Sborník
Staré Město 2009

Háňa Bendová
Jarda Hančl
Tomáš „Šavlík“ Pavlík
Michal „Kenny“ Rolínek
Tomáš Roskovec
Zuzka Safernová
Alča Skálová
Lenka Slavíková
Miško Szabados
Pavel Šalom
Pepa Tkadlec
Honzík Vaňhara

Zvláštní host:
Jaroslav Švrček (PřF UP v Olomouci)

editor : Jakub „šnEk“ Opršal, Alča Skálová
vydání první, náklad 42 výtisků
listopad 2009
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Funkcionální rovnice

Háňa Bendová

Abstrakt. Jde o přednášku, která uvozuje do problematiky funkcionálních rovnic. V tomto příspěvku jsou popsány základní metody řešení, substituční a Cauchyova, a dále vlastnosti funkcí, které mohou být při řešení užitečné. V neposlední řadě příspěvek obsahuje řadu příkladů.

Úvod

Na této přednášce se dozvíte, co jsou to funkcionální rovnice, a naučíte se základní metody jejich řešení. A až příště například v olympiádě narazíte na nějakou funkcionální rovnici, nebudete stát nechápavě s otevřenými ústy a přemýšlet, jak mohl někdo vymyslet něco tak obludného, ale prostě sednete a vyřešíte ji. O veškeré šoky, kterými je zpočátku nutné projít, se postarám já.

Co je funkcionální rovnice?

Zadání funkcionální rovnice může vypadat například následovně:

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ splňující $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$.

Úloha 2. Hledejte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

pro $x, y \in \mathbb{R}$.

Úloha 3. Najděte všechny funkce definované na celé reálné ose splňující funkcionální rovnici

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2;\ x, y \in \mathbb{R}.$$

ad 1. Funkcionální rovnice (1) nám říká: „najděte všechny funkce, které splňují rovnici $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechny hodnoty racionálních čísel x a y“. Dodat bychom ještě měli: „ … a ověřte, že vámi nalezené funkce vyhovují.“ Pro představu prozradím, že například funkce $f(x) = 2x$ této rovnici vyhovuje, protože $f(x+y) = 2(x+y)$ a $f(x) + f(y) = 2x + 2y = 2(x+y)$, takže je rovnice $f(x+ +y) = f(x) + f(y)$ splněna pro všechna požadovaná $x, y \in \mathbb{Q}$. Funkce $f(x) = x+1$ naopak nevyhovuje, protože $f(x+y) = x+y+1 \neq x+1+y+1 = f(x)+f(y)$.

Klíčová slova. funkcionální rovnice, funkce, substituční metoda, Cauchyova metoda, hustá množina

ad 2. Funkcionální rovnice (2) má stejný tvar, ale se dvěma změnami. První je, že je definovaná na celém $\mathbb{R}$ a funkční hodnoty mohou nabývat na rozdíl od těch v (1) také reálných hodnot. Druhou je, že máme dodanou pomocnou podmínku, že je funkce spojitá. Bez této podmínky lze rovnici v $\mathbb{R}$ také vyřešit, ale řešení je ošklivější než nechutné. Důležité je si tu uvědomit, že řešení nalezená v (1) by mohla bez větších obtíží fungovat i v (2) (při správném rozšíření z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$).

ad 3. Tato rovnice je příkladem těch, kde nám vedlejší výrazy „vylézají" na povrch. Kromě funkčních výrazů typu $f(n\check{e}co)$ se v ní totiž objevují i výrazy typu x^2, xy, atd. Rovnice tohoto typu jsou většinou jednodušší, protože řešení v hodně případech přímo „vypadne" nějakým speciálním dosazením za x nebo y, viz tzv. *substituční* metoda řešení.

Základní metody řešení

Základními metodami řešení funkcionálních rovnic jsou *substituční* metoda a *Cauchyova* metoda.

Substituční metoda

Substituční metoda spočívá, řečeno co nejobecněji, v následujícím postupu: Předpokládáme, že už máme řešení funkcionální rovnice a vhodným dosazením za proměnné se snažíme ukázat, co by mělo toto řešení splňovat. Někdy nám vyjde užitečná vlastnost funkce ($f(x)$ je sudá, prostá, …), jindy přímo tvar, jak musí vypadat. Pokud dostaneme tvar funkce (nebo si ho odvodíme z nalezených vlastností), je nutné ho dosadit do zadání a zkouškou ověřit, že je skutečně řešením. Osvětlíme si to na úloze (3):

Úloha. Najděte všechny funkce definované na celé reálné ose splňující funkcionální rovnici

$$f(x+y)+2f(x-y)-4f(x)+xf(y)=3y^2-x^2-2xy+xy^2.$$

Řešení. Předpokládejme, že nějaká $f(x)$ je řešením a označme $f(0)=c$. Funkcionální rovnice je splněna pro všechny dvojice čísel x, y, je tedy splněna i pro dvojici čísel[1] $x=x$, $y=0$, dosazením za tuto dvojici dostaneme:

$$-f(x)+cx=-x^2$$

neboli

$$f(x)=x^2+cx.$$

[1] Dosazujeme speciální hodnoty za proměnné, abychom dostali nějakou vlastnost funkce, nebo konkrétní tvar.

Dosadíme-li v získaném vztahu $x = 0$, dostaneme navíc $f(0) = 0$, tedy $c = 0$ a jediným tvarem, jaký může mít naše funkce $f(x)$, zůstal $f(x) = x^2$. Z předpokladu, že funkce $f(x)$ řeší naši rovnici jsme odvodili, že nutně musí platit vztah $f(x) = x^2$. Teď už stačí jen získaný vztah dosadit do zadané rovnice a ověřit, že funkce $f(x) = x^2$ je řešením naší rovnice.

Vztah, který by určoval, jak musí nutně vypadat funkce splňující zadanou rovnici, nemusí jít z funkcionální rovnice přímo získat. Proto je tu *Cauchyova* metoda.

Cauchyova metoda

Cauchyova metoda se zakládá na postupném odvození chování funkce pro přirozená čísla, poté pro celá, posléze pro racionální a s trochou štěstí (pokud to zadání požaduje) nakonec pro všechna reálná čísla.

Cauchyovu metodu ozřejmíme na úloze (2).

Úloha. Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y);\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Předpokládejme, že máme jedno takové řešení[2] $f(x)$. Dosazením $x = 0$ a $y = 0$ zjistíme, že nutně[3] platí $f(0) = 0$. Dosazením[4] $y = -x$ dostáváme $f(-x) = -f(x)$. Matematickou indukcí snadno[5] dokážeme vztah $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$, speciálně pak pro $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ vztah $f(nx) = nf(x)$ pro každé reálné číslo x a přirozené(!) číslo n. Označme si $f(1) = c$. Pak $f(n) = nf(1) = cn$ pro každé přirozené číslo n. Volbou $x = m/n$ ve vztahu $nf(x) = f(nx)$ dostáváme $nf(m/n) = f(n \cdot m/n) = f(m) = cm$, neboli $f(m/n) = c \cdot m/n$. Vztah $f(x) = cx$ tedy platí pro každé kladné(!) racionální číslo x. Díky vztahu $f(0) = 0$ a $f(-x) = -f(x)$ máme platnost vztahu $f(x) = cx$ pro každé(!) racionální číslo x. Protože je množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ *hustá*[6] v $\mathbb{R}$ a protože je funkce $f(x)$ spojitá, musí $f(x)$ splňovat vzorec $f(x) = cx$ na všech reálných číslech.

Zkouškou[7] provedenou dosazením do rovnice v zadání úlohy snadno ověříme, že funkce $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$, je opravdu řešením.

---

[2] Vůbec nemusíme vědět jaké řešení. Důležité je si říci: „Kdybychom řešení měli, tak by pro něj platily následující věci …"

[3] Funkcionální rovnice má být pro funkci $f(x)$ splněna pro všechny dvojice $x, y \in \mathbb{R}$, proto musí být splněna i pro konkrétní dvojici hodnot $x = 0, y = 0$.

[4] Rovnice je splněna pro všechny dvojice x, y, takže musí platit i pro speciální volbu $y = -x$.

[5] Na začátku dáváme $f((x_1 + x_2) + x_3) = f(x_1 + x_2) + f(x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$, atd.

[6] Že $\mathbb{Q}$ je *hustá* v $\mathbb{R}$ znamená, že libovolně blízko kteréhokoli reálného čísla najdeme nějaké racionální číslo.

[7] Aspoň se zmínit o zkoušce je velice potřebné, protože jsme zjistili, co by musela funkce splňovat, kdyby existovala, ale nevíme ještě, jestli když funkce splňuje $f(x) = cx$, tak vyhovuje. Může se stát, že bude vyhovovat jen pro určitá c nebo pro žádné.

Ne vždy je ale řešení takto přímočaré a v jistém smyslu jednoduché. Mnohdy je potřeba postupně, navzájem na sebe navazujícími kroky, odvodit celou řadu skutečností (vlastností), z nichž konečně poskládáme, jak může funkce vypadat.

Základní vlastnosti funkcí

Funkce mohou mít tyto vlastnosti důvěrně známé ze střední školy:

(a) *sudá, resp. lichá*: platí $f(x) = f(-x)$, resp. $f(x) = -f(-x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

(b) *rostoucí, resp. klesající*: pro libovolná $x < y$ je $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$

(c) *nezáporná* (nebo *kladná*): $f(x) \geq 0$ (nebo $f(x) > 0$)

(d) *prostá*: funkce nenabývá žádné hodnoty víc než jednou ($x \neq y \Rightarrow f(x) \neq$ $\neq f(y)$)

(e) *na*: funkce nabývá všech hodnot aspoň jednou

(f) *bijekce*: funkce nabývá všech hodnot právě jednou (každému x z definičního oboru náleží právě jedno $f(x)$ z oboru hodnot)

(g) *spojitá*: zjednodušeně řečeno ji jde nakreslit jedním tahem

Tyto vlastnosti ve složitějších úlohách velmi pomáhají, nebo jsou dokonce nutným krokem k řešení. Rozeberme postupně jejich užitečnost.

ad (a). Sudost nebo lichost ulehčuje práci na polovinu, pokud je potřeba řešit rovnici zvlášť pro kladná a záporná čísla. Pomáhá též, pokud nám různým dosazováním vyjde soustava rovnic – je další pomocnou rovnicí.

ad (b). Je velice důležitá, protože může v úlohách řešených pomocí *Cauchyovy* metody nahradit *spojitost*. Také z ní plyne, že je funkce *prostá*. Významná je i její slabší varianta $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, resp. $f(x) \geq f(y)$, která taktéž může nahrazovat *spojitost*, ale už neříká, že je funkce *prostá*.

ad (c). Tato vlastnost se zkrátka může hodit :)

ad (d). Velice důležitá vlastnost, která dává $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, přičemž a a b můžou být i výrazy. Pokud je funkce zároveň *na*[8], dostáváme, že je *bijekcí*.

ad (e). V naprosté většině případů zajišťuje, že pro každé x existuje y takové, že $f(y) = x$. Pokud je funkce zároveň *prostá*, je to *bijekce*.

ad (f). Shrnuje v sobě vlastnosti funkce *prosté* a *na* a zároveň dodává silnou implikaci jestliže $f(x) = y$, tak $f^{-1}(y) = x$.

ad (g). Jak bylo vidět v příkladu (2), řešeném pomocí *Cauchyovy* metody, hodí se spojitost při rozšíření z nějaké *husté* číselné množiny na $\mathbb{R}$. Touto hustou číselnou

[8] *Na* obor hodnot.

množinou mohou být všechna racionální čísla, všechna iracionální čísla, zlomky ve tvaru $a/2^b$, kde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, atd.

Příklady

Nebude-li řečeno jinak, hledají se reálné funkce definované na celé reálné ose. Uvedené vztahy jsou vždy (pokud není uvedeno jinak) splněny pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

Příklad. $f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2$.

Příklad. $f(x+y) = f(y)a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ je parametr.

Příklad. $f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$.

Příklad. $f(x+y) + f(x-y) - f(x) = f(y) + x - y^2$.

Příklad. $f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy\sqrt[3]{f(y)} + x^3$.

Příklad. $f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$.

Příklad. $f(x+y) - 3f(x-y) = x^2\left(f(y) + 1 - y^2/2\right) - 2f(x) + y(4x - y)$.

Příklad. $f(x)f(x+y) = (f(y)^2)(f(x-y))^2 a^{y+4}$, $a > 0, a \neq 1$ je parametr.

Příklad. $f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y$.

Příklad. $2f(x+y) + f(x-y) = f(x)(2a^y + a^{-y})$, $a > 0, a \neq 1$ je parametr.

Příklad. $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$.

Příklad. $yf(x) + xf(y) = f(x+y)$.

Příklad. $f(2x+y) = f(x+2y)f(x+y)$.

Příklad. $f(5x) = f(\pi^x) + x$.

Příklad. $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$.

Příklad. $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$.

Příklad. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, pro které platí

(1) $f(xf(y)) = yf(x)$ pro všechna kladná x, y,
(2) $f(x) \to 0$ pro $x \to \infty$.

Příklad. Najděte všechny funkce $f : (-1, \infty) \to (-1, \infty)$, jež splňují

(1) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ pro všechna $x, y > -1$,
(2) funkce $f(x)/x$ je rostoucí na $(-1, 0)$ i na $(0, \infty)$.

Příklad. Najděte nějakou funkci $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ takovou, že pro všechna kladná racionální x, y platí $f(xf(y)) = f(x)/y$.

