXY. (Náboj 2008)

Příklad 2. Je dán trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou k. Body X a Y leží na stranách AB a AC tak, že XY je tečna kružnice k. $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CA| = 8$. Určete obvod trojúhelníku AXY.

Příklad 3. Mějme trojúhelník ABC. Nakreslíme tři tečny k jeho vepsané kružnici tak, že každá odřízne jiný z vrcholů trojúhelníku. Obvody odříznutých trojúhelníků jsou 1, 2 a 3. Dokažte, že původní trojúhelník byl pravoúhlý. (MKS 32–6–3)

Příklad 4. Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $|AB| > |BC|$. Body K a M jsou body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD a ABC s úhlopříčkou AC. Body L a N jsou stejným způsobem body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD a ABD s BD. Dokažte, že $KLMN$ je obdélník. (MO 54–A–I–2)

Tvrzení. (O tečnovém čtyřúhelníku) *Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Ukažte, že mu lze vepsat kružnici právě tehdy, když $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.*

Příklad 5. Je dán tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC se úhlopříčky AC dotýkají v jednom bodě.

Příklad 6. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ tak, že $|AB|+|BC| = |CD|+|AD|$. Kružnice vepsané trojúhelníkům ABD a CBD se úhlopříčky BD dotýkají v bodech X a Y. Dokažte, že body X a Y jsou stejně vzdáleny od středu úsečky BD.

Příklad 7. Na přímce a, na níž leží strana BC trojúhelníku ABC, jsou dány body dotyku všech tří mu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané. (MO 63–B–I–3)

Příklad 8. Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D, E, F tak, aby se úsečky AD, BE, CF protnuly v jednom bodě, který označíme G. Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte. (MO 52–A–III–2)

Příklad 9. Na straně BC trojúhelníku ABC je dán bod D. Trojúhelníkům BDA a DCA vepíšeme kružnice. Jejich vnější společná tečna různá od BC protíná AD v bodě X. Určete množinu bodů X, probíhá-li bod D stranu BC.

Příklad 10. Mějme trojúhelník ABC s obvodem 4. Na polopřímkách AB a AC označme postupně body X, Y tak, že $|AX| = |AY| = 1$ a úsečky BC a XY se protínají v bodě M. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABM, ACM má obvod 2. (Rusko 2011)

Zdroje

Přednáška čerpá z příspěvku ze soustředění v Uhelné Příbrami od Aničky Doležalové.

Konvexita a nerovnosti

Danil Koževnikov

Abstrakt. Příspěvek seznamuje s řadou více či méně tradičních důkazových technik na nerovnosti, souvisejících s konvexitou.

Úvod do konvexity a Jensen

Na začátek si pečlivě zadefinujeme všechny pojmy, které se nám budou dále hodit:

Definice. Mějme body $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z $\mathbb{R}^m$ a nezáporná reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se součtem 1. Potom bod $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ nazveme *konvexní kombinací* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definice. O množině $S \subseteq \mathbb{R}^m$ řekneme, že je *konvexní*, pokud pro každá $x, y \in S$ a $\lambda \in [0,1]$ náleží bod $\lambda x + (1-\lambda)y$ rovněž do S, neboli pokud S obsahuje všechny konvexní kombinace svých bodů.

Definice. *Konvexní obal* bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je nejmenší konvexní množina, jež obsahuje všechny z těchto bodů, neboli množina všech konvexních kombinací daných bodů.

Definice. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval a $f : I \to \mathbb{R}$ funkce. O funkci f řekneme, že je *konvexní* na I, pokud pro libovolná $x, y \in I$ a $\lambda \in [0,1]$ platí nerovnost:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Duálně, tj. s opačnou nerovností, můžeme definovat *konkávní* funkci na I; pokud výše uvedená nerovnost pro různá x, y a $\lambda \in (0,1)$ platí dokonce ostře, můžeme mluvit o *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) funkci na intervalu I. Je-li zvíře z na celém svém definičním oboru chlupaté a roztomilé, nazveme jej *tuleněm*.

Tvrzení. *Konvexita f na intervalu I je ekvivalentní s konvexitou množiny $S = \{(x,y) : f(x) \leq y; x \in I\}$.*

Poznamenejme, že vyšetřování toho, zda je nějaká funkce konvexní, může být pouze na základě výše uvedené definice poměrně pracné i pro jednoduše vypadající funkce. Naštěstí však existuje řada jiných kritérií, kterými si můžeme značně zjednodušit život. Postačující podmínkou je například nezápornost druhé derivace.

Teď už konečně můžeme plně ocenit eleganci nerovnosti, která byla dokázána dánským matematikem Johanem Jensenem v roce 1906:

Tvrzení. *Nechť f je konvexní na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ taková, že $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, platí nerovnost*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Pro konkávní funkce platí opačná nerovnost.

Nehledě na to, že může na první pohled působit poměrně odpudivě a komplikovaně, je Jensenova nerovnost ve světle předchozích poznatků poměrně intuitivní, obzvlášť přihlédneme-li k její geometrické interpretaci.

K čemu je ovšem vůbec dobrá? Prozradím, že vhodnou volbou funkce f a jednotlivých parametrů dostaneme AG-nerovnost, Cauchy-Schwarzovu nerovnost i obecnou nerovnost mezi mocninnými průměry jako pouhé speciální případy Jensena! Používání Jensenovy nerovnosti si můžete sami ozkoušet na řadě příkladů:

Příklad 1. Malá Lenička už není malá a chce si založit bankovní účet, na kterém jsou pro následujících n let úrokové stanoveny sazby $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Zákeřný pracovník banky Danil jí nabídl, že může místo toho pro jednoduchost každý rok mít sazbu rovnou geometrickému průměru čísel $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Má Lenička nabídku přijmout? A co, kdyby se geometrický průměr nahradil aritmetickým?

Příklad 2. Pro kladná reálná a, b, c dokažte nerovnost

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Příklad 3. Jaký je největší možný obsah n-úhelníku vepsaného do jednotkové kružnice?

Příklad 4. Pro kladná x, y, z, splňující $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ dokažte:

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{y^2} \geq 3.$$

Příklad 5. Pro kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$ se součtem 1 dokažte nerovnost

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i}{x_i} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{n - x_i}{1 - x_i}.$$

Příklad 6. Pro kladná x, y, z, splňující $xyz = x + y + z$ dokažte:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{1 + xy} \leq \frac{3}{4}.$$

(ARO)

Další vlastnosti konvexních funkcí

Konvexní funkce mají spoustu dalších užitečných vlastností, které jsou shrnuty v následujících tvrzeních. Většina z nich se dá alespoň na intuitivní úrovni nahlédnout pomocí geometrické interpretace konvexity.

Tvrzení. *Konvexní funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ může nabývat maxima pouze v krajních bodech.*

Tvrzení. *Mějme funkci f, jež je konvexní na I, a $a < b < c < d$ z I. Potom platí:*

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq \frac{f(d) - f(b)}{d - b} .$$

Tvrzení. *Každá konvexní funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b).*

Tvrzení. *Dvakrát diferencovatelná funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je konvexní na I právě tehdy, platí-li pro všechna $x \in I$ nerovnost $f''(x) \geq 0$.*

Tvrzení. *Jsou-li funkce f a g konvexní na správných intervalech, tak jsou na odpovídajících intervalech konvexní i následující funkce:*

(i) $\max\{f(x), g(x)\}$, $f(x) + g(x)$,
(ii) $f(x)g(x)$, *jsou-li f a g neklesající a nezáporné,*
(iii) $g(f(x))$, *je-li g zároveň neklesající.*

Tvrzení. *Tečna ke grafu konvexní funkce leží pod grafem dané funkce. Formálněji řečeno, pro konvexní, diferencovatelnou funkci $f : I \to \mathbb{R}$ a $x, y \in I$ platí nerovnost $f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y)$.*

Příklad 7. Ukažte, že pro $x, y, z \in [0, 1]$ platí:

$$\sum_{cyc} \frac{x}{y + z + 1} + (1 - x)(1 - y)(1 - z) \leq 1.$$

(USAMO)

Příklad 8. Ukažte, že pro $x, y, z \in [0, 1]$ platí:

$$\frac{x^2}{1 + y} + \frac{y^2}{1 + z} + \frac{z^2}{1 + x + y} + x^2(y^2 - 1)(z^2 - 1) \leq 2.$$

Příklad 9. Dokažte, že pro kladná reálná $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ a kladná reálná $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se součtem 1 platí:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x_i}\right) \leq \frac{(x_1 + x_n)^2}{4x_1 x_n}.$$

(Kantorovičova nerovnost)

Příklad 10. Dokažte, že pro $x \geq -1$ a $\alpha > 1$ platí $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ (pro $\alpha < 0$ to taktéž platí, zatímco pro $\alpha \in (0,1)$ platí opačná nerovnost).

(Bernoulliho nerovnost)

Příklad 11. Dokažte, že pro $a, b, c \geq 1$, splňující $abc \geq 512$, platí:

$$\frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{1+a}}.$$

(MOP)

Příklad 12. Mějme funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $x \in I$ nerovnost $0 \leq m \leq f''(x) \leq M$. Potom pro libovolná $x_1, \ldots, x_n \in I$ a kladná $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se součtem 1 existuje $\alpha \in [m, M]$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \frac{1}{4}\alpha \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2.$$

Příklad 13. Ukažte, že pokud spojitá funkce $f : I \to \mathbb{R}$ pro libovolná $x, y \in I$ splňuje nerovnost $f(x) + f(y) \geq 2f(\frac{x+y}{2})$, pak je na I konvexní.

Karamatova nerovnost

Po důkladném seznámení s těmi vlastnostmi konvexních funkcí, které *jsou vidět z obrázku*, se můžeme konečně pustit do důkazů některých překvapivějších a silnějších vět. Pro zpřehlednění dalšího postupu se nám budou velmi hodit jedno pomocné tvrzení, jež je diskrétním analogem integrace per partes, a pojem *majorizace*:

Tvrzení. (Abelova parciální sumace) *Mějme dvě posloupnosti $\{f_k\}_{k=0}^n, \{g_k\}_{k=0}^n$. Označme si $\{d_k\}$ posloupnost diferencí $\{d_k\}$ a $\{G_k\}$ posloupnost prefixových součtů $\{g_k\}$, neboli $d_k = f_{k+1} - f_k$ a $G_k = \sum_{i=0}^k g_i$. Potom platí $\sum_{i=0}^n f_i g_i = f_n G_n - \sum_{i=0}^{n-1} d_i G_i$.*

Definice. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ označme jednotlivé složky daných vektorů α_i a β_i tak, aby platilo $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ a $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$. Potom řekneme, že α *majorizuje* β (což značíme $\alpha \succeq \beta$), pokud pro $1 \leq i \leq n-1$ platí $\sum_{j=1}^i \alpha_j \geq \sum_{j=1}^i \beta_j$ a zároveň $\sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_{j=1}^n \beta_j$.

Už jenom samotná Abelova sumace se může často hodit při dokazování nerovností, většina z nich je však důsledkem obecnější nerovnosti, kterou v roce 1933 dokázal srbský matematik Jovan Karamata:

Tvrzení. *Mějme vektory α, β takové, že všechny jejich složky jsou z intervalu I a zároveň $\alpha \succeq \beta$. Potom pro libovolnou konvexní funkci $f : I \to \mathbb{R}$ platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i).$$

Ukazuje se ovšem, že souvislosti mezi majorizací a konvexitou jsou mnohem hlubší, než by se mohlo zdát na první pohled, což dokládá například následující tvrzení:

Tvrzení. *Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ uvažme všech $n!$ bodů, které můžeme z α dostat prohazováním souřadnic, a označme jejich konvexní obal $H(\alpha)$. Potom jsou tvrzení $\alpha \succeq \beta$ a $\beta \in H(\alpha)$ ekvivalentní.*

To nám poskytuje nejen nový způsob, jak dokázat Karamatovu nerovnost, ale například i obecnou verzi takzvané *Muirheadovy nerovnosti*:

Tvrzení. *Pro nezáporná reálná $x_1, \dots, x_n$ a $\alpha \succeq \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost:*

$$\sum_{sym} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq \sum_{sym} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}.$$

Příklad 14. Nechť $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou kladná reálná čísla, splňující podmínky:

(1) $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$
(2) $\prod_{i=1}^{k} a_i \geq \prod_{i=1}^{k} b_i$ pro $1 \leq k \leq n$

Dokažte, že platí $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i$. (iKS 6-2)

Příklad 15. Pro kladná reálná $a_1, \dots, a_n$ dokažte nerovnost:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \leq \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right).$$

Příklad 16. Pro kladná reálná a, b, c splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, dokažte nerovnost:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + 2} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{6ab + c^2}.$$

(USA TST)

Příklad 17. Pro $x, y, z \in (0, 1)$, splňující $\max(x, y, z) < \frac{x+y+z}{2} < 1$, dokažte nerovnost:

$$\prod_{cyc} \frac{1 + x}{1 - x} \leq \left(\frac{2 + x + y + z}{2 - x - y - z}\right)^2.$$

Příklad 18. Mějme celá $0 < m < n$, reálná $x_1, \dots, x_n$ a nezáporné δ, splňující:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{m}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + \delta.$$

Dokažte nerovnost:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{\delta^2 n}{m(n - m)}.$$

(Szemerédiho nerovnost)

Polokonvexní funkce, integrály a další nádhera

A co, když není funkce konvexní na celém intervalu, který nás zajímá? Jenom s využitím našich současných poznatků se dá leccos říct i o takových funkcích, existuje však jedno pozoruhodné (a poměrně elementární) tvrzení, které nám odkrývá ještě o něco více:

Tvrzení. (Right Convex Function Theorem) *Mějme funkci f konvexní na intervalu $[s, +\infty)$. Potom nerovnost*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq nf\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$$

platí pro všechna n-tice reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$, splňující $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq s$, právě tehdy, platí-li pro všechny n-tice, které splňují $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = s$ a zároveň $x_1 = \cdots = x_{n-1} \geq s$.

