Lipová-lázně

Sborník, podzim 2016

Anička Doležalová
David Hruška
Bára Kociánová
Adéla Kostelecká
Anh Dung „Tonda“ Le
Jakub Löwit
Viki Němeček
Vašek Rozhoň
Martin „i-tý“ Sýkora
Štěpán Šímsa
Rado van Švarc
Martin Töpfer

matfyz

AUTOŘI: Anička Doležalová, David Hruška, Bára Kociánová, Adéla Kostelecká, Anh Dung „Tonda“ Le, Jakub Löwit, Viki Němeček, Vašek Rozhoň, Martin „*i*-tý“ Sýkora, Štěpán Šímsa, Rado van Švarc, Martin Töpfer
EDITOR: Tonda Češík
vydání první, náklad 45 výtisků
listopad 2016
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Seznámení s topologií

Anička Doležalová

Abstrakt. V přednášce se seznámíme s úplnými základy obecné topologie a s oddělovacími axiomy. V jistém smyslu se jedná o zobecnění metrických prostorů, kde místo metriky budeme mít jen jakousi slabší strukturu. Ta nám pořád umožní mluvit o takových pojmech jako například spojitost zobrazení.

Definice. *Topologický prostor* je dvojice $(X, \mathcal{T})$, kde X je množina, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ a jsou splněny podmínky

(1) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$,
(2) pokud $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, pak $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$,
(3) pokud $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, pak $\bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$.

Prvky $\mathcal{T}$ nazveme *otevřené množiny*, soubor $\mathcal{T}$ nazveme *topologie*.

Příklad. Rozmyslete si, že se jedná o topologie:

- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (*diskrétní topologie*),
- $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ (*antidiskrétní topologie*),
- pro X nekonečnou množinu $\mathcal{T} = \{T : X \setminus T \text{ je konečná}\} \cup \{\emptyset\}$,
- pro (X, ρ) metrický prostor
$$\mathcal{T} = \{T : \text{ pro každé } x \in T \text{ existuje } \varepsilon > 0 \text{ takové, že } U(x, \varepsilon) \subseteq T\},$$
kde $U(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ (*topologie generovaná metrikou*),
- pro $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ (*Sierpińského prostor*).

Definice. Množina $V \subseteq X$ je *okolí bodu* $x \in X$, pokud existuje otevřená množina U taková, že $x \in U \subseteq V$.

Tvrzení. *Množina T je otevřená právě tehdy, když každý její bod má nějaké otevřené okolí U takové, že $U \subseteq T$.*

Definice. Soubor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je *báze* topologie $\mathcal{T}$, pokud pro každé $T \in \mathcal{T}$ existuje $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ splňující $T = \bigcup \mathcal{B}'$.

Definice. Soubor $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{T}$ je *lokální báze v bodě* $x \in X$, pokud každý prvek $\mathcal{B}(x)$ obsahuje x a pro každé U okolí x existuje $B \in \mathcal{B}(x)$ splňující $B \subseteq U$.

Tvrzení. *Topologie je jednoznačně určená souborem $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$, kde $\mathcal{B}(x)$ je lokální báze v bodě x.*

Příklad. Topologie na $\mathbb{R}$ s bází $\{U(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ je topologie generovaná metrikou $\rho(x,y) = |x-y|$.

Definice. Mějme $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ topologické prostory, zobrazení $f\colon X \to Y$ nazveme spojité, pokud pro každou otevřenou množinu v Y je její vzor otevřená množina v X, tj. pro každou $S \in \mathcal{S}$ platí $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}$.

Příklad. Každé konstantní zobrazení je spojité.

Příklad. Rozmyslete si: Každé zobrazení z prostoru s diskrétní topologií je spojité. Každé zobrazení do prostoru s antidiskrétní topologií je spojité. Pro zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ se standardní topologií je definice ekvivalentní s „klasickou“ definicí spojitosti, totiž pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Oddělovací axiomy

Definice. Topologický prostor X nazveme

- T_0, pokud pro každá $x \neq y \in X$ existuje otevřená množina U splňující $|U \cap \{x,y\}| = 1$,
- T_1, pokud pro každá $x \neq y \in X$ existuje otevřená množina U splňující $x \in U, y \notin U$,
- T_2 (*Hausdorffův*), pokud pro každá $x \neq y \in X$ existují disjunktní otevřené množiny U, V splňující $x \in U, y \in V$,
- T_3 (*regulární*), pokud je T_1 a pro každé $x \in X$, $F \subseteq X$ uzavřenou a neobsahující x existují disjunktní otevřené množiny U, V splňující $x \in U, F \subseteq V$,
- $T_{3\frac{1}{2}}$ (*úplně regulární, Tichonovův*), pokud je T_1 a pro každé $x \in X$, $F \subseteq 1X$ uzavřenou a neobsahující x existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ splňující $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro každé $y \in F$,
- T_4 (*normální*), pokud je T_1 a pro každé $F, H \subseteq X$ disjunktní uzavřené množiny existují disjunktní otevřené množiny U, V splňující $F \subseteq U, H \subseteq V$.

Věta. *Platí $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.*

Poznámka. Topologie generovaná metrikou je T_4. Proto třeba Sierpinského prostor očividně není metrizovatelný (není ani T_1).

Příklad. Najděte prostor, který je T_0, ale ne T_1. Analogicky T_1, ale ne T_2, resp. T_2, ale ne T_3.

Návod. Příklady prvních dvou už jsme viděli. Třetí příklad se dá zkonstruovat třeba pomocí $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, kde okolí racionálních čísel budou obsahovat jen racionální čísla a okolí iracionálních čísel budou obsahovat racionální i iracionální čísla.

Literatura a zdroje

[1] prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.: *Obecná topologie*, MFF UK, ZS 2015/16.

Geometrické nerovnosti

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek obsahuje výběr z geometrických nerovností. V první části se zaměřuje na různé aplikace trojúhelníkové nerovnosti, ve druhé uvádí několik známých a obtížnějších tvrzení.

Úmluva. Délky stran trojúhelníka ABC budeme značit a, b, c a příslušné protější vnitřní úhly α, β, γ.

Úloha. (Motivační) Pro kladná čísla splňující $a+b+c=8$ dokažte

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{4+b^2}+\sqrt{9+c^2}\geq 10.$$

Zbraně

Připomeňme si následující tři užitečná tvrzení.

Tvrzení. (Kosinová věta) *Platí $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.*

Tvrzení. (AG nerovnost) *Pro nezáporná čísla $a_1,\ldots,a_n$ platí*

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Rovnost nastává pro $a_1=\cdots=a_n$.

Tvrzení. (Cauchy–Schwarzova nerovnost) *Pro reálná čísla $a_1,\ldots,a_n$ a $b_1,\ldots,b_n$ platí*

$$\sum a_i^2\sum b_i^2\geq\left(\sum a_ib_i\right)^2.$$

Rovnost nastává, pokud $a_i=\lambda b_i$ pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$.

Troj(ostro)úhelníková nerovnost

Začneme jednoduchou, ale velmi užitečnou a fundamentální nerovností a její geometričtější modifikací.

Tvrzení. *Nezáporná reálná čísla a, b, c tvoří strany trojúhelníka, právě když splňují $a+b>c$, $b+c>a$ a $c+a>b$ (pokud připustíme degenerované trojúhelníky změní se nerovnosti na neostré). Tento trojúhelník je ostroúhlý, právě když platí $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$ a $c^2+a^2>b^2$ (rovnosti připouštějí pravoúhlé trojúhelníky).*

Často je výhodnější jedna z následujících formulací:

Tvrzení. *Nejkratší křivka (lomená čára) spojující body A a B je úsečka AB.*

Tvrzení. (substituce) *Kladná čísla a, b a c jsou délkami stran nějakého trojúhelníka, právě když existují kladná čísla x, y a z splňující $a=x+y$, $b=x+z$ a $c=y+z$.*

Úloha 1. V konvexním čtyřúhelníku najděte bod s nejmenším součtem vzdáleností od vrcholů. Jak se výsledek změní v nekonvexním případě?

Úloha 2. Pro bod P uvnitř konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ dokažte $AP+PD<AB+BC+CD$.

Úloha 3. V trojúhelníku ABC označme M střed BC. Dokažte $AM<\dfrac{AB+AC}{2}$.

Úloha 4. Dokažte, že ve čtyřúhelníku existuje úhlopříčka u a strany x, y tak, že platí $x^2+y^2\le u^2$.

Úloha 5. Dokažte

(i) $(a+b+c)^2\le 4(ab+bc+ca)$,

(ii) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$,

(iii) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\ge 3$.

Ptolemaiova nerovnost

Tvrzení. (Ptolemaiova nerovnost) *Pro strany čtyřúhelníka a, b, c, d a jeho úhlopříčky e, f platí $ac+bd\ge ef$. Rovnost nastává právě pro tětivové čtyřúhelníky.*

Prosíme potlesk, přicházejí ... aplikace!

Úloha 6. Nechť P je vnitřní bod rovnoběžníku $ABCD$ o obsahu S. Ukažte $|AP|\cdot|CP|+|BP|\cdot|DP|\ge S$.

Úloha 7. (Těžká) V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí $|AB|=|BC|$, $|CD|=|DE|$, $|EF|=|FA|$. Ukažte $\dfrac{|BC|}{|BE|}+\dfrac{|DE|}{|DA|}+\dfrac{|FA|}{|FC|}\ge\dfrac{3}{2}$.

Kdy nastává rovnost?

Další klasická tvrzení

Úloha. (Fermatův bod) V trojúhelníku ABC najděte bod P minimalizující hodnotu $|AP| + |BP| + |CP|$.

Poznámka. Všimněte si, že pro čtyřúhelník byla tato úloha výrazně jednodušší.

Úloha. (Nejmenší obvod) Je dán trojúhelník ABC. Najděte trojúhelník s vrcholy na jeho stranách (na každé jeden) s co nejmenším obvodem.

Těžký kalibr

Věta. (Erdős – Mordell) *Uvnitř trojúhelníka ABC uvažme bod P. Jeho kolmé projekce na strany označme D, E a F. Pak platí*

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2\big(|PD| + |PE| + |PF|\big)$$

a rovnost nastává právě pro rovnostranný trojúhelník.

Věta. (Finsler – Hadwiger) *Platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Věta. (Euler) *Platí $|OI|^2 = R(R-2r)$, kde R a r jsou poloměry kružnice opsané a vepsané. Speciálně tedy $R \geq 2r$.*

Návody

1. Je to průsečík úhlopříček, případě vrchol s nekonvexním vnitřním úhlem.

2. Bodem P veďte přímku mimo vnitřek trojúhelníku APD, která odsekne kus čtyřúhelníku. Nakombinujte několik trojúhelníkových nerovností.

3. Doplňte na rovnoběžník $ABXC$.

4. Aspoň jeden vnitřní úhel čtyřúhelníka není ostrý.

5. (i) Sečtěte tři vhodné násobky t.n. (ii) Použijte substituci. (iii) Použijte $\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$, kladnost jmenovatelů plyne z t.n.

6. Posuňte trojúhelník CDP na stranu AB (tedy $D \to A$, $C \to B$ a $P \to P'$. Použijte Ptolemaiovu nerovnost na čtyřúhelník $APBP'$.

7. Označte $|AC| = x$, $|CE| = y$, $|EA| = z$ a s pomocí Ptolemaia dokažte, že

$$\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

kde poslední nerovnost plyne z Cauchy–Schwarze.

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel: *Problem Solving Strategies*, Springer, 1998.
[2] Filip Hlásek: *Trojúhelníkové nerovnosti*, Domašov, 2012.
[3] Claudi Alsina, Roger B. Nelsen: *A Visual Proof of the Erdos-Mordell Inequality*, *http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200711.pdf*

To nejlepší ze stereometrie

David Hruška

Abstrakt. Stereometrie známá ze školy se zabývá převážně určováním objemů a povrchů těles a konstrukcemi řezů. Stereometrie je však mnohem širší téma. Příspěvek uvádí dvacet netradičních trikových úloh všech obtížností. Obsahuje též stručné návody k řešením.

Lehké úlohy

Příklad 1. Rovina protíná hrany AB, AC, CD čtyřstěnu $ABCD$. Které všechny hrany ještě protíná?

Příklad 2. Lze meloun rozdělit na dvě části tak, aby po snědení jeho vnitřku zbyly tři kusy slupky?

Příklad 3. Krychli $3\times3\times3$ chceme rozkrájet na 27 jednotkových kostiček, přičemž po každém řezu můžeme všechny doposud vzniklé části libovolně přeskládat. Kolik řezů je na to minimálně potřeba?

Příklad 4. Obdélníkový stůl má nohy délek postupně 90 cm, 95 cm, 105 cm. Jak dlouhou má čtvrtou nohu, víme-li, že se neviklá? (PraSe 29–7–2)

Příklad 5. Jsou dány dvě brambory libovolného tvaru a velikosti. Dokažte, že lze vytvarovat drát tak, aby se dal těsně přiložit ke kterékoliv z nich.

Nesnadné úlohy

Příklad 6. Je dán kužel s vrcholem V a bodem A na kraji podstavy o poloměru jedna ($|VA| = 3$). Beruška leze nejkratší možnou cestou z bodu A po povrchu kužele opět do bodu A tak, že obleze celý kužel. Určete, v jaké vzdálenosti od V je beruška ve chvíli, kdy je k V nejblíže. (PraSe 26–3–5)

Příklad 7. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body B, C, D veďme postupně roviny kolmé na AB, AC, AD a označme A' jejich průsečík. Body B', C', D' definujeme obdobně. Ukažte, že čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou shodné. (PraSe 26–3–8)

Příklad 8. Vrcholy pravidelného čtyřstěnu jsou obarveny zelenou barvou. Nejdříve obarvíme zeleně všechny body, které leží na přímce s některými dvěma zelenými, následně provedeme tutéž operaci ještě jednou. Jsou teď všechny body prostoru zelené? (Prase 29–7–4)

Příklad 9. Lze prostor rozřezat na jednotkové krychle tak, aby existovala krychle, která žádnou svou stěnu nesdílí s některou jinou krychlí? (Turnaj Měst)

Příklad 10. Lze do krychle vyvrtat takovou díru, aby skrz ni bylo možno prostrčit druhou stejně velkou krychli?

Příklad 11. V prostoru je dán bod. Jaké je nejmenší n takové, že do prostoru lze rozmístit n disjunktních koulí (neobashujících onen bod) tak, aby zcela zakrývaly výhled z tohoto bodu (tj. aby libovolná polopřímka z něj vycházející protínala alespoň jednu z koulí)?

Příklad 12. Existují v prostoru krychle a rovina tak, že vzdálenosti vrcholů této krychle od dané roviny jsou (v nějakém pořadí) čísla $1, 2, \ldots, 8$?

Příklad 13. Krychle $20\times20\times20$ je složena z 2000 kvádříků tvaru $2\times2\times1$. Ukažte, že ji lze propíchnout jehlou, která bude procházet protějšími stěnami a nepropíchne žádný kvádřík. (Turnaj Měst 1988)

Příklad 14. V prostoru jsou dány dva různě velké dvacetistěny tak, že některých šest z jejich vrcholů tvoří vrcholy pravidelného osmistěnu. Určete poměr velikostí dvacetistěnů. (Sharygin 2010)

Příklad 15. V prostoru je dáno n jednotkových koulí. Na každé z nich obarvíme ty body, ze kterých není vidět žádná z ostatních koulí. Dokažte, že součet vybarvených ploch je roven povrchu jednotkové koule.

Obtížné úlohy

Příklad 16. Na letišti se za zavazadla (tvaru kvádru) platí úměrně tomu, jaký mají součet délek svých tří rozměrů. Lze ušetřit tím, že své zavazadlo zabalíme do jiného? Tedy existují kvádry K a L takové, že K se vejde do L a přitom má K větší součet délek hran než L?

Příklad 17. Existuje mnohostěn P a bod O mimo něj tak, že z bodu O není vidět žádný vrchol P?

Příklad 18. Ukažte, že existuje 2012 konvexních mnohostěnů, které lze umístit do prostoru tak, aby se každé dva dotýkaly a přitom žádné tři neměly společný bod. (PraSe 29–8–7b)

Příklad 19. Uvnitř jednotkové koule se středem O je dán konvexní n-stěn P obsahující O. Ukažte, že součet vzdáleností O od stěn P je nejvýše $n-2$. (Rumunsko)

Příklad 20. Určete nejmenší počet prken o šířce 10 cm, jimiž lze zakrýt studnu o průměru 1 m. Prkna lze klást přes sebe.

Příklad 21. Lze mezi dvě rovnoběžné roviny umístit nekonečně mnoho shodných mnohostěnů tak, aby se žádný mnohostěn nemohl pohnout bez toho, že by se pohnuly i nějaké jiné? (Moskva 2000)

Návody

1. Na kterých stranách od roviny leží které body?

2. Ano. Uvažte válcovou díru skrz.

3. Na samotnou prostřední krychličku je potřeba šest řezů a šest zřejmě stačí. Lze též pozorovat velikost největšího dílu.

4. Položte stůl na desku. Jak vysoká by musela být noha vedoucí z prostředku stolu?

5. Myšlenkově brambory protněte.

6. Rozstřihněte plášť podle VA a rozbalte ho. Nejkratší je úsečka.

7. Analogie ve 2D, Thaletova sféra a středová souměrnost.

8. Rozmyslete si, které body zezelenají kvůli dvěma konkrétním zeleným přímkám podle toho, zda jsou tyto přímky různoběžné nebo mimoběžné. Pomůže představit si vrcholy čtyřstěnu jako polovinu vrcholů krychle.

9. Ano. Vydlážděte prostor standardně, vyberte si jednu krychli a „rozposuňte“ šest přilehlých neprotínajících se „komínů“.

10. Ano. Podívejte se podél tělesové úhlopříčky. Do pravidelného šestiúhelníku o straně délky $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ se vejde čtverec o straně délky jedna.

11. Analogie ve 2D. Opište bodu čtyřstěn a výhled přes každou stěnu zakryjte jednou koulí (o hodně různých poloměrech). Uvědomte si, že tři koule nestačí.

12. Ano. Rovina $x + 2y + 4z = 0$ se „odklání“ od směrů os rychlostmi v poměru $1 : 2 : 4$. Čísla 0 až 7 lze zapsat ve dvojkové soustavě. Rovinu lze o 1 vzdálit.

13. Je $3 \cdot 19^2$ možných vpichů. Žádný nemůže být narušen jen jedním kvádříkem (parita). Zároveň každý kvádřík blokuje jediný vpich. Konečně $3 \cdot 19^2 \cdot 2 = 2166 > 2000$.

14. Žádné tři vrcholy dvacetistěnu netvoří pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, takže „dělba“ vrcholů osmistěnu musí být $3 : 3$, a to na dva rovnostranné. Dvacetistěn obsahuje rovnostranné trojúhelníky jen dvou velikostí, poměr jejich velikostí je jako úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka ku straně, tedy $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

15. Vezměte rovinu libovolného směru se všemi sférami na jedné straně a rovnoběžně s ní pohybujte, dokud se nedotkne nějaké sféry.

