Sklené

Sborník, podzim 2015

Anička Doležalová
Filip Hlásek
David Hruška
Bára Kociánová
Matěj Konečný
Marta Kossaczká
Kuba Krásenský
Honza Krejčí
Anh Dung „Tonda“ Le
Martin „E.T.“ Sýkora
Štěpán Šimsa
Rado van Švarc
Martin Töpfer

matfyz

Autoři: Anička Doležalová, Filip Hlásek, David Hruška, Bára Kociánová, Matěj Konečný, Marta Kossaczká, Kuba Krásenský, Honza Krejčí, Anh Dung „Tonda“ Le, Martin „E.T.“ Sýkora, Štěpán Šimsa, Rado van Švarc, Martin Töpfer
Editor: Tonda Češík
vydání první, náklad 45 výtisků
říjen 2015
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Dláždění a obarvování

Anička Doležalová

Abstrakt. Dláždění je pokrývání určité plochy útvary zadaného tvaru. Na přednášce si ukážeme takové úlohy a podíváme se na to, jak se často dají řešit pomocí vhodného obarvování.

Obarvování je názorný a účinný způsob, jak vyřešit některé kombinatorické úlohy. V principu rozdělíme množinu (typicky čtvercovou síť) na konečný počet podmnožin a pro lepší představu pak jednotlivé části obarvíme různými barvami. V typických úlohách se často objevuje černobílá šachovnice, ale občas je potřeba využít barev více. Řešení problému obarvováním je v podstatě třífázové – nejdříve si musíme uvědomit, že je to obarvovací úloha, dále vymyslet vhodné rozdělení na části a pak už zbývá jen okomentovat, proč něco je, nebo není možné.

Příklad. (motivační známý) Lze pokrýt dominovými kostkami šachovnici 8×8, které jsme uřízli protější dva rohy?

V příkladu jsme použili pojem domino, pro snažší práci si zavedeme ještě několik podobných pojmů. Objektu, který vznikne postupným spojováním čtverců, říkáme polyomino, speciálně polyomino velikosti n, kde n je počet použitých čtverců. Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ používáme pojmy monomino, domino, triomino, tetromino, pentomino. Pro kostky tetromina používáme označení I, L, O, S, T, což připomíná všech 5 typů kostek. Podobně u triomin máme I a L.

Příklad 1. Je možno z pěti tetromin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?

Příklad 2. Na každém poli šachovnice $n \times n$ sedí beruška. Po zaznění výstřelu se každá přesune na pole, které hranou sousedí s jejím původním místem. Pro která n mohou být znovu obsazená všechna políčka?

Příklad 3. V mřížce vyberme body $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$. V jednom tahu můžeme ve středové souměrnosti zobrazit bod podle jiného už označeného bodu. Můžeme se dostat k poslednímu bodu čtverce $D = (1, 1)$?

Příklad 4. Čtvercový dort o rozměrech 6×6 chceme shora pokrýt kousky čokolády 2×1. Ukažte, že ať plochu vyplníme jakkoli, vždy můžeme dort rozkrojit, aniž bychom krájeli dvojdílek čokolády. Nalezněte takové pokrytí dortu 5×6, že dort rozkrojit bez překrojení čokolády nepůjde.

Příklad 5. Na každém políčku šachovnice 9×9 sedí beruška. V jeden okamžik každá beruška přeleze na jedno z políček sousedících rohem s výchozím. Některá políčka zůstanou volná. Jaký je nejmenší možný počet volných políček?

Příklad 6. Ukažte, že šachovnici 10×10 nemůžeme vyplnit I-tetrominy.

Příklad 7. Dokažte, že jestliže ze čtverce o velikosti 8×8, který je obarvený jako šachovnice, odebereme libovolné černé a libovolné bílé políčko, potom lze zbývající plochu pokrýt dominy.

Příklad 8. Můžeme pokrýt šachovnici o rozměrech 8×8 patnácti T-tetrominy a jedním O-tetrominem?

Příklad 9. Potřebujeme zabalit 53 kostek $1 \times 1 \times 4$ a máme jen krabici $6 \times 6 \times 6$. Bude nám stačit, nebo musíme koupit větší?