Příklad. $2f(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}f(x) + \cos x - \sin x$, f je omezená.

Příklad. $f(x+y) = f(x) + f(y)$, f je spojitá.

Příklad. $f(x+y) = f(x) + f(y)$, f je rostoucí.

Příklad. $f(x+y) = f(x) + f(y)$, f je omezená na daném intervalu (a, b), $a < b$.

Příklad. $f(x+y) = f(x)f(y)$, f je spojitá.

Příklad. $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ je spojitá, $x, y > 0$.

Příklad. $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)+1}{f(x)+f(y)}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ je spojitá, $x, y > 0$.

Příklad. $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$, f je spojitá.

Příklad. $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, f je spojitá.

Poděkování

V tomto příspěvku není v podstatě nic, co bych napsala já. Můj velký dík patří *Frantovi Konopeckému*, z jehož příspěvku z Rapotína z roku 2007 ten můj vychází. Hromadu příkladů na konci tohoto textu jsem převzala od *Pavla Podbrdského* z článku o funkcionálních rovnicích ze dne 20. prosince 2000.

Pickova formule

Jarda Hančl

Abstrakt. Příspěvek nejprve seznámí čtenáře s celou řadou tvrzení, která souvisejí s mřížovými body. V druhé části vyslovíme Pickovu formuli pro počítání obsahů mnohoúhelníků s vrcholy v mřížových bodech, naznačíme důkaz a uvedeme několik příkladů.

V příspěvku nejprve nastíníme, co to vlastně taková mřížka je, a pak vyslovíme několik složitějších zajímavých tvrzení, která mají za úkol motivovat čtenáře. V druhé části se zabýváme jedním z nastíněných problémů, Pickovou formulí. Ta tvrdí, že umíme jednoduše spočítat obsah mnohoúhelníka, jehož vrcholy leží v mřížových bodech. Konkrétněji, tento obsah závisí pouze na počtu mřížových bodů uvnitř a na hranici mnohoúhelníka. Ale začněme pomaleji:

Mřížové body a jejich krása

V tomto textu budeme pracovat s množinou mřížových bodů. Než abych nějak složitě zaváděl tento pojem, vystačíme si s jeho geometrickou interpretací. Tedy budu-li mluvit o množině mřížových bodů, budu myslet body roviny (v níž mám zavedenou kartézskou soustavu souřadnic), které mají obě souřadnice celočíselné. Neboli body

$$\{[x, y] : x, y \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Nyní si ukažme řadu pěkných tvrzení, některá lehčí, jiná pekelně těžká (třeba Schinzelova věta byla dokázána před 10 lety):

- (i) *Blichfeldt's Theorem:* Každý omezený rovinný obrazec M s obsahem ostře větším než A libovolně zasazený do jednotkové čtvercové mřížky může být posunut tak, aby počet mřížových bodů uvnitř M byl alespoň $A + 1$.
- (ii) *Browkin's Theorem:* Pro libovolné přirozené číslo n existuje v rovině čtverec, který má právě n mřížových bodů uvnitř.
- (iii) *Circle Lattice Theorem:* Pro libovolné přirozené číslo n existuje v rovině kruh, ve kterém leží právě n mřížových bodů.
- (iv) *Steinhaus Theorem:* H. Steinhaus dokázal ještě víc. Dle jeho tvrzení pro každé n dokážeme najít kruh s obsahem n, na jehož hranici leží právě n mřížových bodů.
- (v) *Schinzel Theorem:* Pro libovolné přirozené číslo n existuje v rovině kružnice, na které leží právě n mřížových bodů.
- (vi) *Gauss's Circle Problem:* Označme $N(r)$ počet mřížových bodů uvnitř

Klíčová slova. Pickova formule, mřížový bod, mřížka

kruhu o poloměru r a středu v počátku. Pak platí

$$N(r) = 1 + 4\lfloor r \rfloor + 4\sum_{i=1}^{\lfloor r \rfloor} \left\lfloor \sqrt{r^2 - i^2} \right\rfloor$$

(vii) *Minkowski Convex Body Theorem:* Omezená konvexní oblast v rovině, která je symetrická kolem počátku a má obsah alespoň 4, musí obsahovat alespoň tři mřížové body. Obecněji, v n dimenzích, můžeme prohlásit, že každá omezená konvexní oblast symetrická kolem počátku, která má obsah alespoň 2^n, obsahuje alespoň tři mřížové body. Tuto větu můžeme odvodit z Blichfeldt's theorem.

(viii) Je-li $2 \leq n \leq 32$, pak umíme najít $2n$ mřížových bodů s celočíselnými souřadnicemi $x, y \in [1, n]$ takových, že žádné tři neleží na jedné přímce. Počet různých řešení (nepočítaje rotace a souměrnosti) pro $n = 2, 3, \dots,$ je $1, 1, 4, 5, 11, 22, 57, 51, 156 \dots$ Pro velké n existuje hypotéza, že je možné vybrat nejvýše $(c + \varepsilon)n$ mřížových bodů tak, aby žádné tři neležely na společné přímce, kde $c = (2\pi^2/3)^{1/3} \doteq 1{,}87$.
Podobně největší počet mřížových bodů s celočíselnými souřadnicemi $x, y \in [1, n]$ takových, že žádné čtyři neleží na jedné kružnici, je $k(n^{2/3} - \varepsilon)$ (Guy 1994, p. 241).

Pickova formule

A nyní ke zlatému hřebu večera. Určitě ses už mockrát potkal(a) s nějakým takovýmto příkladem: Urči, jaký obsah má mnohoúhelník nakreslený na obrázku! A vedle zadání byl nakreslený nějaký mnohoúhelník, přičemž všechny jeho vrcholy byly takzvané *mřížové body*. Obvykle bylo potřeba obrázek rozdělit na několik čtverců, trojúhelníků a obdélníků a sečíst jejich obsahy. To ale může být pěkná otrava, a tak pan Georg Pick v roce 1899 vymyslel mnohem chytřejší metodu.

Pickova formule říká, že obsah jednoduchého[9] mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech (říkejme mu třeba *mřížový mnohoúhelník*) můžeme spočítat takto: Označme V počet mřížových bodů, které jsou uvnitř mnohoúhelníku, a H buď počet mřížových bodů, které jsou na jeho hranici. Hledaný obsah je pak roven $V + H/2 - 1$.

To je překvapení, co? Jak by mohlo jít spočítat obsah něčeho, co může být kdovíjak složité, tak jednoduše? Jaktože vzorec vůbec nezohledňuje tvar mnohoúhelníku? Na tom přece taky záleží, ne?

[9]Jednoduchý obrazec poznáme podle toho, že jeho obvod neprotíná sebe sama.

Ať se nám to líbí nebo ne, Pickova formule platí. Proč tomu tak je, si vysvětlíme na přednášce, zde uveďme jen, kudy se důkaz zhruba ubírá:

(i) Platí-li Pickova formule pro nějaké dva polygony[10] se společnou částí obvodu, platí i pro polygon, který dostaneme, když je spojíme.
(ii) Vzoreček platí pro jednotkový čtverec, a tedy i pro libovolný obdélník.
(iii) Vzoreček platí i pro jakýkoli trojúhelník.
(iv) Pickova formule platí pro všechny mnohoúhelníky.

Nu, a je to. Nejen že teď můžeš hravě počítat obsahy, ale Pickova formule se hodí i řešení nejrůznějších příkladů. Zkus si rozmyslet následující problémky:

Příklad 1. Platí nějaká obdoba Pickovy formule i v prostoru?

Příklad 2. Dokaž, že každý mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech má racionální obsah. (Každý znamená opravdu každý, tedy i nejednoduchý!)

Příklad 3. Půlbodem nazývejme libovolný bod o souřadnicích $(k/2, l/2)$, kde k a l jsou celá čísla. Každý půlbod určitě jde vyjádřit jako střed úsečky spojující dva mřížové body mnoha různými způsoby. Představ si, že máš půlbod ležící uvnitř nějakého mřížového mnohoúhelníku. Dokaž, že jej můžeme dostat jako střed úsečky spojující dva mřížové body, *které samy leží uvnitř tohoto mnohoúhelníku.*

A na závěr bych chtěl poděkovat Víťovi Kalovi, jehož příspěvek dal tomuto první formu. Pokud byste se chtěli o mřížových bodech dozvědět více, zkuste třeba stránku `http://mathworld.wolfram.com/PointLattice.html`.

[10] Polygon není nic jiného než přejatý výraz pro mnohoúhelník.

Sinová věta

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

Abstrakt. V přednášce se budeme zabývat použitím a skládáním sinových vět v důkazových úlohách.

Věta 1. (Sinová věta) *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ, stranami a, b, c a poloměrem kružnice opsané R platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Úlohy na zahřátí

Příklad 2. Mějme trojúhelník ABC, průsečík osy úhlu ACB se stranou AB označme P. Dokažte, že $\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

Příklad 3. Je dán trojúhelník ABC, střed strany BC označme M. Nechť na straně AB leží bod P. Označme Q průsečík AM a PC. Dokažte, že $|CQ| = |AB|$ pokud víte, že $|AP| = |PQ|$.

Příklad 4. Mějme rovnostranný trojúhelník ABC, jeho střed označme G. Na straně AB leží bod D takový, že $|AG| = |AD|$. Postupně označme E a F průsečíky přímky DG s AC a BC. Dokažte, že $|DE| = |EF|$.

Úlohy střední obtížnosti

Příklad 5. V rovnoběžníku $TUVW$ jsou na stranách TU a UV po řadě body X, Y tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Přímky TY a VX se protínají v bodě P. Dokažte, že P leží na ose úhlu VWT.

Příklad 6. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P. Dokažte, že platí

$$|AP| \cdot \sin\alpha + |CP| \cdot \sin\gamma = |BP| \cdot \sin\beta + |DP| \cdot \sin\delta.$$

Příklad 7. Je dán trojúhelník ABC. Buď S střed strany AB a V ortocentrum $\triangle ABC$. Přímka p je kolmice na SV procházející bodem V. Její průsečíky s přímkami AC, BC označme P, Q. Dokažte, že $|VP| = |VQ|$.

Klíčová slova. geometrie trojúhelníku, sinová věta, trigonometrie

Těžké úlohy

Příklad 8. Máme zadaný pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ takový, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD| = 90°$. Na straně AD najdeme bod N takový, že $\frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AB|}{|CD|}$. Dokažte, že $|AB| + |CD| = |AD|$, pokud víte, že $|\sphericalangle BNC| = 90°$.

Věta 9. (Cevova věta) *V trojúhelníku ABC mějme body $X \in BC$, $Y \in AC$, $Z \in AB$. Pak AX, BY a CZ se protínají v jednom bodě, právě když platí*

$$\frac{|BX|}{|CX|}\frac{|CY|}{|AY|}\frac{|AZ|}{|BZ|} = 1.$$

Příklad 10. Mějme trojúhelník ABC. Na výšce AX zvolme bod P. Dále $K = BP \cap AC$ a $L = CP \cap AB$. Dokažte, že $|\sphericalangle AXK| = |\sphericalangle AXL|$.

Příklad 11. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC ($\alpha = \beta = 50°$). Na straně AB nalezněme bod K tak, že $|\sphericalangle ACK| = 50°$, dále sestrojme bod L na straně BC tak, aby $|\sphericalangle CAL| = 30°$. Určete $|\sphericalangle ALK|$.

Literatura

Přednáška čerpá příklady ze semináře Michala „Kennyho“ Rolínka *Umění vidět v matematice* a ze stránek `www.mathlinks.ro/Forum`.

Tětivové čtyřúhelníky

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

Abstrakt. Zopakujeme si základní vlastnosti tětivových čtyřúhelníků a procvičíme na úlohách. Přednáška bude spíše lehká, koncipována jako příprava na olympiádu.

Věta 1. (o obvodových a středových úhlech) *Mějme kružnici se středem S, její tětivu AB a libovolný bod M na větším oblouku AB. Úhel ASB nazýváme středovým a úhel AMB obvodovým k příslušné tětivě AB. Platí, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle AMB|$.*

Věta 2. (o úsekových úhlech) *Mějme kružnici a na ní tětivu AB. Veďme přímku t, která se dotýká kružnice v bodě A. Odchylku AB od t nazveme* úsekovým úhlem *k tětivě AB. Úsekový úhel má stejnou velikost jako příslušný obvodový úhel.*

Definice 3. *Čtyřúhelník je* tětivový *když mu lze opsat kružnice. Pro takový čtyřúhelník platí, že součet protějších úhlů je* $180°$.

Lehké úlohy

Příklad 4. Máme zadané dvě kružnice k a l s průsečíky X a Y. Bodem X veďme přímku, která protíná k v bodě A a l v bodě C. Nyní i bodem Y veďme přímku. Ta protíná k v bodě B a l v bodě D. Dokažte $AB \parallel CD$.

Příklad 5. Máme zadané dvě kružnice k a l s průsečíky X a Y. Sestrojíme $\triangle AXB$ takový, že $A \in k$, $B \in l$ a $Y \in AB$. Najděte, kdy bude mít $\triangle AXB$ největší obsah.

Příklad 6. Máme zadané tři kružnice k, l a m procházející společným bodem P. Další průsečíky kružnic k, l, kružnic l, m a kružnic k, m označme postupně A, B, C. Nyní zvolme na kružnici k bod K různý od A, P, C. Přímka KA protne l v bodě L a přímka LB protne m v bodě M. Dokažte, že bod C leží na přímce KM.