16. Uvažte objemy ε-okolí obou kvádrů (tj. jakýchsi zaoblených nadkvádrů). Pro každé ε je objem ε-okolí vnějšího kvádru větší (obsahuje ε-okolí toho vnitřního uvnitř sebe), takže (úvahou o obrovském ε) musí mít větší koeficient u vedoucího členu ε^2 (členy s ε^3 se odečtou).

17. Ano. Ke každé stěně krychle přilepte rovnoběžně s jistými jejími hranami dlouhou tenkou destičku tak, aby se její konce při pohledu ze středu krychle „schovaly" za destičky přilepené k jiným stěnám. Odmyslete si krychli a šest destiček spojte „mosty", které nebudou z jejího středu vidět.

18. Zkonstruujte nejdřív 2012 konvexních mnohoúhelníků, které budou všechny svislé, vůči sobě mírně pootočené a každý další se bude dotýkat všech předchozích „zespodu". Mnohoúhelníky poté doplňte na velmi placaté jehlany.

19. Vzpomeňte si, že povrch vrchlíku jednotkové koule je $2\pi \cdot h$, kde h je jeho výška. Vrchlíky odřezané všemi stěnami zakrývají (s překryvem) povrch celé koule, takže součet jejich povrchů je větší než 4π a součet jejich výšek než dva.

20. Uvažme polokouli nad studnou. Svislý průmět každého prkna určuje kulový polopás o pevném povrchu (ten totiž závisí jen na tloušťce pásu, nikoliv na jeho pozici – odečítáme kulové vrchlíky). Je potřeba zakrýt celou polokouli, tedy je potřeba alespoň deset prken. Tolik stačí.

21. Ano. Skládejte pravidelné čtyřstěny do jedné vrstvy do jakési mřížky tak, aby měly jednu hranu „dole" a jednu „nahoře" a byly do sebe „zaklíněné".

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je takřka beze změn převzat od *Pepy Tkadlece*, který jej vytvořil na soustředění v Oldřichově (2012) a kterému tímto děkuji.

Matematika v Mezopotámii

Bára Kociánová

Abstrakt. Jak vypadala matematika psaná na hliněné destičky před více než třemi tisíci lety? Naučíme se číst klínová čísla, budeme počítat v šedesátkové soustavě a vyřešíme si příklady, nad kterými dost možná dumali mezopotámští školáci.

Útržky z historie

Název Mezopotámie označuje území mezi dvěma řekami, Eufratem a Tigridem, nezávisle na tom, kdo tamním obyvatelům zrovna vládl. Říší se tam vystřídalo několik, kvůli v okolí výjimečné úrodnosti území se o něj totiž často bojovalo. Pro jednoduchost však v tomto textu nebudeme rozlišovat Asyřany, Sumery ani další civilizace a budeme je označovat jen jako Mezopotámce.

Nejstarší nálezy dokládající trvalé osídlení pocházejí z desátého tisíciletí před naším letopočtem. O šest tisíc let později už lidé začali vytvářet města, což je časem donutilo vymyslet písmo a naučit se počítat.

K velké radosti historiků byla nejdostupnějším materiálem hlína, do které se dalo snadno rýpat. Klínové písmo na vysušených (či vypálených, byl-li text obzvlášť důležitý) hliněných destičkách je totiž čitelné dodnes. Na rozdíl od papyru či papíru se tabulky nerozloží a oheň spíš pomůže jejich zachování, než aby je zničil. Jen červi občas kus textu smazali a často je nutné tabulky poslepovat. Jsou také méně skladné, nicméně tehdejší písaři rozhodně neplýtvali místem – jeden řádek měl na výšku sotva dva milimetry. Tabulku o velikosti dnešní A4 bychom přepsali na asi 830 řádků.

Celkem se hliněných tabulek našlo na půl milionu, z toho se ví o dvou tisících matematických, pocházejících především z období 1900 – 1600 př. n. l. Tehdy nastalo dlouhé období míru, které svědčilo rozvoji vědy.

Mnoho tabulek sloužilo jako kalkulačky, obsahují třeba násobilku nebo seznam druhých mocnin. Jiné zobrazují geometrické problémy, většinou však jen obrázek a čísla, nikoli vysvětlující text, natož důkaz. Těžko ale říct, kolik tabulek s matematikou se nalezlo doopravdy, protože většinu ještě nikdo z historiků nečetl. Možná se časem zjistí, že byli Mezopotámci o mnoho chytřejší, než tušíme dnes.

Počítání v šedesátkové soustavě

Definice. *Poziční číselná soustava o základu* n, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ je způsob zápisu čísel pomocí násobků mocnin čísla n. Pro $S \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$ se zápis $\overline{a_S a_{S-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots}$ rovná $a_S \cdot n^S + a_{S-1} \cdot n^{S-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0 + a_{-1} \cdot n^{-1} + a_{-2} \cdot n^{-2} \dots$

Takovou definici by mezopotámští matematici nejspíš nenapsali, nicméně používali poziční šedesátkovou soustavu a uměli v ní počítat stejně dobře jako my v desítkové. Tedy – skoro. Podobně jako ostatní starověké civilizace neznali záporná čísla ani nulu, a tak například samotný znak $\vee$ (jedna) mohl znamenat kteroukoli mocninu šedesáti. Význam se číslu přisuzoval podle kontextu, což ale stejně muselo působit zmatky. Časem se někteří matematici naučili místo nuly vynechávat kousek volného místa (a ještě později používali dvě šikmé čáry $\backslash\backslash$), nicméně nikdy ne na konci čísla.

Další zvláštností je, že nad dělením uvažovali jako nad násobením příslušným inverzem. Inverz k a v šedesátkové soustavě je takové číslo b, že $a \cdot b = 60$. Například místo dělení dvanácti můžeme násobit pěti, což bývá jednodušší a díky nepoužívání nuly na konci se oba výsledky rovnají: $120/12 = \overline{2}/\overline{12} = \overline{2} \cdot \overline{5} = \overline{10}$. Výhodou šedesáti je, že má hned dvanáct dělitelů. Naopak třeba číslo sedm inverz nemá, a kdybychom chtěli napsat jednu sedminu jako součet zlomků se jmenovatelem mocniny šedesáti, psali bychom donekonečna. Podobně jako kdybychom chtěli napsat jednu třetinu jako součet desetinných zlomků.

Ve starověku pojem nekonečna nechápali, nicméně na jedné z tabulek lze nalézt pravdivé vztahy, které se přepíšou jako: $\frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{16}{60^3} + \frac{59}{60^4} \leq \frac{1}{7} \leq \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{18}{60^3}$.

Číslo napsané arabskými číslicemi v šedesátkové soustavě budeme psát s horním pruhem a tečkou mezi indexy a_i, např. $\overline{3.15} = 3 \cdot 60 + 15 = 195$. Klínové písmo budeme napodobovat následovně: $\vee$ značí jedničku, $\prec$ desítku. Tyto znaky budeme psát za sebe, sčítají se přirozeným způsobem, např. $\vee\vee \prec\prec\prec \vee \vee \vee \vee \vee = \overline{2.35}$.

Příklad 1. Převeďte mezi šedesátkovou a desítkovou soustavou:

(1) $2543 =$
(2) $\frac{7}{15} =$
(3) $1200{,}4 =$
(4) $\frac{1}{8} =$
(5) $\overline{1.1.1} =$
(6) $\overline{10.5.30} =$
(7) $\overline{2.48} =$

Příklad 2. Spočtěte a výsledek napište v šedesátkové i desítkové soustavě:

(1) $\overline{2.5} \cdot \overline{4.8} =$
(2) $\overline{5.40.45} \cdot \overline{3} =$
(3) $\overline{8.45} \cdot \overline{7.20} =$
(4) $\overline{20.40.50} : \overline{2} =$
(5) $\overline{2.4.5} : \overline{10} =$

(6) $\overline{7.30} : \overline{15} =$

Začátky geometrie

Mnoho nalezených hliněných tabulek dokazuje, že v Mezopotámii se lidé neomezovali na snadné počty, ale řešili i problémy, které s každodenním životem neměly nic společného. Ač nedělali důkazy a geometrické konstrukce zkoumali jen pro konkrétně velké útvary, občas došli k zajímavým výsledkům. Vyřešíme si několik příkladů a porovnáme naše řešení s obrázky a čísly na tabulkách.

Příklad 3. Mějme dva soustředné rovnostranné trojúhelníky, větší o straně p, menší o straně q. Prodlužme všechny strany malého trojúhelníku tak, aby vznikly tři shodné lichoběžníky. Vyjádřete délky jejich stran pomocí p a q a pro $p = \vee$, $q = \prec$ je napište v šedesátkové soustavě. Nakonec spočítejte poměr obsahů velkého a malého trojúhelníku.

Příklad 4. Vyjádřete obsah S kruhu na základě jeho obvodu o. Pokud $o = \overline{3}$ a $S = \overline{45}$, zjistěte, jakou hodnotu podle Mezopotámců mělo přibližně π.

Oni ale *konstantou kruhu* nazývali číslo $\overline{5}$. Pokud *vylepšená konstanta kruhu* je $\beta = \frac{24}{25}$, jaká je vylepšená přibližná hodnota π?

Úloha 5. Na jedné nalezené tabulce se píše (zhruba):

Povrch a stranu jsem spojil: $\frac{3}{4}$. 1, přebytek,
položíš. Polovinu z 1 uřežeš. $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ necháš dát:
$\frac{1}{4}$, k čemuž přilepíš: 1, a tomu 1 se rovná. Ta $\frac{1}{2}$, kterou jsi nechal dát,
z vnitřku 1, vyvodíš: $\frac{1}{2}$ je strana.

Řešení. První věta je zadání příkladu, který bychom dnes napsali jako kvadratickou rovnici $x^2 + x = \frac{3}{4}$. Následuje geometrické řešení.

Sečíst povrch a stranu znamená ke čtverci $x \cdot x$ přidat obdélník $1 \cdot x$. Ten obdélník pak rozřežeme napůl a polovinu z něj nalepíme na čtverec tak, abychom dostali čtverec o straně $x + \frac{1}{2}$ bez rohu o straně $\frac{1}{2}$.

Když necháme dát jednu polovinu a jednu polovinu, získáme čtvrtinu, což je přesně obsah chybějícího rohu. Víme, že když ke čtvrtině přidáme další tři (což je rovno obsahu počátečního obrazce, a tedy i přeskládaného), dostaneme jedna. Jedna rovná se jedné, to nezní příliš užitečně, nicméně si tím uvědomíme, že zadání plus čtvrtina je obsah čtverce jedna krát jedna. Čili $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$. Proto se x musí rovnat jedné polovině.

Toto řešení dnes působí poněkud složitě a nepříliš použitelně pro obecnou kvadratickou rovnici. Neznamená to však, že neuměli řešit jiné rovnice než výše uvedenou. Stačí místo místo obdélníku o straně jedna půlit obdélník o straně b a pak na závěr dostaneme, že obsah čtverce o straně $x + \frac{b}{2}$ se rovná součtu obsahu počátečního obrazce, který byl obecně c, a obsahu čtverce o straně $\frac{b}{2}$. Jen je potřeba umět číslo $c + \frac{b^2}{4}$ umět odmocnit. Pak můžeme vyřešit rovnici $x + bx = c$ pro nezáporná b, c.

Method of false position

Nic jako metoda falešné pozice se v češtině neříká, přestože se jedná o klasický způsob řešení rovnic jedné neznámé, který kromě Mezopotámců používali i třeba egyptští nebo arabští matematici.

Tvrzení 6. *Mějme funkci $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tvaru $f(x) = ax$ pro nějaké a kladné reálné číslo. Pak pokud vezmeme $x_0 > 0$ libovolné (false position), rovnici $f(x) = c$ pro $c > 0$ řeší $x = \frac{c}{f(x_0)} \cdot x_0$.*

Důkaz. Nakreslete si.

Příklad 7. Vyřešte pomocí této metody rovnici $x + \frac{1}{7}x = 55$. Jaká hodnota x_0 se nám bude hodit? Jednotlivé kroky napište i čísly v šedesátkové soustavě.

Definice 8. *Mana* je váhová jednotka odpovídající 0,5 kg. *Gín* $= \frac{1}{60}$ *mana*. *Še* $= \frac{1}{180}$ *gín*.

Příklad 9. Našel jsem kámen. Jeho váhu neznám. Přidal jsem k němu jeho sedminu a pak jedenáctinu té sumy. Zvážil jsem to: 1 *mana*. Kolik vážil původní kámen?

Příklad 10. Našel jsem kámen. Jeho váhu neznám. Odebral jsem z něj jednu sedminu, pak jednu třináctinu rozdílu. Zvážil jsem to: 1 *mana*. Kolik vážil původní kámen?

Příklad 11. Našel jsem kámen. Jeho váhu neznám. Odebral jsem z něj jednu sedminu, pak jsem přidal jednu jedenáctinu rozdílu, pak jsem odebral jednu třináctinu sumy. Zvážil jsem to: 1 *mana*. Kolik vážil původní kámen?

Příklad 12. Našel jsem kámen. Jeho váhu neznám. K osminásobku jeho váhu jsem přidal dva *gín*, pak jsem přidal třetinu sedminy čtyřiadvacetinásobku sumy. Zvážil jsem to: 1 *mana*. Kolik vážil původní kámen?

Literatura a zdroje

[1] Pierre Ageron: kurz *Historie matematiky*, UniCaen, LS 2015/16.

Fibonacciho čísla

Adéla Kostelecká

Abstrakt. Příspěvek shrnuje některé vlastnosti Fibonacciho čísel a obsahuje několik dokazovacích úloh. Většinu z nich lze interpretovat mnoha způsoby.

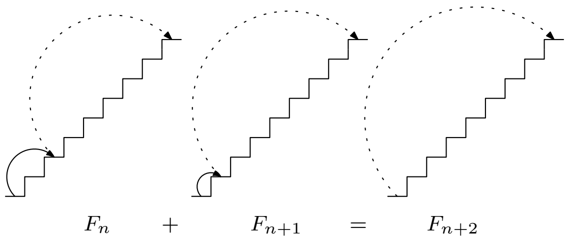
Fibonacciho čísla mají mnoho zajímavých vlastností. Na přednášce si ukážeme, jak některé pěkné identity dokazovat, a to nejen indukcí, ale i kombinatoricky. Některé příklady si znázorníme také geometricky.

Definice. *Fibonacciho posloupnost* je posloupnost F_n celých čísel splňující rekurenci $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ s počáteční podmínkou $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$.

Úloha. (Fibonacciho králíci) Leonardo chová králíky. Začíná s jedním párem. Každému páru trvá dva měsíce, než se jim narodí první mláďata. Potom každý měsíc zplodí právě jeden nový králičí pár, který opět dva měsíce čeká na svá první mláďata. Žádní králíci neumírají. Ukažte, že počet párů po n měsících je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

Fibonacciho číslo si můžeme představit i jinak než na příkladu králíků.

Definice. (Schodiště) *Fibonacciho číslo* F_n je počet možností, jak vyjít schodiště o n schodech, vynecháváme-li nejvýše jeden schod.



Definice. (Dlaždičková) Počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1) \times 1$ kostičkami 1×1 a 2×1, nazveme n-tým *Fibonacciho číslem* a označíme ho F_n.

Úloha. Ukažte dle některé z definic, že součet druhých mocnin dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel je opět Fibonacciho číslo.

Úloha. (Cassiniho identita) Ukažte kombinatoricky, že $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.

Příklady

Příklad 1. Ukažte, že $F_{n+m} = F_n \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m-1}$.

Příklad 2. Ukažte, že platí $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ... + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Příklad 3. Uvědomte si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1) \times 2$ dominovými kostkami, je F_n.

Příklad 4. Uvědomte si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $(n+1) \times 1$ dílky většími než 1×1, je F_n.

Příklad 5. Uvědomte si, že počet možností, jak rozdělit tabulku $n \times 1$ kostičkami s lichými rozměry, je roven F_n.

Příklad 6. Uvědomte si, že počet posloupností nul a jedniček délky n, které neobsahují dvě nuly vedle sebe, je roven F_{n+2}

Příklad 7. Dokažte $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Příklad 8. Ukažte $F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot F_3 + \cdots + F_{2n-1} \cdot F_{2n} = F_{2n}^2$.

Příklad 9. Ukažte, že platí $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$.

Příklad 10. Dokažte, že pro každé $n \geq 4$ platí $F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2$.

Příklad 11. Dokažte, že pro $n \geq 1$ platí $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

Příklad 12. Dokažte, že pro $n \geq 1$ platí $F_{n+5} > 10F_n$.

Příklad 13. Určete hodnotu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}$.

Příklad 14. Určete hodnotu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}$.

Literatura a zdroje

[1] Calda Emil: *Sbírka řešených úloh*, Prometheus, 2006.
[2] Polster Burkard: *Q.E.D. Krása matematického důkazu*, Dokořán, 2014.
[3] Mirek Olšák: *Kombinatorické (Ne)počítání*, Hostětín, 2013.
[4] *Cut The Knot*, *http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/FibonacciTilings.shtml*
[5] *Wolfram Math World*, *http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html*

Teleskopické součty a součiny

Adéla Kostelecká

Abstrakt. Příspěvek se zabývá metodou teleskopických součtů a součinů. Obsahuje několik příkladů na procvičení této techniky.

Princip teleskopických součtů a součinů je založen na vhodném prodloužení výrazu, který následně upravíme tak, že dostaneme mnohem jednodušší výraz než před „prodloužením".

Nejprve si ukážeme základní příklady na teleskopické součty. U této metody chceme z každého sčítance udělat rozdíl dvou výrazů, aby se výrazy jednoduše „odečetly".

Úloha. Určete hodnotu výrazu $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Úloha. Určete hodnotu výrazu $1!\cdot 1+2!\cdot 2+\cdots+n!\cdot n$.

Nyní si ukážeme některé příklady na teleskopické součiny. Zde se podobně snažíme, aby se nám skoro všechno „pokrátilo" a zůstal nám jednoduchý výraz.

Úloha. Dokažte, že $\left(1+\dfrac{1}{1\cdot 3}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{(n-1)\cdot(n+1)}\right)<2$.

Úloha. Dokažte, že $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$.

Příklady

Příklad 1. Určete hodnotu výrazu $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

Příklad 2. Dokažte, že platí $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9$.

Příklad 3. Dokažte, že $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}<2$.

Příklad 4. Dokažte, že platí $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+3)}<\dfrac{1}{4}$.

Příklad 5. Dokažte, že platí $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$

Příklad 6. Určete hodnotu $\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}+\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}.$

Příklad 7. Zjednodušte

$$1!\cdot\left(1^2+1+1\right)+2!\cdot\left(2^2+2+1\right)+\cdots+n!\cdot\left(n^2+n+1\right).$$

Příklad 8. Zjednodušte

$$\frac{1}{(1+1)\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{1+1}}+\frac{1}{(2+1)\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2+1}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}+n\cdot\sqrt{n+1}}.$$

Příklad 9. Dokažte, že

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=\frac{(n+1)^2}{4n}.$$

Příklad 10. Dokažte, že $\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3+1}{n^3-1}<\frac{3}{2}.$

Příklad 11. Určete hodnotu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}.$

Příklad 12. Určete hodnotu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}.$

Literatura a zdroje

[1] Andreescu, Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, 2000.