No a co nějaké ty integrály? Prozradím, že například Jensenova a Karamatova nerovnost mají i své spojité analogy, jejichž důkaz se dá i přes poměrně děsivý vzhled elegantně nahlédnout skrze geometrickou interpretaci. Použitím integrálů se dají některé z uvedených nerovností navíc vylepšit, například můžeme poměrně snadno odhadnout střední hodnotu konvexní funkce na libovolném intervalu:

Tvrzení. *Pro konvexní funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ platí:*

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Návody

1. Funkce $\ln(1 + x)$ je konkávní a $\ln(1 + e^x)$ naopak konvexní.

2. BÚNO $a + b + c = 1$, po použití Jensena na konvexní funkci $\frac{1}{\sqrt{x}}$ stačí AG.

3. Něco málo vyúhlete a pak Jensen na $\sin(x)$ pro $x \in [0, \pi]$.

4. Jensen nejprve na $\frac{1}{x}$, a pak po substituci na $x^{\frac{2}{3}}$.

5. Funkce $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ je na $(0, 1)$ konvexní.

6. Jen tak pro srandu rozšiřte zlomek x; $\frac{x}{c+x}$ je konkávní.

7. Je to konvexní ve všech proměnných.

8. Poněkud překvapivě je to zase konvexní, viz druhá derivace.

9. Funkce nalevo je konvexní v $x_1, \ldots, x_n$, takže stačí uvažovat jen $n = 2$.

10. Porovnáváme konvexní funkci $(1 + x)^\alpha$ s její tečnou v nule.

11. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ je konvexní pouze pro $e^x \geq 2$; použijte Jensenovu nerovnost pro konvexní funkci, definovanou jako $h(x) = f(x)$ pro $x \geq 3\ln(2)$ a $h(x) = t(x)$ pro $x \in [0, 3\ln(2)]$, přičemž $t(x)$ je rovnice tečny k f v bodě $3\ln(2)$.

12. Jensen na funkce $f(x) - \frac{1}{2}Mx^2$ a $f(x) - \frac{1}{2}mx^2$.

13. Stačí dokázat pro váhy tvaru $\frac{a}{2^b}$ pro přirozená a, b, což jde indukcí dle b.

14. Použijte parciální sumaci na $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)$ nebo to zabijte Karamatou.

15. $(2a_1 - a_2, \ldots, 2a_n - a_1) \succeq (a_1, \ldots, a_n)$

16. Nejprve se zbavte smíšených členů pomocí AG.

17. Funkce $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ je na $(0, 1)$ konvexní.

18. Definujeme-li $y_i = p + \frac{\delta}{m}$ pro $1 \leq i \leq m$ a $y_i = p - \frac{\delta}{n-m}$ jinak (p je průměr x_i), tak z podmínky $(x_1, \ldots, x_n) \succeq (y_1, \ldots, y_n)$.

Literatura a zdroje

[1] J. Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, Cambridge Univeristy Press, Cambridge, 2004.

[2] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities: Old and New Methods*, GIL, Zalau, 2006.

[3] *http://www.cut-the-knot.org*

[4] *http://artofproblemsolving.com*

ODE

Honza Krejčí

Abstrakt. V tomto příspěvku si řekneme něco o jednom z praktických odvětví matematiky – diferenciálních rovnicích. Ty hrají důležitou roli při řešení všech možných reálných (i komplexních) problémů. Od modelování vývoje populace, přes popis pohybů pružin (a podobných hejbátek) až po předpovědi počasí. Vzhledem k tomu, že devadesát minut je krátká doba a jednotky stránek málo místa, ukážeme si několik jednodušších příkladů a naučíme se řešit některé typy obecných diferenciálních rovnic.

Pro účast na přednášce je dobré tušit, co je to spojitá funkce, vektorový prostor (zde si stačí umět představit třeba $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$), intuitivně chápat, co je to derivace, a věřit tomu, že integrování je v jistém smyslu opačná operace k derivování.

Úmluva. Neznámá funkce v diferenciální rovnici bude vždy závislá na proměnné t, kvůli úspoře místa ji tam však (většinou) nebudeme psát.

Příklad. (Motivační I) Je známo, že (při zachování nízkého počtu bakterií) je populační růst bakterií přímo úměrný jejich aktuálnímu počtu. Pro jednoduchost předpokládejme, že tuto úměru je možné vyjádřit pomocí pevné kladné konstanty K. Dále nechť v čase $t = 0$ byl počet bakterií $n > 0$. Jak můžeme popsat chování populace v čase T?

Řešení. Označme $p(t)$ populaci bakterií v čase t a dívejme se na p jako na spojitou funkci v proměnné t. Pak lze předchozí model popsat rovnicí $p'(t) = Kp(t)$. Tu upravíme tak, že ji vydělíme její levou stranou (ta je vždy nenulová), přeintegrujeme od 0 do T a spočítáme integrály, které nám vyšly:

$$\begin{aligned} p'(t) &= Kp(t), \\ \int_0^T \frac{p'(s)}{Kp(s)} ds &= \int_0^T 1 ds, \\ \frac{1}{K} \ln\left(\frac{p(T)}{p(0)}\right) &= T. \end{aligned}$$

Z rovnosti vyjádříme $p(T) = p(0)e^{KT}$.

Co je dobré si odnést z tohoto příkladu? Bakterie se množí fakt rychle a nepřekvapivě funkce p v čase T závisí pouze na svých hodnotách mezi 0 a T, ale nikoliv na čase samotném (je putna, jestli se bakterie začnou množit okamžitě, nebo až za 15 minut, výsledné funkce jsou stejné až na posunutí).

Rovnice s konstantními koeficienty

Definice. Rovnici $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} \cdots + a_1x' + a_0x = f(t)$, kde a_0, a_1, … a_{n-1} jsou reálná čísla a f, x jsou spojité funkce na nějakém (reálném) intervalu (a, b), nazýváme *lineární* (v rovnici vystupují derivace „v první mocnině“) *diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty řádu n.*

Je-li $f = 0$, hovoříme o *homogenní rovnici*, v opačném případě o *nehomogenní rovnici.*

Příklad. (Motivační II) Mějme zavěšenou pružinu, kterou vychýlíme z rovnovážného stavu a necháme ji kmitat. Pro zjednodušení uvažujeme, že kmity nejsou tlumené, výchylka v čase 0 je nulová, hmotnost je 1 a koeficient pružnosti je také 1. Popište výchylku pružiny v čase t.

Řešení. Označme x výchylku pružiny z rovnovážného stavu. Po chvíli uvažování dostaneme rovnici $x'' + x = 0$. V tomto případě hledáme funkce, jejichž druhá derivace je opačná k původní funkci. Žhaví kandidáti jsou funkce sinus a kosinus (derivace jim pouze mění znaménko). Zderivováním lze ověřit, že funkce $a\cos t + b\sin t$ je řešením pro každou dvojici reálných čísel a, b.

Zde je vidět, že nám pro **jednoznačnost** řešení nestačí předepsat pouze hodnotu x v nějakém čase t, ale potřebujeme ještě jednu podmínku. Obecně, abychom mohli vůbec uvažovat o jednoznačnosti, tak pro rovnici n-tého řádu potřebujeme $(n - 1)$ **počátečních podmínek**.

Řešení. Dobře, může se stát, že jsme řešení neuhádli. Zkusme to jinak. Rovnice popisuje funkci, na kterou druhá derivace nemá moc velký vliv (změní jí znaménko). Neznáme nějakou funkci, kterou derivace moc nemění? (Ano, je to exponenciála.) Zkusme do rovnice dosadit $x = e^{\lambda t}$ a upravit:

$$0 = \lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(\lambda^2 + 1).$$

V rovnici můžeme podělit (nenulovým) výrazem $e^{\lambda t}$ a dostaneme *charakteristický polynom rovnice*, $\lambda^2 + 1 = 0$, jehož řešením je $\pm i$. V následující části si ukážeme, jak tyto kořeny souvisí s hledáním řešení a jak nám mohou prozradit něco o jeho chování.

Definice. (Charakteristický polynom) Polynom $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ nazýváme *charakteristický polynom* diferenciální rovnice (z definice výše).

Věta. (Řešení homogenní rovnice)

(1) *Maximální řešení homogenní rovnice jsou definovaná na celém $\mathbb{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbb{C}^n$ dimenze n.*

(2) *Mějme $t_0 \in (a,b)$ a $a_{n-1} = k_{n-1}, \dots, a_0 = k_0$, kde k_i, $i \in \{1,\dots,n-1\}$, jsou reálná čísla (předepsali jsme počáteční podmínku v bodě t_0). Pak homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s touto počáteční podmínkou má právě jedno řešení.*

Věta. (Báze prostoru řešení homogenní rovnice)

(1) *Mějme homogenní diferenciální rovnici a λ kořen příslušného charakteristického polynomu násobnosti k. Pokud je λ reálný kořen, pak funkce $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ jsou řešeními rovnice. Je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ komplexní kořen, pak funkce $e^{\alpha t}\sin\beta t$, $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $te^{\alpha t}\sin\beta t$, $te^{\alpha t}\cos\beta t, \dots$ $t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$, $t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$ řeší uvažovanou rovnici.*

(2) *Mějme homogenní diferenciální rovnici a $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ její reálná vlastní čísla a $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_m$ její komplexní vlastní čísla s kladnou imaginární částí. Pak funkce příslušné těmto vlastním číslům z bodu (1) tvoří bázi prostoru řešení homogenní rovnice (tj. pro každé řešení rovnice existují reálné koeficienty takové, že toto řešení umíme napsat jako kombinaci prvků báze).*

Ukazuje se, že řešit homogenní rovnice s lineárními koeficienty není problém – najdeme kořeny charakteristického polynomu, najdeme k nim odpovídající funkce a vezmeme jejich lineární kombinaci.

Kořeny charakteristického polynomu (a případné exponenty v lineární kombinaci) nám však prozrazují ještě víc – rovněž říkají, jak se bude řešení chovat ve smyslu jeho velikosti (normy). Pokud je reálná část kořenu větší než jedna, pak odpovídající exponenciála poroste, bude-li menší než jedna, pak naopak půjde k nule. To se hodí, pokud člověk nepotřebuje znát řešení, ale zajímá ho pouze asymptotické chování.

Nehomogenní rovnice

Co se stane, když na pravé straně budeme mít něco zajímavějšího než nulu? *Bude sranda.* Ukážeme si metodu, kterou lze nehomogenní soustavy řešit, a také, že pro hezké funkce f máme na řešení dokonce vzoreček. Před tím vším si ještě řekneme něco o jednoznačnosti a vztahu k řešení příslušné homogenní úlohy.

Věta. (Jednoznačnost II) *Mějme $t_0 \in (a,b)$ a $a_{n-1} = k_{n-1}, \dots, a_0 = k_0$, kde k_i, $i \in \{1,\dots,n-1\}$, jsou reálná čísla (předepsali jsme počáteční podmínku v bodě t_0). Pak diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s počáteční podmínkou předepsanou výše má právě jedno řešení.*

Věta. (Řešení rovnice a partikulární řešení) *Nechť y_p je maximální řešení diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Pak funkce x je maximálním řešením diferenciální rovnice, pokud $x = x_p + x_h$, kde x_h je vhodné řešení příslušné homogenní rovnice.*

Z předchozích dvou vět plyne, že těžká část řešení nehomogenních soustav spočívá v tom najít/uhádnout jedno partikulární řešení, protože najít vhodné řešení homogenní úlohy je snadné.

Příklad. (Motivační III) Nalezněte řešení rovnice $x'' + x = e^{2t}$ s počáteční podmínkou $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Řešení. Jedna z věcí, která člověka napadne, je zkusit dosadit Ce^{kt} a zkusit vyřešit rovnici pro C a k. Po nějakém derivování dostaneme $C = \frac{1}{5}$, $k = 2$. Tedy $x_p = \frac{1}{5}e^{2t}$. Dále z motivačního příkladu II víme, že všechna řešení příslušné homogenní soustavy jsou tvaru $a \sin t + b \cos t$. Nyní použijeme počáteční podmínky pro $u(p) = \frac{1}{5}e^{2t} + a \sin t + b \cos t$. Dostaneme $a = -\frac{2}{5}$ a $b = -\frac{1}{5}$. Takže hledané řešení je $y = \frac{1}{5}(e^{2t} - 2 \sin t - \cos t)$.

Pro rovnice, ve kterých na pravé straně vystupuje funkce složená z *éček*, sinů, kosinů a polynomů, máme víc – máme vzoreček pro jejich partikulární řešení!

Věta. (Speciální pravá strana) *Nechť $f(t) = e^{\mu t}(P(t) \cos \gamma t + Q(t) \sin \gamma t)$, kde μ, $\gamma \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Označme m násobnost čísla $\mu + i\gamma$ jakožto kořenu charakteristického polynomu příslušné rovnice a d maximum ze stupňů polynomů P a Q.*

Pak existuje řešení diferenciální rovnice ve tvaru $y_p(t) = t^m e^{\mu t}(R(t) \cos \gamma t + S(t) \sin \gamma t)$, kde polynomy R a S mají stupeň nejvýše d.

Nakonec slibovaná metoda na řešení dalších příkladů – variace konstant. Idea metody spočívá v tom, že si vhodně zvolíme tvar řešení. Chtěli bychom partikulární řešení vyjádřit jako kombinaci báze řešení příslušné homogenní soustavy (protože tuto bázi umíme najít snadno) a aby se tento tvar choval „hezky“ vzhledem k derivování (tj. aby se nám moc nezesložitil).

Uvažujeme-li bázi řešení homogenní rovnice $(x_1, \dots, x_n)$, pak řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $x_p = a_1(t)x_1(t) + \cdots + a_n(t)x_n(t)$, kde a_i jsou diferencovatelné funkce. Dále budeme chtít, aby pro $k = 0, \dots, n-2$ platilo, že $\sum_{i=1}^n a_i'(t)x_i^{(k)}(t) = 0$. Z těchto předpokladů a výchozí rovnice pak dostaneme, že $\sum_{i=1}^n a_i'(t)x_i^{(n)}(t) = f(t)$. Nakonec z těchto rovnic určíme funkce a_i.

Příklad. (Motivační IV) Najděte libovolné řešení rovnice $x'' + 4x' + 3x = e^{2t}$.

Řešení. Nejdříve nalezneme bázi řešení homogenní rovnice $x'' + 4x' + 3x = 0$. Charakteristický polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 3$ má kořeny -1 a -3, tedy funkce e^{-t} a e^{-3t} tvoří bázi řešení.

Dále hledáme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $x_p = ae^{-t} + be^{-3t}$. Víme, že $x_p' = (a'e^{-t} + b'e^{-3t}) - (ae^{-t} + 3be^{-3t})$. Odsud máme první podmínku $a'e^{-t} + b'e^{-3t} = 0$.