Příklad 7. Nechť D je bod na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníka ABC. Dále X je střed kružnice opsané $\triangle ACD$ a Y střed kružnice opsané $\triangle BDC$. Dokažte, že body C, D, X a Y leží na jedné kružnici.

Příklad 8. $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB. Dále označme X průsečík přímek

Klíčová slova. geometrie, tětivové čtyřúhelníky

AC a p, obdobně Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

Středně lehké úlohy

Příklad 9. Na kratším oblouku AB kružnice opsané čtverci $ABCD$ je bod P. Nechť $PD \cap AB = X$ a $PC \cap BD = Y$. Dokažte, že $|\sphericalangle XYB| = 90°$.

Příklad 10. Mějme čtverec $ABCD$. Na jeho straně BC je bod P, na straně CD bod Q a platí $|\sphericalangle QAP| = 45°$. $AP \cap BD = X$, $AQ \cap BD = Y$. Dokažte, že body X, Y, P, Q a C leží na jedné kružnici.

Příklad 11. Mějme pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB \perp AD$). Sestrojme kružnici k, která se dotýká přímky AB v bodě A a přímky CD v bodě D. Dále sestrojme kružnici l. Ta se dotýká přímky AB v bodě B a prochází bodem C. Nechť kružnice k a l mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle PCB|$.

Středně těžké úlohy

Příklad 12. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici.

Příklad 13. Nechť kružnice k s průměrem AB protíná kružnici l, jejíž střed je v bodě A v bodech C a D. Uvažujme bod M, různý od bodů C a D, který leží na kružnici l. Označme P a Q po řadě průsečíky přímek CM a DM s kružnicí k. Dokažte, že $MBPQ$ je rovnoběžník.

Literatura

Přednáška čerpá příklady ze semináře Michala „Kennyho“ Rolínka *Umění vidět v matematice* a z PraSečí knihovny (`mks.mff.cuni.cz/library`).

Geometrie trojúhelníka

Michal „Kenny“ Rolínek

Abstrakt. Přednáška důkladně seznamuje se známými vlastnostmi trojúhelníka. Též ukazuje, jak se dá rovnou ze zadání geometrické úlohy poznat, které postupy bude třeba použít. To vše samozřejmě na nepřeberném množství příkladů.

Cílem této přednášky je důkladné seznámení se známými vlastnostmi trojúhelníka. Sami uvidíte, že dobrá orientace v trojúhelníku je klíčem k vyřešení mnoha úloh nejen z české MO. Též si ukážeme, jak se dá rovnou ze zadání geometrické úlohy poznat, které postupy bude třeba použít. To vše samozřejmě na nepřeberném množství příkladů. Směle do toho!

Výšky

Vůbec nejvíce zajímavých vlastností v trojúhelníku mají výšky. Obecně se dá říci, že výšky jsou pěkné díky tomu, že vytvářejí mnoho tětivových čtyřúhelníků (těch pravých úhlů!) a snadno se tak dá vyjádřit téměř kterýkoliv úhel jimi určený. Pomocí výšek se též dá pracovat se středy různých úseček, jak dále uvidíme. Úlohy s výškami jsou těmi nejpříjemnějšími.

Tvrzení. *Výšky se protínají v jednom bodě. Budeme ho nazývat* ortocentrum *a značit H. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AHB| = 180 - \gamma$. Ortocentrum leží uvnitř trojúhelníka, právě když je trojúhelník ostroúhlý.*

Tvrzení. *Zobrazíme-li ortocentrum osově dle kterékoliv strany nebo středově dle kteréhokoliv středu strany, obraz padne na kružnici opsanou.*

Tvrzení. *Středy stran, paty výšek a středy úseček spojujících vrcholy s ortocentrem leží na jedné kružnici. Ta se jmenuje* kružnice devíti bodů *nebo též* Feuerbachova kružnice*. Tato kružnice má poloviční poloměr než kružnice opsaná.*

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice ortocenter $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$ je rovnoběžná s CD.

Příklad. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

Příklad. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC.

Klíčová slova. Planimetrie, trojúhelník, geometrie, Švrčkův bod, Simsonova přímka, Feuerbachova kružnice, ortocentrum, kružnice vepsaná, kružnice opsaná, kružnice připsaná, těžnice, osy úhlů

Příklad. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž vnitřní úhel při vrcholu A má velikost $45°$. Označme D patu výšky z vrcholu C. Uvažujme dále libovolný vnitřní bod P výšky CD. Dokažte tvrzení: Přímky AP a BC jsou navzájem kolmé, právě když úsečky AP a BC jsou shodné. *(školní kolo 2008)*

Příklad. Z paty výšky vedené z vrcholu A trojúhelníka ABC veďme postupně kolmice na zbylé dvě výšky a na strany b a c. Ukažte, že paty těchto kolmic leží v přímce.

Příklad. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AX, BY, CZ a ortocentrem H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček BC a AH. Dokažte $MN \perp YZ$. *(Francouzská MO)*

Osy úhlů a Švrčkův bod

I osy úhlů nám dovolí pěkně počítat vzniklé úhly. Nicméně pro ně platí i zajímavý metrický vztah a nemůžeme si být úplně jisti, z které strany se na úlohu vrhnout. Počítání úhlů je ovšem častější a je-li ve hře i kružnice opsaná, není o čem přemýšlet (Švrčkův bod).

Tvrzení. *Osy úhlů se protínají v jednom bodě. Jejich průsečíkem je střed kružnice vepsané a jeho standardní označení je I. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AIB| = 90 + \frac{\gamma}{2}$.*

Tvrzení. *Buď ABC trojúhelník a nechť $D \in BC$ leží na ose úhlu α. Pak platí*

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tvrzení. *Osa strany, osa protějšího úhlu a kružnice opsaná se protínají v jednom bodě. Budeme ho nazývat Švrčkův bod a značit $\check{S}$.*

Tvrzení. *Pro Švrčkův bod $\check{S}$ příslušející straně AB platí*

$$|\check{S}A| = |\check{S}B| = |\check{S}I|,$$

kde I je střed kružnice vepsané.

Příklad. V rovině je dán úhel XSY a kružnice k o středu S. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k, jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách SX a SY. Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků ABC. *(školní kolo 2007)*

Příklad. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.

(IMO 2006)

Příklad. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. *(Celostátní kolo 2007)*

Příklad. $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označme paty kolmic z bodu D na strany AB, BC, CA po řadě P, Q, R. Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle CDA$ se protínají na přímce AC, právě když $|RP| = |RQ|$. *(IMO 2003)*

Kružnice opsaná

Kružnice opsaná samozřejmě též vytváří tětivové čtyřúhelníky, a proto bude i zde počítání úhlů naší hlavní zbraní. Občas si ovšem práci s počítáním úhlů můžeme usnadnit tím, že použijeme nějaké známé tvrzení, například to o Simsonově přímce.

Tvrzení. *Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Je jím střed kružnice opsané a značit ho budeme O. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$. Bod O leží uvnitř trojúhelníka, právě když je trojúhelník ostroúhlý.*

Tvrzení. *Střed kružnice opsané leží na jedné přímce s těžištěm a ortocentrem trojúhelníka. Tato přímka se nazývá Eulerova přímka.*

Tvrzení. *Buď ABC trojúhelník a D bod na jeho kružnici opsané. Pak paty kolmic z bodu D na strany trojúhelníka leží v přímce. Tato přímka se nazývá Simsonovou přímkou bodu D.*

Příklad. Ukažte, že střed Feuerbachovy kružnice leží na Eulerově přímce.

Příklad. Na kratším oblouku CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec.

(Celostátní kolo 2009)

Příklad. Uvažme body A, B, C, D a E takové, že $ABCD$ je rovnoběžník a $BCED$ je tětivový čtyřúhelník. Bodem A veďme přímku ℓ. Ta protne úsečku DC v bodě F a přímku BC v bodě G. Pokud platí $|EF| = |EG| = |EC|$, ukažte, že ℓ je osa úhlu DAB. *(IMO 2007)*

Těžnice

Ze všech dosud zmíněných bodů a čar v trojúhelníku je s těžnicemi největší potíž. Nejsou-li ony středy úseček zároveň středy nějakých kružnic, je počítání úhlů téměř neúčinné. Je třeba nějak využít onu shodnost. Nejčastějším postupem je dokreslování například středních příček. Je možné též užít obsahy nebo třeba stejnolehlost.

Tvrzení. *Těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě, jímž je těžiště T. Zapamatujeme si, že úhel ATB nelze jednoduše spočítat. Těžnice se též dělí v poměru* $2:1$.

Tvrzení. (ne úplně známé, ale užitečné) *Je dán trojúhelník ABC. Množina bodů X, pro něž mají trojúhelníky ABX a ACX stejný obsah, je právě těžnice na stranu a (rozuměj celá přímka).*

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme S jeho průsečík úhlopříček a paty kolmic z bodu S na přímky AB a CD označme E a F. Dokažte, že osa úsečky EF prochází středy stran BC a DA. *(Výběrko 2008?)*

Příklad. Je dána kružnice k se středem S a její tečna p s bodem dotyku A. Na přímce p leží též bod B. Úsečku AB zobrazíme v nějakém otočení kolem bodu S na úsečku $A'B'$. Dokažte, že přímka AA' půlí úsečku BB'. *(Turnaj měst)*

Příklad. V $\triangle ABC$ je I střed kružnice vepsané, M střed strany AC a N střed oblouku AC kružnice opsané (toho, co obsahuje B). Dokažte $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$. *(KMS – gama)*

Příklad. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník se shodnými stranami AB a CD, které nejsou rovnoběžné. Označme E, F středy úhlopříček AC a BD. Přímka EF protíná úsečky AB a CD po řadě v bodech G a H. Ukažte, že $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle DHG|$. *(MEMO 2009)*

Kružnice vepsaná a připsané

Krom zjevného faktu, že můžeme kupříkladu počítat úhly či provádět různé stejnolehlosti, je velmi užitečné též počítání délek různých úseček. U těchto kružnic tedy též většinou váháme, který přístup použít.

Tvrzení. *Buďte X, Y a Z body, v nichž se kružnice vepsaná trojúhelníka ABC dotýka postupně stran a, b a c. Pak platí*

$$|BX| = \frac{a+c-b}{2}.$$

Obdobné vztahy platí i pro délky ostatních úseků.

Tvrzení. *Podobně se dají vyjádřit délky úseků pro body dotyku s kružnicí připsanou.*

Tvrzení. *Nechť ρ je poloměr kružnice vepsané, S obsah trojúhelníka a s polovina jeho obvodu. Pak platí*

$$S = \rho s.$$

Příklad. Na straně AB trojúhelníka ABC označme X bod dotyku s kružnicí vepsanou a Y bod dotyku s příslušnou kružnicí vepsanou. Ukažte, že střed úsečky XY je též středem úsečky AB.

Příklad. $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Ukažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a CDA mají vnější dotyk.

Příklad. Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.

Další zajímavá tvrzení

Tvrzení. (Feuerbach) *Feuerbachova kružnice se dotýká kružnice vepsané i všech kružnic připsaných.*

Tvrzení. (Morley) *Buď ABC trojúhelník. Bodem A a vnitřkem $\triangle ABC$ veďme polopřímku AX_1 takovou, že $|\sphericalangle BAX_1| = \frac{\alpha}{3}$, a naopak bodem B veďme polopřímku BX_2 (opět procházející vnitřkem ABC) takovou, že $|\sphericalangle ABX_2| = \frac{\beta}{3}$. Průsečík těchto dvou polopřímek označme C'. Obdobně sestrojíme body A' a B'. Pak je trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.*

Tvrzení. (Napoleon) *Jestliže nad stranami daného trojúhelníka ABC jsou vně, resp. zevnitř sestrojeny rovnostranné trojúhelníky, pak jejich středy tvoří rovnostranný trojúhelník.*

Tvrzení. (Ceva) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Tvrzení. (Menelaus) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě body na přímkách BC, AC a AB (jeden z nich je vně ABC). Body X, Y a Z leží v přímce, právě když platí ten samý poměr*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Poslední várka příkladů

Příklad. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek H a střed I

kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici.

(Celostátní kolo 2006)

Příklad. Ukažte, že uvnitř $\triangle ABC$ existuje právě jeden bod P takový, že $|PA|^2 + |PB|^2 + |AB|^2 = |PB|^2 + |PC|^2 + |BC|^2 = |PC|^2 + |PA|^2 + |CA|^2$.

(IMO shortlist)

Příklad. V trojúhelníku ABC, jehož strany vyhovují rovnosti $|AB| + |BC| = 3|AC|$, označme I střed jeho vepsané kružnice a D a E body, v nichž se vepsaná kružnice postupně dotýká stran AB, BC. Jsou-li K a L obrazy bodů D a E ve středové souměrnosti se středem I, je čtyřúhelník $ACKL$ tětivový. Dokažte.

(IMO shortlist 2005)

Příklad. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník takový, že $|AB| \neq |AC|$. Kružnice o průměru BC protíná strany AB a BC postupně v bodech M a N. Označme O střed strany BC. Osy úhlů BAC a MON se protínají v bodě R. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR se protínají na straně BC.

(IMO shortlist 2004)

Jak uspět v MO

Michal „Kenny“ Rolínek

Abstrakt. Krom matematického umu rozhoduje o umístění na soutěžích rovněž mnoho jiných věcí (způsob přípravy, psychologie atd.). Právě o nich tato přednáška pojednává.