[2] Jaroslav Švrček: *O teleskopických součtech a součinech*, *https://is.muni.cz/el/1431/jaro2010/MA572/um/didmat2.pdf*

Pellova rovnice

ANH DUNG „TONDA“ LE

ABSTRAKT. Příspěvek se zabývá řešením a hledáním řešení Pellových rovnic pomocí vlastností řetězových zlomků. Jedná se o jeden typ kvadratických diofantických rovnic.

Jako Pellova rovnice je známa rovnice

$$x^2 - Dy^2 = 1, \tag{$\heartsuit$}$$

kde $D > 0$ je přirozené číslo, které není druhou mocninou. Řešení hledáme v celých číslech. Tato rovnice je jednou z nejdůležitějších rovnic v teorii čísel.

Triviálními řešeními Pellovy rovnice jsou dvojice $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$. Těmi se již dále zabývat nebudeme a automaticky s nimi nebudeme počítat.

Jak vypadají řešení

Pro pochopení, jak Pellova rovnice funguje, je podstatná následující věta. Neříká nic jiného než to, že když už jsme našli nějaké řešení (x, y) Pellovy rovnice, tak umíme pomocí něj najít dalších nekonečně mnoho různých řešení.

Věta. *Předpokládejme, že rovnici $x^2 - Dy^2 = 1$ vyhovuje řešení $(x, y) = (p, q)$, pro nějaká p, $q \in \mathbb{N}$. Pak jsou řešeními i všechny dvojice celých (!) čísel (x, y) tvaru*

$$x = \frac{(p + q\sqrt{D})^n + (p - q\sqrt{D})^n}{2}, \tag{1}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{D})^n - (p - q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}. \tag{2}$$

Vzorečky na první pohled spadlé z nebe mají jednoduchý důkaz (prostým dosazením (neroznásobovat na n-tou!)) i jednoduché odvození. Odvození (a vlastně i o maličko delší důkaz) je následující:

Důkaz. Za předpokladu, že (p, q) řeší zadanou rovnici, je

$$1 = p^2 - Dq^2 = (p + q\sqrt{D})(p - q\sqrt{D}),$$

z čehož následně plyne

$$1 = 1^n = ((p + q\sqrt{D})(p - q\sqrt{D}))^n = (p + q\sqrt{D})^n(p - q\sqrt{D})^n.$$

Dále je zřejmé, že existují pevně daná x, $y \in \mathbb{N}$, že

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{D} &= (p + q\sqrt{D})^n, && (3)\\ x - y\sqrt{D} &= (p - q\sqrt{D})^n. && (4) \end{aligned}$$

Pokud totiž roznásobíme výraz $(p+q\sqrt{D})^n$, určitě dostaneme nějaké přirozené číslo (v našem značení je to číslo x) plus y-násobek odmocniny $\sqrt{D}$. Čísla x, y pak získáme prostým vyřešením soustavy rovnic (3), (4). To, že nám vyjdou i z výše napsaných nechutných výrazů celá čísla, je dáno „požráním“ odmocnin $\sqrt{D}$ v čitateli zlomků. $\square$

Další věta říká, že množina řešení Pellovy rovnice je maximálně[1] množina dvojic $\left\{\left(\frac{(p+q\sqrt{D})^n + (p-q\sqrt{D})^n}{2}, \frac{(p+q\sqrt{D})^n - (p-q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}\right)\right\}$ pro pevně daná celá čísla (p, q) a $n \in \mathbb{N}$ (pokud existují řešení, tak jsou v tomto tvaru a jiná řešení už daná rovnice nemá).

Věta. *Mějme dvě různá celočíselná řešení (x, y) a (x', y') zadané rovnice $(\heartsuit)$. Pak existují celá čísla p, q a přirozená čísla k, l taková, že $x + y\sqrt{D} = (p + q\sqrt{D})^k$ a $x' + y'\sqrt{D} = (p + q\sqrt{D})^l$.*

Důsledek. *Pro každá dvě různá řešení existuje „společný dělitel“ těchto řešení. Z existence minimálního řešení (nejmenšího dělitele všech ostatních řešení) rovnice $(\heartsuit)$ (tuto existenci si každý hravě zvládne rozmyslet) pak plyne množina řešení $\{(x + y\sqrt{D})\}$ ve tvaru $\{(p + q\sqrt{D})^n\}$.*

Věta. *Pro každé $D > 0$, $D \neq d^2$, má rovnice $(\heartsuit)$ alespoň jedno celočíselné řešení.*

Důsledek. *Každá Pellova rovnice[2] má množinu řešení (x, y) přesně ve tvaru*

$$\left\{\left(\frac{(p+q\sqrt{D})^n + (p-q\sqrt{D})^n}{2}, \frac{(p+q\sqrt{D})^n - (p-q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}\right)\right\}$$

pro pevně daná čísla p, q, a $n \in \mathbb{N}$.

Zbývá ještě dát návod, jak to první nebo alespoň jedno řešení najít. Bude to zároveň i náznak důkazu, že toto řešení existuje. Pro tyto účely si ujednotíme označení.

Definice. Řetězové zlomky budeme značit způsobem

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\cdots}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}} \quad \text{a} \quad [a_0, a_1, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots}},$$

[1] Prozatím „maximálně“, později „právě“.

[2] S $D \neq d^2$.

kde a_1, $a_2, \dots \in \mathbb{N}$.

Definice. p_n, q_n jsou čísla taková, že $\mathrm{nsn}(p_n, q_n) = 1$ a $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Nyní si pomůžeme několika nedokázanými větami. Začíná špetka humusu.

Věta. *Každé reálné číslo r lze jednoznačně vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $r = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ nebo $r = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. První způsob je pro čísla racionální, druhý pro iracionální.*

Věta. *Každou iracionální odmocninu $\sqrt{D}$ lze zapsat ve tvaru $\sqrt{D} =$*

$$= [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0}] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0, a_1, \dots].$$

Věta. *Koeficienty a_0, $a_1, \dots$ a čísla p_0, $p_1, \dots; q_0, q_1, \dots$ hledáme pomocí těchto rekurentních vztahů (P_n, Q_n jsou další pomocné posloupnosti):*

$$\begin{array}{cc}
P_0 = 0,\ P_1 = a_0, & P_n = a_{n-1}Q_{n-1} + P_{n-1} \\
Q_0 = 1,\ Q_1 = D - a_0^2, & Q_n = \frac{D - P_n^2}{Q_{n-1}} \\
a_0 = \lfloor D \rfloor, & a_n = \lfloor \frac{a_0 + P_n}{Q_n} \rfloor \\
p_0 = a_0,\ p_1 = a_0 a_1 + 1, & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\
q_0 = 1,\ q_1 = a_1, & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}
\end{array}$$

A na co nám to všechno je? Odpověď není jednoduchá `;)`. Ale pomůže nám v ní jediná věta, další věta:

Věta. *Pro čísla zadaná rekurencí v předchozí větě platí vztahy:*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1},$$
$$p_n^2 - D q_n^2 = (-1)^{n+1} Q_{n+1}, \qquad (\clubsuit)$$

Teď s nápovědou, že právě pro $n = k$ (připomínáme, že k je délka periody posloupnosti a_n u řetězových zlomků) je $Q_k = 1$, a detailním shlédnutím identity ($\clubsuit$) nám vyvstane, že jakmile najdeme periodu k, tak čísla q_{k-1}, p_{k-1} (popřípadě q_{2k-1}, p_{2k-1}) jsou nejmenším řešením zadané rovnice. Jak tato řešení používat a jestli jsou skutečně řešeními, se dozvíte na přednášce (ať zbude aspoň střípek tajemna nad tímto krásným problémem).

A poslední věta je na zamyšlení, jak nám vyřešení základní Pellovy rovnice může pomoct i s dalšími obecnějšími rovnicemi.

Věta. *Nechť existuje nějaké celočíselné řešení rovnice $x^2 - Dy^2 = \pm c$, pak existuje těchto řešení nekonečně mnoho.*

Příklady

Příklad 1. Řešte v celých číslech $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$.

Příklad 2. Kdy je alespoň jedno z čísel $5x^2 + 4$, $5x^2 - 4$ čtverec?

Příklad 3. Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že pokud je číslo$2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ celé, pak nutně musí být čtvercem.

Příklad 4. Dokažte, že pokud rozdíl dvou po sobě jdoucích třetích mocnin je n^2, pak $2n - 1$ je čtverec.

Příklad 5. Dokažte, že pokud $3n + 1$ a $4n + 1$ jsou čtverce, pak n je násobek 56.

Příklad 6. Pro která přirozená čísla n je $3^n - 2$ čtverec?

Literatura a zdroje

[1] *http://mathworld.wolfram.com/PellEquation.html*
[2] František Konopecký: *Pellova rovnice*, Olšanka, 2006.

Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka

Jakub Löwit

Abstrakt. V přednášce představíme dvě jednoduchá a krásná tvrzení o trojúhelníku, která lze nezřídka uplatnit v olympiádních úlohách, která si procvičíme na mnoha příkladech. Posléze se pustíme do některých jejich hlubších důsledků.

Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka

Úmluva. (základní značení) Většinou budeme v $\triangle ABC$ značit O střed kružnice opsané, H orthocentrum, T těžiště, I střed kružnice vepsané. Středy stran BC, CA, AB označme M_A, M_B, M_C. Paty výšek z vrcholů A, B, C na strany BC, CA, AB budeme značit H_A, H_B, H_C. Středy úseček HA, HB, HC budeme značit M_{HA}, M_{HB}, M_{HC}. Střed Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ budeme značit N.

Úmluva. Pokud definujeme několik bodů analogickým způsobem, automaticky vše děláme „po řadě“, tedy jako první pojmenováváme střed první zmíněné úsečky atd.

Lemma. (Obrazy orthocentra) *Obrazy orthocentra H v osových souměrnostech podle stran AB, BC, CA a ve středových souměrnostech podle bodů M_A, M_B, M_C leží na kružnici opsané trojúhelníku $\triangle ABC$.*

S pomocí předchozího lemmatu a stejnolehlosti nyní odvodíme dvě klíčová tvrzení. Nenechme se ale mást – i pouhá znalost tohoto lemmatu nám v olympiádních příkladech může často velmi pomoct.

Tvrzení. (Feuerbachova kružnice, kružnice devíti bodů) *V $\triangle ABC$ leží devět bodů $M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, M_{HA}, M_{HB}, M_{HC}$ na jedné kružnici. Střed této kružnice N je středem úsečky OH a její poloměr je roven polovině poloměru kružnice opsané $\triangle ABC$.*

Tvrzení. (Eulerova přímka) *V $\triangle ABC$ leží body H, T, O v tomto pořadí na jedné přímce, a to v poměru $\frac{|HT|}{|OT|} = 2$.*

Cvičení. Dokažte předchozí dvě tvrzení. Pokud už nějaké důkazy znáte, dokažte je jinak.

Jak je vidět, Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka spolu úzce souvisí, spojuje je právě dvojice stejnolehlostí, které převádí kružnici opsanou na Feuerbachovu kružnici. Nyní už přichází čas na hromadu důsledků této elegantní dvojice tvrzení. V následujících příkladech najdeme jak zajímavé olympiádní problémy, tak pěkná tvrzení z geometrie trojúhelníka.

Body v převleku

Začneme příklady, na které vlastně ani tolik geometrie potřeba není - většinou stačí nahlédnout, že některé body vystupují v různých trojúhelnících různými způsoby. Často nám také pomůže stejnolehlost, díky které nezřídka leží na jedné přímce víc bodů, než by se zprvu zdálo.

Příklad 1. Dokažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků $\triangle ABC$ a

(1) $\triangle M_A M_B M_C$
(2) $\triangle M_{HA} M_{HB} M_{HC}$

splývají.

Příklad 2. (Hamilton's Theorem) Mějme čtveřici trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$. Dokažte, že jejich Feuerbachovy kružnice splývají a jejich Eulerovy přímky prochází jedním bodem.

Příklad 3. Body dotyku kružnice vepsané $\triangle ABC$ se stranami BC, CA, AB označme D, E, F. Orthocentrum $\triangle DEF$ označme V. Pak body V, I, O leží na jedné přímce. (Írán 1995)

Příklad 4. Mějme $\triangle ABC$ s orthocentrem H. Uvažme opsiště trojúhelníků $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku tvořeného těmito opsišti má stejný poloměr jako kružnice opsaná původnímu trojúhelníku.

Příklad 5. Středy kružnic připsaných ke stranám BC, CA, AB $\triangle ABC$ označme J_A, J_B, J_C. Dokažte, že středy úseček $J_A J_B$, $J_B J_C$ a $J_A J_C$ leží na kružnici opsané $\triangle ABC$.

Příklad 6. V $\triangle ABC$ označme středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BCO$, $\triangle CAO$, $\triangle ABO$ jako O_A, O_B, O_C. Dokažte, že střed kružnice opsané $\triangle O_A O_B O_C$ leží na Eulerově přímce $\triangle ABC$.

Příklad 7. Mějme $\triangle ABC$ s vepsištěm I. Uvažme středy jeho stran M_A, M_B, M_C. Dokažte, že střed Feuerbachovy kružnice $\triangle BCI$ leží na ose úhlu $\sphericalangle M_B M_A M_C$.

Příklad 8. (Fuhrmann Triangle) Středy kratších oblouků BC, CA, AB kružnice opsané $\triangle ABC$ označme $\check{S}_A$, $\check{S}_B$, $\check{S}_C$. Jejich obrazy v osové souměrnosti podle úseček BC, CA, AB označme K, L, M. V $\triangle ABC$ označme I vepsiště a N střed Feuerbachovy kružnice. Ukažte, že přímka IN je Eulerovou přímkou $\triangle KLM$.

Angle chasing neboli úhlení

Pokud nás zrovna nenapadá nějaký trik, často je nejjednodušším přístupem dopočítat některé úhly. V geometrii (a v té olympiádní o to víc) je však typicky potřeba nejprve najít několik kružnic, které v úhlení pomohou. Často se někde v úloze nějaká Feuerbachova kružnice schovává a její odhalení a dokreslení nám výrazně usnadní práci – někdy dokonce skoro samo o sobě příklad vyřeší.

Příklad 9. Zkonstruujte $\triangle ABC$, máte-li dánu jeho kružnici opsanou, vrchol A na ní a jeho orthocentrum H.

Příklad 10. Uvažme všechny trojúhelníky s pevnou základnou a daným poloměrem kružnice opsané. Ukažte, že se jejich Feuerbachovy kružnice dotýkají pevné kružnice.

Příklad 11. V ostroúhlém různostranném $\triangle ABC$ označme P patu A–výšky, H kolmiště, O opsiště, D průsečík AO a BC a konečně M střed úsečky AD. Dokažte, že přímka PM prochází středem úsečky OH. (MO–60–A–III–5)

Příklad 12. Přímka p se dotýká Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ ve středu úsečky BC. Průsečíky p s přímkami AB, AC označme X, Y. Ukažte, že body B, X, C, Y leží na jedné kružnici.

Příklad 13. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Tečny vedené k půlkružnici body C, D se protnou v bodě E a úhlopříčky AC, BD v bodě F. Označme M průsečík EF a AB. Dokažte, že body E, C, M, D leží na jedné kružnici. (China West 2010)

Příklad 14. Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník a H_1, H_2 orthocentra trojúhelníků ABC, ABD. Dokažte, že $H_1H_2 \parallel CD$.

Příklad 15. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se středem I se dotýká jeho stran BC, CA, AB v bodech D, E, F. Buď Y, Z průsečíky přímek DF, DE s rovnoběžkou k BC vedenou bodem A. Středy úseček DY, DZ pojmenujme F', E'. Dokažte, že body A, E, F, I, E', F' leží na jedné kružnici. (American Mathematical Monthly)

Příklad 16. V $\triangle ABC$ s orthocentrem H a opsištěm O označme průsečík spojnice středů úseček BC, OH s osou úhlu u vrcholu A jako X. Dokažte $|\sphericalangle AXH| = 90°$.

Příklad 17. Uvažme přímku p, která prochází středem úsečky BC a orthocentrem nerovnostranného $\triangle ABC$. Tato přímka protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ v bodech A', A''. Ukažte, že orthocentra $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, $\triangle A''BC$ tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku.

Příklad 18. Mějme $\triangle ABC$ s Eulerovou přímkou l a zvolme dvě jeho strany CA, CB. Uvažme jeho střední příčku p procházející středy těchto dvou stran a spojnici q pat výšek spuštěných na tyto strany. Předpokládejme, že $p \cap q = C'$. Ukažte, že pak $CC' \perp l$. (Peru TST 2006)

Příklad 19. V $\triangle ABC$ se přímky AB, H_AH_B protínají v X, přímky BC, H_BH_C v Y a přímky CA, H_CH_A v Z. Dokažte, že pak body X, Y, Z leží na jedné přímce, které je kolmá na Eulerovu přímku $\triangle ABC$.

Příklad 20. Ukažte, že Feuerbachovy kružnice trojice trojúhelníků, jež jsou určeny vždy opsištěm, orthocentrem a jedním vrcholem daného trojúhelníku, mají dva společné body.

Příklad 21. Buď H orthocentrum $\triangle ABC$ s kružnicí opsanou ω. Bod P ležící na ω je různý od A, B, C. Průsečík přímek BH, AC označme E. Ať Q, R jsou body takové, že čtyřúhelníky $PAQB$, $PARC$ jsou rovnoběžníky v tomto pořadí vrcholů a přímky AQ, HR se protínají v X. Dokažte, že $EX \parallel AP$. (IMO Shortlist 1996)

Poměry mezi body

Často na nás úloha vybafne s nějakými poměry. Jejich správnou interpretací je mnohdy chytře zvolená stejnolehlost. Pokud jsou navíc takové body spjaté s Eulerovou přímkou, neváháme, a využijeme toho, co o ní známe.

Příklad 22. V $\triangle ABC$ ozančme D patu výšky na BC. Rovnoběžka s BC vedená bodem A podruhé protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ v E. Dokažte, že přímka DE prochází těžištěm $\triangle ABC$. (IMO shortlist 2011, upraveno)

Příklad 23. Dokažte, že orthocentrum a opsiště daného ostroúhlého $\triangle ABC$ mají stejnou vzdálenost od strany AB, právě když pro vnitřní úhly α, β při vrcholech A, B platí rovnost $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 3$. (MO–64–B–II–3)

Příklad 24. Je dán $\triangle ABC$ s opsištěm O, orthocentrem H a poloměrem kružnice opsané R. Ukažte, že $|OH| < 3R$. (APMO 1994)

Příklad 25. Je dán $\triangle ABC$ s průměrem kružnice opsané XX', těžištěm T a orthocentrem H. Ukažte, že přímka TX půlí úsečku HX'.

Příklad 26. ABC je trojúhelník s opsištěm O a kolmištěm H různým od O. Ukažte, že obsah jednoho z trojúhelníků $\triangle AOH$, $\triangle BOH$, $\triangle COH$ je roven součtu obsahů zbylých dvou. (Asia-Pacific Mathematical Olympiad, 2004)

Isogonalita a Inverze

V mnoha úlohách na inverzi se Feuerbachova kružnice ráda objeví a my ji můžeme využít k dokončení úlohy. Neméně často nám ale inverze poodkryje další zajímavé vlastnosti Feuerbachovy kružnice.

Že začneme příkladem, který už byl v předminulé kapitole, není náhoda.