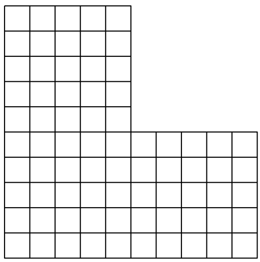
Příklad 10. Uřízli jsme jeden roh šachovnice $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Pro která n můžeme plochu pokrýt dominovými kostkami tak, aby polovina z nich byla umístěna horizontálně?

Příklad 11. Obdélníková podlaha koupelny je pokrytá kachličkami 2×2 a 1×4. Jedna dlaždička se rozbila a od toho druhu už žádné další nejsou. Dokažte, že pomocí druhého typu nejde podlaha opravit, ať kachličky jakkoli přeskládáme.

Příklad 12. Lze pomocí T-tetromin pokrýt čtverec o velikosti 10×10?

Příklad 13. Čtverec o velikosti $2^n \times 2^n$ bez jednoho rohu pokryjte L-triominy.

Příklad 14. Lze pokrýt plochu na obrázku (čtverec 10×10 bez jedné čtvrtiny – pravý horní roh) I-triominy?



Příklad 15. Čtverec o velikosti 7×7 chceme pokrýt pomocí 16 I-triomin a jednoho monomina. Jaká jsou možná umístění daného monomina, aby pokrytí existovalo?

Příklad 16. Mějme šachovnici $4 \times n$, na které někde stojí kůň. Je možné, aby prošel celou šachovnici (tedy každé políčko navštívil právě jednou) a pak se vrátil zpět na počáteční políčko?

Literatura a zdroje

[1] Bára Kociánová: *Obarvování*
[2] Vejtek Musil: *Obarvování a dláždění*
[3] Tereza Dvořáková: *Kombinatorické úlohy o pokrývání*

Komunikace přes nezabezpečený kanál

Filip Hlásek

Abstrakt. Tento text je volným pokračováním mého příspěvku *100 vězňů a žárovka*. Budeme uvažovat dva subjekty, které se snaží tajně si předat zprávu. Všechna jejich komunikace je sice odposloucháváná, ale naštěstí jsou informace doručeny v neporušeném stavu.

Již několik tisíciletí se spolu lidé různými způsoby dorozumívají. Od počátků komunikace se pokoušejí zprávy zabezpečit tak, aby ji mohl přijmout pouze pravý adresát. Jedním z prvních důmyslných systémů byla Caesarova šifra, která umožňuje snadno zakódovat posílaný text do zdánlivě nečitelné podoby a luštění je téměř stejně jednoduché. Od té doby lidé vymysleli několik důmyslnějších technik a s příchodem počítačů se obor, kterému se dnes říká kryptografie, začal neuvěřitelnou rychlostí rozvíjet. Pojďme se společně podívat na některé základní postupy používané v moderním šifrování. Začneme zdánlivě nesouvisející a snadnou hádankou, která nám hravou cestou ukáže důležité myšlenky.

Úloha. Alice a Bob jsou ubytováni ve stejném hotelu v oddělených místnostech, které nemohou opustit. Jediná možnost, jak si mohou něco předat, je pomocí poslíčka Evy. Bob chce poslat Alici prstýnek, ale bojí se, že by ho Eva mohla ukrást. Oba milenci mají na svých pokojích několik trezorů, visacích zámků a odpovídajících klíčů. Zamčené trezory můžeme považovat za nedobytné a navíc víme, že Eva celé trezory nekrade. Jak to mají udělat, aby se prstýnek bezpečně dostal k Alici?

Řešení. Bob uloží prstýnek do trezoru, který zamkne visacím zámkem a pošle Alici. Ta ještě zamkne trezor jedním ze svých zámků a pošle dvakrát zamčený trezor zpátky Bobovi. Chlapec odemkne svůj zámek, a když Alice obdrží trezor podruhé, zbývá na něm pouze její zámek, od kterého má ona jediná klíč. Trezor nikdy necestoval nezamčený a prstýnek se dostal od Boba k Alici. Využili jsme toho, že se zámky nemusejí odemykat ve stejném pořadí, v jakém byly zamčeny.