Derivujeme dále, $x_p'' = (x_p')' = -(a'e^{-t} + 3b'e^{-3t}) + (ae^{-t} + 9be^{-3t})$. Vzhledem k tomu, že $n = 2$, tak zde už nemůžeme chtít, aby první závorka byla nulová.

Dosadíme to, co jsme spočítali, do původní rovnice a upravíme:

$$x_p'' + 4x_p' + 3x_p = ae^{-t}(1 - 4 + 3) + be^{-3t}(9 - 12 + 3) + (a'e^{-t} + 3b'e^{-3t}) = e^{2t}.$$

To, že nám v rovnici zbyly pouze členy, které obsahují první derivaci a nebo b a druhou derivaci funkcí z báze řešení homogenní rovnice, není náhoda (stane se tak vždycky díky tvaru x_p). Nyní zbývá vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} a'e^{-t} + b'e^{-3t} &= 0, \\ -a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} &= e^{2t}. \end{aligned}$$

Ve zkratce, přičteme první rovnici k druhé a po úpravách dostaneme, že $b' = \frac{-e^{5t}}{2}$, pak z první rovnice dostaneme, že $a' = \frac{e^{-3t}}{2}$. Tedy jedno z možných řešení je $(a, b) = \left(\frac{e^{-3t}}{6}, \frac{-e^{5t}}{10}\right)$ (řešením je libovolná dvojice, která z této vznikne přičtením libovolných reálných čísel k a i b). Nakonec dosadíme do předpisu funkce x_p a dostaneme $x_p = ae^{-t} + be^{-3t} = \frac{1}{15}e^{2t}$.

Literatura a zdroje

[1] Miroslav Zelený: *Matematická analýza 3*, MFF UK, 2016.

Vězni, domorodci a kouzelníci

Jakub Löwit

Abstrakt. Příspěvek sestává z hromady pěkných a často i notně trikových úloh na pomezí logiky a kombinatoriky, jejichž sjednocující myšlenkou je „kdo může co vědět“.

Budeme z různých úhlů zkoumat, co znamená „něco vědět“. Přesněji, bude nás zajímat, v čem všem může být skrytá šikovná informace – a to buď sama od sebe, nebo díky vychytralé domluvě.

Rozhovory

Začneme několika logickými úlohami, které jsou velmi dynamické. Rozmyslet si, co kdo ve kterou chvíli může vědět, totiž vůbec nemusí být triviální. Motto:

Tři logici přijdou do hospody.

„Dáte si všichni tři pivo?“

„Nevím…“

„Nevím…“

„Ano.“

Příklad 1. Albert a Bernard se snaží zjistit, kdy má Cheryl narozeniny. Už vědí, že je to některý z následujících deseti dnů: 15. květen, 16. květen, 19. květen, 17. červen, 18. červen, 14. červenec, 16. červenec, 14. srpen, 15. srpen, 17. srpen.

Když se všichni sešli, Cheryl pošeptala Albertovi, který měsíc je ten správný. Potom pošeptala Bernardovi správný den.

Cheryl: *„Už víte?“*

Albert: *„Ne, neví to ani jeden z nás!“*

Bernard: *„Teď už to ale vím!“*

Albert: *„Tak já teda taky.“*

Kdy má Cheryl narozeniny?

Příklad 2. V kruhu sedělo dvanáct bystrých mužů a každému z nich byla náhodně rozdána jedna z dvanácti karet – devíti prázdných a tří význačných označených jako J, Q a K. Každý z mužů se podíval na svou kartu a poté ji poslal sousedovi po pravé ruce. Takto se pokračovalo dále, přičemž po každém zhlédnutí karty byli všichni v jeden okamžik vyzváni, aby se přihlásili, pokud vědí, kdo právě drží kterou význačnou kartu. V prvních čtyřech kolech se nepřihlásil nikdo a po spatření páté karty zvedl ruku jeden člověk. Kolik lidí se přihlásilo po spatření šesté karty? A kolik po spatření sedmé? (Náboj)

Příklad 3. Mirek pověděl Kennymu a Pavlovi každému jedno přirozené číslo a dále jim sdělil, že jejich čísla jsou různá a jejich součtem je dvojciferné číslo. Pak se mezi Kennym a Pavlem odehrála následující konverzace:

Kenny: *„Nedovedu určit, kdo z nás má větší číslo."*

Pavel: *„Ani já to nedovedu určit, ale prozradím, že moje číslo je dělitelné* 17.*"*

Kenny: *„Aha, tak teď už umím jednoznačně určit, jaký je součet našich čísel."*

Určete součet jejich čísel. (Náboj)

Příklad 4. Anna má číslo a, Bill má číslo b, přičemž a, b jsou přirozená čísla lišící se o 1.

Anna: *„Neznám tvé číslo."*

Bill: *„Já taky ne."*

Anna: *„Já už ano."*

Bill: *„Já také."*

Najděte číslo, které některý z nich měl.

Příklad 5. Anna, Bill a Cath mají na čelech přilepené karty s přirozenými čísly. Přitom vědí, že součet dvou těchto čísel dává to třetí.

Anna: *„Neznám své číslo."*

Bill: *„Já taky ne."*

Cath: *„Já taky ne."*

Anna: *„Ha, moje číslo je* 50.*"*

Jaká jsou ta zbylá dvě?

Příklad 6. Je známo, že a, b jsou přirozená čísla splňující $1 < a < b$, navíc $a + b \leq 100$. Pavel zná součin ab a Sára součet $a + b$.

Pavel: *„Neznám ta původní čísla."*

Sára: *„Věděla jsem, že je neznáš.“*
Pavel: *„Už je znám.“*
Sára: *„Já už taky.“*

Příklad 7. Dostali jste se do finále televizní soutěže. Před sebou vidíte troje zavřené dveře. Za jedněmi je nové auto, za zbylými dvěma koza. Můžete ukázat na jedny dveře. Pak moderátor otevře jiné, za nimiž bude koza, a dá vám možnost vaši dřívější volbu dveří změnit. Vyplatí se to?[1] (Monty Hall)

Příklad 8. V jihoafrickém kmenu Bongo-bongo má každý domorodec na čele modrou nebo červenou tečku. Tisíciletá tradice praví, že kdykoli někdo zjistí barvu své tečky, musí si následující den vzít život. Jednou přijde do vesnice cizinec a na veřejném shromáždění sdělí všem svůj objev: „Někdo má na čele modrou tečku.“ Ukažte, že tím odstartuje vlnu sebevražd, která skončí smrtí úplně všech domorodců.
(folklor)

Vězni

Vězňům vždy zadáme na první pohled skoro nemožný úkol. Oproti předchozím úlohám je tu ale jeden velký rozdíl: vychytralí vězni si předem mohou domluvit strategii. Mají šanci?

Příklad 9. Sto vězňů stojí v řadě. Každý má na hlavě černý nebo bílý klobouk a vidí všechny před sebou. Kat jde postupně odzadu a ptá se na barvu klobouku. Když řekne vězeň svou, přežije, jinak je popraven. Všichni slyší odpovědi všech ostatních i jejich osudy. Navrhněte taktiku, při které co nejpravděpodobněji přežije co nejvíce vězňů, pokud se na ní mohou domluvit předem. (folklor)

Příklad 10. Řešte předchozí příklad pro klobouky n barev.

Příklad 11. Deset vězňů sedí v kruhu, každý má na čele napsané číslo od 1 do 10 (ne nutně každý jiné). Každý vidí čísla všech ostatních. Na povel všichni současně vykřiknou číslo. Pokud někdo vykřikne to své, jsou všichni osvobozeni. Navrhněte taktiku, při které budou vězni jistě osvobozeni, pokud se mohou domluvit předem.
(folklor)

Příklad 12. Ve vězení sedí 100 vězňů. Ředitel věznice se rozhodl, že jim dá šanci na svobodu. Do 100 očíslovaných šuplíků ve své obrovské kanceláři proto náhodně umístil jména vězňů, do každého šuplíku právě jedno. Vězni budou jeden po druhém chodit do kanceláře. Každý z nich se může postupně podívat do 50 šuplíků. Pokud se všem vězňům povede nalézt svá jména, jsou propuštěni, jinak je ředitel nechá popravit. Před začátkem hry se navíc mohou domluvit. Vymyslete pro vězně takovou strategii, aby jejich šance na propuštění byla alespoň $1-\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100}\right)>\frac{3}{10}$.
(folklor)

[1] Auto je lepší než koza.

Příklad 13. V kruhu sedí n vězňů. Kouzelník si u každého hodí spravedlivou mincí a podle toho mu dá červený, nebo modrý klobouk. Každý vězeň vidí klobouky ostatních, ale ne ten svůj. Poté všichni najednou řeknou nějaká reálná čísla. Vyhrají právě tehdy, když bude součet jejich čísel kladný a červených klobouků bude sudý počet, nebo pokud bude součet jejich čísel záporný a červených klobouků bude lichý počet. Mohou si ovšem předem domluvit strategii. V závislosti na n nalezněte největší možné p, pro které existuje strategie taková, že vězni vyhrají s pravděpodobností p. (iKS–5–C7)

Příklad 14. V kruhu sedí $n \geq 3$ vězňů. Soudce si u každého vězně hodí spravedlivou mincí a podle toho mu dá buď modrý, nebo červený klobouk. Každý z vězňů pak soudci buď pošeptá „červený“, „modrý“, nebo „nevím“. Aby nebyli odsouzeni, musí se alespoň jeden vězeň trefit a žádný se nesmí splést. Navrhněte strategii, při které uspějí s maximální pravděpodobností.

Kouzelníci

Nyní se dostáváme k úlohám, ve kterých vystupují různí kouzelníci se svými promyšlenými triky.

Příklad 15. Kouzelník Arutyun a jeho asistent Amayak předvedou následující supertrik. V místnosti je ruleta. Diváci na ní vyznačí 2007 bodů a Amayak jeden z nich smaže. Potom se Arutyun vrátí do místnosti a uhodne půlkružnici, na které smazaný bod ležel. Jak mohou tento trik provést? (ARO 2007)

Příklad 16. Dva kouzelníci Adam a Bonifác byli uvězněni a žalářník Emil s nimi chce hrát ďábelskou hru. Na stole v cele je pevně postavena šachovnice $n \times n$. Emil odvede Bonifáce pryč a po svém návratu na každé políčko šachovnice položí minci, na jejíž vrchní straně je buď panna, nebo orel. Následně ukáže Adamovi své nejoblíbenější políčko a Adam pak musí otočit právě jednu minci. Poté je Bonifác přiveden zpět. Uhodne-li Bonifác Emilovo oblíbené políčko, budou oba kouzelníci propuštěni. Pro která n lze Emila přelstít? (ITAMO 2013)

Příklad 17. Arutyun a Amayak ukazují další zázračný trik. Diváci napíší na tabuli posloupnost n cifer $0, 1, \dots, 9$ a Amayak dvě sousední zakryje černým diskem. Posléze Arutyun přijde a dvě zakryté číslice bezchybně uhodne včetně jejich pořadí. Pro které nejmenší n takový trik mohou předvádět? (ARO 2007)

Příklad 18. Jsou dána přirozená n a k splňující $n \geq k \geq 2$. Hrajeme hru proti zlému čaroději. Ten má $2n$ pexesových karet, tj. balíček obsahuje n dvojic stejných karet. Tyto karty čaroděj umístí do řady, čímž hra začíná. V každém tahu můžeme otočit k karet. Pokud mezi nimi jsou dvě stejné, okamžitě vyhráváme. V opačném případě je čaroděj podle své nálady nějak zamíchá a umístí zpět do řady. Pro které hodnoty k umíme určitě v konečném počtu tahů vyhrát? (USAMO 2016)

Příklad 19. Kenny s Pepou se domluvili, že večer při ohni předvedou trik. Pepa nechal Olina vybrat pět písní ze zpěvníku se 124 písněmi. Sám pak z těchto pěti písní vybral čtyři a určil, v jakém pořadí se budou hrát. Na to zavolali Kennyho a ony čtyři písně mu v daném pořadí zazpívali. Jakmile dozpívali, Kenny ihned začal zpívat zbývající pátou. Jak to Pepa s Kennym mohli udělat? (PraSe-30-1-8)

Kódy

Plynule pokračujme v řešení dalších problémů, ve kterých je také potřeba najít nějaké chytré kódování.

Příklad 20. Na obvodu rulety jsou na n pozicích napsané cifry 0 a 1. Většina kola je však skrytá, vidět je jen k následujících pozic. Cifry jsou ale na kole napsané tak chytře, že z těchto k cifer vždy umíme poznat, jak je ruleta natočená. V závislosti na k nalezněte maximální n, pro které je to možné.

Příklad 21. Dva dobří přátelé si píší zprávy sestávající vždy přesně z k písmen n-písmenné abecedy. Aby se nemohlo djít k žádnému nedorozumění, musí se každá dvě používaná slova lišit alespoň na dvou pozicích. Ukažte, že mohou používat k^{n-1} různých slov. (KMS 05/06 Z3 12)

Příklad 22. Medvěd měl sen o polynomu p s nezápornými celými koeficienty. Kdykoli Liška řekne číslo z, Medvěd jí prozradí hodnotu $p(z)$. Kolik nejméně otázek Liška potřebuje k tomu, aby určila Medvědův polynom? (PraSe-36-4-6)

Příklad 23. Dva ruští a jeden americký špion se potkali v Moskvě u partičky karet. Mají sedm různých karet, každý Rus si lízne tři a na Američana zbude jen jedna. Rusové by rádi ještě před začátkem partie zjistili, kdo drží které karty. To chtějí provést tak, aby si Američan stále nebyl jistý vlastníkem žádné další karty. Může mít ruská rozvědka takový protokol, který jim to umožní bez ohledu na to, zda jej Američan zná? (Moskva 2000)

Nekonečná jízda

Zkusme nakonec řešit další hádanky s vězni, ve kterých však bude vystupovat nějaké to nekonečno[2].

Příklad 24. Ve vězení sedí 100 vězňů, čas od času vezme bachař některého z nich na výslech. Ve výslechové místnosti je jen jedna žárovka s vypínačem, který vězni mohou přepínat. Kterýkoli vězeň může při výslechu prohlásit: „Už jsme byli všichni vyslechnuti, takže nás nemáte důvod dál zadržovat!“ Je-li to pravda, budou všichni propuštěni, v opačném případě ihned popraveni. Bachař si přitom musí výslechy předem naplánovat tak, aby každého vězně potenciálně vyslýchal nekonečněkrát. Mohou se vězni bezpečně dostat na svobodu?