Příklad 27. Body dotyku kružnice vepsané $\triangle ABC$ se stranami BC, CA, AB označme D, E, F. Orthocentrum $\triangle DEF$ označme V. Pak body V, I, O leží na jedné přímce. (Írán 1995)

Příklad 28. V ostroúhlém $\triangle ABC$ pojmenujme F obraz paty kolmice z B v osové souměrnosti podle střední příčky M_BM_C. Dokažte, že O leží na BF. (IGO 2015)

Příklad 29. Mějme nerovnostranný $\triangle ABC$, střed kružnice jemu vepsané označme I. Dokažte, že $IN \perp OH$ právě když je jeden z úhlů $\triangle ABC$ roven $60°$. (skoro folklór)

Příklad 30. Mějme $\triangle ABC$. Označme I střed jemu vepsané kružnice l. Dotyky kružnice l se stranami BC, CA, AB označme P, Q, R. Buď k kružnice opsaná středům stran trojúhelníku $\triangle PQR$. Buď $X \neq C$ průsečík přímky CI a kružnice opsané $\triangle ABC$, buď Y průsečík úsečky IX a kružnice k. Buď Z jeden z průsečíků kružnice l a kolmice k přímce CX vedené bodem Y. Dokažte, že přímka XZ se dotýká kružnice l. (PraSe)

Příklad 31. Na půlkružnici nad průměrem AB a se středem O zvolíme body C, D. Předpokládejme, že se polopřímky AB a DC protnou v bodě M. Označme K druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům AOD a BOC. Ukažte, že $|\sphericalangle MKO| = 90°$. (Rusko 1995)

Příklad 32. (Feuerbach Theorem) Ukažte, že Feuerbachova kružnice $\triangle ABC$ se dotýká kružnice jemu vepsané i všech jeho kružnic připsaných.

Poznámka. Dotyk kružnice devíti bodů s kružnicí vepsanou nazýváme *Feuerbachův bod* $\triangle ABC$ a značíme jej F_e.

Příklad 33. (Kosnitha Theorem) V $\triangle ABC$ označme středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BCO$, $\triangle CAO$, $\triangle ABO$ jako O_A, O_B, O_C. Pak se přímky AO_A, BO_B, CO_C protínají v jednom bodě K_O (nebo jsou rovnoběžné).

Ponceletův bod

Na začátku přednášky jsme díky Hamilton's Theorem zjistili, že má smysl mluvit o Feuerbachově kružnici *orthocentrické* čtveřice bodů - tedy takové čtveřice bodů A, B, C, D, že každý z nich je orthocentrem zbylých tří. Co se tahkle podívat na jinou, libovolnou čtveřici bodů?

Definice. *Orthocentrická* čtveřice bodů je čtveřice různých bodů v rovině taková, že každý z nich je orthocentrem trojúhelníka tvořeného zbylými třemi. *Neorthocentrická* čtveřice bodů je nečekaně taková čtveřice, která není orthocentrická.

Je dobré si uvědomit, že pokud je čtveřice bodů orthocentrická, je každý její bod orthocentrem trojúhelníka tvořeného zbylými třemi. Buď tedy je každý bod zvolené čtveřice orthocentrem zbylých tří (a jedná se o orthocentrickou čtveřici), nebo není žádný z nich orthocentrem zbylých tří (a jedná se o neorthocentrickou čtveřici).

Tvrzení. (Hamilton's Theorem) *Mějme orthocentrickou čtveřici bodů A, B, C, D. Pak Feuerbachovy kružnice trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle CAD$ splývají.*

Tvrzení. (Poncelet Point) *Mějme neorthocentrickou čtveřici bodů takovou A, B, C, D. Pak se čtveřice Feuerbachových kružnic trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle CAD$ protíná právě v jednom bodě P, který se nazývá Ponceletův bod čtyřúhelníku $ABCD$.*

Tvrzení. *Mějme neorthocentrickou čtveřici bodů $ABCD$. Dále orthocentrum $\triangle ABC$ nazvěme H. Pak Ponceletovy body neorthocentrických čtveřic $ABCD$, $ABDH$, $ACDH$, $BCDH$ splývají.*

Tvrzení. *Mějme neorthocentrickou čtveřici bodů $ABCD$ a jejich Ponceletův bod P. Označme paty výšek spuštěných z bodu A na přímky CD, DB, BC jako A_B, A_C, A_D. Pak bod P leží na kružnici opsané $\triangle A_B A_C A_D$.*

Všimněme si, že analogické tvrzení platí také pro paty výšek z bodů B, C, D. Nalezli jsme tedy další čtyři kružnice procházející bodem P.

Tvrzení. (Tonda a Kenny) *Ponceletův bod neorthocentrické čtveřice $ABCD$ leží na kružnici opsané bodům $X = AB \cap CD$, $Y = BC \cap AD$, $Z = AC \cap BD$.*

Antigonal Conujugates

Využijme nyní nabytých vědomostí o Ponceletově bodě k tomu, abychom elegantně definovali antigonální dvojice bodů v trojúhelníku. Tyto *antigonal conjugates* přitom definujeme třemi na první pohled různými způsoby.

Definice. (Definice před Ponceletův bod) Mějme $\triangle ABC$ a bod D různý od orthocentra, který navíc neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Obraz bodu D v osové souměrnosti podle Ponceletova bodu čtveřice $ABCD$ oznčíme D'. Bod D' nazýváme *antigonal conjugate* bodu D vzhledem k $\triangle ABC$.

Definice. (Úhlová definice) *Antigonal conjugate* bodu D vzhledem k $\triangle ABC$ (kde D je různý od H, neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$) je bod D' jednoznačně určený následující trojicí rovností orientovaných úhlů:

$$
\begin{aligned}
(AD', D'B) &= -(AD, DB),\\
(BD', D'C) &= -(BD, DC),\\
(CD', D'A) &= -(CD, DA).
\end{aligned}
$$

Definice. (Antigonalita, Isogonalita a Inverze) Bod E' je obrazem bodu E v inverzi podle kružnice opsané $\triangle ABC$ (body E, E' nesplývají s opsištěm O). Dále Bod D je isogonal conjugate bodu E vzhledem k $\triangle ABC$ a bod D' je isogonal conjugate bodu E' vzhledem k $\triangle ABC$. Pak body D, D' jsou *antigonal conjugates.*

Úmluva. Pokud dále mluvíme o bodu D a jeho antigonal conjugate D' v $\triangle ABC$ s orthocentrem H, automaticky předpokládáme, že bod D (a tedy i D') je různý od A a neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$ tedy čtveřice $ABCD$, $ABCD'$ jsou neorthocentrické.

Nyní následuje sprška cvičení, ve kterých jsou shrnuta důležitá (ale někdy i lehká) pozorování o Ponceletových bodech a antigonal conjugates. Ne všechna je ale nutné dělat popořadě, zejména k vyřešení prvního se hodí výsledky jiných.

Cvičení. Ukažte, že předešlé tři definice jsou vskutku ekvivalentní (a korektní).

Cvičení. Rozmyslete si, že (uvážením degenerovaných případů, které jsme v definici vynechali) „orthocentrum je antigonal conjugate kružnice opsané“.

Cvičení. Nahlédněte, že bod D' je antigonal conjugate bodu D právě když bod D je antigonal conjugate bodu D' (vzhledem k $\triangle ABC$).

Cvičení. Máme $\triangle ABC$, jeho orthocentrem H a bod D. Pak antigonal conjugates bodu D vzhledem k $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$ splývají.

Cvičení. V $\triangle ABC$ s orthocentrem H máme dvojici antigonal conjugates D, D'. Ukažte, že:

$$(AD', D'H) = -(AD, DH),$$
$$(BD', D'H) = -(BD, CH),$$
$$(CD', D'H) = -(CD, DH).$$

Cvičení. Body D, D' jsou antigonal conjugates v $\triangle ABC$. Pak Ponceletovy body čtveřic $ABCD$, $ABCD'$ splývají.

Cvičení. Mějme $\triangle ABC$ a libovolný bod D různý od jeho vrcholů a orthocentra. Obrazy bodu D v osových souměrnostech podle přímek BC, CA, AB označme D_A, D_B, D_C. Nahlédněte, že kružnice opsané $\triangle BCD_A$, $\triangle CAD_B$, $\triangle ABD_C$ prochází jedním bodem.

Cvičení. Mějme $\triangle ABC$ a libovolný bod D různý od jeho vrcholů a orthocentra. Obrazy bodu D v osových souměrnostech podle přímek BC, CA, AB označme D_A, D_B, D_C, středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BCD_A$, $\triangle CAD_B$, $\triangle ABD_C$, $\triangle D_AD_BD_C$ označme S_A, S_B, S_C, S_D. Ukažte, že obraz bodu S_D v inverzi podle kružnice opsané trojúhelníku $\triangle S_AS_BS_C$ je antigonal conjugate bodu D v $\triangle ABC$.

A co z toho?

Máme tedy docela hodně docela pěkných vlastností, které jsou docela dost obecné. Pojďme se ale podívat na nějaké příklady použití předchozí teorie. Přece jen už jsme se ale dostali dál než sahá běžná olympiádní matematika, příklady tedy nebudou ze soutěží - některé příklady dokonce budou poměrně nové věty z pokročilých partií geometrie trojúhelníka. Tak vzhůru na ně!

Příklad 34. Ukažte, že Feuerbachovy kružnice trojice trojúhelníků, jež jsou určeny vždy opsištěm, orthocentrem a jedním vrcholem daného trojúhelníku, mají dva společné body.

Příklad 35. Mějme $\triangle ABC$ a jeho dva Fermatovy body X, X' (body zkonstruované přikreslením tří rovnostranných trojúhelníků z vnějšku resp. z vnitřku ke stranám AB, BC, CA a uvažováním průsečíků jejich kružnic opsaných). Ukažte, že střed úsečky XX' leží na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Příklad 36. Kružnice opsaná průsečíkům os vnitřních úhlů daného trojúhelníku s jeho protějšími stranami prochází Feuerbachovým bodem tohoto trojúhelníku.

Příklad 37. Označme I vepsiště $\triangle ABC$ a F_e dotyk kružnice vepsané s Feuerbachovou kružnicí (Feuerbachův bod). Středy kružnic připsaných ke stranám AC, AB $\triangle ABC$ ozančme J_B, J_C. Obrazy těchto bodů v osových souměrnostech podle přímek AC, AB označme Y, Z. Průsečík přímek BY, CZ označme K. Ukažte, že F_e je středem úsečky KI.

Příklad 38. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme paty kolmic z D na AB, AC jako X, Y. Orthocentrum $\triangle ABC$ označme H. Pak přímka XY půlí úsečku HD.

Příklad 39. Uvažujme kružnici opsanou $\triangle ABC$ s průměrem PQ. Dále uvažujme Simpsonovy přímky bodů P, Q vůči $\triangle ABC$. Ukažte, že jejich průsečík leží na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Příklad 40. Buď $\triangle ABC$, na jehož stranách AB, BC leží body P, Q tak, že čtyřúhelník $APQC$ je tětivový. Úsečky AQ, CP se protnou v X. Středy úseček AX, BX, CX označme K, L, M. Paty kolmic z X na AB, BC nazvěme S, T. Ukažte, že kružnice opsané $\triangle LSK$ a $\triangle LTM$ se protínají na úsečce AC.

Tak si pojďme hrát!

Jak už jsme zjistili, pro naši kružnici a přímku toho platí hodně. Doteď jsme platná tvrzení dělili do větších, logicky uspořádaných kapitol (ať už olympiádních, nebo souvisejících s pokročilejší geometrií trojúhelníka). V této poslední části je jednotící myšlenkou rozmanitost. Nebojte se příkladů, ale ani hintů – někdy je třeba použít poměrně netriviální tvrzení. Ještě než se pustíme do příkladů, přidáme jedno lemma, které je méně známé a v jistých situacích nám poskytne potřebný nadhled.

Lemma. (Anti-Steiner Point) *Mějme $\triangle ABC$ a libovolnou přímku p proházející jeho orthocentrem H. Pak se obrazy přímky p v osových souměrnostech podle přímek BC, CA, AB protínají na kružnici opsané $\triangle ABC$.*

Příklad 41. Mějme trojúhelník $\triangle ABC$ a jeho orthocentrum H. Tyto čtyři body určují šest přímek. Uvažujme množinu M všech kružnic, které se dotýkají nějaké trojice z určených přímek (takových, že všechny tři neprocházejí jedním bodem). Dokažte, že existuje kružnice, která se dotýká všech kružnic z M.

Příklad 42. Uvažujme ostroúhlý $\triangle ABC$, pro který platí $|AB| < |AC|$. Tečna procházející bodem A ke kružnici ω jemu opsané protíná přímku BC v bodě D. Nechť G je těžiště $\triangle ABC$ a nechť přímka AG protíná kružnici ω v bodě $H \neq A$. Předpokládejme, že přímka DG protíná přímky AB a AC po řadě v bodech E a F. Dokažte, že $|\sphericalangle EHG| = |\sphericalangle GHF|$. (CPS 2016)

Příklad 43. Uvnitř $\triangle ABC$ je dán bod S. Dokažte, že středy stran BC, CA, AB, středy úseček AS, BS, CS a průsečíky $AS \cap BC$, $BS \cap CA$, $CS \cap AB$ leží všechny na jedné elipse.

Příklad 44. Uvažme $\triangle ABC$ s patami výšek H_A, H_B, H_C. Dokažte, že Eulerovy přímky $\triangle AH_BH_C$, $\triangle BH_CH_A$, $\triangle CH_AH_B$ se protínají na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Příklad 45. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se středem I se dotýká jeho stran BC, CA, AB v bodech X, Y, Z. Obrazy těchto bodů v osových souměrnostech podle os AI, BI, CI označme X', Y', Z'. Středy stran BC, CA, AB pojmenujme M_A, M_B, M_C. Ukažte, že přímky $X'M_A$, $Y'M_B$, $Z'M_C$ procházejí jedním bodem.

Příklad 46. (First Fontené Theorem) Je dán $\triangle ABC$ se středy stran M_A, M_B, M_C. Zvolme libovolný bod P a paty výšek spuštěných z P na BC, CA, AB označme V_A, V_B, V_C. Označme $X = M_BM_C \cap V_BV_C$, $Y = M_CM_A \cap V_CV_A$, $Z = M_AM_B \cap V_AV_B$. Pak se přímky AX, BY, CZ protínají v jednom bodě R, který leží na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$ a na kružnici opsané $\triangle V_AV_BV_C$.

Příklad 47. (Second Fontené Theorem) Je dán $\triangle ABC$ a bod P, který se pohybuje po pevné přímce procházející opsištěm O. Pokud označíme paty výšek spuštěných z P na BC, CA, AB jako V_A, V_B, V_C, prochází kružnice opsaná $\triangle V_AV_BV_C$ pevným bodem R na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Příklad 48. (Third Fontené Theorem) Mějme body P a Q, které jsou isogonal conjugates vzhedem k $\triangle ABC$ s opsištěm O. Pokud oznečíme paty výšek spuštěných z P na BC, CA, AB jako V_A, V_B, V_C, kružnice opsaná $\triangle V_AV_BV_C$ se dotýká Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ právě když body P, Q, O leží na jedné přímce.

Zde si dovoluji ukončit systém hintů, neboť hinty k následujícím problémům by byly nepřiměřeně dlouhé. Nechávám je tedy jako zdroj volné zábavy.

Příklad 49. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se dotýká jeho stran BC, CA, AB v bodech D, E, F. Buď D_B, D_C průsečíky přímek DF, DE s rovnoběžkou k BC vedenou bodem A. Analogicky definujme E_C, E_A, F_A, F_B. Ukažte, že Eulerovy přímky $\triangle DD_BD_C$, $\triangle EE_CE_A$, $\triangle FF_AF_B$ procházejí Feuerbachovým bodem $\triangle ABC$.

Příklad 50. (Lester's Circle) Mějme různostranný $\triangle ABC$. Ukažte, že jeho opsiště O, střed Feuerbachovy kružnice N a oba Fermatovy body X, X' leží na jedné kružnici.

Příklad 51. V $\triangle ABC$ označme O opsiště a I vepsiště. Dotyky kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB označme D, E, F. Pak se obrazy přímky OI v osových souměrnostech podle DE, EF, FD protínají ve Feuerbachově bodě F_e původního trojúhelníka.

Příklad 52. Dotyky Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ s jejími třemi kružnicemi připsanými (dotýkajícími se stran BC, CA, AB) označme F_a, F_b, F_c. Ukažte, že pak se přímky AF_a, BF_b, CF_c protínají v jednom bodě X. Pokud dále označíme v $\triangle ABC$

vepsiště I, střed Feuerbachovy kružnice N a její dotyk s kružnicí vepsanou F, leží body F, I, X, N na jedné přímce v harmonickém čtyřpoměru.

Příklad 53. Kružnice opsaná dotykům kružnic připsaných $\triangle ABC$ prochází Feuerbachovým bodem $\triangle ABC$.

Příklad 54. (Schiffler Point) Střed kružnice vepsané $\triangle ABC$ označme I. Dokažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků $\triangle ABI$, $\triangle BCI$, $\triangle CAI$ se protínají v jednom bodě S na Eulerově přímce $\triangle ABC$.

Příklad 55. (Exeter Point) Těžnice AT, BT, CT v $\triangle ABC$ protnou kružnici k jemu opsanou podruhé v bodech X, Y, Z. Tečny ke k vedené body B, C se protnou v bodě D, analogicky tečny vedené body C, A se protnou v E a tečny vedené body A, B se protnou v F. Ukažte, že přímky DX, EY, FZ se protínají na Eulerově přímce $\triangle ABC$.

Příklad 56. Středy stran BC, CA, AB daného trojúhelníka s opsištěm O a vepsištěm I označme M_A, M_B, M_C. Obrazy přímky OI v osových souměrnostech podle stran $\triangle M_AM_BM_C$ se pak protínají v jednom bodě (Feuerbachoě bodě F_e).

Příklad 57. Označme F_e Feuerbachův bod $\triangle ABC$ a M_A, M_B, M_C středy jeho stran. Pak jedna ze vzdáleností F_eM_A, F_eM_B, F_eM_C je součtem zbylých dvou.

Příklad 58. Střední příčka $\triangle ABC$ (s opsištěm O a vepsištěm I) rovnoběžná se stranou BC protíná osy vnitřních úhlů u vrcholů B, C v bodech A_b, A_c. Analogigicky definujme body B_c, B_a, C_a, C_b. Ukažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků AA_bA_c, BB_cB_a, CC_aC_b se protínají na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Návody

1. Vždy najděte dvojici bodů, které leží na Eulerově přímce původního i jiného trojúhelníku. Je dobré se podívat třeba na různá opsiště, kolmiště a devítiště.

2. Na Feuerbachově kružnici původního trojúhelníka najděte vždy trojici bodů, kterou prochází i ta nová. Druhé vyplývá přímo z prvního, stačí se kouknout na střed všech těchto kružnic.

3. Uvědomte si, že ve vhodné stejnolehlosti se body V, I zobrazí na I, O.

4. Uvažme opsiště všech tří trojúhelníků, které lze zkonstruovat díky stejnolehlosti podle společného devítiště. Bod H je dokonce opsištěm vzniklého trojúhelníku, shodného s původním.