Mohlo by se zdát, že úspěch v MO je odvozen pouze od schopnosti umět řešit úlohy. To ale zdaleka není celá pravda. Určitě nejeden z vás má pocit, že by mohl v MO dosahovat mnohem lepších výsledků. Zkusím vám nyní předat pár tipů a fíglů, které pomohly například mně, třeba vám to k něčemu bude.

Jak by měla vypadat dlouhodobá příprava?

- Řešit korespondenční semináře.
- Zřídit si účet na `www.mathlinks.ro`.
- Sehnat si dobré knížky (Engel, Andreescu, ročenky MO).

Co krátkodobá příprava?

- Řešit starší ročníky přímo té konkrétní soutěže (krajského kola atd.).
- Řešit tréninkově.
- Zjistit si obvyklé počty bodů soutěžících.
- V případě domácí MO je dobré si projít návodné úlohy či alternativní řešení domácího kola.

A den předem?

- Hlavně nedělat žádnou matiku :).
- Dobře se vyspat!

No a na soutěži?

No, toho je hrozně moc. Od pořadí, v němž řešit příklady, přes přístup k sepisování, až po vhodné jídlo a pití. Detaily se dozvíte na přednášce.

Klíčová slova. matematická olympiáda

Kombinatorika na želvách

Tomášek Roskovec

Abstrakt. Procvičíme si základní kombinatorické dovednosti známé ze střední školy a zkusíme tyto dovednosti aplikovat na méně typické příklady. A taky se budeme bavit.

V první části přednášky se budeme zabývat základními kombinatorickými příklady, v druhé části se seznámíme s typickými příklady na téma rozdělení do přihrádek.

Příklady na rozehřátí

Příklad 1. V kupé pro osm osob sedí sedm želv. Kolika způsoby se mohou posadit, víme-li, že dvěma z nich se dělá špatně, pokud sedí proti směru jízdy, a Michelangelo chce sedět u okýnka a vedle Leonarda? Michelangelovi ani Leonardovi se špatně nedělá.

Příklad 2. Kolika způsoby můžeme přeskládat písmena ve slově ŽÉÉÉLVY tak, aby žádná dvě písmena É nestála vedle sebe?

Příklad 3. Krotitel želv uvádí do manéže n hodných želv beránčích a m zlých želv tygřích. Pokud by dvě z těchto tygřích želv šly bezprostředně po sobě, určitě se začnou prát. Kolika způsoby(v závislosti na n a m) může želvy přivést?

Příklad 4. Želvy hrají v kanalizaci poker. Kolika způsoby může Rafaelo Michelangelovi rozdat karty, nechce-li, aby měl od nějaké barvy více než 4 karty?

Mírně pokročilé příklady

Příklad 5. Donatelo vymyslel pro své kamarády veselou hru. Musí vymyslet co nejvíce kombinací písmen ze spojení ŽELVYVAKCI tak, aby byly samohlásky seřazeny podle abecedy.

Příklad 6. Na výstavu přivedl terarista několik exemplářů vzácných želv, které chce srovnat do řady. Přinesl si 6 karet, 7 kajmanek a 8 želv sloních. Želvy jsou ovšem sociálně náročné a tak musí zachovat následující pravidla: Každá kareta musí stát bezprostředně mezi kajmankou a želvou sloní, žádné dvě želvy sloní nesmí stát vedle sebe a žádné dvě kajmanky nesmí stát u sebe. Kolik způsoby může tu havěť srovnat?

Příklad 7. $2n$ želv stojí srovnáno do kruhu (jde o želvy kruhové, takže se není čemu divit). Kolika způsoby z nich můžu vybrat v želv, které se vydají na výpravu, za předpokladu, že žádná želva nepůjde se svou sousedkou.

Klíčová slova. kombinatorika, počet způsobů, želvy.

Příklad 8. Michelangelo hraje s Donatelem a Leonardem volený mariáš (Rafaela nechtěli, protože podváděl při rozdávání). Kolika způsoby mohou být rozdány karty, víme-li, že volí Donatelo? Kolika způsoby mohou být karty rozděleny mezi hráče po odložení talonu?

Dělení do přihrádek

Příklady na dělení do přihrádek lze rozlišit podle několika kategorií a při počítání jednotlivých příkladů je důležité tyto typy rozlišovat.

Dělení rozlišitelných předmětů do přihrádek s pevnou velikostí

Tyto úlohy nevyžadují nové pohledy, řeší se jako typické kombinatorické úlohy.

Příklad 9. Čtyři želvy si mezi sebe dělí 28 dominových kostiček. Kolika způsoby to mohou provést?

Příklad 10. Po napínavé soutěži v dominu jsou vyhlášeny tři nejlepší želvy a pořadatel má mezi ně rozdělit šest cen. Vítěz dostane tři ceny, druhý dvě a třetí jednu cenu. Kolika způsoby si mohou ceny rozdělit?

Příklad 11. Zmoženy intelektuálně náročným dominem, rozhodly se želvy uspořádat turnaj v judu. Pro první kolo je zapotřebí z 16 želv vylosovat osm dvojic, které spolu budou zápasit. Kolika způsoby můžeme první kolo vylosovat?

Dělení nerozlišitelných předmětů do přihrádek s pohyblivou velikostí

Před řešením úloh se nám bude hodit krátká úvaha. Představíme-li si jedno konkrétní rozdělení jako přihrádky srovnané za sebou s předměty srovnanými za sebou, dostaneme jakousi posloupnost složenou z předmětů a hranic mezi přihrádkami. Tím jsme ale převedli problém přihrádek na základní kombinatorickou úlohu počtu posloupností se zadaným počtem prvků[11].

Příklad 12. Dvanáct želv chytilo na rybářské výpravě sedm tresek a pět platýsů. Kolik je možností rozdělení si úlovku, víme-li, že každá želva dostane rybu? A kolik je možností v případě, že některé želvy jsou vegetariánky a žádné ryby nechtějí?

Příklad 13. Kolika způsoby lze naklást šest želvích vajec do čtyř děr v písku, víme-li, že z bezpečnostních důvodů se nesmí klást více než dvě vejce do jedné díry?

[11] Prvky zde rozumíme dvojího druhu; umísťované předměty a hranice mezi dvěma přihrádkami.

Příklad 14. Starý terarista odkazuje svým dvěma synům své vzácné želvy. Rozděluje jim $2n$ želv sloních, $2n$ kajmanek a $2n$ karet[12]. Kolika způsoby je může podělit, aby oba dostali stejný počet želv.

Dělení rozlišitelných předmětů do přihrádek s pohyblivou velikostí

Poslední typ úloh může být při ošklivých vymezujících podmínkách velice obtížný, ale bez přidaných podmínek je počet možností rozřazení z předmětů do t přihrádek z^t. Pro příklady s podmínkami je zapotřebí zdravého rozumu a základních kombinatorických dovedností.

Příklad 15. Čtyři želvy i s Třískou jedou výtahem skrz osmipatrovou budovu. Každá želva (i Tříska) vyskočí do nějakého patra. Kolika způsoby se mohou rozmístit po budově? Kolik z toho bude případů, kdy v každém patře vyskočí nejvýše jedna želva (případně jeden Tříska)?

Příklad 16. Kolika způsoby můžeme uspořádat dvacet čísel týdeníku „Chovatel želv“ do knihovničky o pěti policích, víme-li, že do každé police se vejde jakýkoli počet časopisů?

Příklad 17. Při řazení „Chovatele“ se ukázalo, že jedno číslo chybí. Proto je zapotřebí zorganizovat 33 želv do tří pátracích skupin, které prohledají obývák, ložnici a terárium. Kolika způsoby můžeme skupiny zorganizovat za předpokladu, že na prohledání ložnice je zapotřebí právě polovina želv než na terárium a obývák dohromady.

Literatura

[1] Herman Jiří, Kučera Radan, Šimša Jaromír: *Metody řešení matematických úloh II*, Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[12] Od slova kareta, nikoli karta.

Matematická indukce

Tomášek Roskovec

Abstrakt. Ti, kteří o indukci neslyšeli, o ní uslyší, kdo jí už zná, ten získá jistotu v jejím používání.

V přednášce se budeme zabývat důkazovou technikou, která se používá napříč celou matematikou od jednoduchých součtových vzorců přes kombinatoriku, teorii grafů až k derivačnímu počtu.

Základní myšlenka a jednoduché aplikace

Neformálně řečeno nám princip matematické indukce říká toto: Pokud dokážu udělat první krok a pokud dokážu po libovolném kroku udělat jeden navíc, pak dokážu udělat libovolný počet kroků.

Matematicky řečeno dokazujeme, že nějaké tvrzení platí pro všechna přirozená čísla. Budeme tento fakt zapisovat jako $T(n)$, kde T značí nějaký výrok, do kterého dosadíme n přirozené. Bude nám stačit dokázat pouze dvě věci. Nejprve dokážeme $T(1)$, takzvanou bázi, poté musíme dokázat implikaci $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, takzvaný indukční krok.

Pro názornost vyřešíme první příklad. Dokážeme vzorec pro částečný součet geometrické řady. Platí, že

$$\sum_{i=1}^{n} aq^{i-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Nejprve potřebujeme určit, podle jaké proměnné povedeme indukci. V tomto případě jde evidentně o číslo n. První krok dokážeme jednoduše tím, že dosadíme jedničku.

$$a = a\frac{1-q}{1-q} = a$$

Takže rovnost zřejmě platí. Teď potřebujeme dokázat indukční krok, neboli platí-li vzorec pro číslo n, pak platí i pro $n+1$. Takže z rovnosti pro číslo n ekvivalentními úpravami dostaneme rovnost pro n.

$$\sum_{i=1}^{n} aq^{i-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\sum_{i=1}^{n} aq^{i-1} + aq^{n+1} = a\frac{1-q^n}{1-q} + aq^{n+1}$$

Klíčová slova. důkazové metody, matematická indukce, indukce

$$\sum_{i=1}^{n+1} aq^{i-1} = a\frac{1-q^n+q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} aq^{i-1} = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Tím je vzorec dokázán.

A teď počítání ...

Příklad 1. Dokažte, že součet prvních n přirozených čísel je roven $\frac{n(n+1)}{2}$.

Příklad 2. Dokažte, že součet druhých mocnin prvních n přirozených čísel je roven $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Příklad 3. Dokažte větu pana Binoma. Tedy vztah

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}, n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 4. Dokažte, že pro n přirozená je výraz $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ dělitelný devíti.

Příklad 5. Dokaž, že pro n přirozené platí $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1$.

Příklad 6. Nechť funkce f pro každé $n>-1$ splňuje vztah $f(n+2)=2f(n+1)-f(n)$. Pokud platí $f(0)=1$ a zároveň $f(1)=2$, tak platí $f(n)=n+1$ pro všechna celá $n>-1$.

Příklad 7. Mějme n přímek v rovině. Dokaž, že tyto přímky dělí rovinu nejvýše na $\frac{1}{2}n\,(n+1)+1$ oblastí.

Příklad 8. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

Příklad 9. Dokaž, že oblasti v rovinné mapě, která je tvořena n kružnicemi, z nichž každá protíná všechny ostatní, lze obarvit dvěma barvami tak, že spolu nesousedí žádné dvě oblasti stejné barvy.

Příklad 10. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(1+1^{-3}\right)\left(1+2^{-3}\right)\cdots\left(1+n^{-3}\right)<3.$$

Příklad 11. Dokaž, že mezi každými 2^{n+1} čísly lze najít 2^n čísel takových, že jejich součet je dělitelný 2^n.

Příklad 12. Dokažte, že nerovnost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

platí pro všechna $n \geq 2$.

Příklad 13. Dokaž, že výraz $1 + 2^{4n+2} + 3^{4n+2} + 4^{4n+2} + 5^{4n+2} + 6^{4n+2}$ je pro všechna $n \geq 0$ dělitelný třinácti.

Příklad 14. Dokaž, že pro každých n kladných reálných čísel platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

(nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem).

Literatura

Čerpal jsem ze staršího příspěvku Háni Bendové, která čerpala z textu Saši Kazdy, oběma uvedeným děkuji.

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction`

Dvojí počítání

Zuzka Safernová

Abstrakt. Dvojí počítání nebo také počítání dvěma způsoby je princip založený na následujícím „zřejmém" faktu: spočítáme-li prvky množiny dvěma různými způsoby, dostaneme stejný výsledek. Tento princip se dá uplatnit ve více odvětvích matematiky, my se však zaměříme převážně na kombinatoriku.

Následující příklad je klasickou ukázkou použití počítání dvěma způsoby:

Motivační příklad. Předpokládejme, že se na párty potká konečný počet lidí a někteří z nich si na uvítanou potřepou rukama (žádný člověk nevítá sám sebe, stejně tak se žádní dva hosté nevítají vícekrát). Potom počet lidí třesoucích si rukama lišekrát je sudý.

Důkaz. Označme osoby jako $P_1, P_2, \dots, P_n$. Spočítejme dvěma způsoby velikost množiny uspořádaných dvojic (P_i, P_j), kde jedna takováto konkrétní uspořádaná dvojice znamená, že P_i si potřásl rukou s P_j. Nechť x_i značí, kolikrát P_i potřásl rukou a nechť y je celkový počet třesení rukou na párty. Na jednu stranu je počet dvojic (P_i, P_j) roven $\sum_{i=1}^{n} x_i$, protože každá osoba P_i má na výběr x_i možných osob P_j. Na druhou stranu každé potřesení rukou přispěje do počtu dvojic dvakrát, protože ho započítáme jak ve dvojici (P_i, P_j), tak ve dvojici (P_j, P_i). Tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2y$. Je-li součet n čísel sudý, pak i lichých sčítanců muselo být sudě (pokud sečteme liše lichých čísel a k tomu kolik chceme sudých, výsledek bude lichý).