Příklad 25. Řešte předchozí úlohu s následující obtíží: Předem je dáno přirozené k a bachař smí až k-krát změnit stav žárovky.

[2] Kdykoli to hraje roli, věříme v *axiom výběru*.

Předchozí příklad má velmi zajímavá zobecnění, která vězňům umožňují skoro libovolnou komunikaci. My se však raději pustíme do dalších příkladů jiného rázu.

Příklad 26. Za sebou sedí prasátka postupně očíslovaná přirozenými čísly, přičemž každé vidí všechny před sebou. Každé má na hlavě klobouk v nějakém odstínu šedé[3]. Naráz všechna musí vykřiknout barvu svého klobouku. Existuje taková strategie, aby se spletlo pouze konečně mnoho z nich? (folklor)

Příklad 27. Král má ve sklepení svého hradu za každé přirozené číslo právě jednu truhlu s hromadou zlata nějaké reálné hmotnosti. Jednoho dne zadal svým 100 komorníkům nelehký úkol. Komorníci budou po jednom chodit do sklepa. Každý komorník se pak může podívat do libovolně mnoha truhlic, ale ne do všech. Při výstupu ze sklepa pak musí oznámit číslo nějaké truhly, kterou neotevřel, a váhu zlata v ní. Pokud se splete nejvýše jeden komorník, budou všichni bohatě odměněni. Můžou se komorníci předem domluvit tak, aby to zvládli?

Příklad 28. V řadě stojí vězni, kteří jsou postupně označeni přirozenými čísly, přičemž každý vidí právě vězně s vyššími čísly. Každý vězeň má na zádech svého oblečení $k = 0, 1, \ldots, n$ černých proužků. Dozorce postupně prochází kolem a ptá se vězňů na počet jejich proužků. Každý z vězňů přitom slyší odpovědi svých předchůdců. Kdo odpoví správně, je propuštěn. Zachraňte jich co nejvíc!

Příklad 29. Štěpán poslal Filipovi a Radovi dva provázky spolu s informací, jak jsou dlouhé. Poté se odehrála následující mailová konverzace:

Štěpán: *„Poslal jsem vám dva různě dlouhé provázky, jejichž délka v centimetrech je*

$$a - \frac{1}{3^b} - \frac{1}{3^{b+c+1}},$$

kde a, b, c jsou přirozená čísla."

Filip: *„To je zajímavé. Ale neumím říct, který z nich je delší."*

Rado: *„Já taky ne."*

Filip: *„Já taky ne."*

Rado: *„Já taky ne."*

Štěpán: *„Je jedno, kolikrát si tohle řeknete, stejně nebudete vědět, čí je delší."*

Filip: *„To je fakt zajímavá informace. Ale pořád nevím, kdo má větší délku."*

Rado: *„Já taky ne."*

Filip: *„Já taky ne."*

Štěpán: *„Opět, je jedno, kolikrát si tohle řeknete, stejně nebudete vědět, který z provázků je delší."*

Filip: *„Ha. No, furt nevím, kdo má ten delší."*

Rado: *„Já taky ne."*

[3] Každý takový odstín odpovídá nějakému reálnému číslu z intervalu od 0 do 1.

Filip: *„Já taky ne.“*

Rado: *„Já taky ne.“*

Štěpán: *„Ve skutečnosti, je jedno, kolikrát uděláme tento malý rozhovůrek, kde budete cik-cak tvrdit, že nevíte, kdo má delší provázek, a já vám řeknu, že je jedno, kolikrát si to řeknete a že to stejně nezjistíte, protože to ani z tohoto prohlášení nezjistíte. Navíc, pokud bych zopakoval předchozí větu ještě jednou, byla by stále pravdivá. A to dokonce i kdybych ji zopakoval ne jednou, ale i dvakrát, třikrát, ba i tisíckrát.“*

Filip: *„To je fakt super informace. Ale pořád neumím říct, který z nich je delší.“*

Rado: *„Já taky ne.“*

Filip: *„Já taky ne.“*

Štěpán: *„Jo, pořád je jedno, kolikrát si teď navzájem řeknete, že to furt nevíte, pořád to nebudete vědět. A i když vám teď tuhle větu řeknu dvatisícesedmnáctkrát, pořád to vědět nebudete.“*

Filip: *„Zajímavé. Ale pořád nevím, kdo má větší kus.“*

Rado: *„Já taky ne.“*

Filip: *„Já taky ne.“*

Rado: *„Já taky ne.“*

Filip: *„Ahá! Tak už vím, čí provázek je delší!“*

Jak dlouhý byl Filipův provázek? (iKS-7-C5)

Návody

1. Rozebírejte.

2. Po prvním zvednutí ruky ostatní okamžitě vědí, že tento člověk držel jako první a jako pátou význačné karty.

3. První dvě věty jim dávají pouze čísla 17 a 34, díky třetí větě jsou různá, součet je tedy 51.

4. První otázka zakazuje 1 pro Annu, druhá $1, 2$ pro Billa. Potom ale musel mít jeden z nich 3.

5. Řešení je $(a, b, c) = (50, 20, 30)$.

6. Vyjde 4 a 13, ale dá to hodně rozebírací práce.

7. Jen koza by nezměnila pravděpodobnost výhry z $\frac{1}{3}$ na $\frac{1}{2}\dots$

8. Indukce dle počtu modrých teček.

9. Parita, splést se může jen první.

10. Počítání modulo n, splést se může jen první.

11. Každý si zabere jeden součet modulo 10.

12. Vězni si mohou označit šuplíky svými jmény a podle nich je procházet.

13. Nalezněte strategii, která se rozbije pouze tehdy, když jsou všechny klobouky červené.

14. Představte si n-dimenzionální krychli. Vymyslete strategii, která buď funguje, nebo se spletou všichni.

15. Orientujte si kružnici a soustřeďte se na nejdelší oblouk.

16. Jde to pouze pro $n = 2^k$. Adam a Bonifác si čtverečky označí čísly ve dvojkové soustavě a chytře využijí jejich XOR. Pro jiná n kódování nevyjde kvůli dělitelnosti.

17. Díky nutnosti jednoznačného kódování odhadněte $n \geq 101$. Pro 101 si hrajte se součtem sudých a součtem lichých pozic modulo 10.

18. V jednom případě si vyrobte karty, které znáte. V druhém případě to zvolte tak, aby to nevyšlo.

19. Je třeba z každé pětice písní odebrat jednu tak, abychom každou čtveřici dostali 24krát. Z každé pětice seřazených písní odeberte tolikátou, jaký dává jejich součet zbytek modulo 5.

20. Uvažte orientovaný graf, jehož vrcholy jsou $(k-1)$-tice nul a jedniček a hrany odpovídají jejich překrývání na $(k-2)$ následujících pozicích. Všimněte si, že vyrobený graf je eulerovský.

21. Vyberte ta slova, jejichž součet písmen je stejný modulo k.

22. Dvě otázky stačí – nejdřív se zeptáme na $p(1)$ a posléze na hodnotu v tak obrovském čísle k, abychom měli k dispozici jednoznačný zápis v soustavě o základu k.

23. Vyzradí součet své ruky modulo 7, což stále neurčuje pozici žádné z karet.

24. Vězni si mezi sebou zvolí počtáře, kterému předají zprávu o svém výslechu rozsvícením zhasnuté žárovky.

25. Každý vězeň pošle $2k+1$ rozsvícení počtáři, který nahlásí úspěch po $100(2k+1)-k$ spočtených žárovkách.

26. Z každé skupinky posloupností, které se od nějakého indexu shodují, se prasátka (vybavená axiomem výběru) domluví na jednom reprezentantovi.

27. Vyřešte si to nejdřív pro dva.

28. Každé posloupnosti přiřaďte nějaký zbytek modulo $n+1$ tak, aby se posloupnosti s konečným počtem rozdílů lišily právě o součet těchto rozdílů.

29. Délka provázků odpovídá lexikografickému uspořádání čísel a, b, c. Choďte ve třírozměrné krychličkové mřížce se souřadnicemi odpovídajícím (a, b, c).

Šachovnice

Viki Němeček

Abstrakt. Kolik nejvíce se dá do tabulky 5×20 umístit čtverců 2×2 tak, aby jejich hrany ležely na hranách políček? Intuice by radila, že maximálně 20, přestože prosté vydělení obsahů vede k číslu 25. Jak pomocí obarvení ukázat, že je řešením opravdu 20, se dozvíte v tomto příspěvku.

Úmluva. Tabulkou, resp. šachovnicí $x \times y$ budeme rozumět tabulku resp. šachovnici, která má x sloupců a y řádků.

Úmluva. Pokud se budeme ptát, zda lze tabulku pokrýt nějakými útvary, či kolik daných útvarů se na ni vejde, máme na mysli pouze ta rozmístění, kde hrany útvarů leží na hranách políček tabulky.

Řešení úlohy z abstraktu. Tabulku si obarvíme černou a bílou barvou tak, že černou barvu bude mít druhý a čtvrtý řádek, bílou potom první, třetí a pátý. Nyní si jen všimneme, že každý čtverec 2×2 musí obsahovat právě dvě černá a právě dvě bílá pole. Černých polí je ale pouze 40, tedy čtverců můžeme umístit nejvýše 20. Že je dvacet opravdu řešením této úlohy už snadno ukážeme konstrukcí.

Velkou skupinou úloh řešitelných pomocí obarvení je pokrývání. V těchto úlohách máme typicky čtvercovou či obdélníkovou tabulku, ve které dokonce některá políčka mohou chybět, a máme za úkol rozhodnout, zda ji lze vyplnit útvary daného typu. Než se ale podíváme na úlohy, bude se nám hodit ještě několik pojmů.

Úmluva. Standardním obarvením tabulky budeme mít na mysli obarvení šachovnicové. Tedy takové, kde levé horní pole je bílé, a dále každé bílé pole sousedí jen s černými poli a naopak.

Definice. Objektu, který vznikne postupným spojováním čtverců, říkáme *polyomino.* Chceme-li zdůraznit, že se skládá právě z n čtverečků, použijeme termín *n-polyomino.* Speciálně n-polyomina pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ nazveme po řadě *monomino, domino, triomino, tetromino, pentomino.*

Pro kostky tetromina používáme označení I, L, O, S, T, což připomíná všech 5 typů kostek. Podobně u triomin máme I a L.

Příklad 1. Lze vyplnit tabulku 8×8 s chybějícími dvěma protějšími rohy dominy?

Příklad 2. Lze vyplnit tabulku 10×10 T-tetrominy?

Příklad 3. Lze šachovnici 7×7 přeskákat koněm tak, abychom na každé pole šlápli právě jednou a skončili na místě, kde jsme začali?

Příklad 4. Pro která přirozená n lze tabulku $2^n \times 2^n$ s jedním chybějícím rohem vyplnit L-triominy?

Příklad 5. Je možné z pěti tetromin (od každého druhu jedno) vytvořit obdélník?

Příklad 6. Lze vyplnit tabulku 10×10 I-tetrominy?

Příklad 7. Lze vyplnit tabulku 10×10, z níž odřízneme jeden 5×5 velký roh, I-triominy?

Příklad 8. Kolik lze nejvíce umístit do tabulky 8×8 útvarů vyrobených ze tří čtverečků tak, že se první a druhý čtvereček dotýkají rohem, druhý a třetí taktéž a ve druhém čtverečku se jedná o protější rohy?

Příklad 9. Dlaždič vydláždil obdélníkovou podlahu pomocí O-tetromin a I-tetromin. Pak se mu ale jedna z položených dlaždiček rozbila. Bohužel mu už zbyla jen jedna další dlaždička, a ta je druhého typu, než ta rozbitá. Ukažte, že nelze položené dlaždičky přeskládat tak, aby dlaždič podlahu opravil pomocí zbylé dlažičky.

Příklad 10. Tabulce 7×7 chybí jedno políčko. Pro které pozice chybějícího políčka již lze zbytek tabulky pokrýt I-triominy?

Méně evidentní aplikace

Příklad 11. Na šachovnici 8×8 jsou zapsána čísla $1, \ldots, 64$, přičemž každá dvě po sobě jdoucí čísla leží na políčkách sousedících hranou. Jaký je nejmenší možný součet čísel na diagonále, která spojuje bílá rohová políčka?

Příklad 12. Michal a Tonda hrají na tabulce 5×5 následující hru: Michal ve svém tahu vždy položí jedno monomino, Tonda jedno triomino. Pokud již Tonda nemůže táhnout, Michal položí monomina na všechna prázdná pole. Hru vyhrává ten, jehož polyomina zabírají více čtverečků. Rozhodněte, kdo bez ohledu na to, který z kluků začíná, vyhraje, pokud Tondova triomina jsou:

a) I-triomina

b) L-triomina

Příklad 13. Michal a Rado hráli hru. Nejprve k sobě stranou slepili dva rovnostranné trojúhelníky a potom na ně nakreslili pravidelnou trojúhelníkovou síť tak, že políčka měla n-krát kratší stranu než původní trojúhelníky. Následně si stoupli do protilehlých vrcholových políček. V každém tahu si každý z kluků vybral nějaké políčko, které sousedilo stranou s políčkem, na němž právě stál, a posunul se na něj. Hráči se střídali po tahu a Michal začínal. Předem se dohodli, že zvítězí ten, kdo buď jako první stoupne na políčko, kde už stojí ten druhý, nebo jako první dorazí na místo, odkud ten druhý vyrážel. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii.

Příklad 14. Na šachovnici stojí dva nerozlišitelní princové[1]. V tazích se nemusí střídat. Existuje taková posloupnost povolených tahů, že princové navštíví každou možnou polohu právě jednou?

Nebarvící úlohy na šachovnici

Příklad 15.

a) Kolik nejvíce po dvou se neohrožujících králů lze umístit na šachovnici $2n \times 2n$?

b) Ukažte, že takových rozmístění je méně, než $(n+1)^{2n}$, pro $n > 1$ dokonce ostře.

Příklad 16. Na každém políčku šachovnice o rozměrech 8×8 sedí jedna beruška. Když Štěpán zapíská, přesune se každá beruška na některé políčko, které stranou sousedí s políčkem, na němž byla dosud. Kolik nejvíce políček může být po Štěpánově zapískání volných?