5. Kdo je tady Feuerbachovou kružnicí trojúhelníku $J_AJ_BJ_C$?

6. Vepište kružnici vzniklému trojúhelníku. Pokud stále nevíte, podívejte se o tři hinty výš.

7. Dokreslete obraz bodu A podle středu M_A. Podívejte se, kde se nachází opsiště a kolmiště trojúhelníku BCI, protože oba tyto body vystupují v nějakém trojúhelníku na obrázku jako velmi známé body.

8. Ukažte, že devítiště obou trojúhelníků splývají a bod I je orthocentrem Fuhrmanova trojúhelníka.

9. Co takhle zkonstruovat Feuerbachovu kružnici a podívat se, kde ji podruhé protne AH?

10. Mají totiž pevný poloměr a jejich středy leží na jedné kružnici.

11. Zobrazte H na kružnici opsanou. „Feuerbachovská“ stejnolehlost dodělá zbytek.

12. Vyúhlete s použitím Feuerbachovy kružnice a úsekových úhlů.

13. Zamyslete se nad trojúhelníkem ABF. Jaké má orthocentrum? A kde má svou Feuerbachovu kružnici?

14. Dokreslete střed kružnice opsané a těžiště obou zmíněných trojúhelníků. Pokud dokreslíte ještě dvě vhodné těžnice, bude vymalováno.

15. No jaká kružnice to asi bude? S trochou nadhledu je to zjevné - Feuerbachova. Bude se hodit orthocentrum trojúhelníka DYZ.

16. Dokreslete střed úsečky AH a pohrajte si s příslušnou Thaletovou kružnicí.

17. Nejprve najděte pravoúhlý trojúhelník $AA'A''$ a pak si rozmyslete, že vlastně hledáme jen jeho posunutí.

18. Dokreslete druhý průsečík X přímky CC' s kružnicí opsanou a ukažte, že střed úsečky XC je patou hledané kolmice, přičemž použijte kružnice nad průměry CO, CH.

19. Dokreslete všechny tři Thaletovy kružnice nad stranami trojúhelníka a nahlédněte, že zmíněné tři body leží na chordále kružnice opsané a Feuerbachovy kružnice.

20. Jedním z bodů je triviálně střed úsečky OH. Prozradíme, že druhý leží na Feuerbachově kružnici původního trojúhelníka.

21. Uvažte orthocentra trojúhelníků ABC, PBC. Pomocí vhodného posunutí ukažte, že H je orthocentrem trojúhelníka AQR, takže $\sphericalangle HXA$ je pravý. Doúhlete.

22. Dokreslete A-těžnici a pomocí podobných trojúhelníku dopočtěte poměr, ve kterém DE onu těžnici dělí.

23. Rozmyslete si, že Eulerova přímka je rovnoběžná se stranou, právě když orthocentrum leží ve třetině výšky. To ale říká daná rovnost.

24. Dokreslete Eulerovu přímku a těžiště. Dále si uvědomte, že $|OG| < R$.

25. Uvažte dvojici stejnolehlostí se středy T, H (nebo si uvědomte, že TO je těžnice trojúhelníka HXX').

26. Všechny tři trojúheníky mají společnou základnu. Z vrcholů spusťte výšky na Eulerovu přímku. Dokreslete těžiště a spusťte navíc kolmici ze středu té správné strany. Dvě lehké stejnolehlosti už práci dokončí.

27. Kam se zobrazí kružnice opsaná v inverzi podle vepsané?

28. Je třeba úhlit přičemž můžeme použít isogonalitu O, H. Feuerbachova kružnice nám přitom může práci zpříjemnit.

29. Zbavte se bodu N a následně dokažte obě implikace s využitím skutečnosti, že body O, H jsou isogonal conjugates. Deltoidy jsou pěkné.

30. Invertujte podle kružnice l a zajímejte se zejména o zbylé dvě zadané kružnice.

31. Invertujte podle dané Thaletovy kružnice.

32. Invertuje podle Thaletovy kružnice nad úsečkou danou dotykem vepsané a připsané k jedné ze stran trojúhelníka.

33. Pomocí $\sqrt{bc}$ inverze ukažte, že K_O je isogonal conjugate devítiště N.

34. Ano, tenhle příklad je tu už podruhé, ale teď je naprosto triviální.

35. A nejsou třeba čistou náhodou ty dva body antigonální přátelé?

36. Uvažte čtveřici sestávající z vrcholů trojúhelníka a jeho vepsiště. Kde je její Ponceletův bod?

37. Použijte předchozí hint. Dále pomocí vhodně dokreslených kružnic ukažte, že bod K je antigonal conjugate bodu I.

38. Ano, je to degenerované, ale je to tak! Popisovaný průsečík je Ponceletův bod P čtveřice $ABCD$ a Simpsonova přímka jednou z kružnic, která jím prochází (rovněž jím zjevně prochází Feuerbachova kružnice původního trojúhelníku). Bod H je „antigonal conjugate kružnice opsané“, přesněji H je obraz D podle P.

39. Použijte minulý hint. Dále obecně vyjádřete úhel svíraný dvěma Simpsonovými přímkami v závislosti na oblouku mezi dvěma body, které je generují.

40. Ukažte, že Ponceletův bod bodů A, B, C, D leží na úsečce AC když body $AD \cap CB$, $CD \cap AB$, A, C leží na jedné kružnici.

41. Zkombinujte Hamiltonovu a Feuerbachovu větu.

42. Použijte dvojici harmonických čtyřpoměrů a pak dokreslete Feuerbachovu kružnici.

43. Pomocí afinního zobrazení búno řekněte, že S je kolmiště.

44. Tyto přímky procházejí středy spojnic orthocentra s vrcholy původního trojúhelníku.

45. Ukažte, že se jedná o Feuerbachův bod F_e. Body X', Y', Z' zjevně leží na kružnici vepsané. Pak stačí uvážit stejnolehlost, která převádí Feuerbachovu kružnici na vepsanou.

46. Dokreslete druhý průsečík kružnic nad poloměry AO, AP (který je Miquelovým bodem nějakého čtyřúhelníku na obrázku) a navíc dokreslete průsečík přímky PV_A s druhou dokreslenou Thaletovou kružnicí. Nakonec najděte rovnoramenný lichoběžník jehož vrcholem je V_A, oba dokreslené body a hledaný průsečík. V něm se pak protínají obě původní kružnice.

47. Všimněte si, že se jedná o Anti-Steinerův bod naší pevné přímky vzhledem k trojúhelníku danému středními příčkami.

48. Použijte Second Fontené Theorem společně se Six Feet Theorem (paty výšek z bodů P, P' leží na jedné kružnici se středem ve středu úsečky PP'). Průsečíky našich dvou kružnic splývají právě když splývají Anti-Steinerovy body bodů P, P'.

Literatura a zdroje

Zejména bych chtěl poděkovat *Pepovi Tkadlecovi* [1] za pěkné příklady z mnoha jeho PraSečích přednášek. Dále jsem pro pokročilejší pasáž přednášky ve velké míře využil velmi přehledný příspěvek *Darije Grindberga* na AoPS [2], za což také velmi děkuji. Dále bych ještě rád zmínil *Forum Geometricorum* [3], ze kterého jsem použil obsah mnoha (těžších a skvěle napsaných) článků. V [4] jsem našel provázaný seznam mnoha tvrzení, z nichž jsem také některá použil. Jako podrobný výklad s mnoha lehkými až středně těžkými příklady doporučuji zdroje [5], [6], [7]. Dále ještě děkuji všem dalším orgům, novým i starým, z jejichž přednášek mi při tvorbě této něco pomohlo.

[1] různé přednášky *Pepy Tkadlece*
[2] Art of Problem Solving, *http://www.artofproblemsolving.com*
[3] Forum Geometricorum, *http://forumgeom.fau.edu*
[4] Wolfram MathWorld, *http://mathworld.wolfram.com*
[5] Nathan Altshiller Court: *College Geometry*
[6] Michal Rolínek, Pepa Tkadlec: *107 Geometry Problems*
[7] Roger A. Johnson: *Advanced Euclidian Geometry*
[8] přednáška *Martiny Vaváčkové*
[9] Česká MO *http://mo.webcentrum.muni.cz*
[10] Dominik Teiml: *The Euler Line*
[11] American Mathematical Monthly
http://www.maa.org/press/periodicals/american-mathematical-monthly

Hallova věta

Viki Němeček

Abstrakt. Hallova věta je poměrně složitě znějící tvrzení z teorie grafů. Na přednášce si ukážeme, že je vlastně docela intuitivní. Potom se podíváme na některé její aplikace.

Definice. Nechť M je konečný systém[1] konečných množin. Nechť N je sjednocení všech množin $m \in M$. Potom funkci $f\colon M \to N$ nazveme *systém různých reprezentantů* právě tehdy, když je prostá a současně $\forall m \in M : f(m) \in m$.

Definice. Buď $G = (V, E)$ graf a buď $M \subseteq E$ množina dvojic vrcholů G. Pak M nazveme *párování* v grafu G právě tehdy, když je každý vrchol G v nejvýše jedné dvojici v M.

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Tento graf nazveme *bipartitní*, právě když lze všechny jeho vrcholy rozdělit do dvou disjunktních množin X, Y tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy patřícími do stejné množiny nevede hrana. Množinám X a Y budeme říkat *partity* grafu G.

Věta. (Hallova) *Nechť M je konečný systém konečných množin. Pak platí, že M má systém různých reprezentantů právě tehdy, když pro každou $F \subseteq M$ a sjednocení všech jejích prvků $\cup F$ platí $|\cup F| \geq |F|$.*

Věta. (Hallova, bipartitní formulace) *Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf s partitami X a Y. Pak má G párování obsahující všechny vrcholy partity X právě tehdy, když pro každou $M \subseteq X$ platí, že z ní vedou hrany k alespoň $|M|$ různým vrcholům Y.*

Předtím, než provedeme důkaz, formulujeme větu ještě potřetí, tentokrát jako úlohu, která bude o něco jednodušší na představu.

Mějme nějakou množinu robotů R a množinu baterek B. Každý robot je kompatibilní s nějakými baterkami, přičemž libovolná množina robotů je dohromady kompatibilní alespoň s tolika baterkami, kolik jich je. Ukažte, že je možné dát každému z nich nějakou baterku tak, aby každý robot dostal baterku, se kterou je kompatibilní a žádní dva roboti nedostali tu samou baterku.

[1] Něco jako množina, akorát se v něm můžou opakovat prvky.

Cvičení. Všimneme si, že tato úloha není úplně ekvivalentní s Hallovou větou. Hallova věta je ekvivalence a úloha po nás chce pouze jednu implikaci. Jedná se však o těžší z implikací, opačný směr si lze jednoduše rozmyslet.

Důkaz. Výrok „libovolná množina robotů je dohromady kompatibilní alespoň s tolika baterkami, kolik jich je“ nazveme párovací podmínkou a v dalším textu ho budeme zkracovat jako PP.

Provedeme důkaz indukcí podle počtu robotů.

Máme-li pouze jednoho robota, pak PP říká, že tento robot je kompatibilní s alespoň jednou baterkou, takže mu nějakou takovou můžeme dát a tím je úloha vyřešena.

Nyní nechť je tvrzení dokázáno pro všechny počty robotů menší než n a dokažme ho pro n. Rozdělíme si všechny možné situace na 2 případy.

(1) Nerovnost z PP je pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu R splněna ostře. V takovém případě můžeme vzít libovolného robota a dát mu libovolnou baterku, se kterou je kompatibilní. Pro ostatní roboty a ostatní baterky je PP určitě nadále splněna (i když už ne nutně ostře), a umíme je tedy spárovat z indukčního předpokladu.

(2) Existuje neprázdná vlastní podmnožina R (označme si jí R'), pro kterou je PP splněna neostře, tedy existuje právě $|R'|$ baterek, které jsou kompatibilní s alespoň jedním robotem v R'. Množinu baterií kompatibilních s alespoň jedním robotem v R' si označíme B'. Robotům z R' umíme podle indukčního předpokladu nějak rozdat baterky z B' (všimneme si, že $|B'| = |R'|$, bude se nám to později hodit). Abychom uměli robotům z $R \setminus R'$ rozdat baterky z $B \setminus B'$, musíme dokázat, že i pro tyto množiny robotů a baterek je splněna PP.

Pro spor připusťme, že existuje $S \subseteq R \setminus R'$ taková, že roboti z S jsou dohromady kompatibilní s méně než $|S|$ baterkami z $B \setminus B'$. Označme T množinu všech takových baterek. Nyní tvrzení, jehož spornost se snažíme dokázat, říká $|T| < |S|$. V původní situaci byli ale všichni roboti z T kompatibilní pouze s baterkami v $S \cup B'$. Roboti z R' jsou ale kompatibilní pouze s baterkami v B'. Z toho, že pro celé R a B platí PP, odvodíme, že musí platit $|S \cup B'| \geq |T \cup R'|$. Vzhledem k tomu, že množiny S a B', resp. T a R' jsou disjunktní, platí i $|S| + |B'| \geq |T| + |R'|$. A protože $|B'| = |R'|$, tak $|S| \geq |T|$. Tedy neplatí $|T| < |S|$, což je hledaný spor. Ukázali jsme, že i pro $R \setminus R'$ a $B \setminus B'$ platí PP, a protože R' je neprázdná, platí $|R \setminus R'| < |R|$ a tedy můžeme aplikovat indukční předpoklad. □

Úloha. Mějme šachovnici $n \times n$ a na ní věže rozmístěné tak, že v každém sloupci i řádku jich je právě $k \leq n$. Dokažte, že bez ohledu na hodnoty n a k lze věže rozdělit do k množin tak, aby v každém sloupci i řádku byla z každé množiny právě jedna věž.

Řešení. Budeme postupovat indukcí podle k.

Pro $k = 1$ můžeme dát všechny věže do jedné množiny a tím je úloha vyřešena. Nyní mějme tvrzení dokázané pro všechna $k < m$ a ukážeme, že i pro $k = m$ platí. Mějme bipartitní graf G takový, že vrcholy z jedné partity (označme si je X) odpovídají sloupcům šachovnice a z druhé (označme si je Y) řádkům. Mezi vrcholem $x \in X$ a $y \in Y$ bude hrana právě tehdy, když na políčku (x, y) je věž. Nyní pokud bychom ukázali, že tento graf má párování obsahující celou partitu X (a protože $|X| = |Y|$ tak i celou partitu Y), mohli bychom prohlásit věže odpovídající hranám tohoto párování za jednu z hledaných množin a ostatní rozdělit do $k - 1$ množin podle indukčního předpokladu.

Ukážeme, že v G je splněna PP. Buď X' nějaká množina sloupců. V nich je dohromady $|X'| \cdot k$ věží. Libovolný řádek ale může obsahovat nejvýše k z nich, neboť v každém řádku leží dohromady právě k věží. Těchto $|X'| \cdot k$ věží tedy určitě leží v alespoň $|X'|$ různých řádcích, což jsme chtěli ukázat. □

Příklady

Příklad 1. Nechť $G(V, E)$ je bipartitní graf s partitami X a Y, ve kterém pro každou $M \subseteq X$ platí, že z ní vedou hrany k alespoň $|M - 2|$ vrcholům Y. Ukažte, že G má párování obsahující všechny vrcholy partity X kromě nejvýše dvou.

Příklad 2. Ukažte, že pro každé $k \geq 1$ má každý bipartitní graf, jehož každý vrchol má stupeň právě k, párování obsahující všechny vrcholy.

Příklad 3. Mějme bipartitní graf s partitami X a Y takový, že pro každou hranu platí, že její koncový vrchol v partitě X má stupeň větší nebo roven stupni koncového vrcholu v partitě Y. Ukažte, že graf má párování obsahující celou partitu X.

Méně přímočaré aplikace

Příklad 4. Nechť jsou $x_1, x_2, \ldots, x_n$ logické proměnné (tedy proměnné, za něž dosazujeme vždy buď „pravda“ nebo „nepravda“). Buď V výrok, který obsahuje konjunkci klauzulí, přičemž každá klauzule je disjunkcí právě tří (ne nutně různých) proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z nichž každá může být použita buď normálně, nebo v negaci. Víme, že každá z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se ve V vyskytuje právě třikrát. Ukažte, že existuje ohodnocení proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takové, že celý výrok V je pravdivý.

Příklad 5. Mějme tabulku $n \times n$ vyplněnou nezápornými reálnými čísly. Navíc je součet čísel v každém řádku či sloupci roven jedné. Dokažte, že můžeme vybrat n políček tabulky tak, aby v každém řádku i sloupci bylo vybrané právě jedno políčko a navíc v žádném z vybraných políček nebyla napsaná nula.

Příklad 6. Mějme tabulku $n \times n$, jejíž prvních k řádků je vyplněno čísly 1 až n tak, že je každé číslo v každém z prvních k řádků právě jednou a v každém sloupci nejvýše jednou. Ukažte, že ji lze doplnit tak, aby bylo každé číslo od 1 do n v každém řádku i sloupci právě jednou.

Příklad 7. Mistrovství ve fotbalu se účastnilo $2n$ týmů. Celé mistrovství trvalo $2n-1$ dnů a každý z těchto dnů hrál každý tým právě jeden zápas. Za celé mistrovství hrál každý tým s každým jiným právě jednou. František byl na mistrovství jako divák a každý den se šel podívat na jeden zápas. Ukažte, že bez ohledu na to, jak dopadla jednotlivá utkání a které dny byly které zápasy (při zachování výše zmíněných pravidel), mohl František sledovat výhru $2n-1$ různých týmů.

(Putnam 2012 B3)

Příklad 8. Mějme rovinný graf G, který neobsahuje úplný graf na 3 vrcholech jako podgraf. Dokažte, že lze hrany tohoto grafu zorientovat tak, aby z každého vrcholu vycházely nejvýše dvě.

Příklad 9. Máme množinu $n = q^2+1$ bodů. Každému bodu u je přiřazena množina barev $L(u)$, která má $q+1$ prvků tak, že pro každé dva různé body u, v platí $|L(u) \cap L(v)| \leq 1$. Dokažte, že body lze obarvit tak, aby každý bod u dostal barvu z $L(u)$ a různé body byly obarveny různými barvami. (MKS 21–2–7)

Příklad 10. Na planetě je 2^n zemí ($n \geq 3$). Všechny tyto země mají vlajku ve tvaru tabulky $n \times 1$, jejíž políčka jsou vybarvena žlutou a modrou barvou tak, že žádné dvě země nemají stejnou vlajku. Skupinu zemí nazveme *diverzní*, pokud z ní lze vybrat n různých zemí tak, abychom při poskládání jejich vlajek pod sebe v určitém pořadí dostali čtverec $n \times n$ s (alespoň jednou) jednobarevnou diagonálou. Spočtěte, kolik nejméně zemí musí ve skupině být, aby už byla určitě diverzní. (ISL 2010 C3)

Návody

1. Zkuste přidat nějaké nové vrcholy.

5. Z řádků může být jedna partita bipartitního grafu a ze sloupců druhá. Co budou hrany?

8. Kromě Hallovy věty se bude hodit i nerovnost mluvící o počtu hran v rovinných grafech vyplývající z Eulerova vzorce.

9. Při důkazu sporem stačí ukázat, že jedna barva je v množině $L(u)$ alespoň pro $q+2$ různých vrcholů u.

10. Udělat správný dolní odhad je poměrně jednoduché. Tentokrát nebude stačit jeden graf, budeme potřebovat hned dva, ovšem na stejných vrcholech. Při důkazu sporem přes Hallovu větu je potom potřeba rozebrat zvlášť případy, kdy množiny, kvůli kterým ani jeden z grafů nesplňuje PP, mají prázdný resp. neprázdný průnik.