Příklad 1. Graficky odvoďte vztah: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Příklad 2. Každý člen komise je zároveň členem právě tří podkomisí, přičemž každá podkomise má právě tři členy. Dokažte, že počet členů je roven počtu podkomisí.

Příklad 3. 200 studentů se účastní matematické soutěže, kde se řeší 6 příkladů. Je známo, že každý příklad správně vypočítalo alespoň 120 lidí. Dokažte, že musí existovat dva účastníci takoví, že každý příklad vyřešil aspoň jeden z nich.

Příklad 4. Dokažte:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k.$$

Příklad 5. Dokažte:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Klíčová slova. dvojí počítání, počítání dvěma způsoby

Příklad 6. Dokažte:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Příklad 7. Dokažte:

$$\binom{n+r+1}{r} = \sum_{j=0}^{r}\binom{n+j}{j}.$$

Příklad 8. Dokažte:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

Extremální princip

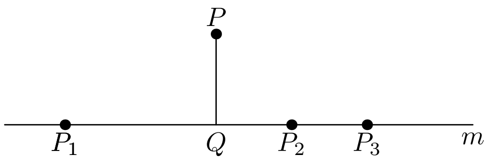
Zuzka Safernová

Abstrakt. Extrémální princip je velmi jednoduchá, zato však účinná metoda pro řešení nejrůznějších problémů. Spočívá, jak již název napovídá, ve vyšetřování extrémních případů. Jinak řečeno, vybereme případ, který je nějakým způsobem výjimečný (největší, nejmenší) a ukážeme, že tento případ je řešením celého problému.

Následující příklad je klasickou ukázkou použití:

Motivační příklad. V rovině je dán konečný počet bodů takových, že všechny neleží na jedné přímce. Dokažte, že existuje přímka, která prochází právě přes dva z nich.

Řešení. Nechť P je bod a l přímka. Označme $d(P,l)$ vzdálenost bodu P od přímky l. Nechť S je množina všech kladných vzdáleností $d(P,l)$, kde P probíhá všechny body a l všechny přímky, které procházejí alespoň dvěma zadanými body, ale neprocházejí bodem P. Množina S je neprázdná (všechny body neleží na jedné přímce) a konečná. S má tedy nejmenší prvek, řekněme, že je to $d(P,m)$. Tvrdíme, že přímka m prohází právě dvěma ze zadaných bodů. Pro spor předpokládejme, že m prochází třemi body P_1, P_2 a P_3. Označme Q bod na m, který je nejblíž k P. Alespoň dva z bodů P_1, P_2, P_3 leží na stejné straně vzhledem k Q (jeden z nich může být s Q totožný), řekněme P_2 a P_3 (viz obrázek). Předpokládejme, že body jsou označené tak, že P_2 je blíž k P než P_3. Nechť n označuje přímku procházející body P a P_3. Všimneme si, že $d(P_2,n) < d(P,m)$, což je ve sporu s volbou P a m. Z toho vyplývá, že přímka m prochází jen dvěma zadanými body, čímž je příklad vyřešen.



Příklad 1. Ukažte, že pro nekonečnou množinu bodů toto tvrzení platit nemusí.

Příklad 2. Nechť A je množina $2n$ bodů v rovině, ze kterých žádné tři neleží na přímce. Předpokládejme, že n bodů je obarvených červeně a n modře. Dokažte nebo vyvraťte: Existuje n úseček, ze kterých žádné dvě nemají společný bod a jejichž koncové body jsou vždy dvojice různobarevných bodů z množiny A.

Příklad 3. Na večírku netancoval žádný chlapec s každým děvčetem, ale každé děvče tancovalo aspoň s jedním chlapcem. Dokažte, že existují dva páry CD a

Klíčová slova. extrémální, nejmenší, největší

$C'D'$, které spolu tancovaly a přitom C netancoval s D' a C' s D.

Příklad 4. Nechť B a C jsou dvě konečné množiny bílých a černých bodů v rovině takových, že každá úsečka spojující dva body stejné barvy obsahuje navíc bod barvy druhé. Dokažte, že všechny body leží na přímce.

Příklad 5. Dokažte, že není možné najít různá přirozená čísla x, y, z, t tak, aby platilo:

$$x^x + y^y = z^z + t^t.$$

Příklad 6. 3009 čísel $a_1, \dots, a_{3009}$ je napsáno podél kružnice tak, že každé číslo je rovno absolutní hodnotě rozdílu svých dvou následujících sousedů po směru hodinových ručiček (tedy $a_1 = |a_2 - a_3|, a_2 = |a_3 - a_4|, \dots, a_{3009} = |a_1 - a_2|$). Součet všech čísel je 2006. Určete tato čísla.

Příklad 7. V rovině je dáno n bodů takových, že každé tři body tvoří trojúhelník, jehož plocha je menší než 1. Ukažte, že všech n bodů leží v trojúhleníku o obsahu menším než 4.

Příklad 8. Nechť S je taková neprázdná množina celých čísel, že

(1) pokud x i y patří do S, pak i rozdíl $x - y$ patří do S,
(2) všechny násobky libovolného prvku $x \in S$ patří do S.

(a) Dokažte, že existuje takové celé číslo $d \in S$, že S sestává ze všech násobků čísla d.

(b) Ukažte, že část a) lze aplikovat na množinu $\{ma + nb; m, n \in \mathbb{N}\}$ a dokažte, že výsledné d je $nsd(a, b)$.

Příklad 9. Umístěte čísla $1, 2, \dots, n^2$ (bez opakování) v libovolném pořadí do tabulky $n \times n$. Ukažte, že existují dva (svisle, vodorovně, diagonálně) sousední čtverečky, jejichž hodnoty se liší o alespoň $n + 1$.

Příklad 10. Každý člen parlamentu má nejvýše 3 nepřátele mezi zbývajícími členy. Ukažte, že lze členy parlamentu rozdělit na dvě části tak, aby každý měl ve své skupině nejvýše jednoho nepřítele.

Příklad 11. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $6n - 1$.

Tečky, čárky, ale morseovka to není milý pane

Alča Skálová

Abstrakt. V příspěvku najdete jak základní pojmy a tvrzení z teorie grafů, tak příklady na totéž. Rovněž se seznámíte se jmény důležitých grafových algoritmů, na jejichž názornou ukázku se můžete těšit na přednášce.

Základní pojmy

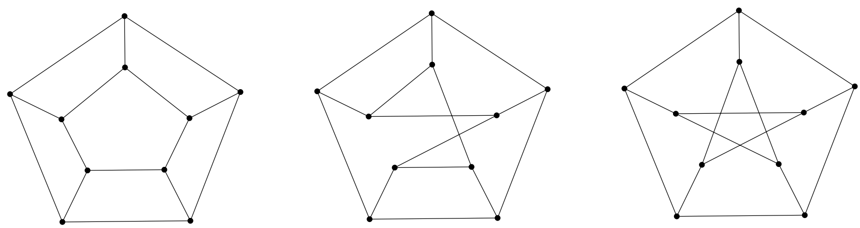
Definice. Graf G *je uspořádaná dvojice* $G = (V, E)$, *kde* V *je neprázdná množina a* E *je množina dvoubodových podmnožin množiny* V. *Jinak řečeno* V *je množina vrcholů a* E *je množina hran. Je-li* $e \in E$ *hrana grafu, pak* $e = \{u, v\}$, *kde* $u, v \in V$.

Definice. *Graf* $G' = (V', E')$ *se nazývá* podgrafem grafu G, *jestliže* $V' \subseteq V$ *a* $E' \subseteq E$.

Definice. *Dva grafy* $G = (V, E)$ *a* $G' = (V', E')$ *nazveme* isomorfní *(stejné), pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení* $f : V \to V'$ *tak, že platí* $\{u, v\} \in E$ *právě tehdy, když* $\{f(u), f(v)\} \in E'$.

Tvrzení. *Jsou-li dva grafy* G *a* H *isomorfní, pak mají isomorfní také své podgrafy. Tedy přesněji ke každému podgrafu* G' *grafu* G *existuje podgraf* H' *grafu* H, *který je isomorfní podgrafu* G' *(a naopak).*

Cvičení. Dokaž, že následující tři grafy jsou (po dvou) neisomorfní.



Klíčová slova. grafy, grafový isomorfismus, rovinné grafy, skóre grafu, grafové algoritmy

Speciální případy grafů

(i) **Úplný graf** na n vrcholech (K_n) je graf kde $E = \binom{V}{2}$, tedy graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojeny hranou.
(ii) **Úplný bipartitní graf** na m a n vrcholech ($K_{m,n}$) je graf, kde $V = V_1 \cup V_2$, pro V_1, V_2 disjunktní a $E = \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
(iii) **Cesta** na n vrcholech (P_n) je graf, ve kterém $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i = 1, \dots, n-1\}$, tedy graf tvořený jednou „čárou“.
(iv) **Kružnice** na n vrcholech (C_n) je graf, kde $E = \{\{v_1, v_n\}\} \cup \{\{v_i, v_{i+1}\} : i = 1, \dots, n-1\}$, tedy graf tvořící „kružnici“.

Cvičení. Dokaž, že graf je bipartitní, právě když neobsahuje žádnou kružnici liché délky.

Definice. Orientovaný graf *G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$, rozlišujeme tedy, odkud a kam hrana vede. Hranu e z vrcholu u do v zapisujeme $e = (u, v)$.*

Definice. Ohodnocený graf *je uspořádaná trojice (V, E, ω), kde V a E jsou jako v předchozích definicích a ω je funkce $\omega : E \to \mathbb{R}$, tedy funkce, která každé hraně přiřadí reálné číslo.*

Definice. *Řekneme, že graf G je* souvislý, *jestliže mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje cesta.* Komponenta *grafu je maximální souvislý podgraf. Každý graf lze jednoznačně rozložit na komponenty.*

Definice. Sled *je posloupnost ne nutně různých vrcholů $(v_0, v_1, \dots, v_n)$, kde $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, tedy každé dva sousední vrcholy jsou propojeny hranou.* Tah *je sled, ve kterém se neopakují hrany, tj. $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$ pro $i \neq j$.* Cesta *je tah, ve kterém se neopakují vrcholy, tj. $v_i \neq v_j$ pro $i \neq j$.* Uzavřený tah, uzavřený sled a uzavřená cesta *jsou tah, sled a cesta, ve kterých $v_0 = v_n$.*

Skóre grafu

Definice. Stupněm vrcholu *nazveme počet hran, které jej obsahují a značíme $deg_G(v)$. Tedy jinak napsáno $deg_G(v) = |\{e; v \in e \in E\}|$.* Skóre grafu *$G$ je posloupnost stupňů všech jeho vrcholů.*

Cvičení. Mohou mít dva neisomorfní grafy stejné skóre?

Věta. (Havlova) *Nechť $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n \leq n-1$. Označme symbolem D' posloupnost $(d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$, kde*

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom posloupnost D je skóre grafu právě tehdy, když posloupnost D' je skóre grafu.

Věta. (Princip sudosti) *Pro každý graf G platí $\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|$.*

Cvičení. Rozhodni, mohou-li být následující posloupnosti skórem grafu, a pokud ano, tak takový graf najdi:

(i) 1 2 3 3 5
(ii) 3 3 3 3 5 6 6 6 6 6 6
(iii) 3 3 3 3 3 5 6 6 6 6 6 6 6 6, je-li navíc hledaný graf bipartitní
(iv) 1 1 3 3 3 3 5 6 8 9
(v) 1 2 4 4 4 5
(vi) 1 1 1 2 2 3 4 5 5

Důsledek. (Principu sudosti) *Má-li graf G alespoň jeden vrchol lichého stupně, potom musí mít aspoň dva takové vrcholy.*

Tvrzení. (Spernerovo lemma) *Existuje duhový trojúhelník.*[13]

Rovinné a eulerovské grafy

Definice. Strom *je souvislý graf neobsahující kružnici.* List *je vrchol stupně jedna.* Kostrou *grafu G rozumíme každý strom T, pro který $T(E) \subseteq G(E)$ a $V(T) = V(G)$.*

Věta. *Pro každý strom $T = (V, E)$ platí $|E| = |V| - 1$.*

Definice. Rovinný graf *je graf G, který je možné nakreslit do roviny bez křížení hran.* Stěnou *rovinného grafu G nazveme minimální část roviny ohraničenou hranami.*

Definice. Eulerovský graf *je graf, jehož všechny vrcholy a hrany je možné seřadit do uzavřeného tahu. Takový tah nazýváme* eulerovský*. Občas se eulerovský nazývá i tah, který není uzavřený (ale stále po něm chceme, aby procházel všemi hranami (rozmysli si, že při souvislosti je požadavek na procházení všech vrcholů „navíc“)).*

Věta. *Graf je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a stupeň každého vrcholu je sudý.*

[13] Nechápeš, o co jde? Přijď na přednášku. (-:

Důsledek. *Graf je možné nakreslit jedním tahem bez opakování hran, je-li souvislý a stupeň nejvýše dvou vrcholů je liché číslo.*

Věta. *Orientovaný graf je eulerovský právě tehdy, je-li souvislý a pro každý vrchol platí, že jeho vstupní a výstupní stupeň se rovnají*[14].