Příklad 17. Na šachovnici 2015×2015 stálo 2015 věží, z nichž se žádné dvě neohrožovaly. Náhle se všechny proměnily v koně, udělaly jeden tah jako koně a proměnily se zpět ve věže. Dokažte, že nyní se nutně nějaké dvě z nich ohrožují.

Návody

1. Tabulka má při standardním obarvení různý počet černých a bílých polí.

2. Pokud by tabulku vyplnit šlo, tetromin by byl lichý počet. Co z toho vyplývá?

3. Kůň při každém tahu změní barvu pole, na němž se nachází. Cesta má ale lichou délku.

4. Pro všechna. Dokažte indukcí.

5. Opět nám pomůže standardní obarvení.

6. Najděte množinu políček, kterých nebude 25, ale ze kterých bude muset každé tetromino v případném pokrytí právě jedno obsahovat. Diagonála je dobrý začátek.

7. Podobně jako předchozí příklad.

8. Obarvěte si třetí a šestý řádek.

9. Obarvěte si pole s oběma souřadnicemi sudými.

10. Najděte dvě různá (vůči sobě symetrická) obarvení taková, že kdybychom pokrývali tabulku triominy celou, muselo by každé triomino obsahovat právě jedno barevné pole. Barevných polí přitom v každém z nich bude 17. Pak ukažte, že pro libovolné pole, které je barevné v obou obarveních, už rozmístění existuje.

11. Všimneme si, že celá jedna půlka šachovnice musí být v okamžiku, kdy zaplníme poslední pole na diagonále, již vyplněna. Musí být ale zaplněno maximálně o jedno bílé pole více, než kolik je zaplněných černých.

[1] Princ je figurka, která může táhnout na libovolné hranou sousedící pole, tedy král bez diagonálních tahů.

12. V části **a)** zkuste opět najít množinu polí takovou, že jich bude nejvýše osm a přitom každé triomino musí alespoň jedno obsahovat. V části **b)** vám obarvování již nejspíše nepomůže, zkuste některý z klasických triků z teorie her. Například vymyslete, jak každému Michalově tahu přiřadit Tondův tah tak, aby vždy bylo alespoň 5 triomin umístěno.

13. Tentokrát nám opět bude stačit standardní obarvení.

14. Podívejte se, kolik je pozic, v nichž při standardním obarvení stojí princové na stejně, resp. různě barevných polích.

15. Pruhy $2 \times 2n$ a Dirichlet. V části **b)** zkuste úlohu nejprve vyřešit pro tabulku 2×2 a potom pro $2n \times 2$.

16. Rozdělte si šachovnici na 10 oblastí. Dokažte, že v každé z nich jsou 2 berušky, které ji neopustí a které neskončí na stejných polích.

17. Podívejte se na součet souřadnic všech věží.

Literatura a zdroje

[1] Anička Doležalová: *Dláždění a obarvování*, Sklené, 2015.

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat Aničce Doležalové, z jejíhož příspěvku jsem převzal přibližně polovinu úloh.

Ciferné součty

Jáchym Solecký

Abstrakt. V tomto příspěvku se podíváme na různé typy úloh obsahující ciferné součty a ukážeme si techniky, které nám s jejich řešením pomůžou. Na konci se podíváme i na jednu vlastnost ciferných součtů v jiných soustavách.

Ciferné součty se v olympiádních úlohách neobjevují často, ale jednou za čas je v nějaké úloze najdete. Obecně není mnoho typů úloh, které lze na ciferné součty vymyslet, a tak tady (až na ty nejbrutálnější) projdeme téměř všechny.

Nejprve ale přiblížíme, co přesně znamená ciferný součet a jak ho v tomto příspěvku budeme značit.

Definice. Ciferným součtem čísla n rozumíme číslo, které dostaneme sečtením všech cifer čísla n v jeho desítkovém zápisu. Tedy, pokud desítkový zápis čísla n je $\overline{a_n \ldots a_0}$, tj. $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, pak jeho ciferný součet je $S(n) = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_0$.

Ciferný součet čísla n budeme značit $S(n)$.

Příklad 1. Nechť d je počet cifer v desítkovém zápise čísla n. Pokud označíme n_k číslo, které vznikne smazáním posledních k cifer z čísla n, dokažte vztah

$$n = S(n) + 9n_1 + 9n_2 + \cdots + 9n_{d-1}$$

(APMO 2001)

Písemné sčítání, přechod přes desítku

Většina technik, které budeme používat, je poměrně intuitivní a my začneme tou nejintuitivnější – co se stane při písemném sčítání s ciferným součtem v závislosti na přechodech přes desítku.

Příklad 2. Najděte číslo n, pro které jsou $S(n)$ i $S(n+1)$ dělitelná sedmi.
(PraSe 36-7-3)

Příklad 3. Mějme dáno přirozené číslo n, jehož cifry jsou ostře rostoucí zleva doprava. Určete ciferný součet čísla $9n$. (PraSe 23-6-2)

Příklad 4. Skripta MFF jsou číslována šesticifernými čísly, přičemž jsou povoleny nuly na začátku. *Šťastnými* nazveme ta z nich, která mají stejný ciferný součet prvních tří a posledních tří cifer. Dokažte, že součet označení všech šťastných skript je dělitelný sedmi. (PraSe 23-6-3)

Příklad 5. Dokažte, že mezi 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly můžeme vždy najít nějaké, jehož ciferný součet je dělitelný 11. (Sovětská MO 1961)

Příklad 6. Najděte přirozená čísla a, b, c taková, že

$$S(a+b)<5, \quad S(b+c)<5, \quad S(c+a)<5, \quad S(a+b+c)>50.$$

(PraSe 32-1-6)

Nerovnosti

Pomocí písemného sčítání můžeme taky ukázat následující nerovnost, druhá pak následuje indukcí.

Tvrzení 7.
(1) $S(a+b) \leq S(a)+S(b)$
(2) $S(ab) \leq S(a)S(b)$.

Příklad 8. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n)$. (PraSe 23-6-1)

Příklad 9. Najděte největší možnou hodnotu poměru $\frac{S(n)}{S(16n)}$. (PraSe 35-2-8)

Kritéria dělitelnosti

Ciferné součty se dají občas použít jako jednoduchá kritéria dělitelnosti. Určitě všichni znáte například kritérium dělitelnosti devíti. Číslo n je dělitelné devíti právě tehdy, když je dělitelné devíti číslo $S(n)$. Co už není tak známé, je, že toto kritérium můžeme jedoduše rozšířit na všechny zbytky:

Tvrzení 10. $S(n) \equiv n \pmod 9$

Samozřejmě co platí pro devítku, platí taky pro všechny její dělitele, v tomto případě pro trojku, takže $S(n) \equiv n \pmod 3$.

Devítku jsme ale nevybrali jen tak náhodou. Tato kongruence platí právě proto, že základ naší soustavy (desítka) je kongruentní s 1 modulo 9. Takže pokud budeme pracovat s ciferným součty v jiné soustavě, například o základu q, pak naše kongruence bude platit pro $q-1$.

Příklad 11. Vezmeme přirozená čísla od jedné do bilionu a každé z nich postupně zredukujeme na jednociferné číslo tak, že jej opakovaně nahradíme jeho ciferným součtem. Dostaneme víc jedniček nebo dvojek? (Sovětská MO 1964)

Příklad 12. Existuje přirozené číslo n takové, že $S(2^n) = S(2^{n+1})$?

Příklad 13. Je možné najít 19 různých přirozených čísel takových, že jejich součet je 1999 a všechna mají stejný ciferný součet? (Ruská MO 1999)

Příklad 14. Najděte všechny možné hodnoty ciferného součtu druhých mocnin přirozených čísel. (domácí kolo MO 1993)

Příklad 15. Najděte všechna přirozená čísla d taková, že libovolné přirozené číslo dělitelné d zapsané ve 2003-kové soustavě má ciferný součet dělitelný d.
(PraSe 23-6-4)

Maximální ciferný součet

Principem této techniky je poznatek, že ze všech n-ciferných čísel má největší ciferný součet číslo $99\ldots9$. Můžeme tedy jednodušše shora omezit ciferný součet velkých čísel, u kterých známe počet cifer, přestože je neumíme jednoduše charakterizovat jako taková.

Příklad 16. Na tabuli je napsané číslo 2018^{2018}. Když jej 2018-krát nahradíme jeho ciferným součtem, jaké číslo nám na tabuli zbyde?

Příklad 17. Určete hodnotu výrazu $S(S(S(4444^{4444})))$. (IMO 1975)

Další všemožné úlohy

Příklad 18. Nalezněte číslo n, které je dělitelné $S(n) + 2017$. (PraSe 36-7-1)

Příklad 19. Mějme dáno přirozené číslo n takové, že $S(n) = 100$ a $S(44n) = 800$. Najděte hodnotu $S(3n)$. (Ruská MO 1999)

Příklad 20. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho čísel n takových, že $S(n) > 2018 \cdot S(3n)$.

Příklad 21. Nechť $f_1(n) = [S(n)]^2$ a $f_{k+1}(n) = f_1(f_k(n))$. Určete hodnotu výrazu $f_{1991}(2^{1990})$. (IMO Shortlist 1990)

Příklad 22. Nechť $f(n) = S(n) + n$. Existuje číslo takové, že $f(n) = 1980$? Dokažte, že pro každé přirozené číslo m můžeme najít číslo n takové, že buď $f(n) = m$ nebo $f(n) = m + 1$. (Sovětská MO 1980)

Příklad 23. Je dán polynom $P(n)$ s celočíselnými koeficienty. Označíme s_n ciferný součet čísla $P(n)$. Dokažte, že alespoň jedna hodnota se v posloupnosti s_n vyskytuje nekonečně mnohokrát. (Polská MO 1987)

Návody

1. Použij definici ciferného součtu.

2. O kolik se $S(n+1)$ sníží oproti $S(n)+1$ s každou cifrou, která při přičtení jedničky přejde přes desítku?

3. Které cifry při písemném sčítání přejdou přes desítku?

4. Jaký tvar mají šťastná čísla? Mají nějakého společného dělitele?

5. Co můžeme říct o ciferném součtu čísel dělitelných 10?

6. Uvažuj $x = a + b$, $y = b + c$ a $z = a + c$. Pak se podívej na $S(x + y + z)$.

8. Pro druhou nerovnost: co je $S(10n)$?

9. Co je $S(10000n)$?

11. Uvažuj mod 9.

12. Uvažuj mod 3.

13. Uvažuj mod 9 a pak zkus nejmenší varianty.

14. Uvažuj mod 9.

15. Hledáš čísla, která ve 2003-kové soustavě dávají kritérium dělitelnosti ciferným součtem.

16. Kolik maximálně cifer má 2018^{2018}? Jakou nejvyšší hodnotu tak může mít $S(2018^{2018})$?

17. Uvažuj horní odhad každého z ciferných součtů.

18. Nech $S(n) + 2017$ být mocninou desíti.

19. Uvažuj přechod přes desítku při násobení.

20. Najdi jedno a násob ho deseti. Abys ho našel, zkus vydělit velké číslo s malým ciferným součtem třema.

21. Najdi $f_{1998}(11)$. (Což byla mimochodem úloha na AIME 1988.)

22. Při přechodu přes desítku se $f(n)$ zmenší, ale přesto se dostane libovolně vysoko.

23. Násob mocninami deseti.

Literatura a zdroje

Přednášku jsem založil na příspěvku Lenky Slavíkové ze soustředění v Dobré Vodě 2010. Do něj jsem přidal několik dalších úloh, které se v posledních letech na toto téma objevily. Jinak jsem čerpal ze stránek PraSátka a různých dalších matematických olympiád a soutěží.

Tématické grafové úlohy

Kuba Svoboda

Abstrakt. Podíváme se na grafové úlohy, začneme zlehka stromy, abychom si zvykli na terminologii a práci s grafy, potom se podíváme na kliky a na hamiltonovské cesty. Projedeme úlohy od triviálních cvičení až po jednodušší IMO úlohy. Příspěvek je určen jako dvoupřednáškový.

Definice a úvod

Definice. *Graf* G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$ kde V je neprázdná množina a E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V. Množině V říkáme vrcholy a množině E říkáme hrany.

Definice. Dva vrcholy u a v jsou *sousední*, pokud $\{u, v\} \in E$, tedy vede mezi nimi hrana.

Definice. O vrcholu v řekneme, že má *stupeň* $\deg(v) = d$, pokud je obsažen právě v d hranách.

Definice. *Cesta* v grafu G je konečná posloupnost různých vrcholů $v_0, v_1, \ldots, v_t$, taková, že pro každé $0 < i \leq t$ platí $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$. Někdy minimálnímu takovému t říkáme *délka cesty*.

Definice. Pokud v cestě dovolíme opakovat vrcholy a hrany, dostaneme *sled*.

Definice. *Cyklus* v grafu G je konečná posloupnost různých vrcholů $v_0, V_1, \ldots, v_n$, tak že pro každé $0 < i \leq n$ platí $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ a zároveň $\{v_0, v_n\} \in E$.

Definice. Graf je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.

Definice. O grafu řekneme, že je *klika* nebo že je *úplný*, pokud pro každou dvojici vrcholů platí, že jsou spojeny hranou.

Definice. Graf G je *bipartitní*, pokud dokážeme vrcholy G rozdělit na dvě disjunktní množiny V_1,V_2 takové, že pro každou hranu $\{u, v\}$ platí, že $u \in V_1$ a $v \in V_2$.

Definice. Pro graf $G = (V, E)$ nazveme $\overline{G} = (V, \overline{E})$ *doplněk grafu*, kde pro každou dvojici vrcholů u, v platí $\{u, v\} \in E$ právě když $\{u, v\} \notin \overline{E}$.

Definice. Graf $G' = (V', E')$ se nazývá *podgrafem* G, pokud platí $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Věta. (Princip sudosti)

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Úloha 1. Nechť $\Delta(G)$ je největší stupeň mezi vrcholy G. Popište, jak vypadají grafy s $\Delta(G) \leq 2$ a $\Delta(G) = 2$.

Úloha 2. Nechť G je nesouvislý graf. Dokažte, že $\overline{G}$ je souvislý.

Úloha 3. Nechť G je souvislý graf. Dokažte, že dvě nejdelší cesty v grafu mají společný vrchol.