Literatura a zdroje

[1] *Applications of Hall's Marriage Theorem*,
https://brilliant.org/wiki/applications-of-hall-marriage-theorem
[2] Shishir Agraval: *Math 55, Summer 2014*,
https://math.berkeley.edu/ ∼ sagrawal/su14_math55/notes_hall.pdf

Úvod do Ramseyovy teorie

Vašek Rozhoň

Abstrakt. Věděl jsi, že housenky bývají zbarvené tak, že připomínají rostlinu, na které se pasou? Zkus si nějakou housenku nakreslit a pokus se její články vybarvit třemi barvičkami tak, aby se v obarvení nevyskytovaly žádné pravidelnosti, které by nebohého tvora mohly prozradit. Asi ti to moc nepůjde – tu se vyskytne stejná barvička třikrát vedle sebe, jindy čtyři stejné barvičky v pravidelných vzdálenostech od sebe. Překvapivě to ani jinak být nemůže, jak tvrdí van der Waerdenova věta. Existuje celý matematický obor zabývající se faktem, že velké objekty často obsahují pravidelné podstruktury. A právě tohoto oboru (nazývaného také Ramseyova teorie) se v této dvojpřednášce dotkneme.

Ramseyova věta

Ze všeho nejdřív začneme tvrzením, které možná znáš pod názvem Dirichletův princip (v angličtině také pigeonhole principle a v němčině zase Schubfachprinzip).

Tvrzení. (Princip holubníku) *V r šuplících se usídlilo $kr+1$ holubů. V alespoň jednom z nich se jich teď mačká alespoň $k+1$.*

Dále budeme pokračovat Ramseyovou větou, podle které se celý matematický obor nyní jmenuje. Ta zase tvrdí, že přijde-li na večírek dost velký počet hostí, nalezneme pět z nich tak, že se každí dva z této pětice znají, nebo se neznají žádní dva.

Věta. (Ramseyova) *Pro každé k a b existuje n takové, že pokud libovolně obarvíme hrany úplného grafu na n vrcholech b barvičkami, nalezneme v něm vždy jednobarevný úplný podgraf na k vrcholech.*

Cvičení 1. Rozmysli si, že úplný graf na šesti vrcholech s hranami obarvenými dvěma barvami vždy obsahuje jednobarevný cyklus délky tři. Jsi-li v rozverné náladě, rozmysli si, že obsahuje i jednobarevný cyklus délky čtyři.

Cvičení 2. Anička a Bára střídavě barví hrany úplného grafu na šesti vrcholech. Vyhrává ta, která první obarví cyklus délky tři svou barvou. Proč hra nemůže skončit remízou a kdo vyhraje, začíná-li Anička?

Cvičení 3. Dokaž, že pro každé k a b existuje n takové, že obarvíme-li nějak hrany úplného bipartitního grafu s partitami velikosti n pomocí b barviček, nalezneme v něm vždy jednobarevný úplný bipartitní podgraf s partitami velikosti k.

Cvičení 4. Na každém políčku čtvercové tabulky bydlí holub, nebo housenka. Diagonálu tabulky tvoří políčka ležící v i-tém řádku a i-tém sloupci (pro všechna i). Vybereme si nějakých n sloupců a n řádků z původní tabulky a podíváme se na políčka na průsečících těchto řádků a sloupců, ta tvoří čtvercovou *podtabulku* velikosti n. Dokaž, že:

(1) Pokud je původní tabulka dost velká, najdeme v ní *podtabulku* se stranou dlouhou deset políček, na které bydlí jen holubi, nebo jen housenky.
(2) Pokud navíc požadujeme, že vybereme-li i-tý řádek, musíme zároveň vybrat i i-tý sloupec, předchozí tvrzení neplatí.
(3) Nyní platí stejná podmínka jako v předchozím bodu, ale stačí nám, že pokud *podtabulku* rozdělíme na tři části – políčka na diagonále, nad diagonálou a pod diagonálou – v každé části bydlí pouze zvířátka jednoho druhu. Dokaž, že nyní *podtabulku* se stranou délky deset najít umíme. (Zkus úlohu nejprve vyřešit pro tabulku symetrickou podle diagonály.)
(4) Nyní z původní tabulky vystřihneme souvislý čtvereček o straně délky deset. Může se stát, že ať už je původní tabulka jakkoli velká, žádný takový čtvereček obydlený stejnými zvířátky v ní nenajdeme?

Cvičení 5. (těžké) Dokaž, že obarvíme-li b barvičkami všechna přirozená čísla, najdeme mezi nimi jednobarevnou trojici x, y, z takovou, že $x+y=z$. Co kdybychom hledali čtveřici, pro kterou platí $x+y+z=u$?

Ramseyova věta se vztahuje i na obecnější struktury, než jsou grafy. Pokud na soustředění přijede dostatečný počet účastníků a organizátoři si pro každou trojici účastníků rozmyslí, jestli tvoří vhodný tým na výsadek, nebo ne, dokáží najít skupinku deseti účastníků takovou, že každá trojice z nich vybraná je vhodná, nebo vhodná není žádná taková trojice.

Věta. (Ramseyova věta pro p-tice) *Pro každé k, b a p existuje n takové, že pokud libovolně obarvíme všechny p-tice množiny s n prvky pomocí b barviček, nalezneme v ní vždy podmnožinu velikosti k takovou, že všechny p-tice z této podmnožiny mají stejnou barvu.*

Hilbertovo lemma

Dále se budeme věnovat větám podobným té Ramseyově, které zabezpečují, že určité velké objekty obsahují nějakou strukturu. Asi nejstarší takovou větou je Hilbertovo lemma z konce 19. století[1].

[1] Našeho letopočtu.

Definice. (Krychličková posloupnost) *Krychličková posloupnost* délky l a dimenze s pro čísla $a_0, d_1, d_2, \dots, d_s$ je množina všech čísel ve tvaru

$$a_0 + k_1 \cdot d_1 + k_2 \cdot d_2 + \cdots + k_s \cdot d_s,$$

kde každé k_i nabývá hodnot mezi 0 a $l-1$ včetně.

Příklad. Krychličková posloupnost dimenze jedna je aritmetickou posloupností.

Věta. (Hilbertovo lemma pro čísla) *Pro jakékoli s a b existuje dostatečně velké n takové, že obarvíme-li nějak čísla od jedné do n pomocí b barviček, najdeme v rámci těchto n čísel jednobarevnou krychličkovou posloupnost délky dva a dimenze s.*

Cvičení 6. (těžké) Dokaž předchozí větu.

Věta. (Hilbertovo lemma pro množiny) *Mějme libovolné s, b a množinu X, jejíž všechny podmnožiny libovolně obarvíme pomocí b barviček. Je-li X dost velká, existují její podmnožiny $A_0, A_1, \dots, A_s$, které jsou všechny neprázdné a disjunktní*[2] *a pro které platí, že každé sjednocení A_0 s nějakou podmnožinou $\{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ má stejnou barvu.*

Cvičení 7. Uvědom si, že předchozí věta platí pro $s = 1$.

Cvičení 8. Předpokládej platnost předešlé věty a dokaž ji s přidanou podmínkou, že velikost A_0 musí být alespoň sto.

Cvičení 9. Mějme množinu X a její podmnožinu Y, $|Y| = 100$. Dokaž, že pokud je X dostatečně velká, existují $a, b \in X \setminus Y$ taková, že pro všechna $Z \subset Y$ je barva $a \cup Z$ stejná jako barva $b \cup Z$. Jinými slovy všechna rozšíření a a b do Y mají stejnou barvu.

Cvičení 10. (těžké) Dokaž Hilbertovo lemma pro množiny.

Cvičení 11. Uvědom si, jak spolu souvisí obě verze Hilbertova lemmatu a odvoď variantu pro čísla s pomocí varianty pro množiny.

Van der Waerdenova věta

Nakonec se podíváme na větu, která zajišťuje, že při barvení přirozených čísel nutně dostáváme dlouhé aritmetické posloupnosti.

Věta. (van der Waerdenova) *Pro jakákoli přirozená čísla l a b existuje dostatečně velké n takové, že pokud libovolně obarvíme čísla od jedné do n pomocí b barviček, najdeme vždy v rámci těchto n čísel jednobarevnou aritmetickou posloupnost délky l. Navíc nejmenší takové číslo n nazvěme $W(l, b)$.*

Cvičení 12. Uvědom si, že platí: $W(1, b) = 1$, $W(2, b) = b + 1$ a $W(l, 1) = l$.

[2] Tj. průnik každé dvojice je prázdná množina.

Tvrzení. $W(3,2) \leq 5 \cdot (2 \cdot 2^5 + 1)$.

Návod. Začneme s úseky po sobě jdoucích čísel délky pět – uvědom si, že v nich najdeš aritmetickou posloupnost délky tři, jejíž první dva členy mají stejnou barvu. Předpokládáme, že třetí člen má opačnou barvu.

V druhém kroku je potřeba za sebe poskládat dostatečný počet pěticiferných bloků. Když jich bude 33, máme už jistotu, že dva bloky budou stejné. V těchto dvou blocích teď můžeme stejným způsobem aplikovat předchozí argument. Nakonec stačí najít dvě vhodné posloupnosti délky tři končící ve stejném čísle. Uvědom si, že kvůli tomuto třetímu číslu je potřeba přidat dalších 32 bloků délky pět.

Cvičení 13. Uvědom si, že jsme byli nehospodární, neboť $W(3,2) = 9$.

Tvrzení. $W(3,3) \leq 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot (2 \cdot 3^{7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1)} + 1)$.

Návod. Začneme jako v předchozím případu a zkonstruujeme dvě jednobarevné posloupnosti délky tři „mířící“ do stejného čísla. To ale může být obarveno třetí barvičkou. Je tedy třeba vzít celý blok délky $7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1)$, na kterém funguje naše konstrukce, a zkopírovat ho dostkrát za sebe, abychom měli jistotu, že najdeme dva stejně obarvené. Nakonec najdeme tři posloupnosti mířící do stejného čísla.

Definice. (Krychličková posloupnost s okraji) Okraj krychličkové posloupnosti je krychličková posloupnost vzniklá tak, že několik prvních indexů $k_1, \dots, k_i$ původní posloupnosti položíme rovny l (a ostatní dále necháme nabývat všech hodnot mezi 0 a $l-1$ včetně).

Krychličková posloupnost s okraji je jednobarevná, jestliže jsou všechny její prvky obarveny stejnou barvou a zároveň je jednobarevný každý její okraj (každý okraj ale může být obarven jinak).

Příklad. Krychličková posloupnost dimenze s má s okrajů. Posledním okrajem je vždy jediné číslo.

Cvičení 14. Zkus zobecnit předchozí konstrukce pro $W(3,k)$ s libovolným k. Uvědom si souvislost s Hilbertovým lemmatem pro čísla.

Věta. (van der Waerdenova pro krychličkové posloupnosti)

Pro jakákoli přirozená čísla l, b a s existuje dostatečně velké n takové, že pokud libovolně obarvíme čísla od jedné do n pomocí b barviček, najdeme vždy v rámci těchto n čísel jednobarevnou krychličkovou posloupnost délky l a dimenze s. Navíc nejmenší takové číslo n nazvěme $W(l,s,b)$.

Tvrzení. $W(l, s+1, b) \leq W(l,s,b) \cdot W(l, 1, b^{W(l,s,b)})$.

Tvrzení. $W(l+1, 1, b) \leq 2 \cdot W(l,b,b)$.

Cvičení 15. Uvědom si, že z předchozích dvou tvrzení už lze matematickou indukcí dokázat van der Waerdenovu větu.

Existují různé silnější varianty van der Waerdenovy věty, jednou z nich je Greenova-Taova věta dokázaná v roce 2004.

Věta. (Greenova-Taova) *Existují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti složené pouze z prvočísel.*

Návody

3. Stačí dvakrát aplikovat princip holubníku. Nejprve zvol jednu partitu dostatečně velkou, aby měl libovolný vrchol z druhé partity alespoň k hran jedné barvy. Poté přidávej vrcholy do druhé partity. Stačí, když se jich nakonec najde k tak, že posloupnost barev jejich hran bude stejná (a to se musí stát).

4.

(1) Uvažuj postupně jednotlivé řádky a aplikuj na ně princip holubníku.
(2) Zkus tabulku rozdělit na tři části stejně jako v třetím bodu.
(3) Použij Ramseyovu větu; dvojice zvířátek na pozicích (i, j) a (j, i) odpovídají barvě hrany mezi vrcholy i a j. Na diagonálu pak bude potřeba ještě jednou aplikovat princip holubníku.
(4) Šachovnice.

5. Použij Ramseyovu větu; barva hrany mezi i a j bude stejná jako barva čísla $j - i$. Najdi jednobarevný trojúhelník.

6. Dokazuj matematickou indukcí. Předpokládej, že v dostatečně dlouhém bloku umíš najít krychličkovou posloupnost dimenze s. Následně za sebe poskládej dost bloků této délky tak, aby při každém obarvení byly nějaké dva obarveny stejně. Nakonec spoj krychličkové posloupnosti z těchto dvou bloků, a získej tak posloupnost dimenze $s + 1$.

7. Stačí vzít množinu velikosti $b + 1$ a posloupnost jejích podmnožin, které se do sebe postupně zanořují. Dvě z podmnožin musí mít stejnou barvu, a poslouží tak jako A_0 a $A_0 \cup A_1$.

8. Vezmi si množinu $X = X_1 \cup X_2$, kde $|X_1| = 100$ a X_2 je dost velká. Následně definuj nové obarvení podmnožin X_2 tak, že nová barva pro Y bude stará barva množiny $X_1 \cup Y$.

9. Uvědom si, že nějaké tvé obarvení může kódovat i to, jaké staré barvy mají všechna rozšíření a do Y. Těch je mnoho, ale jen konečně mnoho.

10. Postupuj indukcí. Podobně jako v předchozím cvičení najdi A_0 a A_1 takové, že rozšíření A_0 mají stejnou barvu jako rozšíření $A_0 \cup A_1$ do nějaké množiny X. V X pak najdi menší krychličku.

11. Napiš si čísla v binární soustavě.

Literatura a zdroje

[1] R. Graham, B. Rotschild, J. Spencer: *Ramsey Theory*, 1990.

Rekurentní posloupnosti

Martin „i-tý“ Sýkora

Abstrakt. Chcete vědět, kolik králíků budete mít za deset let? Odpověď na tuto otázku a mnoho dalších lze získat pomocí rekurentních posloupností, tedy posloupností, u nichž známe prvních pár členů a způsob, jak následující členy spočítat z předchozích. Příspěvek shrnuje základní způsob, jak přejít od rekurentního zadání k explicitnímu, které je mnohdy výhodnější, a předkládá příklady k procvičení.

Jak se dozvíte na přednášce *Fibonacciho čísla*, spousta problémů (včetně množení králíků) vede na *Fibonacciho posloupnost* F_n, která je zadána rekurentně vztahy $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Takto zadaná posloupnost je sice jednoznačně určena, ale spočítat hodnotu F_{2016} je spíš trest než úloha. Na přednášce si ukážeme, jak lze přejít k explicitnímu vyjádření a jak řešit některé úlohy spojené – někdy poněkud překvapivě – s rekurentními posloupnostmi.

Homogenní lineární diferenční rovnice (s konstantními členy)

Začneme zlehka – řešením téměř nejjednoduššího případu, pod který spadá i Fibonacciho posloupnost, a následně se pokusíme uvedený aparát zobecnit. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že rekurentní vztah obsahuje pouze „dva předchozí členy“, u nichž jsou konstantní koeficienty, a neobsahuje člen nezávislý na hodnotách posloupnosti, tedy například $2n + 1$. Pak je posloupnost dána tzv. *homogenní lineární diferenční rovnicí druhého stupně*.

Definice. Homogenní diferenční rovnicí druhého stupně s konstantními členy rozumíme rovnici

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost x_n a p a $q \neq 0$ jsou daná čísla.

Uvažme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0,$$

kterou formálně dostaneme z rovnice (1) tak, že nahradíme dolní index $n + k$ exponentem k.[1] Označme λ_1, λ_2 její dva komplexní kořeny.

[1] Této rovnici říkáme *charakteristická rovnice* rovnice (1).

Nejprve uvažme $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pak snadno nahlédneme, že posloupnosti $x_n^1 = \lambda_1^n$ a $x_n^2 = \lambda_2^n$ jsou řešeními rovnice (1). Z linearity rovnice (1) přitom plyne, že libovolná posloupnost ve tvaru $x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_1^n$, kde a, b jsou libovolné konstanty, je řešením rovnice (1). Stačí tedy volit vhodná a, b, aby byly splněny počáteční podmínky, a tím nalezneme explicitní vyjádření rekurentně zadané posloupnosti.

Pokud $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, lze ukázat, že posloupnost λ^n i posloupnost $n\lambda^n$ je řešením rovnice (1). Explicitní vyjádření rekurentní posloupnosti pak budeme hledat ve tvaru $x_n = (a + nb)\lambda^n$.

Pokud členy posloupnosti závisí na více předchozích členech, je situace obdobná: Od homogenní diferenční rovnice k-tého stupně

$$x_{n+k} = p_{k-1}x_{n+k-1} + p_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + p_0 x_n, \tag{2}$$

$p_0 \neq 0$, přejdeme k charakteristické rovnici a označíme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ všechny její kořeny. Pokud je λ_i (nenulový) kořen s násobností n_i, pak je posloupnost $x_n^{i,j} = n^j \lambda_i^n$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n_i - 1\}$ řešením rovnice (2). Hledané řešení opět nalezneme jako tzv. *lineární kombinace* výše uvedených posloupností.

A co když rovnice homogenní není?

V případě, že rekurentní formule obsahuje i nějaký výraz v n, např. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$, je situace složitější. Obecně řešíme nehomogenní rovnici

$$x_{n+k} - p_{k-1}x_{n+k-1} - p_{k-2}x_{n+k-2} - \cdots - p_0 x_n = f(n), \tag{3}$$

kde $p_0 \neq 0$ a $f(n)$ je nějaká funkce definovaná na $\mathbb{N}_0$. Při řešení nám velice pomůže následující lemma.

Lemma. *Nechť p_n je jedno, tzv. partikulární , řešení rovnice* (3). *Potom posloupnost b_n je řešením* (3) *právě tehdy, když $b_n = p_n + a_n$, kde a_n je nějaké řešení* (2).

Abychom tedy vyřešili nehomogenní rovnici, stačí, abychom nalezli jedno její partikulární řešení. To je obecně velice těžké. Ukážeme si ale, jak jej najít, pokud je pravá strana ve tvaru $f(n) = \lambda^n P(n)$, kde λ je nějaké nenulové komplexní číslo a P polynom. Pokud označíme l násobnost λ jakožto kořene P,[2] pak existuje partikulární řešení rovnice (3) ve tvaru $p_n = \lambda^n n^l Q(n)$, kde Q je polynom stejného stupně jako P.