Grafové algoritmy

Jsou postupy, které ti pro obecný graf (občas pro něj požadujeme třeba ještě souvislost) pomohou vyřešit nějaký úkol. Podíváš-li se na Havlovu větu, tak ta nám už přímo říká postup (tedy algoritmus), jak poznat, že nějaká posloupnost je skórem grafu. Rovněž pro nalezení eulerovského tahu byl vynalezen algoritmus.

Cvičení. (Problém minimální kostry) Pro souvislý graf $G = (V, E)$ s nezáporným ohodnocením hran ω nalezněte kostru $T = (V, E')$ grafu G s nejmenší možnou hodnotou $\omega(E')$.

Tento problém má více různých řešení. Na přednášce si předvedeme Jarníkův a takzvaný „hladový" algoritmus. Bude-li čas a chuť, tak dojde i na borůvky[15].

Cvičení. (Dijkstrův algoritmus) Vymysli postup, který v souvislém grafu (s nezáporným ohodnocením hran) najde nejkratší cestu z vrcholu u do vrcholu v.

Směs příkladů

Příklad 1. (IMO 1964) Dokaž, že pro libovolné obarvení hran úplného grafu K_{17} třemi barvami najdeme v tomto grafu tři hrany, které jsou obarveny stejnou barvou a tvoří trojúhelník.

Příklad 2. Mějme šachovnici 3×3, na které jsou v dolních rozích dva bílí a v horních rozích dva černí koně. Urči nejmenší počet tahů, ve kterých si koně vymění pozice (tj. bílí koně budou nahoře a černí dole).

Příklad 3. PraSátka si spolu zahrála turnaj v polštářové bitce. Postupně se utkala každé z každým. Dokaž, že mezi PraSátky existují nějaká tři (říkejme jim A, B a C) taková, že A porazilo B, B porazilo C a C porazilo A, víš-li, že každé PraSátko během turnaje alespoň jednou zvítězilo.

Příklad 4. Obarvíme-li všechny hrany grafu K_6 dvěma barvami, dokaž, že pak v něm

[14] Vstupní stupeň je počet hran, které do vrcholu vchází, a výstupní počet těch, co z něj vychází.

[15] Otakar Borůvka (1899–1995).

(a) existuje jednobarevný trojúhelník,

(b) existují dokonce dva jednobarevné trojúhelníky (ne nutně stejné barvy).

Příklad 5. Mějme graf G na $2n+1$ vrcholech takový, že pro každou n-tici vrcholů existuje jiný vrchol, který je spojen se všemi vrcholy z této n-tice. Ukaž, že pak existuje vrchol, který je spojen se všemi ostatními vrcholy.

Příklad 6. Mějme rovinný graf, jehož každá stěna (včetně vnější) je trojúhelník. Každý vrchol zcela libovolně obarvíme jednou ze tří barev. Dokaž, že pak existuje sudý počet stěn, jejichž vrcholy mají všechny tři barvy různé.

Literatura

Prvně bych chtěla poděkovat jednak Jardovi Hančlovi a Michalu Rušinovi, jejichž příspěvky se staly předlohou pro tuto přednášku. Jarda zase vycházel z příspěvku Jirky Finka, tedy i jemu patří dík. Všechny příspěvky naleznete na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php` pod názvem Grafové úlohy, Jednoťažky a Teorie grafů.

[1] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, Praha, 2003.

Teorie čísel

Lenka Slavíková

ABSTRAKT. Seznámíme se se základními pojmy a větami z teorie čísel a ukážeme si, jak těchto znalostí využít při řešení konkrétních příkladů.

Teorie čísel je odvětví matematiky, které se zabývá vztahy mezi celými čísly. Seznámíme se s některými základními pojmy a větami a ukážeme si, jak lze těchto znalostí využít při řešení konkrétních příkladů.

V následujícím textu bude $\mathbb{N}$ značit množinu přirozených čísel, tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, a $\mathbb{Z}$ množinu celých čísel.

Nejprv tedy trocha teorie …

Dělitelnost, prvočísla a složená čísla

Definice. *Nechť a, b jsou celá čísla. Řekneme, že a* dělí *b (b je* násobkem *a), pokud existuje celé číslo q takové, že $b = aq$. Tuto skutečnost budeme značit $a \mid b$.*

Největším společným dělitelem *čísel a, b budeme rozumět největší přirozené číslo, které současně dělí a i b. Značíme (a, b). Čísla a, b nazveme* nesoudělná, *pokud $(a, b) = 1$. Přirozené číslo nazveme* prvočíslem *pokud má právě dva kladné dělitele.* Složená čísla *jsou přirozená čísla, která mají alespoň tři kladné dělitele.*

Věta. *Existuje nekonečně mnoho prvočísel.*

Věta. *Pro každé přirozené číslo n existuje n po sobě jdoucích složených čísel.*

Věta. (Bezoutova) *Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$, $d = (a, b)$. Potom existují celá čísla x, y taková, že $ax + by = d$.*

Kongruence

Definice. *Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Řekneme, že a* je kongruentní s *b* modulo *m, píšeme $a \equiv b \pmod{m}$, pokud $m \mid (a - b)$.*

Jinak řečeno, čísla a, b jsou kongruentní modulo m, pokud dávají při dělení číslem m stejný zbytek.

Věta. (vlastnosti kongruencí) *Nechť $a, b, c, d \in Z$, $m \in \mathbb{N}$.*

(a) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, pak platí $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $ac \equiv bd \pmod{m}$.

(b) Pokud $ac \equiv bc \pmod{m}$ a *$(c, m) = 1$, pak $a \equiv b \pmod{m}$.*

KLÍČOVÁ SLOVA. teorie čísel, dělitelnost, kongruence

Tedy kongruence mezi sebou můžeme sčítat a násobit. Navíc můžeme dělit čísly nesoudělnými s modulem.

Definice. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Počet všech přirozených čísel, která jsou menší než n a nesoudělná s n, značíme $\varphi(n)$. Funkci, která přirozenému číslu přiřadí číslo $\varphi(n)$, říkáme* Eulerova funkce.

Věta. *Nechť $n > 1$ je přirozené číslo. Je-li $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ rozklad čísla n na součin prvočísel (tj. $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou po dvou různá prvočísla, $r_1, r_2, \ldots, r_k$ jsou přirozená čísla), pak platí*

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Věta. (Eulerova) *Nechť $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ a platí $(a, m) = 1$. Pak $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.*

Věta. (malá Fermatova) *Nechť a je přirozené číslo, p je prvočíslo a platí $(a, p) = 1$. Pak $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Všimni si, že malou Fermatovu větu dostaneme jako důsledek Eulerovy věty, pokud zvolíme $m = p$.

Věta. (Wilsonova) *Nechť p je prvočíslo. Pak $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.*

A teď už konečně nějaké příklady ...

Příklad 1. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pokud $a - c \mid ab + cd$, pak $a - c \mid ad + bc$.

Příklad 2. Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pokud $3 \mid a^2 + b^2$, pak $3 \mid a$ a $3 \mid b$.

Příklad 3. Dokažte, že neexistuje polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že platí $P(2009) = 2010, P(2011) = 2013$.

Příklad 4. Nechť $p > 3$ je prvočíslo. Dokažte, že $6(p-4)! \equiv 1 \pmod{p}$.

Příklad 5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že $\frac{5^{n-2}-1}{n}$ je celé číslo.

Příklad 6. Nechť a, b jsou lichá nesoudělná čísla. Dokažte, že $(2^a + 1, 2^b + 1) = 3$.

Příklad 7. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ a platí $ab = cd$. Dokažte, že pak $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ není prvočíslo.

... a úplně na závěr pár diofantických rovnic. Pokud ses ještě s tímto strašidelným pojmem nesetkal, tak věz, že nejde o nic jiného než o rovnice, u nichž nás zajímají jen celočíselná řešení.

Příklad 8. Najděte všechny dvojice prvočísel (p, q) takové, že platí $p^2 - 2q^2 = 1$.

Příklad 9. Dokažte, že dvojice $(x, y) = (0, 0)$ je jediným řešením rovnice $x^2 + y^2 = x^2y^2$ v celých číslech.

Příklad 10. Dokažte, že rovnice $x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2$ nemá řešení v přirozených číslech.

Příklad 11. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$. Dokažte, že rovnice $x^m + y^m = z^n$ má nekonečně mnoho řešení v celých číslech.

Příklad 12. Předpokládejme, že p je liché prvočíslo takové, že $2p + 1$ je rovněž prvočíslo. Dokažte, že rovnice $x^p + 2y^p + 5z^p = 0$ má v celých číslech jediné řešení, a to trojici $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Triky s polynómami

Miško Szabados

Abstrakt. Vezmeme to úplne od základov – povieme si, ako sa na polynómy pozerať, čo si všímať a ako pristupovať k príkladom s nimi. V druhej časti sa dostaneme k pokročilejším fintám a kritériám rozložiteľnosti polynómov.

Definícia. Polynóm *je výraz tvaru* $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. *Čísla* a_i *sú koeficienty polynómu a* x *je premenná. Spolu s polynómom musíme povedať, čo môžu byť koeficienty. Typicky sú to celé čísla* $\mathbb{Z}$, *racionálne čísla* $\mathbb{Q}$ *alebo reálne čísla* $\mathbb{R}$.

Typický stredoškolský polynóm má reálne koeficienty a vnímame ho ako funkciu z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$: $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. Často sa však bude hodiť aj čisto algebraický pohľad – vnímať polynóm ako obyčajný výraz. Musím však povedať, že niekedy je rozdiel medzi polynóm ako funkciou a polynómom ako výrazom. (Povieme si na prednáške.)

Definícia. Koreň *polynómu* $p(x)$ *je také číslo* k *z daného definičného oboru, pre ktoré platí* $p(k) = 0$.

Pre polynómy máme prirodzene definované delenie so zvyškom, ktoré sa učí aj na strednej škole. Ukážeme si, že polynómy dokážeme (síce nie úplne vždy) rozdeliť na súčiny činiteľov tvaru $(x - k_i)$, kde k_i budú korene polynómu. Práve pre tento tvar nám bude užitočné skúmať deliteľnosť.

Ak má polynóm koeficienty iba z danej množiny M, hovoríme, že je „nad M“. Odteraz budeme uvažovať iba polynómy nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ alebo $\mathbb{C}$.

Vlastnosti

Vetička 1. *Ak je* k *koreň* $p(x)$, *tak* $(x - k) \mid p(x)$.

Vetička 2. *Ak má polynóm stupňa* n *aspoň* $n + 1$ *koreňov, tak už je to nutne nulový polynóm.*

Vetička 3. *Polynóm stupňa* n *je určený hodnotami v* $n + 1$ *bodoch.*

Vetička 4. *Polynóm* $ax^2 + bx + c$ *má korene*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vetička 5. *Ak* a, b *a koeficienty* $p(x)$ *sú celé čísla, tak* $a - b \mid p(a) - p(b)$.

Kľúčové slová. polynómy, triky, kritéria ireducibility

Vetička 6. *Ak má polynóm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s celočíselnými koeficientami racionálny koreň $q = \frac{r}{s}$ (r, s nesúdeliteľné), tak $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$.*

Vetička 7. *Vietove vzťahy: Ak je $a_n = 1$, tak pre koeficienty polynómu platí:*

$$a_i = (-1)^{n-i} \sum_{j_1 < \cdots < j_i} k_{j_1} \cdots k_{j_i} \qquad j_i \in \{1, \cdots, n\}$$

kde $k_1, \ldots, k_n$ sú korene polynómu. Špeciálne

$$a_0 = (-1)^n k_1 \cdots k_n$$

$$-a_{n-1} = k_1 + \cdots + k_n$$

Príklady

Príklad 1. Dokážte, že ak P je polynóm s celočíselnými koeficientmi a a, b, c rôzne celé čísla, tak sa nemôže stať, aby $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$.

Príklad 2. Zjednodušte:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$$

Príklad 3. Nech a, b, c sú reálne čísla také, že

$$\begin{aligned} a+b+c &> 0, \\ ab+ac+bc &> 0, \\ abc &> 0. \end{aligned}$$

Dokážte, že potom $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Príklad 4. Polynóm $x^3 - 3x + 1$ má tri reálne korene, ktoré označíme α, β, γ. Napíšte polynóm tretieho stupňa, ktorého korene sú čísla $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$.

Príklad 5. Majme p, q reálné polynómy, $p \neq 0$. Dokážte, že existuje polynóm r s reálnymi koeficientmi taký, že $p(x) \mid r(q(x))$.

Príklad 6. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa nanajvýš 6 nad $\mathbb{Z}$ taký, že $7 \mid P(x)$ pre každé $x \in \mathbb{Z}$. Ukážte, že potom 7 delí všetky koeficienty $P(x)$.

Triky s polynómami

Príklad 7. a, b, c sú korene polynómu $x^3 - 5x^2 + 3$. Koľko je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$? A koľko $a^4 + b^4 + c^4$?

Príklad 8. Zistite súčet koeficientov polynómu

$$P(x) = (1 - 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 - 6x^6 - 7x^7 + 8x^8 + 9x^9 - 10x^{10})^{2009}.$$

Príklad 9. Dokážte, že $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$ je celé číslo.

Príklad 10. Pepa má a, b, c celé čísla také, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = u, \qquad \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = v$$

pre $u, v \in \mathbb{Z}$. Dokážte, že všetky a, b aj c majú rovnakú absolútnu hodnotu.

Príklad 11. Má polynóm $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1$ reálne korene?

Príklad 12. Nájdi všetky reálne korene $x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$.

Príklad 13. Nájdi všetky korene $30x^3 - 31x^2 + 10x - 1$.