Úloha 4. Nechť G je souvislý. O hraně e řekneme, že je most, pokud by se jejím smazáním graf stal nesouvislý. Dokažte, že e není most právě tehdy, když leží na (libovolném) cyklu.

Úloha 5. Dokažte, že graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje cyklus liché délky.

Úloha 6. Nechť n je liché číslo. Chceme obarvit vrcholy a hrany úplného grafu na n vrcholech tak, aby každý vrchol měl jinou barvu, každý vrchol měl jinou barvu než všechny hrany, které z něj vycházejí a každé dvě hrany, které sdílí vrcholy měly jinou barvu. Kolik barev potřebujeme? (Itálie 2007)

Stromy a řídké grafy

Definice. Strom nazveme graf G, který je souvislý a zároveň neobsahuje žádný cyklus.

Úloha 7. Graf $G = (V, E)$ je souvislý:

(1) $|E| = |V| - 1$, právě když G je strom.
(2) Pro každou dvojici vrcholů z G existuje právě jedna cesta, která je spojuje, právě když G je strom.
(3) Odstraněním libovolné hrany z G se G stane nesouvislým, právě když G je strom.

Úloha 8. Ukažte, že každý strom obsahuje *list*, vrchol se stupněm jedna.

Úloha 9. Ukažte, že počet listů stromu je alespoň největší stupeň v grafu.

Úloha 10. Nechť $\delta \geq 2$ je minimální stupeň. Ukažte, že potom graf obsahuje kružnici na $\delta + 1$ vrcholech.

Úloha 11. 20 fotbalových týmů hrálo první den zápas vždy s nějakým jedním týmem a druhý den stejně tak. Ukažte, že existuje 10 týmů takových, že každá dvojice z nich ještě nehrála žádný zápas. (Turnaj měst 1986)

Kliky a husté grafy

Úloha 12. Ve škole se psal test o n otázkách. Pro každou otázku platilo, že ji odpověděli správně tři studenti a každou dvojici otázek odpověděl správně právě jeden student. Jaké největší mohlo být n? (Alberta 2007)

Úloha 13. Na party je $2n+1$ lidí. Pro každou podmnožinu nejvýše n lidí existuje někdo mimu tuto podmnožinu, který zná (znát se je symetrické) všechny lidi v této podmnožině. Dokažte, že existuje člověk, který zná všechny ostatní.

Úloha 14. (Turánova věta) Nechť graf G na n vrcholech neobsahuje kliku velikosti m. Ukažte, že potom počet hran je nejvýše

$$\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{m-1}\right).$$

Úloha 15. Na party je n lidí, každá dvojice se buď zná nebo ne. Ukažte, že každý zná stejný počet lidí, když platí:

(1) Nikdo nezná všechny ostatní.
(2) Každá dvojice, která se nezná, má právě jednoho společného přítele.
(3) Neexistuje trojice, ve které by znal každý každého.

Úloha 16. Ukažte, že pro každý graf existuje rozdělení vrcholů do dvou disjunktních množin V_1 a V_2 takových, že alespoň polovina hran vede mezi vrcholy z různých množin.

Úloha 17. Ukažte, že můžeme odstranit dva (nebo méně) vrcholů z grafu, pro který platí, že neobsahuje kliku velikosti 5 a každá dvojice klik velikosti 3 má alespoň jeden společný vrchol, tak, aby v něm nezbyla žádná klika na 3 vrcholech.
(IMO 2001 shortlist)

Úloha 18. Nechť G je graf bez čtyřcyklů. Ukažte, že platí $|E| \le \frac{|V|}{3}(1+\sqrt{4|V|-3})$.

Úloha 19. Na vesnici žije 120 lidí, kteří se vzájemně znají nebo neznají. O čtveřici řekneme, že je tajnůstkářská, když se právě dva lidi v oné čveřici znají. Najděte největší možný počet tajnůstkářských čtveřic. (IMO 2002 Shortlist)

Úloha 20. Mějme n soutěžících, kteří tvoří graf známostí. Víme, že největší klika má sudou velikost. Ukažte, že můžeme soutěžící rozdělit do dvou místností tak, že velikosti největších klik v obou místnostech jsou stejné. (IMO 2007)

Úloha 21. Nechť G je graf na 9 vrcholech a pro každý podgraf na pěti vrcholech platí, že obsahuje alespoň dvě hrany. Kolik nejméně může mít G hran?
Japonsko 1997

Hamiltonovské a eulerovské cesty, cykly

Definice. O grafu G řekneme, že je *eulerovský*, pokud existuje sled $v_0, v_1, \dots, v_\ell$, že pro každou hranu $\{u, v\}$ existuje právě jedno i, že $v_i = u$ a $v_{i+1} = v$.

Úloha 22. Graf je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy mají sudý stupeň nebo pouze dva vrcholy lichého stupně.

Definice. O grafu řekneme, že má *hamiltonovskou kružnici*, pokud existuje kružnice, která obsahuje všechny vrcholy.

Úloha 23. Nechť G je graf na n vrcholech a u, v dva z nich, které jsou nesousední a $\deg(u)+\deg(v) \geq n$. Ukažte, že G má hamiltonovskou kružnici, právě když $G+\{u, v\}$ má hamiltonovskou kružnici.

Úloha 24. Mějme graf na 7 vrcholech, kde na každých šesti vrcholech existuje hamiltonovská kružice. Ukažte, že na celém grafu existuje hamiltonovská kružnice.

(Hej, to znám z celostátka)

Věta. (Diracova) *Nechť graf G na $n \geq 3$ vrcholech má každý vrchol stupně $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Potom graf obsahuje hamiltonovskou kružnici.*

Úloha 25. Předpokládejme, že ve vesnici má každý člověk sudě přátel (a přátelství je vzájemné). Každý může od svého přítele buď získat minci, nebo mu dát minci. Ukažte, že si můžou předat mince tak, aby každý měl na konci tolik, s kolika začínal.

Úloha 26. Kolem kulatého stolu musíme usadit $2n$ lidí. Víme, že každý nenávidí $n-1$ lidí a nenávist je vzájemná. Dokažte, že můžeme lidi usadit tak, aby nenávidějící se dvojice neseděly vedle sebe.

Úloha 27. V Japonsku je hodně zenových zahrádek. Z každé zahrádky se můžeme dostat po chodníčcích do právě tří dalších. Minulý rok jsme navštívili všechny právě jednou a skončili jsme tam, kde jsme začali. Ukažte, že teď můžeme cestovat jinak (ne po ani proti směru minulé cesty) tak, že navštívíme zase všechny zahrádky a vrátíme se zpět. (Japonsko 2004)

Další hezké úlohy

Úloha 28. Nechť G je souvislý graf s m hranami. Ukažte, že každé hraně lze přiřadit číslo 1, 2, ... , m tak, aby pro každý vrchol s větším stupněm než 2 platilo, že největší společný dělitel čísel na hranách je 1. (IMO 1991)

Úloha 29. Ukažte, že není možné obarvit tabulku 11×11 čtyřmi barvami tak, že rohové čtverečky žádného obdélníku (strany jsou rovnoběžné s osami) nejsou všechny obarveny stejnou barvou. (Bělorusko 2005)

Úloha 30. Na celostátku n účastníků řešilo šest úloh a žádná úloha nebyla vyřešena všemi, ale každá dvojice úloh byla vyřešena alespoň $\frac{2n}{5}$ účastníky. Ukažte, že alespoň dva účastníci vyřešili pět úloh. (IMO 2005)

Návody

1. Jaké má stupně kružnice?

2. Existuje cesta pro dvojici vrcholů z jedné komponenty z G?

3. Co kdybychom propojili dva vrcholy disjunktních cest, nebyla by to delší cesta?

4. Jestliže hrana není most, po jejím odebrání graf zůstane souvislý. Zkoumejte graf po odebrání této hrany.

5. Prostě to rozházejte do dvou partit nebo najděte lichý cyklus.

6. Je to n. Indukcí obarvujeme, zjistěte jenom jak po přidání vrcholu přebarvit graf.

7. Uvědomte si, že je to jednoduché.

10. Vydejte se libovolným směrem z vrcholu s minimálním stupněm.

11. Co jsme si řekli o grafech se stupněm 2?

12. Je to 4.

13. Postupně přehazujeme lidi ze dvou skupin a jednoho máme uprostřed a díváme se, co se děje.

16. Vyberte dělení náhodné a potom postupujte hladově, přesuňte vrchol do druhé skupiny, pokud zvětšíte počet hran napříč.

19. Disjunktní sjednocení úplných grafů.

20. Popiš algoritmus, dej vše na jednu stranu a potom přesouvej věci z kliky.

22. Ukažte, že hrany grafu jde rozložit na kružnice.

23. Najděte dva sousední vrcholy na cestě, jeden je soused u a druhý v.

24. Stupně grafu, princip sudosti, Dirichlet.

25. Co eulerovská cesta, jak nám pomůže?

26. Co umíme říct o doplňku grafu, nedokázali jsme právě něco?

27. Jak vypadá graf po odstranění hran cesty?

Literatura a zdroje

[1] Autor: Adrian Tang, *IMO Training*, *http://euclid.ucc.ie/mathenr/IMOTraining/2008SummerCamp-AdrianTang-GraphTheory.pdf*

[2] Autor: Po-Shen Loh, *Graph theory http://www.math.cmu.edu/ lohp/docs/math/mop2008/graph-theory-soln.pdf*

[3] Autor: Jarda Hančl, *Grafové úlohy*, *http://mks.mff.cuni.cz/library/GrafoveUlohyJH/GrafoveUlohyJH.pdf*

Diofantické rovnice

Lucien Šíma

Abstrakt. Naučíme se základní metody používané k řešení diofantických rovnic.

Motivace

Co si představit pod slovním spojením diofantická rovnice? Jedná se o obyčejnou rovnici, hledáme však všechna její řešení v přirozených či celých číslech. Většina uvažovaných rovnic bude mít jen několik řešení (nebo žádná), proto se naučíme metody, kterými lze výrazně omezit počet kandidátů na řešení.

Úmluva. Ve všech příkladech budeme hledat všechna řešení dané rovnice a budeme uvažovat, že $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Počítání modulo

Jak řešit diofantickou rovnici? Dost často se hodí zkoušet do ní dosadit pár čísel a něco z toho vypozorovat – například zkoušet přijít na to, proč se čísla na obou stranách nerovnají. První metodou, kterou si na přednášce ukážeme, je počítání modulo. Pokud se levá a pravá strana mají rovnat, musí se rovnat i jejich zbytky modulo nějaké číslo. Pokud toto číslo vhodně zvolíme, často můžeme ukázat, že po dělení tímto číslem dávají strany rovnice různé zbytky, takže rovnice určitě žádné řešení nemá. Volba vhodných modulů vyžaduje cvik, takže si vyřešíme několik příkladů.

Příklad 1. $3x^2 + 6x + 2 = 391$ (Pikomat 2018)

Řešení. Rovnici si upravíme na $3x^2 + 6x = 389$ a vidíme, že její pravá strana je zřejmě dělitelná třemi, zatímco číslo 389 není.

Příklad 2. $x^2 + x = 2y + 1$

Příklad 3. $7x^2 + 5y + 14 = 0$

Příklad 4. $2^a = 11 + 7b$

Příklad 5. Která a lze napsat jako $a = b^2 - c^2$ pro nějaká b, c?

Příklad 6. $a^6 + b^4 + c^2 = 1234567$ (PraSe 1987)

Rozlož to!

Zadaná rovnice se dá mnohdy pěkně upravit na součin. Pokud je navíc na jedné straně prvočíslo nebo nějaké konkrétní číslo, pak rovnou známe všechny jeho rozklady. Nejprve si to ukážeme na příkladě.

Příklad 7. $p + 400 = a^2$ pro p prvočíslo (PraSe 2012)

Řešení. Rovnici upravíme do tvaru $p = (a - 20)(a + 20)$. Protože p je prvočíslo, musí nutně platit $a - 20 = 1$ a také $a + 20 = p$. Z toho plyne $a = 21$ a $p = 41$, což je skutečně jediným řešením této rovnice.

Příklad 8. $x^2 = 4y^2 + 13$

Příklad 9. $xy + yz + zx = xyz + x + y + z$

Příklad 10. $a^2b + ab^2 = 2(a^3 + b^3)$ (PraSe 2002)

Úprava na čtverec

Další užitečnou metodou je upravit jednu stranu rovnice na součet čtverců (druhých mocnin nějakých výrazů). Snažíme se mít na druhé straně nějaké konkrétní číslo – nejlépe záporné (rovnice pak nemá řešení), nebo malé přirozené (zbývá jen několik kandidátů na řešení rovnice).

Příklad 11. $x^2 + 2x + y^2 = 1$

Řešení. Nejprve k obou stranám rovnice přičteme jedničku – dostaneme $x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2$. Dále si všimneme, že výraz na levé straně lze snadno upravit na čtverec: $(x+1)^2 + y^2 = 2$. Jedinou možností jak rozložit číslo 2 na součet dvou čtverců je 1 a 1, tedy $(x+1)^2 = 1$ a $y^2 = 1$, z čehož máme čtyři celočíselná řešení: $x \in \{-2, 0\}$, $y \in \{-1, 1\}$.

Příklad 12. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y = 1$

Příklad 13. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 4y = -5$

Po sobě jdoucí mocniny

Tvrzení. *Neexistují x, y, a taková, že $x^a < y^a < (x + 1)^a$.*

Toto zdánlivě jednoduché tvrzení má překvapivě mnoho uplatnění. Pokud má být například nějaký výraz roven nějaké mocnině (a zdá se nám, že tomu tak není), pokusíme se najít dvě po sobě jdoucí mocniny, které ho semknou ostře mezi sebe, a to nám zaručí neexistenci řešení.

Příklad 14. $a^2 = b^2 + b$

Řešení. Pro každé přirozené číslo b platí: $b^2 < b^2 + b < b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$, tedy výraz $b^2 + b$ nemůže být čtvercem.