[2] Pokud λ není kořenem P, pokládáme $l = 0$.

A k čemu to je dobré?

Příklad 1. Kolika způsoby lze přeskládat Hanojskou věž výšky n na vedlejší stojan?

Příklad 2. Na kolik nejvíce kusů můžeme rozkrájet (rovinnou) pizzu n rovnými řezy?

Příklad 3. Zmatený vlastizrádce se motá po přímce. Začíná v bodě 0 a každým krokem se s 50% pravděpodobností posune o $+1$ a s 50% pravděpodobností o -1. Protiteroristické komando přitom umístilo do bodu 2016 minu. S jakou pravděpodobností vlastizrádce přežije?

Příklad 4. Tajná policie zatkla dva dělitele X a Y, a že byla štědrá, dala jim po řadě x a y mincí. Dělitelé si mají házet mincí (každý má pravděpodobnost výhry 50%) a kdo prohraje, dá jednu svou minci druhému. Komu dojdou peníze, bude popraven, zatímco druhý propuštěn. Jaká je pravděpodobnost, že přežije dělitel X? A co když má dělitel X v každém hodu obecnou pravděpodobnost výhry p?

Příklad 5. Nalezněte explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti a_n, která splňuje rekurentní vztah $a_{n+1} - 3a_n = 2$ a počáteční podmínku $a_1 = 2$.

Příklad 6. Kolika se rovná $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$?

Příklad 7. Kolika se rovná $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$?

Příklad 8. (Fibonacciho posloupnost) Najděte F_n, pokud $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Příklad 9. Ukažte, že existuje jediná posloupnost a_n kladných čísel splňující $a_0 = 1$ a $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$.

Příklad 10. Najděte n-tý člen posloupnosti definované vztahy

$$a_1 = \cos(\varphi), \quad a_2 = \cos(2\varphi) \quad \text{a} \quad a_{n+2} = 2\cos(\varphi)a_{n+1} - a_n.$$

Další příklady

Příklad 11. $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$. Ukažte, že a_{2016} není dělitelné čtyřmi.

Příklad 12. Pro přirozené číslo k označme $C(k)$ jeho ciferný součet (v desítkové soustavě). Dokažte, že pro každé přirozené číslo k je posloupnost $a_0 = k$, $a_{n+1} = C(a_n)$ od nějakého členu konstantní. Najděte tuto konstantu pro $k = 2016^{2017}$.

Příklad 13. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $2^k \mid a_n$ právě tehdy, když $2^k \mid n$.

Příklad 14. $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$ $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$. Nalezněte a_{2016}.

Příklad 15. Pro posloupnost $a_0, a_1, a_1, \dots$ platí, že pro všechna nezáporná $m \geq n$ máme $a_{m+n} + a_{m-n} = (a_{2m} + a_{2n})/2$. Pokud $a_1 = 1$, kolik je a_{2016}?

Příklad 16. Nechť $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$. Ukažte, že pokud p je prvočíslo, pak p dělí a_p.

Příklad 17. $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = (a_{n+1}^2 + 2)/a_n$. Ukažte, že všechna a_i jsou celá čísla.

Příklad 18. Buď P polynom s celočíselnými koeficienty. Vytvořme posloupnost $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro všechna $k, m \in \mathbb{N}$ platí $a_{(k,m)} = (a_k, a_m)$, kde (p, q) označuje největší společný dělitel čísel p, q.

Příklad 19. Je dáno reálné číslo a a posloupnost x_n splňující $x_0 = a$ a $x_{n+1} = 2a - (a^2+1)/x_n$. Dokažte, že pokud je tato posloupnost periodická, má její nejkratší perioda lichou délku. (*i*KS, 3. ročník, A1)

Příklad 20. Nechť A a E jsou protilehlé vrcholy osmiúhelníka. Policista skáče z bodu A do bodu E, kde dělitel čeká na zatčení, přičemž v každém skoku se posune na sousední vrchol. Označme a_n počet různých cest délky n, které mohl zvolit. Dokažte, že $a_{2n-1} = 0$ a

$$a_{2n} = \frac{(2+\sqrt{2}))^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}.$$

(IMO 1979)

Literatura a zdroje

[1] Miško Szabados: *Rekurentné Postupnosti*, Oldřichov, 2009.
[2] Katka Quittnerová: *Rekurentné Postupnosti*, Horní Bradlo, 2004.
[3] Saša Kazda: *Rekurentní Rovnice*, Janova Bouda, 2005.
[4] Z. Masáková: *Diskrétní matematika II*, *http://people.fjfi.cvut.cz/masakzuz/dim_soubory/dim2.pdf*

Algebraické triky

Štěpán Šímsa

Abstrakt. Příspěvek obsahuje řadu algebraických triků, které se hodí při řešení příkladů nebo jejich částí. Velkým zdrojem triků, které člověk více či méně často použije, bývají nerovnosti a velkým zdrojem na řešení nerovností je zase seriál MKS od Michala Rolínka a Pavla Šaloma, který najdete na našich stránkách[3]. Ten tedy doporučuji přečíst každému, kdo má pocit, že se potřebuje v algebraických manipulacích zlepšit.

Úmluva. Úlohy jsou v tomto příspěvku označeny slovem **Příklad**, pokud patří mezi ty snazší, a slovem **Úloha**, pokud patří mezi ty náročnější.

Poznámka. (Symetrie a cykličnost) Výraz v několika proměnných je symetrický, pokud se nezmění prohozením libovolných dvou z nich. Pak můžeme BÚNO předpokládat, že proměnné jsou v námi vybraném pořadí (např. od největší po nejmenší).

Výraz je cyklický, pokud se nezmění po cyklické záměně (např. x za y, y za z a zároveň z za x). Poté můžeme BÚNO předpokládat například to, že jedna z proměnných je největší. Tyto úvahy často zkrátí sepisování řešení alespoň na polovinu.

Dosazení

Máme-li soustavu rovnic, často stačí jednu proměnnou vyjádřit a dosadit.

Příklad 1. Součin reálných čísel x, y, z je jedna. Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}.$$

Příklad 2. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí

$$a^2-b^2=bc, \qquad b^2-c^2=ca.$$

Ukažte, že pak platí i $a^2-c^2=ab$.

[3] *http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf*

Rozklady na součin

Mají-li se v úloze najít všechna prvočísla určitého tvaru, zpravidla se snažíme příslušný výraz rozložit na součin, protože pak je snadné říci, kdy půjde o prvočísla (jen jeden z činitelů je různý od ± 1). Ale umět rozkládat na součin se hodí i jindy.

Příklad 3. Najděte dvě čtyřmístná čísla, jejichž součinem je $4^8 + 6^8 + 9^8$.

Příklad 4. Najděte všechna celá čísla n, pro něž je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo. (MO 61-III-1)

Úloha 5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel a takových, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není $n^4 + a$ prvočíslo. (IMO 1969)

Úloha 6. Najděte nejmenší trojciferné číslo n, pro nějž má soustava

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 &= n \\ x^2 + y^2 + x + y &= n + 1 \end{aligned}$$

pouze celočíselná řešení.

Substituce $xyz = 1$

Máme-li na proměnné podmínku $xyz = 1$, často pomůže substituce

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad z = \frac{c}{a}.$$

Cvičení. Rozmyslete si, že tuto substituci opravdu můžeme použít, tedy že pro každá x, y, z splňující tuto podmínku existují vhodná a, b, c.

Příklad 7. Opět vyřešte Příklad 1.

Příklad 8. Kladná čísla a, b, c splňují $abc = 1$. Dokažte

$$\frac{1 + a^2c}{c(b + c)} + \frac{1 + b^2a}{a(c + a)} + \frac{1 + c^2b}{b(a + b)} \geq 3.$$

Úloha 9. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(MO 52-III-6)

Substituce $x' = x + c$

Ještě jednodušší substituce je pouhý posun všech proměnných o konstantu, často ale vyřeší celou úlohu.

Příklad 10. Najděte všechna reálná x splňující

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 7x + 12) + 24 = 0.$$

V následujícím příkladu budeme využívat jedno zajímavé tvrzení o polynomech (jinak ale pro naši přednášku nedůležité).

Věta. (Eisensteinovo kritérium) *Mějme polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ s celočíselnými koeficienty a prvočíslo p tak, že*

(i) $p \nmid a_n$,
(ii) $p \mid a_i, \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$,
(iii) $p^2 \nmid a_0$.

Potom je polynom $P(x)$ ireducibilní nad $\mathbb{Q}$ (tedy neexistují nekonstantní polynomy s racionálními koeficienty, jejichž součin by byl rovný P).

Příklad 11. Nechť p je prvočíslo. S pomocí Eisensteinova kritéria dokažte, že polynom $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Úloha 12. Jsou dána reálná čísla x, y, z, která splňují

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Ukažte, že alespoň jedno z čísel x, y, z je nejvýše rovno třem a alespoň jedno je větší nebo rovno pěti. (MO 60-III-3)

Linearita proměnné

Máme-li výraz, který je v některé proměnné lineární, pak bude nabývat svých extrémů pro její krajní hodnoty. To úlohu mnohdy velmi zjednoduší nebo úplně vyřeší.

Příklad 13. Jsou dána čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Ukažte nerovnosti

$$6 \geq 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + a + b + c \geq 1.$$

(MKS 28-7-6)

Příklad 14. Nalezněte minimum a maximum výrazu

$$a(1-b) + b(1-c) + c(1-a),$$

v němž a, b, c jsou z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Příklad 15. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ a $z \in \langle -2, 2\rangle$ ukažte nerovnost

$$x^2 + y^2 \geq xyz.$$

Příklad 16. Nechť $n \geq 2, 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n$. Dokažte nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

kde $x_{n+1} = x_1$. (Výběrové soustředění 2016)

Homogenita

Definice. (Homogenita) Výraz $V(a, b, c)$ nazveme homogenní stupně α, pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t > 0$ platí

$$V(ta, tb, tc) = t^{\alpha} V(a, b, c).$$

Máme-li homogenní nerovnost, můžeme si pomoci tím, že si přidáme nějakou podmínku (jejíž splnění můžeme zaručit právě pomocí t v předchozí definici).

Příklad 17. Pro $a, b \geq 0$ a $s \geq r$ dokažte

$$(a^r + b^r)^{\frac{1}{r}} \geq (a^s + b^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Příklad 18. Pro $a, b > 0$ ukažte

$$a^4 + 2b^4 \geq a^2 b^2 + 2ab^3.$$

Úloha 19. Dokažte Cauchy-Schwarzovu nerovnost: $n \in \mathbb{N}$, dále $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ a $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) \geq (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n)^2.$$

(Ne)rovnost

Máme-li nějakou rovnici nebo soustavu rovnic, můžeme si někdy pomoci tím, že ukážeme, že jedna strana je větší než druhá, a využijeme, že víme, kdy v námi použité nerovnosti nastává rovnost.

Úloha 20. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

(MO 61-III-6)

Úloha 21. Určete všechny trojice (a, b, c) kladných reálných čísel, které jsou řešeními soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a\sqrt{b} - c &= a, \\ b\sqrt{c} - a &= b, \\ c\sqrt{a} - b &= c. \end{aligned}$$

(ČPS 2010)

Polynomy

Příklad 22. Mějme reálná čísla x, y, z, pro která platí

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ xy + yz + zx &= 0. \end{aligned}$$

Dokažte, že $x = y = z = 0$.

Příklad 23. Ukažte, že pokud pro nenulová reálná čísla a, b, c platí rovnost

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = 0,$$

tak se dvě z těchto tří čísel rovnají.

Příklad 24. Jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(a-b)(c-b)}$$

pro všechny možné trojice po dvou různých reálných čísel a, b, c?

(Výběrové soustředění 2013)

Úloha 25. Nechť a, b, c, d, e, f jsou přirozená čísla. Označme $S = a+b+c+d+e+f$. Platí, že S dělí výrazy $abc + def$ a $ab + bc + ca - de - ef - fd$. Dokažte, že S je složené. (IMO shortlist 2005)

Algebra? Ne, geometrie!

Úloha 26. Dvojice nekonečných posloupností celých čísel a_1, a_2, ... a b_1, b_2, ... splňuje pro $n \geq 3$ vztah

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0.$$

Ukažte, že existuje přirozené k takové, že $a_k = a_{k+2016}$. (iKS 5. ročník, A5)

Úloha 27. Vyřešte úlohu 12, tentokrát geometricky.

Trikové úpravy

Úloha 28. Celá čísla x, y, z splňují vztah

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = xyz.$$

Dokažte, že výraz $x^3 + y^3 + z^3$ je dělitelný $x + y + z + 6$.

Úloha 29. Nechť existuje $n > 0$ reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která pro každé $i = 1, \ldots, n$ splňují

$$x_i = \frac{1}{x_i - x_1} + \frac{1}{x_i - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{x_i - x_n}.$$

Navíc platí $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 45$. Určete n. (MKS 27-1-8)

Úloha 30. Pro libovolná nezáporná reálná čísla a a b dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. (MO 63-III-6)

Návody

1. Dosaďte $z = \frac{1}{xy}$ a zlomky zjednodušte a sečtěte.

2. Z první rovnice dosaďte za c do druhé a třetí. Nyní má z druhé rovnice plynout třetí. Všimněte si, že druhou rovnici lze vydělit b, a potom ji vytkněte ze třetí rovnice.

3. Přičtěte 6^8, abyste mohli využít vzorečku, a pak ho opět odečtěte a využijte jiného vzorečku. Ověřte čtyřmístnost obou čísel.

4. Přičtěte a odečtěte $9n^2$ a s pomocí dvou vzorečků rozložte na součin.

5. Zvolte $a = 4m^2$ pro $m > 1$ a rozložte na součin.

6. Označte $a = x^2 + y^2, b = x + y$, odvoďte $a = n, b = 1$, Vyřešte kvadratickou rovnici a odvoďte v jakém tvaru musí být n. Výsledek by měl být 113.

7. Tady se fakt nedá nic nového radit :D. Udělejte substituci a upravte (sečtěte zlomky).

8. Udělejte substituci a použijte AG-nerovnost (jde to i rovnou bez substituce, ale po substituci je to lépe vidět).

9. Po substituci nerovnost vynásobte třemi a rozložte ji na součet tří cyklických AG-nerovností.

10. Rozložte kvadratické trojčleny na součin, zvolte $y = x - 1$ a následně $z = y^2$. Vyřešte kubickou rovnici v z natipováním kořenů.

11. Polynom sečtěte na $P(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$, uvažte polynom $Q(x) = P(x+1)$ a dokažte, že je ireducibilní. Uvědomte si, že P je pak také nutně ireducibilní.

12. Uvažte $a = x - 4$ atd., tedy $a + b + c = 0$ a $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Ze symetrie $a \geq b \geq c$ a pro spor $c > -1$. Rozeberte, jestli je b záporné nebo nezáporné. Druhá část (důkaz, že $a \geq 1$) opět plyne ze symetrie.

13. Stačí rozebrat osm možností, kdy $a, b, c \in \{0, 1\}$. Díky symetrii výrazu můžete navíc předpokládat $a \geq b \geq c$ a rozebírat jen čtyři možnosti.

15. Díky linearitě v proměnné z stačí rozebrat případy $z = \pm 2$.

16. Využijte linearitu a představte si n kuliček na kružnici, kde některé jsou černé a některé bílé. Co počítá výraz na levé straně?

17. BÚNO předpokládejte $a^r + b^r = 1$. Pak $1 \geq a, b \geq 0$, a tedy $a^r \geq a^s$ a $b^r \geq b^s$.

18. BÚNO předpokládejte $b = 1$ a polynom rozložte na součin tipováním kořenů.

19. Nejprve využijte homogennost v $u_1, \ldots, u_n$ a BÚNO předpokládejte $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 1$ a pak ještě stejnou úvahu zopakujte pro $v_1, \ldots, v_n$. Nakonec využijte odhady $\frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2 \geq u_i v_i \geq -\left(\frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2\right)$.

20. Využijte odhad $4x^2 \leq x^4 + 4$ a jeho cyklické záměny a získané nerovnosti sečtěte.

21. BÚNO předpokládejte, že a je největší a dokažte postupně $b \leq 4, c \geq 4$ a $c \leq b$.

22. Uvažte polynom třetího stupně s kořeny x, y, z a pomocí Vietových vztahů odvoďte, že je tvaru $t^3 + c = 0$.

23. Vynásobte abc a uvažujte jako polynom v a. Dokažte, že se rovná polynomu $(b-c)(a-b)(a-c)$.

24. Označte výraz ze zadání jako výraz $V(a)$ v neznámé a s parametry b, c. Uvažte polynom $P(a) = V(a)(a-b)(b-c)(c-a)$, ukažte, že je druhého stupně a b i c jsou jeho kořeny (pozor, to není jasné, protože $V(a)$ není polynom!). Odvoďte, že $V(a)$ nezávisí na a a využijte symetrie.

25. Uvažte polynom $P(x) = (x+a)(x+b)(x+c) - (x-d)(x-e)(x-f)$.

26. Uvažujte body v rovině $X_n = (a_n, b_n)$. Rozmyslete si, že trojúhelník X_n, X_{n-1}, X_{n-2} má pravý úhel u vrcholu X_n. Z Pythagorovy věty odvoďte, že vzdálenosti mezi po sobě jdoucími body se nezvětšují, a využijte celočíselnosti.

27. Uvědomte si, že soustava rovnic definuje kružnici v prostoru. Tu rozdělte na šest částí (vždy získáte dva body při průniku kružnice s rovinou danou dvěma osami) a pro každou část si rozmyslete, jakých hodnot v ní nabývají jednotlivé souřadnice.

28. Využijte vzoreček $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

29. V součtu druhých mocnin nahraďte vždy jedno x_i pomocí vztahu v zadání.

30. Roznásobte, upravte, aby na obou stranách byl rozdíl odmocnin, a netradičním způsobem využijte vztah $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Literatura a zdroje

[1] Michal „Kenny" Rolínek: *Algebraické legrácky*, Blansko-Obůrka, 2011.
[2] Michal „Kenny" Rolínek, Pavel Šalom: *Zdolávání nerovností*, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf*
[3] Martina Vaváčková: *Rozklady na součin*, Hojsova Stráž, 2011.

Koulítko a rovinítko

Rado van Švarc

Abstrakt. Konstrukční úlohy trochu jinak? Místo roviny prostor, místo pravítka rovinítko, místo kružítka koulítko.

Na přednášce si procvičíme prostorovou představivost řešením konstrukčních úloh ve třech dimenzích. Oproti klasickým nástrojům rovinné geometrie budeme mít k dispozici rovinítko (umožní nám proložit rovinu třemi body, které neleží v jedné přímce) a koulítko (z daného bodu opíše sféru s určeným poloměrem).

Při řešení mnohých úloh napoví, představíš-li si podobnou konstrukci v rovině. Například hned první úloha je „stejná" jako konstrukce rovnostranného trojúhelníka. Jen má o dimenzi víc.

Příklady

Příklad 1. Sestroj pravidelný čtyřstěn.