Príklad 14. Nájdi všetky korene $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Kritériá ireducibility

Ako sme videli, často potrebujeme vedieť, aké má polynóm korene. Niekedy, najmä keď hľadáme celočíslené korene, však polynóm vôbec žiadne nemusí mať. Aby sme to zistili, stačí nám vedieť, že sa polynóm nedá rozložiť na súčin dvoch polynómov napr. s celočíselnými koeficientami – tj. že je nerozložiteľný (ireducibilný).

Veta. (Eisensteinovo kritérium) *Majme polynóm $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ a prvočíslo p také, že*

(i) $p \mid a_i \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$,
(ii) $p \nmid a_n$,
(iii) $p^2 \nmid a_0$.

Potom $f(x)$ je ireducibilný nad $\mathbb{Q}$.

Veta. (Cohnovo kritérium) *Ak $\overline{a_n \cdots a_1 a_0}$ je prvočíslo zapísané v desiatkovej sústave, tak polynóm $a_n x^n + \cdots + a_0$ je ireducibilný nad $\mathbb{Z}$.*

Príklad 15. Dá sa polynóm $2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ rozložiť nad $\mathbb{Z}_0^+$? A čo polynóm $6x^4 + x^3 + 3x + 1$?

Príklad 16. Ukážte, že polynóm $3x^4 + 15x^2 + 10$ sa nedá rozložiť nad $\mathbb{Z}$.

Príklad 17. Ukážte pomocou Eisensteinovho kritéria, že sa polynóm $x^2 + x + 2$ nedá rozložiť nad $\mathbb{Z}$. Použite substitúciu $x = y + a$ pre vhodne zvolené a.

Literatura

[1] Saša Kazda: *Polynomy*, Sborníček Rapotín, 2007.
[2] Michal Rušin: *Základní vlastnosti polynomů*, Sborníček Ramzová, 2006.

Vytvořující funkce

Pavel Šalom

ABSTRAKT. V příspěvku najdete definici vytvořující funkce, zobecněnou binomickou větu, která je užitečná při řešení příkladů, a přehledovou tabulku porovnávající operace s posloupnostmi a odpovídající operace s vytvořujícími funkcemi. Nejedná se o studijní text.

Co je vytvořující funkce?

Definice. *Nechť* $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *je posloupnost reálných čísel. Potom funkce daná předpisem*

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

se nazývá vytvořující funkce posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$.

Je-li posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ od nějakého členu nulová, je její vytvořující funkce obyčejný polynom. V obecném případě se jedná o „nekonečný polynom“ – tzv. *mocninnou řadu*. Mocninné řady budeme sčítat a násobit stejně jako polynomy[16].

Co se dá vytvořujícími funkcemi počítat?

Díky své povaze se dají vytvořující funkce velice elegantně používat v kombinatorice a pravděpodobnosti a při práci s posloupnostmi. Pro motivaci malá ochutnávka problémů, ve kterých mohou vytvořující funkce dobře posloužit

(i) dokazování kombinatorických identit jako například

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n},$$

(ii) hledání explicitního vzorce pro rekurentně zadané posloupnosti jako je například Fibonacciho posloupnost, rozmnožování buněk, atd.,

(iii) počet triangulací n-úhelníku, počet alkanových radikálů tvořených n uhlíky, atd.

Co bude potřeba

Budeme potřebovat určitou zručnost při práci s polynomy a mocninnými řadami. Často budeme používat vztah

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad \text{kde } |x| < 1, \tag{$\spadesuit$}$$

KLÍČOVÁ SLOVA. vytvořující funkce, zobecněná binomická věta

[16] Přestože není zcela jasné, že takové zacházení je korektní, a ve skutečnosti je korektní jen pro x z určitého intervalu kolem nuly.

a různé formy binomické věty.

Zobecnění binomické věty

Obyčejná binomická věta má tvar

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zobecněná binomická věta[17] vypadá podobně

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \quad r \in \mathbb{R},$$

kde ale je součet nekonečný a vystupují v něm zobecněná kombinační čísla

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-(k-1))}{k!}, \quad r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \qquad \binom{r}{0} = 1.$$

Speciálním užitečným případem je „magický vztah“[18]

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} x + \binom{n+1}{n-1} x^2 + \dots, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (\heartsuit)$$

Jak si odpovídají operace s posloupnostmi a funkcemi

Abychom uměli pomocí vytvořujících funkcí spočítat něco netriviálního, je potřeba se s nimi naučit dobře pracovat. Předpokládejme, že posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $a(x)$ a posloupnost $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $b(x)$. Následující tabulka podává stručný přehled, které operace si navzájem odpovídají.

operace s posloupnostmi	**operace s funkcemi**
$(0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$	$x^3 a(x)$
$(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, \dots)$	$a(x^3)$
$(3a_0, 3a_1, 3a_2, 3a_3, \dots)$	$3a(x)$
$(a_0, 3a_1, 3^2 a_2, 3^3 a_3, \dots)$	$a(3x)$
$(a_2, a_3, a_4, \dots)$	$\frac{a(x)-a_1x-a_0}{x^2}$
$(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \dots)$	$a(x)+b(x)$

[17] Ta se odvodí snadno, pokud víme, co to je Taylorův rozvoj, ale tak daleko se na přednášce pouštět nebudeme.

[18] Kombinační čísla ve vzorci odpovídají takzvaným kombinacím s opakováním.

$(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots)$	$a(x)b(x)$
$(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$	$\frac{a(x)}{1-x}$
$(a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots)$	$a'(x)$
$(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$	$\int a(x)$

Příklad 1. Vejtek se v Americe rozhodl nakoupit pohledy všem prasátkům na soustředění (těch je 36). V suvenýrech ale měli jen tři druhy pohledů a jednotlivých druhů bylo postupně 10, 20 a 30. Kolika způsoby mohl pohledy nakoupit?

Příklad 2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 4 kostkami padne součet 14?

Příklad 3. Zjistěte, zda existuje podmnožina $X \subset \mathbb{N}_0$ taková, že rovnice $n = a + 2b$, $a, b \in X$, má pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ právě jedno řešení.

Příklad 4. Je dáno přirozené číslo n. Označme A počet způsobů, kterým lze n zapsat jako součet lichých čísel (mohou být stejná). Označme B počet způsobů, kterým lze n zapsat jako součet navzájem různých čísel. Dokažte, že $A = B$.

Příklad 5. Je dáno konečně mnoho (alespoň dvě) aritmetických posloupností takových, že každé přirozené číslo patří právě do jedné z nich. Dokažte, že potom některé dvě z daných posloupností mají stejnou diferenci.

Příklad 6. Dokažte $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

Příklad 7. Dokažte $\sum_k \binom{k}{n-k} = F_{n+1}$, kde se sčítá přes ta k, přes která má výraz smysl.

Příklad 8. Stojíme před schodištěm, které má n schodů. Každým krokem vyjdeme jeden nebo dva schody. Kolika způsoby lze schodiště vyjít?

Příklad 9. Najděte explicitní vyjádření n-tého členu posloupnosti zadané vztahem $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n + n$ a $x_1 = x_0 = 0$.

Příklad 10. Kolik existuje n-členných posloupností tvořených písmeny a, b, c, d, v nichž a nikdy nesousedí s b?

Příklad 11. Spočtěte počet triangulací konvexního n-úhelníku.

Příklad 12. Ve frontě před divadlem stojí $2n$ lidí. Lístek stojí 50Kč, přičemž n lidí má padesátikorunu a dalších n stokorunu. Pokladní ale nemá zrovna žádné drobné. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení fronty bude mít pokladní pro každého nazpátek?

Příklad 13. (spíše pro zajímavost) Dokažte, že pokud je zrovna 13. den v měsíci, je to nejpravděpodobněji pátek!

O geometrických nerovnostech

Jaroslav Švrček (PřF UP v Olomouci)

Abstrakt. Příspěvek na příkladech osvětluje základy i pokročilejší metody řešení geometrických nerovností.

Problematika geometrických nerovností patří mezi náročnější partie elementární matematiky, neboť vyžaduje od matematiků pracujících v této oblasti nadstandardní schopnost propojit své znalosti z oblasti algebraických nerovností a geometrie (především planimetrie). Mezi nejvýznamnější a současně nejznámější geometrické nerovnosti přitom patří nerovnost Weitzenböckova, Finsler–Hadwigerova, Neuberg–Pedoeova, Erdös–Mordellova, Eulerova a další.

Čas od času se takové nerovnosti objevují také v naší MO, v matematických korespondenčních seminářích a dalších soutěžích určených matematicky talentovaným středoškolákům. Ke krátké prezentaci uvedené tematiky poslouží např. následující úlohy.

Úloha 1. Nechť a, b, c jsou délky stran a $2s = a + b + c$. Dokažte, že platí nerovnosti

a) $3\,(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4\,(ab + bc + ca)$,
b) $8\,(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc$,
c) $ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + ca\,(c + a) \geq 48\,(s - a)(s - b)(s - c)$,
d) $\dfrac{a}{b + c - a} + \dfrac{b}{c + a - b} + \dfrac{c}{a + b - c} \geq 3$.

Úloha 2. Nechť a, b, c jsou délky stran a S obsah trojúhelníku, pak platí

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S.$$

Dokažte.

Úloha 3. Nechť α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku. Dokažte nerovnosti

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \dfrac{9}{4}$,
b) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.

Úloha 4. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě M. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{|AB|}{|CD|} + \frac{|CD|}{|AB|} + \frac{|BC|}{|DA|} + \frac{|DA|}{|BC|} \leq \frac{|MA|}{|MC|} + \frac{|MC|}{|MA|} + \frac{|MB|}{|MD|} + \frac{|MD|}{|MB|}.$$

Klíčová slova. geometrické nerovnosti, nerovnosti v trojúhelníku

Dělení do skupinek

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek shrnuje úlohy, v jejichž řešení se někde využije myšlenka bijekce, potažmo dělení do skupinek. Úlohy jsou řazeny víceméně podle obtížnosti.

Úvod

Typická kombinatorická úloha se nás ptá, kolik prvků z nějaké množiny má požadovanou vlastnost. Zpravidla bývá snadné určit počet všech prvků množiny (řekněme N). Když se nám potom podaří celou množinu rozdělit do stejně velkých skupinek (řekněme, že jich bude třeba k), z nichž v každé je právě jeden prvek s požadovanou vlastností, máme vyhráno. Hledané číslo je totiž určitě N/k. Tuto myšlenku hned demonstrujme na velmi snadném příkladu.

Příklad 1. Do tanečních chodí 30 spolužáků. Když se tancovala polka, nikdo nezůstal na ocet. Kolik je v tanečních chlapců?

Řešení. Druhá věta nám vlastně říká, že umíme chlapce a děvčata popárovat (jeden chlapec, jedno děvče) tak, že nikdo nezbyde. Chlapců a děvčat tedy musí být stejně, a to konkrétně polovina z 30 neboli 15.

Naše úvaha se může zdát triviální až trapná, budeme ji ale rozvíjet na dalších úlohách, které už tak snadné nebudou. Postupme tedy v obtížnosti o malý krůček výše.

Příklad 2. Uvažujme množinu $\{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$. Vyberme z ní nějakých 10 prvků (ne nutně různých) a ty sečtěme. Vyjde nám součet častěji větší, nebo menší než 500?

Příklad 3. Na kružnici je dáno 2009 bodů. Zvolíme náhodně dva body a spojíme je úsečkou. Ze zbylých 2007 bodů opět vybereme dva a spojíme je. Jaká je pravděpodobnost, že se budou námi nakreslené úsečky protínat? Co kdybychom vybrali ze zbytku ještě jednu dvojici? Jaká by byla potom pravděpodobnost, že se některé dvě úsečky protnou?

Příklad 4. Zjistěte, kolik je tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$, které mají součin svých prvků větší než 2009.

Je několik věcí, na které si při tomto typu řešení musíme dávat pozor.

(i) Všechny skupinky musí být stejně velké.
(ii) Každý prvek musí připadnout do nějaké skupinky.

Klíčová slova. kombinatorika, pravděpodobnost, bijekce

(iii) Žádný prvek nesmí připadnout do více skupinek.

Občas náš postup může být poněkud trikový. Viz následující dvě úlohy

Příklad 5. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že vztah

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2009$$

je splněn pro právě 100 různých reálných čísel x.

Příklad 6. Na kružnici náhodně zvolíme 2009 bodů. Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že libovolný trojúhelník na těchto 2009 vrcholech je tupoúhlý.

No a nyní už nám nezbývá než se podívat na opravdu těžké úlohy. Potěšit vás ale může, že jejich obtížnost spočívá především v tom, že se jen velmi těžko řeší jinak. Pomocí metod a fint, které jsme právě natrénovali, je zvládneme levou zadní :-).

Příklad 7. Mějme tabulku velikosti $a \times b$, kde a, b jsou nesoudělná. Levý dolní roh tabulky si označme C, pravý horní roh D a pravý dolní roh E. Po hranicích dílků tabulky se nyní můžeme pohybovat, avšak jen nahoru nebo doprava. Kolik je cest z C do D, které nikdy nevstoupí dovnitř trojúhelníku CDE?

Příklad 8. Nechť n a k jsou kladná celá čísla, kde $k \geq n$ a $k-n$ je sudé. Je dáno $2n$ lamp označených čísly $1, 2, \ldots, 2n$, přičemž každá z nich může být *zapnutá* či *vypnutá*. Na počátku jsou všechny lampy vypnuté. Uvažujme posloupnost *kroků*: v každém kroku jednu z lamp přepneme (vypnutou zapneme, zapnutou vypneme).