Příklad 15. $a^2 = 4b^2 + 3b + 2$

Příklad 16. $a^2 = 9^b + 7$

Příklad 17. $a^2 = 4^b + 4b^2 + 4$ (MO 59–A–III–1)

Nekonečný sestup

Poslední metoda se opírá o poměrně jednoduché tvrzení:

Tvrzení. *Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.*

Když chceme ukázat, že daná rovnice nemá netriviální řešení, uvažujeme nějaké řešení a dokážeme (obvykle pomocí některé z předešlých technik), že pak umíme najít řešení, které je v nějakém smyslu „menší". Obecně přiřadíme n-tici čísel přirozené číslo určující její velikost (například součet čísel v n-tici) a dokážeme, že umíme najít řešení s ostře menší velikostí. Takto nagenerujeme nekonečnou posloupnost řešení s klesajícími velikostmi, což dle předešlého nelze, tudíž žádné řešení neexistuje. Abychom tuto metodu pochopili, opět si ji ilustrujeme na příkladě.

Příklad 18. $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 2abc$

Řešení. Předpokládejme, že přirozená čísla a, b, c řeší danou rovnici. Kdyby a bylo liché, tak bychom měli na levé straně liché číslo, ale na pravé straně je číslo sudé. Proto $a = 2a_1$ a rovnici můžeme upravit do tvaru $4a_1^3 + b^3 + 2c^3 = 2a_1bc$. Analogicky zjistíme $b = 2b_1$, a tedy $2a_1^3 + 4b_1^3 + c^3 = 2a_1b_1c$. Nakonec ze stejného důvodu musí být $c = 2c_1$, a proto $a_1^3 + 2b_1^3 + 4c_1^3 = 2a_1b_1c_1$. Našli jsme tedy řešení rovnice s polovičním (tedy menším) součtem, kterým je a_1, b_1, c_1. Stejnými kroky bychom mohli neustále zmenšovat řešení, ale to podle uvedeného tvrzení není možné dělat do nekonečna a původní řešení a, b, c tedy nemůže existovat. Rovnice nemá v přirozených číslech žádné řešení.

Příklad 19. $a^2 + b^2 = 7c^2$

Příklad 20. Je $\sqrt{2}$ racionální?

Příklad 21. $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Návody

2. modulo 2

3. modulo 5

4. modulo 7

5. modulo 4

6. modulo 127

8. Uprav na $(x - 2y)(x + 2y) = 13$.

9. $(x - 1)(y - 1)(z - 1)$

10. Převeď na jednu stranu a vytkni výraz $(a+b)$.

12. Doplň na čtverce: $(x+y)^2$ a $(y+3)^2$.

13. Doplň na čtverce: $(2x+y)^2$, $(x-1)^2$ a $(y+2)^2$.

15. Sevři mezi $(2b)^2$ a $(2b+1)^2$.

16. Sevři mezi $(3^b)^2$ a $(3^b+1)^2$.

17. Sevři mezi $(2^b)^2$ a $(2^b+1)^2$.

19. Dokaž, že pokud je (a,b,c) řešením, pak jsou a,b,c dělitelná sedmi a $(\frac{a}{7},\frac{b}{7},\frac{c}{7})$ je též řešením.

20. V podstatě řešíme diofantickou rovnici $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$, neboli $a^2=2b^2$.

21. Vážně chceš hint k poslednímu příkladu?

Literatura a zdroje

[1] Filip Hlásek, *Diofantické rovnice*, Oldřichov 2012

Projektivní roviny

LUCIEN ŠÍMA

ABSTRAKT. V první části přednášky si definujeme konečné projektivní roviny a ukážeme si jejich základní vlastnosti. V druhé části se je pokusíme zkonstruovat a rozšíříme je na reálnou projektivní rovinu.

Motivace

V rovině platí, že každými dvěma body lze proložit právě jednu přímku. Mají každé dvě přímky právě jeden průsečík? V rovině nikoliv. Ukážeme si nejprve konečnou strukturu, ve které tomu tak je, v druhé části přednášky si do roviny přidáme „body v nekonečnu“ a sestrojíme tak reálnou projektivní rovinu.

Konečné projektivní roviny

Definice. *Konečnou projektivní rovinou* (dále KPR) rozumíme dvojici (X, P), kde X je konečná množina a P systém podmnožin X takovou, že platí následující tři axiomy:

[A0] $(\exists C \subset X)\,|C| = 4 \wedge (\forall p \in P)\,|p \cap C| \leq 2$
[A1] $(\forall p, q \in P)(\exists! x \in X)\, x \in p \cap q$
[A2] $(\forall x, y \in X)(\exists! p \in P)\, x \in p \wedge y \in p$

Vystrašila vás definice? Přestože je plná matematických symbolů, je celkem intuitivní. Množinou X myslíme množinu bodů a systémem P množinu přímek. Druhý a třetí axiom popisují vzájemný vztah bodů a přímek (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě a každými dvěma body lze proložit právě jednu přímku). Proč vyžadujeme první axiom (existenci čtveřice bodů v obecné poloze)? Zbavíme se tak degenerovaných případů a vše bude o dost jednodušší.

Příklad 1. Najděte všechny dvojice (X, P) splňující axiomy [A1], [A2] a nesplňující axiom [A0].

Příklad 2. Najděte alespoň jednu KPR.

Jak tedy vypadají KPR (splňující všechny tři axiomy)? Budeme se nadále zabývat jejich strukturou.

Tvrzení. *Mějme KPR (X, P). Pak každé dvě přímky obsahují stejný počet bodů.*

Toto tvrzení nás opravňuje k zavedení následující definice.

Definice. Nechť (X, P) je KPR. Jejím řádem rozumíme $|p| - 1$, kde p je libovolná přímka.

Tvrzení. *Mějme KPR řádu q. Pak platí:*

(1) *Každý bod je obsažen v $q + 1$ přímkách.*
(2) $|X| = q^2 + q + 1$
(3) $|P| = q^2 + q + 1$

Příklady

Příklad 3. Rado si hrál s KPR řádu q a obarvil některé její body červeně. Všiml si, že každá přímka obsahuje alespoň jeden červený bod. Kolik nejméně bodů je červených?

Příklad 4. Mějme (X, P), kde X množina a P množina všech podmnožin X a $q \in \mathbb{N}$. Platí následující čtyři podmínky:

(1) $|X| = q^2 + q + 1$
(2) $|P| = q^2 + q + 1$
(3) Každá přímka obsahuje $q + 1$ bodů.
(4) Každý bod je obsažen v $q + 1$ přímkách.

Je pak (X, P) nutně KPR?

Příklad 5. Ve hře Dobble je 55 karet, přičemž na každé kartě je 8 symbolů a každé dvě karty mají jeden symbol společný. Ukažte, že ve hře se nachází alespoň 57 různých symbolů.

Příklad 6. Mějme KPR (X, P). Uvažujme bipartitní graf s paritTitami (X, P). Hrana vede mezi $x \in X$ a $p \in P \Leftrightarrow x \in p$.

(1) Jaká je délka nejkratší kružnice v tomto grafu?
(2) Kolik kružnic této délky graf obsahuje?

Konstrukce projektivních rovin

Pro která přirozená čísla q existuje KPR řádu q? V této části přednášky si naznačíme, jak lze některé KPR zkonstruovat. K tomu potřebujeme definici tělesa.

Definice. *Tělesem* T rozumíme množinu T spolu s dvěma binárními operacemi $+, \cdot$ na T, které splňují následující axiomy:

(1) **asociativita sčítání** Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$

(2) **existence nulového prvku** Existuje prvek $0 \in T$ takový, že pro libovolné $a \in T$ platí $a + 0 = a$
(3) **existence opačného prvku** Pro každé $a \in T$ existuje $-a \in T$ takové, že $a + (-a) = 0$
(4) **komutativita sčítání** Pro libovolné prvky $a, b \in T$ platí $a + b = b + a$
(5) **asociativita násobení** Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(6) **existence jednotkového prvku** Existuje prvek $1 \in T$ takový, že pro libovolné $a \in T$ platí a $\cdot 1 = a$
(7) **existence inverzního prvku** Pro každé $a \in T$ existuje $a^{-1} \in T$ takové, že $a \cdot a^{-1} = 1$
(8) **komutativita násobení** Pro libovolné prvky $a, b \in T$ platí $a \cdot b = b \cdot a$
(9) **distributivita** Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
(10) **netrivialita** $|T| > 1$

Těleso je tedy množina s dvěma speciálními prvky 0, 1 a binárními operacemi sčítání a násobení, která splňuje výše popsané axiomy – tedy operace a speciální prvky se chovají, tak jak bychom chtěli. Tato sada axiomů nám umožňuje provádět operace, které nad reálnými čísly provádíme zcela automaticky. Ukážeme si to na příkladě.

Chceme vyřešit rovnici $x + 11 = 18$. Zapomeňme na chvíli, že řešení je na první pohled vidět a zkusme se k němu dobrat jen pomocí axiomů tělesa. Nejprve přičteme zprava k oběma stranám rovnice číslo (-11). Dostáváme:

$$(x + 11) + (-11) = 18 + (-11)$$

Dalším krokem je přezávorkování levé strany a výpočet součtu na pravé straně:

$$x + (11 + (-11)) = 7$$

Teď můžeme závorku vypočítat:

$$x + 0 = 7$$

Nakonec využijeme skutečnosti, že $x + 0 = x$ a dostáváme:

$$x = 7$$

Abychom si ujasnili definici tělesa, zkusíme si několik lehkých příkladů.

Příklad. Jsou tyto obory se standardními operacemi a 0, 1 tělesy?

(1) nezáporná čísla
(2) $\mathbb{Z}$
(3) $\mathbb{Q}$

Příklad. Zkonstruuj čtyřprvkové těleso.

Existenci některých těles nám dává následující věta.

Věta.

(1) *Reálná čísla spolu s klasickými operacemi (sčítání a násobení) tvoří těleso.*
(2) *Pro každé prvočíslo* p *je množina* $0, ..., p-1$ *spolu s operacemi sčítání a násobení modulo* p *tělesem.*
(3) *Pro každé prvočíslo* p *a* $k \in \mathbb{N}$ *existuje těleso mající* p^k *prvků.*

Nyní máme vše potřebné ke konstrukci projektivních rovin. Mějme T těleso. K zavedení bodů a přímek se nám budou hodit takzvané *homogenní souřadnice*. Těmi rozumíme prvky $T^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ až na skalární násobek, tj. bod se souřadnicemi $[u : v : w]$ je totožný s bodem se souřadnicemi $[x : y : z]$ právě tehdy, když existuje $0 \neq t \in T$ takové, že: $x = tu, y = tv$ a $z = tw$.

Nechť X je množina bodů o všech (výše popsaných) homogenních souřadnicích. Stejně definujeme množinu přímek P. Musíme ještě popsat jejich vzájemný vztah - v definici KPR vyžadujeme, aby P byla množina podmnožin X. Bod $x = [x : y : z]$ bude ležet na přímce $p = [a : b : c]$, pokud $ax + by + cz = 0$ (pro libovolný násobek souřadnic).

Tvrzení. *Pro libovolné těleso* T *jsme výše popsaným postupem dospěli k množinám* X *a* P*, pro něž platí axiomy [A1] a [A2].*

Pokud za těleso T zvolíme reálná čísla, získali jsme (výše popsaným postupem) *reálnou projektivní rovinu*. Při dosazení tělesa T o p^k prvcích dostáváme KPR řádu p^k, kde p je prvočíslo a k přirozené číslo. Zda pro zbylé řády KPR existuje, je otevřený problém.

Literatura a zdroje

[1] *Sbírka úloh z matematiky, https://kam.mff.cuni.cz/sbirka*
[2] Libor Barto: *Skripta z lineární algebry*

Primitivní prvek

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Pro úspěšného olympionika je nutností rozumět tomu, jak se při modulení chová umocňování. Pokročilejším, ale důležitým pojmem v této kapitole je primitivní prvek, jehož znalost ale bývá v obtížnějších úlohách také potřeba.

Prerekvizity

Definice. *Úplnou sadou zbytků* myslíme množinu $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ zbytků modulo n. Značíme ji $\mathbb{Z}_n$. Když v ní sčítáme nebo násobíme, tak myslíme automaticky sčítání a násobení modulo n. *Redukovaná sada zbytků* je podmnožina $\mathbb{Z}_n$ obsahující všechna čísla nesoudělná s n. Značíme ji $\mathbb{Z}_n^*$ a má $\varphi(n)$ prvků, kde φ je Eulerova funkce.

Definice. Číslo $a \in \mathbb{Z}_n^*$ je kvadratický zbytek, pokud $x^2 \equiv a \pmod{n}$ pro nějaké $x \in \mathbb{Z}_n$. Pokud takové x neexistuje, říkáme, že a je *kvadratický nezbytek*.

Definice. Pro každé číslo $a \in \mathbb{Z}_n^*$ existuje právě jedna *inverze* modulo n, tj. prvek $a' \in \mathbb{Z}_n^*$ takový, že $aa' \equiv 1 \pmod{n}$. Obvykle inverzi značíme a^{-1}.

Definice. Pro $a \in \mathbb{Z}_n^*$ nazveme *řád prvku a modulo n* nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a^k \equiv 1 \pmod{n}$. Značíme ho $\operatorname{ord}_n(a)$.

Tvrzení. *Pro $a \in \mathbb{Z}_n^*$, $x, y \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$a^x \equiv a^y \pmod{n} \iff x \equiv y \pmod{\operatorname{ord}_n(a)}.$$

Důsledek. *Nechť $a \in \mathbb{Z}_n^*$, $x \in \mathbb{N}_0$. Pak $a^x \equiv 1 \pmod{n}$, právě když $\operatorname{ord}_n(a) \mid x$.*

Důsledek. *Pokud $a^x \equiv 1 \pmod{p}$ a zároveň $a^y \equiv 1 \pmod{p}$, pak též $a^{(x,y)} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Primitivní prvek

Definice. Číslo $a \in \mathbb{Z}_n^*$ nazveme *primitivní prvek*, pokud $\mathrm{ord}_n(a) = \varphi(n)$.