Řešení. Zvolíme si v prostoru dva libovolné body A a B. Úsečka AB (její délku označíme a) bude hranou našeho čtyřstěnu. Zabodneme koulítko postupně do bodů A a B a z obou opíšeme sféru o poloměru a. Průnik těchto sfér je kružnice, říkejme jí k. Kdekoliv na k si zvolíme další bod C. Z bodu C opět nakreslíme sféru o poloměru a, ta protne k ve dvou bodech. Libovolný z těchto bodů je čtvrtý vrchol našeho čtyřstěnu.

Příklad 2. Je dána přímka p a bod B, který na ní neleží. Sestroj rovinu kolmou na p a procházející bodem B.

Příklad 3. Je dána rovina σ a přímka p. Sestroj rovinu τ, která je kolmá na σ a současně v ní leží přímka p.

Příklad 4. Mějme rovinu σ a bod B mimo ni. Sestroj přímku p procházející bodem B a kolmou na σ.

Příklad 5. Sestroj přímku q rovnoběžnou s danou přímkou p a procházející daným bodem B nenáležejícím p.

Příklad 6. Sestroj kouli opsanou danému čtyřstěnu.

Příklad 7. Sestroj rovinu, která prochází daným bodem a je rovnoběžná k dané rovině.

Příklad 8. Sestroj čtyřstěn, jsou-li zadána těžiště jeho stěn.

Příklad 9. Sestroj kouli vepsanou danému čtyřstěnu.

Příklad 10. Nechť jsou dány body S, S_{AB}, S_{BD}, S_{CD}, které neleží v jedné rovině. Sestroj čtyřstěn $ABCD$ takový, že S je střed koule jemu opsané a S_{AB}, S_{BD}, S_{CD} jsou po řadě středy hran AB, BD, CD.

Příklad 11. Sestroj kouli, která prochází danými dvěma body a dotýká se daných dvou koulí.

Příklad 12. Nechť jsou dány nekolineární body T_A, V_A, T_C, přímka p mimoběžná s přímkou T_AV_A a úsečka délky d. Sestroj čtyřstěn $ABCD$ takový, že T_A, resp. T_C je těžiště stěny BCD, resp. ABD, V_A je pata výšky spuštěné z vrcholu A na stěnu BCD, bod B leží na přímce p a vzdálenost $|CV_A|$ je rovna d.

Příklad 13. Sestroj krychli pouze koulítkem, jsou-li dány délky stěnové a tělesové úhlopříčky.

Literatura a zdroje

Celý příspěvek je bezostyšně zkopírován od *Alči Skálové*, která jej vytvořila pro soustředění v Blansku-Obůrce (2011) a které tímto děkuji.

Úvod do diofantických rovnic

Rado van Švarc

Abstrakt. Na přednášce probereme několik základních technik na řešení diofantických rovnic. Vše je ilustrováno na příkladech.

Úmluva. Ve všech rovnicích budeme uvažovat $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ a p, q prvočísla a budeme hledat všechna řešení daných rovnic.

Modulení

První metoda řešení diofantických rovnic, kterou si ukážeme, je užitečná především tehdy, když tušíme, že zadaná rovnice nemá řešení. Potom je vhodné se na ni podívat modulo nějaké číslo, po kterém některé členy dávají jenom některé zbytky. Pokud všechno dobře dopadne, zjistíme, že po dělení tímto číslem dávají strany rovnice různé zbytky, takže rovnice určitě žádné řešení nemá. Volba vhodných modulů vyžaduje cvik, takže si vyřešíme několik příkladů.

Příklad 1. $7x^2 + 5y + 14 = 0$

Řešení. Levá strana rovnice dává po dělení pěti stejný zbytek jako $2x^2 + 4$, ale jelikož x^2 dává pouze zbytky 0, 1 a 4, tak nikdy nemůže vyjít nula, a zadaná rovnice proto nemá žádné řešení.

Příklad 2. $2^x = 11 + 7y$

Příklad 3. $a^6 + b^4 + c^2 = 1234567$ (PraSe 7–3–3)

Příklad 4. $2^a = 1 + 3^b$

Příklad 5. $2^p + p^2 = q$ (PraSe 36–6–2)

Příklad 6. $p^2 = 2q^2 + 1$ (PraSe 26–2–2)

Příklad 7. $x^4 + y^4 = z^4 + 4$ (PraSe 6–2–4)

Příklad 8. $a^2 = 1! + 2! + \cdots + b!$ (PraSe 26–2–5)

Příklad 9. (těžší) Najděte nejmenší přirozené n, pro které existují celá čísla x_1, $x_2, \ldots, x_n$ taková, že

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 2002^{2002}.$$

(IMO shortlist 2002)

Rozklady

Zadaná rovnice se dá mnohdy pěkně upravit na součin. Pokud je navíc na jedné straně prvočíslo nebo nějaké konkrétní číslo, pak rovnou známe všechny jeho rozklady. Rozklad se může hodit i jindy, pokud o činitelích víme, že jsou nesoudělné. Opět si zkusíme tuto teorii aplikovat v praxi.

Příklad 10. $p + 400 = a^2$ (Prase 31–7–2)

Řešení. Rovnici upravíme do tvaru $p = (a-20)(a+20)$. Protože p je prvočíslo, tak musí nutně platit $a - 20 = 1$ a také $a + 20 = p$ (protože z $a \in \mathbb{N}$ plyne $a + 20 > 1$). Z toho plyne $a = 21$ a $p = 41$, což je skutečně jediným řešením této rovnice.

Příklad 11. $x^2 + 3x = y^3 - 2$

Příklad 12. $xy = 2x + 3y$

Příklad 13. $xy + yz + zx = xyz + x + y + z$

Příklad 14. $x^2y + xy^2 = 2(x^3 + y^3)$ (PraSe 22–1–2)

Příklad 15. $(ab - 7)^2 = a^2 + b^2$ (Indie)

Příklad 16. $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$

Příklad 17. $p = a^4 + 4$

Příklad 18. $x^4 - 3x^2 + 9 = p$ (MO 61–III–1)

Po sobě jdoucí mocniny

Tvrzení. *Neexistují x, y, a taková, že $x^a < y^a < (x+1)^a$.*

Toto zdánlivě jednoduché tvrzení má překvapivě mnoho uplatnění. Pokud má být například nějaký výraz roven čtverci, pokusíme se najít dva po sobě jdoucí čtverce, které ho semknou mezi sebe, a to nám zaručí neexistenci řešení. Vtip potom spočívá v tomto semknutí. Jak si ukážeme, někdy to nemusí být vůbec jednoduché.

Příklad 19. $x^2 = y(y+2)$

Příklad 20. $x^2 + x + 1 = y^2$

Příklad 21. $(a+3)^3 - a^3 = b^2$

Příklad 22. $a^2 = 9^b + 7$

Příklad 23. $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ (MO 59–A–III–1)

Příklad 24. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2a(c-1) + 2b(c+1) = d^2$

Příklad 25. $3a + b + 1 = (a+b+c)(c-a-b)$ (Rumunsko)

Příklad 26. $(x+1)^4 = (x-1)^4 + y^3$ (Austrálie)

Příklad 27. (těžší) $a(a+1) = b(b+1)p^{2c}$ (PraSe 26–2–7)

Příklad 28. (težší) $a^3 + (a+1)^3 + \cdots + (a+7)^3 = b^3$ (Maďarsko)

Nekonečný sestup

Poslední metoda se opírá o poměrně jednoduché tvrzení:

Tvrzení. *Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.*

Když chceme ukázat, že daná rovnice nemá netriviální řešení, uvažujeme nějaké hypotetické řešení a vyrobíme z něj (obvykle pomocí některé z předešlých technik) řešení menší. Z uvedené věty pak plyne, že řešení nemůže existovat. K lepšímu pochopení si to zkusíme na poslední várce příkladů.

Příklad 29. $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 2abc$

Řešení. Předpokládejme, že přirozená čísla a, b, c řeší danou rovnici. Kdyby a bylo liché, tak bychom měli na levé straně liché číslo, ale na pravé straně je číslo sudé. Proto $a = 2d$ a rovnici můžeme upravit do tvaru $b^3 + 2c^3 + 4d^3 = 2bcd$. Ovšem $a + b + c > b + c + d$. To ovšem znamená, že pro každé řešení umíme najít řešení s menším součtem proměnných. Ovšem protože tyto součty jsou přirozené, dostáváme spor. Proto rovnice nemá řešení.

Příklad 30. $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Příklad 31. $x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4w^4)$ (PraSe 12–2–2)

Příklad 32. $a^3 + 3b^3 + 9c^3 = 3abc$ (Kürschák)

Příklad 33. $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ (Korea)

Příklad 34. $x^4 + y^4 + z^4 = 9w^4$

Příklad 35. $a^2 - b^2 = 2abc$

Příklad 36. $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ (USAMO 1976)

Literatura a zdroje

Většina příspěvku je přímo ukradená z příspěvku *Filipa Hláska* ze soustředění v Oldřichově (2012). Tímto mu děkuji. Některé části byly také převzaty z knihy *An Introduction to Diophantine Equations*, kterou napsali *Titu Andreescu*, *Dorin Andrica* a *Ion Cucurezeanu.*

Dotykové grafy

Martin Töpfer

Abstrakt. Na přednášce si ukážeme několik tvrzení o tom, jak reprezentovat rovinné nebo vnějškově rovinné grafy pomocí dotýkajících se objektů (každý vrchol je reprezentován jedním objektem a dotyk dvou objektů odpovídá hraně mezi příslušnými vrcholy).

Dotyková reprezentace grafu G je množina objektů v rovině (nebo v prostoru) taková, že každý objekt přísluší jednomu vrcholu grafu. Dva objekty se v této reprezentaci dotýkají právě tehdy, když mezi příslušnými vrcholy vede hrana. U mnohoúhelníků můžeme rozlišovat, jestli za kontakt považujeme *bodový kontakt* nebo zda požadujeme *kontakt hran.*

Definice. *Rovinný graf* je graf, který můžeme nakreslit do roviny bez křížení hran.

Věta. (Kuratowski) *Rovinné grafy jsou právě ty grafy, které neobsahují podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Definice. *Vnějškově rovinný graf* je graf, který můžeme nakreslit do roviny bez křížení hran tak, že všechny vrcholy jsou na vnější hranici.

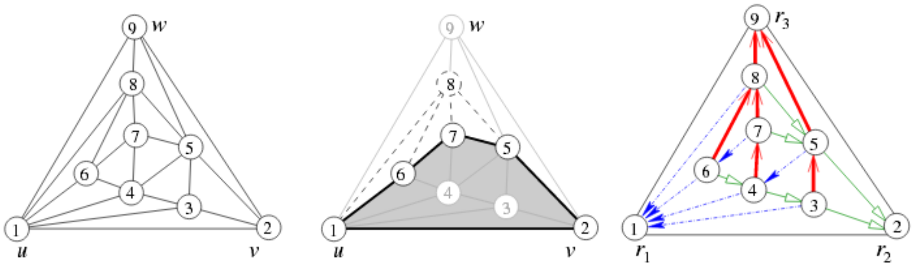
Věta. *Vnějškově rovinné grafy jsou právě ty grafy, které neobsahují podrozdělení K_4 ani $K_{2,3}$.*

Věta. *Vnějškově rovinné grafy mají reprezentaci pomocí hranově se dotýkajících trojúhelníků.*

Věta. *Vnějškově rovinné grafy s danými vahami vrcholů mají dotykovou reprezentaci pomocí rozdělení trojúhelníku na čtyřúhelníky takovou, že obsahy čtyřúhelníků odpovídají vahám jednotlivých vrcholů.*

Úloha. Dokažte, že vnějškově rovinné grafy s danými vahami vrcholů mají dotykovou reprezentaci pomocí obdélníků takovou, že velikosti obdélníků odpovídají vahám jednotlivých vrcholů.

Definice. *Maximálně rovinný graf* je rovinný graf, který by přidáním libovolné další hrany přestal být rovinný. Snadno si rozmyslíme, že ekvivalentní definice je, že jde o rovinný graf, který má všechny stěny trojúhelníkové.



Definice. Mějme maximálně rovinný graf $G = (V, E)$ a nějaké jeho nakreslení v rovině. *Kanonické uspořádání* vrcholů G je uspořádání $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takové, že pro všechna i:

(1) Podgraf G_i indukovaný vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ je 2-souvislý a na jeho vnější hranici jsou vrcholy v_1 a v_2.
(2) Vrchol v_i má v G_i alespoň 2 sousedy, všichni jeho sousedi jsou na vnější hraně G a navíc na této hraně tvoří interval.

Věta. *Každý maximálně rovinný graf má kanonické uspořádání (a umíme ho rychle zkonstruovat).*

Definice. Jako *Schnyder realizer* označíme zorientování a obarvení hran třemi barvami tak, že každá barva bude tvořit strom, ve kterém všechny hrany ukazují směrem ke kořeni. Navíc z každého vrcholu musejí vycházet právě tři hrany různých barev a pořadí hran u každého vrcholu musí být po řadě: první barva ven, druhá barva dovnitř, třetí barva ven, první barva dovnitř, druhá barva ven a třetí barva dovnitř.

Věta. *Každý maximálně rovinný graf má Schnyder realizer.*

Věta. *Každý rovinný graf má bodově dotykovou reprezentaci pomocí trojúhelníků.*

Věta. *Každý rovinný graf má hranově dotykovou reprezentaci pomocí šestiúhelníků.*

Věta. *Každý rovinný graf má stěnově dotykovou reprezentaci pomocí kvádrů v prostoru.*

Věta. *Každý rovinný graf má rovinné nakreslení, ve kterém jsou hrany úsečky a navíc vrcholy jsou v mřížových bodech mřížky $n \times n$, kde n je počet vrcholů grafu.*

Věta. (Kobe) *Každý rovinný graf má dotykovou reprezentaci pomocí kruhů.*

Literatura a zdroje

Založeno na přednášce Stevena Kobourova Geometrické reprezentace grafů II.

Invarianty

Martin Töpfer

Abstrakt. Hledání invariantů je užitečná metoda zvláště u úloh, ve kterých jde o nějakou postupnou změnu stavů. Příspěvek obsahuje ukázku tohoto přístupu a řadu příkladů. Postupně se od příkladů, které by se daly označit až za matematický folklór, dostaneme k příkladům z české i světové olympiády.

U příkladů, kde začínáme v nějakém počátečním stavu a následně se ptáme, jak dopadne mnohokrát opakovaný nějaký předdefinovaný krok (např. dvě čísla nahradíme jejich rozdílem), se velmi často hodí najít vlastnost, která se nemění. Této vlastnosti říkáme invariant. Protože invariant bude platit i na konci procesu, můžeme díky němu něco dokázat o koncovém stavu. Tuto myšlenku si ukážeme na následujícím příkladu.

Úloha. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, 3, \dots, 2n$, kde n je liché přirozené číslo. Vybereme si libovolná dvě čísla a, b, která smažeme, a místo nich napíšeme číslo $|a - b|$. Ukažte, že poslední zbylé číslo bude liché.

Řešení. Uvažme součet $S = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1)$. Vidíme, že S je liché. Odebráním čísel a a b snížíme součet o $2\min(a, b)$, což je však sudé číslo, tedy S zůstane liché. Postupným mazáním se tedy parita S nezmění a na konci zbude liché číslo.

V tomto příkladě byla invariantem parita součtu. Dalšími užitečnými invarianty může být součet, součet modulo vhodné n, součet druhých mocnin (tj. vzdálenost od počátku), počet jevů atd.

Ne vždy musíme najít něco neměnného, často pomůže najít vlastnost, která se mění jen jedním směrem. Více informací o takových *poloměnkách* můžete nalézt v [4].

Úloha. Každý člen Strany má nejvýše tři nepřátele. Ukažte, že pak existuje rozdělení všech členů do dvou skupin takové, že každý člen je ve skupině s nejvýše jedním svým nepřítelem.

Řešení. Uvažme libovolné rozdělení do dvou skupin a označme N celkový počet znepřátelených dvojic, jejichž oba členové jsou ve stejné skupině. Pokud člen A má ve své skupině více než jednoho nepřítele, pak jeho přemístěním do druhé skupiny snížíme N alespoň o jedna. Protože N nemůžeme zmenšovat do nekonečna, v jednu chvíli se tento proces zastaví. To bude hledané rozdělení do dvou skupin.

Příklady

Příklad 1. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla $1, 0, 1, 0, 0, 0$. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

Příklad 2. Mějme celá čísla a, b, c a d, ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a, b, c, d) čtveřicí $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Ukažte, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě větší než libovolné kladné číslo.

Příklad 3. Buď $d(n)$ ciferný součet čísla n. Najděte všechna řešení rovnice $n + d(n) + d(d(n)) = 2015$.

Příklad 4. Každé z čísel $a_1, \dots, a_n$ je $+1$ nebo -1 a platí $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

Příklad 5. Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, z nichž každý má nejvýše $n-1$ nepřátel. Ukažte, že je možno je rozesadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.

Příklad 6. Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček, nebo dvojek?

Příklad 7. Mějme množinu $\{3, 4, 12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0.6a - 0.8b$ a $0.8a + 0.6b$. Můžeme někdy dostat množinu (a) $\{4, 6, 12\}$ nebo (b) $\{x, y, z\}$, kde $|x-4|, |y-6|, |z-12| < 1/\sqrt{3}$?

Příklad 8. V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \le k \le n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \le k \le n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí. (58-A-III-5)

Příklad 9. Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

(a) Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?

(b) Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany. (59-A-III-3)

Příklad 10. Na tabuli je napsáno v desítkové soustavě celé kladné číslo N. Není-li jednomístné, smažeme jeho poslední číslici c a číslo m, které na tabuli zůstane, nahradíme číslem $|m - 3c|$ (Například bylo-li na tabuli číslo $N = 1204$, po úpravě tam bude $|120 - 3 \cdot 4| = 108$.) Najděte všechna přirozená čísla N, z nichž opakováním popsané úpravy nakonec dostaneme číslo 0. (62-A-III-4)

Příklad 11. Vezměme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. V jednom kroku můžeme jeden trojúhelník rozdělit výškou (na přeponu) na dva podobné trojúhelníky. Můžeme opakovaným dělením docílit toho, že žádné dva z našich trojúhelníků nebudou shodné?

Příklad 12. Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x, y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x + y$, $-y$, $y + z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (IMO 1986)

Návody

1. Liché a sudé pozice.

2. Vzdálenost od počátku.

3. Dělitelnost.

4. Co může být krok algoritmu, když se chceme dostat k libovolnému ohodnocení proměnných? A co pak bude ten nejtriviálnější invariant?

5. Vzpomeňte si na druhou úlohu, co zkusit „invertovat oblouk sousedů“?

6. Dělitelnost nějakým vhodným číslem.

7. Vzdálenost od počátku.

8. Každé minci přiřadíme její pozici.

9. Parita počtu členů.

10. 31

11. Jaké budou velikosti rozdělených trojúhelníků? Šlo by to zapsat jako uspořádaná dvojice? Mocniny jsou mocné.

12. Součet absolutních hodnot všech podmnožin sousedících čísel.

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998
[2] Vít „Vejtek“ Musil: *Variace na invariant*, Domaslav, 2010
[3] Robert Šámal: *Řešení úloh pomocí invariantů*, Polnika, 2000
[4] Martin Töpfer: *Poloměnky*, Mentaurov, 2013

Obsah