Označme N počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n+1$ až $2n$ jsou vypnuté.

Označme M počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n+1$ až $2n$ jsou vypnuté, přičemž žádná z lamp $n+1$ až $2n$ nebyla nikdy zapnutá.

Určete podíl N/M.

Literatura

Úlohy jsem čerpal ze starších ročníků PraSátka, z různých úrovní matematické olympiády a z vlastní hlavy.

Stejnolehlost a kružnice

Pepa Tkadlec

ABSTRAKT. Příspěvek opakuje základní vlastnosti stejnolehlosti. Dále vysvětluje princip skládání stejnolehlostí a na závěr dává vše do souvislosti s mocností bodu ke kružnici a kruhovou inverzí.

Úvod

Co mají společného stejnolehlost a mocnost bodu ke kružnici se základními vlastnostmi kruhové inverze? V jednoduchosti by se dalo říci, že jakousi *násobivost*. Pomocí těchto tří fint si totiž umíme v geometrických úlohách vyrábět součiny a podíly různých délek, které pak mezi sebou můžeme porovnávat. Začneme stejnolehlostí, jejíž role je klíčová, a postupně se přes úlohy, ve kterých bude potřeba stejnolehlostí hned několik, dopracujeme až k těm, kde už sama nestačí. Abychom si ujasnili pojmy, zmíníme na začátek několik definic a vět.

Trocha definic

Definice. (Stejnolehlost) *Je dán bod S a reálné číslo k, $k \neq 0$.* Stejnolehlost se středem S a koeficientem k *je zobrazení $H(S,k)$, které přiřazuje:*

(i) *každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí $|SX'| = |k| \cdot |SX|$ (přitom pro $k > 0$ leží bod X' na polopřímce SX a pro $k < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné),*

(ii) *bodu S bod $S' = S$.*

Je-li X vzor a X' obraz ve stejnolehlosti $H(S,k)$, píšeme

$$H(S,k)\colon X \to X'.$$

Věta. *Složením dvou stejnolehlostí $H_1(S_1,k_1)$, $H_2(S_2,k_2)$ $(k_1 \cdot k_2 \neq 1)$ vzniká stejnolehlost $H_3(S_3,k_3)$, kde $H_3 \in H_1H_2$ a $k_3 = k_1 \cdot k_2$. Pokud $k_1 \cdot k_2 = 1$, vzniká posunutí.*

Věta. (Desargues) *Nechť ABC a KLM jsou dva trojúhelníky. Přímky AK, BL, CM procházejí jedním bodem nebo jsou všechny rovnoběžné, právě když body $X = AB \cap KL$, $Y = BC \cap LM$, $Z = AC \cap KM$ leží v přímce.*

Definice. (Mocnost) Mocnost bodu M *ke kružnici $k(S,r)$ (značeno $m(M,k)$) je číslo $|MS|^2 - r^2$.*

KLÍČOVÁ SLOVA. stejnolehlost, mocnost, kružnice, geometrie, planimetrie

Věta. *Je-li p přímka procházející bodem M a protínající kružnici k v bodech A,B, pak $|MA| \cdot |MB| = |m(M,k)|$ nezávisle na volbě přímky p.*

Definice. (Kruhová inverze) *Nechť je dána kružnice $k(I,r)$.* Kruhová inverze *přiřadí bodu X bod X' ležící na polopřímce IX tak, aby platilo*

$$|IX| \cdot |IX'| = r^2.$$

Speciálně $I \to \infty$ a $\infty \to I$. Bod I nazýváme střed inverze.

Věta. *Obrazem přímky v kruhové inverzi je přímka, nebo kružnice. Obrazem kružnice je kružnice, nebo přímka.*

Úloha mimo mísu

Příklad 1. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C je D pata výšky na přeponu. Nechť r, r_1, r_2 jsou postupně poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, ACD, BCD. Dokažte, že $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

Obyčejná stejnolehlost

Notná řádka úloh se dá vyřešit jen pouhou obratnou manipulací se stejnolehlostí. Na takové se podíváme nejdřív. Jak poznat, že může pomoci právě stejnolehlost? Dobrým vodítkem bývají dotýkající se kružnice. Pokud se totiž dvě kružnice k, l dotýkají v bodě T, je tento středem jejich vnější stejnolehlosti. Dále může stejnolehlost pomoci při dokazování, že několik přímek prochází jedním bodem (konkrétně středem stejnolehlosti). Hlavu také nevěšíme, pokud se v zadání vyskytuje hojnost středů úseček – tam mnohdy situaci vyjasní stejnolehlost s koeficientem 2.

Příklad 2. Kružnice k, l mají vnitřní dotyk v bodě T. Na l zvolíme body A, B tak, že AB se dotýká k v bodě S. Dokažte, že TS je osou úhlu ATB.

Příklad 3. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T. Navíc se obě vnitřně dotýkají kružnice m postupně v bodech R, S. Druhý průsečík přímky RT s kružnicí m označme Q. Dokažte, že $|\sphericalangle TSQ| = 90°$.

Příklad 4. V trojúhelníku ABC protínají osy vnitřních úhlů kružnici opsanou postupně v bodech S_A, S_B, S_C. Kružnice vepsaná se dotýká stran a, b, c postupně v bodech K, L, M. Dokažte, že přímky S_AK, S_BL, S_CM procházejí jedním bodem.

Příklad 5. Nechť ABC je trojúhelník a nechť D je průsečík tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ABC v bodě A a přímky BC. Nechť E je průsečík kolmice na

BC v B a osy strany BA. Analogicky nechť F je průsečík kolmice na BC v bodě C a osy strany CA. Dokažte, že D, E, F leží v přímce.

Když jedna nestačí

Občas jedna stejnolehlost nestačí a my si musíme vypomoci skládáním. Využíváme toho, že složením dvou stejnolehlostí většinou vzniká opět stejnolehlost, a to se středem na přímce určené „dílčími" středy.

Příklad 6. V rovině jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l, přičemž k leží uvnitř l. Buď m kružnice, která má s k vnější dotyk v bodě K a s l vnitřní dotyk v bodě L. Dokažte, že KL prochází pevným bodem X nezávislým na volbě m.

Příklad 7. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník a P bod na straně AB takový, že kružnice vepsaná trojúhelníku CPD mající střed v I se dotýká kružnic vepsaných trojúhelníkům APD, PBC postupně v bodech K, L. Označme $E = AC \cap BD$ a $F = AK \cap BL$. Dokažte, že body E, I, F leží v přímce.

Příklad 8. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, ve kterém $|BA| \neq |BC|$. Označme postupně ω_1 a ω_2 kružnice vepsané trojúhelníkům ABC, ADC. Předpokládejme, že existuje kružnice ω, která se dotýká polopřímky BA za bodem A, polopřímky BC za bodem C a přímek AD, CD. Dokažte, že společné vnější tečny kružnic ω_1 a ω_2 se protnou na kružnici ω.

Příklad 9. Kružnice k, l, m mají po dvou vnější dotyk ($l \cap m = A$, $k \cap m = B$, $k \cap l = C$). Kružnice n má se všemi navíc vnitřní dotyk postupně v bodech K, L, M. Dokažte, že přímky AK, BL, CM procházejí jedním bodem.

Konečně násobíme

A už je to tady! Úspěšně jsme se prokousali přes stejnolehlost a skládání a je na čase začít násobit délky. Začleníme tedy do našeho arzenálu mocnost bodu ke kružnici, už na začátku zmíněnou kruhovou inverzi nebo například Euklidovy věty o výšce a odvěsně a jdeme na to.

Příklad 10. Dokažte, že onen pevný bod X z příkladu 6 má ke všem kružnicím m stejnou mocnost.

Příklad 11. Je dána půlkružnice t nad průměrem AB a na ní bod C. Bodem C vedeme kolmici p k AB. Zkonstruujme nyní kružnici k tak, aby se dotýkala t v bodě T, AB v bodě D a p v bodě P. Dokažte, že CD půlí úhel ACP.

Příklad 12. Mějme čtyřúhelník $EFGH$ takový, že se dají sestrojit kružnice e, f, g, h se středy po řadě v bodech E, F, G, H tak, aby se kružnice e, g obě dotýkaly (vnějším dotykem) kružnic f, h. Ukažte, že pak body dotyku těchto kružnic tvoří tětivový čtyřúhelník.

Příklad 13. Dána je kružnice k a přímka p, která ji protíná v bodech A,B. Označme C střed jednoho z oblouků AB. Bodem C vedeme přímky r, s. Jejich průsečíky s přímkou p a druhé průsečíky s kružnicí k označíme R_p, R_k, S_p, S_k. Dokažte, že tyto čtyři body leží na kružnici.

Příklad 14. Do kruhové úseče jsou vepsány dvě navzájem se dotýkající kružnice k, l. Dokažte, že jejich společná vnitřní tečna prochází pevným bodem.

Příklad 15. V rovině je dána přímka d a na ní body A, B. Kružnice k, l, m, n se středy K, L, M, N se všechny dotýkají d. Přitom k a l mají vnější dotyk v A, m a n mají vnější dotyk v B a K a M leží v téže polorovině určené přímkou d. Navíc existuje kružnice ω, která má se všemi čtyřmi vnitřní dotyk. Dokažte, že KM a LN se protínají na d.

Literatura

Závěrem bych chtěl poděkovat *Martinu Tancerovi*, *Michalu Rolínkovi* a *Alče Skálové*, z jejichž příspěvků jsem čerpal. Většina úloh je převzatá z různých úrovní matematické olympiády, starších ročníků PraSátka či slovenského semináře KMS.

Soustavy rovnic

Honzík Vaňhara

Abstrakt. V příspěvku najdete spoustu příkladů na soustavy rovnic řazených dle obtížnosti a spoustu tipů, jak na ně. Na přednášce se ale dozvíte něco navíc, a to jak počítat různé na první pohled nesnadné rovnice systémem symetrických mnohočlenů a také řešení příkladů obsažených ve sborníčku.

Soustavy rovnic jsou esenciální součástí algebry. Na jejich řešení se používá spousta metod a na přednášce si ukážeme základní a mírně pokročilé metody jejich řešení. Tedy žádná příliš vysokoškolská matematika, ale nebude to ani něco, co se ukazuje ve škole (s výjimkou Keplerova gymnázia v Praze). Tato přednáška je pojata jako nalejvárna z rovnic, takže po ní si budete s každou rovnicí na potkání tykat. Zde si můžete zkusit pár příkladů, ať vidíte, jak na tom jste:

Příklad 1. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z, \\ z^2 + x^2 &= y, \\ z^2 + y^2 &= x. \end{aligned}$$

Příklad 2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= 2, \\ x^4 + y^4 &= 2. \end{aligned}$$

Příklad 3. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{x} &= 2z, \\ y + \frac{2}{y} &= 2x, \\ z + \frac{2}{z} &= 2y. \end{aligned}$$

Kromě středoškolských algebraických metod (máte rovnici a upravujete ji) můžete jednotlivé rovnice vzájemně sčítat (po dvou, třech nebo rovnou všechny), násobit anebo jednu vyjádřit a dosadit do ostatních. Dále můžete použít pěkné a hlavně známé vzorce (ono se to nezdá, ale známý součet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ se používá až v jedné pětině všech rovnic s goniometrickými funkcemi), nebo uspořádat dle velikostí jednotlivých proměnných, které se v příkladě vyskytují, a nebo

Klíčová slova. Soustavy rovnic, cyklické soustavy rovnic, symetrické mnohočleny, rovnice

nakonec použít odhady podle nerovností (AG nerovnost, součet čtverců). Ještě se dají rovnice řešit metodou symetrických mnohočlenů, kterou si ukážeme přímo na přednášce. A nyní pár příkladů (které budou (dle vašeho zájmu) předvedeny na přednášce):

Lehčí příklady

Příklad 4. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2z, \\ z^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

Příklad 5. Řešte soustavu rovnic (alespoň dvěma způsoby)

$$\begin{aligned} x^2 &= yz, \\ y^2 &= zx, \\ z^2 &= xy. \end{aligned}$$

Příklad 6. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= k, \\ 2y + z + 3x &= k, \\ 2z + x + 3y &= k. \end{aligned}$$

Příklad 7. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 &= y + z + 2, \\ y^2 &= z + x + 2, \\ z^2 &= x + y + 2. \end{aligned}$$

Středně těžké příklady

Příklad 8. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos y, \\ \sin y &= \cos z, \\ \sin z &= \cos x. \end{aligned}$$

Příklad 9. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x &= y^3 + 1, \\ y &= z^3 + 1, \\ z &= x^3 + 1. \end{aligned}$$

Příklad 10. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \frac{2}{y^2}, \\ y + \frac{1}{y} &= \frac{2}{z^2}, \\ z + \frac{1}{z} &= \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Příklad 11. Najděte hodnotu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, když:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 15, \\ xy &= z^2. \end{aligned}$$

Těžké příklady

Příklad 12. (Polská MO) Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^5 &= 5y^3 - 4z, \\ y^5 &= 5z^3 - 4x, \\ z^5 &= 5x^3 - 4y. \end{aligned}$$

Příklad 13. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(y + z + 1) &= y^2 + z^2 - 5, \\ y(z + x + 1) &= z^2 + x^2 - 5, \\ z(x + y + 1) &= x^2 + y^2 - 5. \end{aligned}$$

Příklad 14. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x^5 + y^5 &= a^5. \end{aligned}$$

Příklad 15. Řešte soustavu rovnic

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

Příklad 16. Řešte soustavu rovnic

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

Obsah