Poznámka. Primitivní prvek g je tedy číslo, které „generuje" celou $\mathbb{Z}_n^*$, neboli

$$\{g^0 \bmod n, g^1 \bmod n, g^2 \bmod n, \dots\} = \mathbb{Z}_n^*.$$

Tvrzení. *Platí*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Věta. (Lagrangeova) *Nechť P je nenulový polynom stupně n s koeficienty ze $\mathbb{Z}_p$. Pak má rovnice $P(x) \equiv 0 \pmod p$ maximálně n kořenů modulo p.*

Věta. *Primitivní prvek existuje právě pro modula tvaru $2, 4, p^k, 2p^k$, kde p je liché prvočíslo a $k \in \mathbb{N}$.*

Tvrzení. *Pokud existuje primitivní prvek g modulo n, pak existuje právě $\varphi(\varphi(n))$ (navzájem nekongruentních) primitivních prvků – jsou to g^k pro $1 \le k \le n-1$ splňující $(k, \varphi(n)) = 1$.*

Příklad 1. Nechť $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je permutace čísel od 1 do n taková, že součet $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ není dělitelný $n+1$ pro všechna $1 \le i < j \le n$, až na $i = 1 \wedge j = n$. Najdi takovou permutaci pro $n = 22$. (Crux Mathematicorum)

Příklad 2. Nechť p je liché prvočíslo. Najdi všechna taková k, že

$$p \mid 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k.$$

(Hungary-Israel Math Competition 2009)

Příklad 3. Nechť p je prvočíslo splňující $p \equiv 3 \pmod 8$ nebo $p \equiv 5 \pmod 8$. Nechť navíc $p = 2q + 1$, kde q je také prvočíslo. Spočti $\omega^2 + \omega^4 + \dots + \omega^{2^{p-1}}$, kde $\omega \in \mathbb{C}$ splňuje $\omega^p = 1$, $\omega \neq 1$.

Příklad 4. Pro prvočíslo p urči, jaký je součet všech kvadratických zbytků modulo p. Jak je to s kvadratickými nezbytky?

Příklad 5. Pro každé liché prvočíslo p položme

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \qquad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

kde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Urči $f(p)$. (Chinese TST 1993)

Příklad 6. Buď p prvočíslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$ různá přirozená čísla menší než p. Předpokládejme, že $p \mid a_1^k + \dots + a_n^k$ pro všechna $k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$. Urči $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. (Mathematical Reflections)

Příklad 7. Dokaž, že součin všech primitivních prvků modulo p je kongruentní 1 mod p.

Příklad 8. Ukaž, že 2 je primitivní prvek mod 3^n.

Příklad 9. Dokaž, že pokud je p Fermatovo prvočíslo (tedy tvaru $2^{2^k}+1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$), pak je každý kvadratický nezbytek modulo p současně primitivním prvkem.

Příklad 10. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Ukaž, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že nejmenší primitivní prvek p je větší jak n.

Příklad 11. Jsou-li p, q prvočísla, pak kongruence $x^q \equiv 1 \pmod p$ má právě jedno řešení (v $\mathbb{Z}_p$), pokud $q \nmid p-1$, a právě q řešení, pokud $q \mid p-1$. Dokaž.

Jak je to s počty řešení obecnější úlohy $x^q \equiv a \pmod p$?

Příklad 12. Pro $a \in \mathbb{N}_0$ definujme $n_a = 101a - 100 \cdot 2^a$. Pro $0 \le a, b, c, d \le 99$ ukaž

$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100} \Longrightarrow \{a, b\} = \{c, d\}.$$

(Putnam 1994)

Příklad 13. Urči počet všech posloupností reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že pro všechna přirozená čísla m, n platí $a_m \cdot a_n = a_{m \cdot n}$ a zároveň $a_n = a_{n+2011}$.

(MKS 30–6–8)

Příklad 14. Nechť $p = 4k+3$ je prvočíslo a g je takový jeho primitivní prvek, že $g^2 \equiv g+1 \pmod p$. Dokaž, že $g-2$ je také primitivní prvek modulo p.

Příklad 15. Ukaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že číslo n^4+1 má prvočíselného dělitele většího než $2n$. (MKS 30–2–8)

Příklad 16. Najdi všechna dvojciferná přirozená čísla n (kde $n = 10a + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}$) taková, že $k^a \equiv k^b \pmod n$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 17. Buď $S = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ množina přirozených čísel, která jsou kvadratickými zbytky modulo p. Najdi nejmenší možné k, aby existovala podmnožina A množiny S velikosti k, součin jejíchž prvků je 1 mod p.

Příklad 18. Nechť p je liché prvočíslo, $m, n \in \mathbb{N}$ nejsou dělitelná p, $s \in \mathbb{N}_0$ a $p \mid m^{2^s} + n^{2^s}$. Dokaž, že pak $p \equiv 1 \pmod{2^{s+1}}$.

Příklad 19. Nechť p je liché prvočíslo a A, B dvě různé neprázdné podmnožiny $\{1, 2, \dots, p-1\}$ splňující

(i) $A \cup B = \{1, 2, \dots, p-1\}$,
(ii) pokud $a, b \in A$ nebo $a, b \in B$, pak $ab \bmod p \in A$,
(iii) pokud $a \in A$ a $b \in B$, pak $ab \bmod p \in B$.

Najdi všechny takové množiny A, B. (Indická MO)

Návody

1. Vezmi primitivní prvek a umocňuj.

2. Zapiš čísla $1, \dots, p-1$ pomocí jednoho primitivního prvku a využij vzoreček pro součet geometrické řady.

3. Dokaž, že 2 je primitivní prvek modulo p a adekvátně interpretuj exponenty u ω.

4. Kvadratické zbytky jsou přesně ty prvky $\mathbb{Z}_p^*$, u kterých má primitivní prvek sudý exponent.

5. Doplň sumaci až do $p-1$, převeď sumu na součet mocnin primitivního prvku a rozeber případy $p-1 \nmid 120$, $p-1 \mid 120$.

6. Polož $a_i = g^{\alpha_i}$, kde g je primitivní prvek, a uvažuj polynom $x^{\alpha_1} + \cdots + x^{\alpha_n}$.

7. Inverzní prvek k primitivnímu prvku je opět primitivní.

8. Indukcí podle n. Musí platit $\varphi(3^n) = \mathrm{ord}_{3^n}(2) \mid \mathrm{ord}_{3^{n+1}}(2) \mid \varphi(3^{n+1})$. Další indukcí vyluč případ $\mathrm{ord}_{3^{n+1}} = 2 \cdot 3^{n-1}$.

9. Kvadratické zbytky nemohou být primitivními prvky. Kolik má p primitivních prvků?

10. Stačí, aby $1, 2, \dots, n$ byly kvadratické zbytky modulo p. Čínská zbytková a Dirichletova věta.

11. Polož $x = g^i$, kde g je primitivní prvek a $i \in \mathbb{N}$, a zaměř se na exponenty. V obecnějším případě navíc polož $a = g^j$.

12. Rozděl na kongruenci modulo 100 a modulo 101, využij $2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ a nakonec skutečnost, že 2 je primitivní prvek modulo 101.

13. Ukaž, že posloupnost obsahuje pouze čísla $-1, 0, 1$. Vezmi primitivní prvek g modulo 2011 a všechny členy až na a_0 vyjádři pomocí a_g.

14. Inverzní prvek ke g je také primitivní a je to $g-1$. Platí $(g-1)^{2k+3} \equiv g-2 \pmod{p}$.

15. Dokaž, že prvočíslo $p = 8k+1$ dělí nějaké číslo tvaru n^4+1. Využij Dirichletovu větu.

16. Uvaž prvočíslo $p \mid n$ a nějaký jeho primitivní prvek g, ten dosaď za k. Dourozebírej.

17. Pro $k < \frac{p-1}{2}$ uvaž $S = \{g^2, g^2, \dots, g^2\}$, kde g je primitivní prvek modulo p. Pro $k \geq \frac{p-1}{2}$ rozepiš prvky S pomocí primitivního prvku a hledej podmnožinu exponentů se správným součtem.

18. Umocni na 2^s kongruenci $g^k \equiv mn^{-1} \pmod{p}$ (g prim. prvek).

19. Musí být $A \cap B = \emptyset$. Do které množiny padne primitivní prvek?

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je zkrácením mého sborníkové příspěvku ze soustředění *i*KS 2016 [1], ale uvádím zde i původní zdroje.

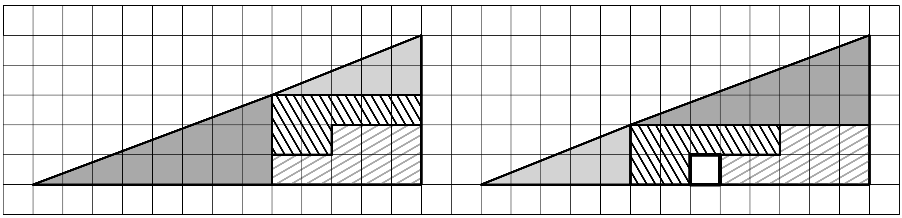
[1] Štěpán Šimsa: *Řády a primitivní prvek*, *i*KS 5, Strmilov 2016, *http://iksko.org/sous.php*
[2] Alexandr „Olin“ Slávik: *Primitivní prvek a kvadratická reciprocita*, *i*KS 1, Hostětín 2012, *http://iksko.org/sous.php*
[3] Josef Svoboda, Štěpán Šimsa: *Seriál z teorie čísel*, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf*
[4] Michal „Kenny“ Rolínek: *Důkazové metody v teorii čísel*, Domaslav 2010
[5] Nguyen Thanh Tra: *Chuyen de ve can nguyen thuy*, *http://documents.tips/documents/chuyen-de-ve-can-nguyen-thuy.html*

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Michal Töpfer

Abstrakt. Zlatý řez je jedním z čísel, která se velmi často vyskytují v přírodě. O tom ale tento příspěvek pojednávat nebude, budeme se zabývat spíše tím, co to je zlatý řez a jaká je jeho souvislost s Fibonacciho čísly.

Příklad 1. (Motivační úloha) Co se stalo? Jak je možné, že druhý trojúhelník má v sobě díru 1×1?



Fibonacciho čísla

Definice 2. *Fibonacciho čísla* jsou posloupnost celých čísel definovaná následující rekurencí:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prvních několik Fibonacciho čísel je tedy: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Příklad 3. (Fibonacciho králíci) Jeden muž umístil jeden pár králíků do prostotu obehnaného ze všech stran zdí. Kolik párů králíků vznikne z tohoto páru, předpokládáme-li, že každý pár zplodí každý měsíc nový pár, který začne plodit potomky druhý měsíc po narození?

Příklad 4. Představme si, že chceme vyjít na schodiště, které má n schodů. Přitom můžeme udělat krok o jeden schod nahoru a nebo krok natáhnout a postoupit o dva schody nahoru. Kolika způsoby se můžeme dostat až nahoru?

Příklad 5. Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $2 \times n$ pomocí dlaždic 1×2?

Příklad 6. Dokažte, že $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Příklad 7. Dokažte, že

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2},$$
$$1 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1}.$$

Příklad 8. (Cassiniho identita) Dokažte, že $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Příklad 9. Dokažte, že $4n$-té Fibonacciho číslo je dělitelné třemi.

Cvičení 10. Dokažte, že $F_k \mid F_{nk}$.

Zlatý řez

Definice 11. Rozdělme úsečku na dvě části tak, že poměr delší části ke kratší části je stejný jako poměr celé úsečky k delší části. Tento poměr nazýváme *zlatý řez* (někdy též *zlaté číslo*) a značíme ho φ.

Úloha 12. Najděte hodnotu φ.

Řešení. Vyjdeme z definice. BÚNO nechť delší část úsečky má délku 1, délku celé úsečky označíme x. Tím dostaneme rovnici $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1}$. Tu upravíme do tvaru kvadratické rovnice $x^2 - x - 1 = 0$, která má dvě řešení: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Záporný kořen nás v tomto případě nezajímá (ale dále se ještě bude hodit, takže si ho označíme $\tilde{\varphi}$), takže dostáváme, že

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618 \,.$$

Poznámka 13. Zlatý řez je často považován za nejkrásnější poměr. Proto ho využívají malíři při návrhu kompozice obrazů a také architekti jako poměr například mezi délkou a šířkou budov.

Příklad 14. Ukažte, že $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Příklad 15. Ukažte, že $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

Poznámka 16. Zlatý řez se někdy označuje jako nejiracionálnější číslo, protože ho díky předchozímu příkladu můžeme zapsat jako

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}$$

.

Příklad 17. *Zlatý obdélník* je obdélník, který má strany v poměru zlatého řezu. Co se stane, když zlatý obdélník rozdělíme na dvě části tak, aby jedna z nich byla čtverec?

Věta 18. (Binetova formule)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \, .$$

Důkaz. Pro důkaz stačí ověřit, že formule splňuje definici Fibonacciho čísel (tedy rekurzivní rovnost $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ a platnost pro F_0 a F_1). Podrobné rozepsání si můžete vyzkoušet jako cvičení. □

Poznámka 19. Podobně jako zlatý řez můžeme definovat také *zlatý úhel*. Plný úhel rozdělíme na dvě části obdobně jako při definici zlatého řezu. Jako *zlatý úhel* se označuje menší z těchto dvou částí, která odpovídá přibližně $137.5°$. Zajímavý je jeho výskyt v přírodě, například listy bývají na stonku často umístěny ve spirále s otočením právě o zlatý úhel.

Vztah Fibonacciho čísel a zlatého řezu

Pojďme nyní prozkoumat vztah Fibonacciho čísel a zlatého řezu. Definujme $\varphi_0 = 1$ a dále $\varphi_n = 1 + \frac{1}{\varphi_{n-1}}$.

Věta 20. (Vztah Fibonacciho čísel a zlatého řezu) *Poměr dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel se blíží zlatému řezu. Formálně*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi \, .$$

Důkaz. Limitu označíme L a upravujeme:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{L} \, .$$

Tím jsme dostali rovnici $L = 1 + \frac{1}{L}$, po úpravě $L^2 - L - 1 = 0$, což je přesně rovnice, kterou jsme měli při výpočtu zlatého řezu. Limita je zřejmě kladná, takže nás stejně jako v případě zlatého řezu zajímá pouze kladný z kořenů. □

Příklad 21. Určete, k jakému číslu se blíží poměr $\frac{F_{n+2}}{F_n}$.

Návody

10. Využijte lemma: $F_n = F_{k+1} \cdot F_{n-k} + F_k \cdot F_{n-k-1}$.

Literatura a zdroje

[1] Starší příspěvky na podobné téma od Helči Svobodové, Aničky Doležalové a Adély Kostelecké

[2] Barbora Lišková: *Matematické zákonitosti v přírodě*

[3] Vlasta Chmelíková: *Zlatý řez*

[4] Ron Knott : *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, *http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html*

[5] Richard Francisco: *Proof of the limit of the ratio of terms of the Fibonacci sequence*, *http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Su07/Francisco/Assignment120 /fibonacci.html*

Obsah