Úloha. Peggy právě vyřešila sudoku, se kterým si Viktor stále ještě neví rady. Zdá se mu skoro neřešitelné a vůbec Peggy nevěří, že řešení skutečně má a nikde neudělala chybu. Jak Peggy Viktora přesvědčí, že její řešení je správné, aniž by mu jakkoliv poradila?

Úloha. Dvanáct organizátorů PraSátka se při chystání soustředění baví o svých studijních výsledcích. Chtěli by spočítat, kolik za poslední ročník získali v průměru kreditů, ale každý se stydí za to, jak málo jich má. Navrhněte postup, kterým průměrný počet zjistí, aniž by někdo prozradil svůj zisk.

Úloha. Indiánka Alice a indián Bob jsou náčelníci spřátelených indiánských kmenů žijících v nedalekých indiánských vesnicích. Banditka Eva nemá žádné problémy sledovat všechny jejich zprávy předávané kouřovými signály pomocí Morseovy abecedy. Alice s Bobem se to rozhodli změnit a na schůzce se dohodnou na novém způsobu předávání zpráv pomocí kouřových signálů. Zkuste jim poradit, jak to udělat.

Symetrické šifry

Symetrická šifra je takový šifrovací algoritmus, který používá k šifrování i dešifrování jediný klíč. Ten musí být známý oběma stranám před zahájením komunikace a je potřeba si ho předem dohodnout jinou cestou. Podstatnou výhodou symetrických šifer je jejich nízká výpočetní náročnost. Mezi nejjednodušší příklady symetrických šifer patří substituční, které jsou ovšem v dnešní době již snadno rozluštitelné bez znalosti klíče za pomoci počítačů.

Asymetrické šifry

Asymetrické šifrování se vyznačuje tím, že klíč sestává ze dvou částí. Jedna část se používá pro šifrování zpráv (a příjemce zprávy ani tuto část nemusí znát), druhá pro dešifrování (a odesilatel šifrovaných zpráv ji zpravidla nezná). Je vidět, že ten, kdo šifruje, nemusí s dešifrujícím příjemcem zprávy sdílet žádné tajemství, čímž eliminují potřebu výměny klíčů.

Šifrovací klíč a dešifrovací klíč spolu musí být samozřejmě svázány, avšak nezbytnou podmínkou pro užitečnost šifry je praktická nemožnost ze znalosti šifrovacího klíče spočítat dešifrovací.

Odkazy

[1] *http://www.merkle.com/1974/PuzzlesAsPublished.pdf*
[2] *http://mathworld.wolfram.com/Diffie-HellmanProtocol.html*
[3] *https://cs.wikipedia.org/wiki/Kryptografie*
[4] *http://www.wisdom.weizmann.ac.il/ naor/PAPERS/sudoku.pdf*
[5] Simon Singh: *The Code Book*, *http://simonsingh.net/books/the-code-book/*

Kvadratické zbytky

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek se zabývá metodou řešení úloh z teorie čísel pomocí kvadratických zbytků. Uvádí základní tvrzení a obsahuje řadu převážně snazších úloh s nápovědami na procvičení.

Úmluva. Budeme pracovat výhradně s celými čísly.

Mnoho úloh z teorie čísel lze vyřešit pomocí jednoduchého faktu, že druhé (nebo i vyšší) mocniny dávají po dělení daným číslem jen některé zbytky. Nejprve si krátce připomeneme kongruence:

Definice. Skutečnost $n \mid (b-a)$ zapisujeme $a \equiv b \pmod{n}$ a čteme „a je kongruentní s b modulo n".

S kongruencemi se dá pracovat velmi podobně jako s rovnostmi a výrazně zjednodušují zápisy tvrzení o zbytcích.

Tvrzení. *Pokud* $a \equiv b \pmod{m}$ a $c \equiv d \pmod{m}$, *tak platí:*

(i) $a + k \equiv b + k \pmod{m}$,
(ii) $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{m}$,
(iii) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,
(iv) $ac \equiv bd \pmod{m}$.

A nyní už k tématu přednášky.

Definice. Řekneme, že a je *kvadratickým zbytkem* modulo n, pokud existuje x takové, že $x^2 \equiv a \pmod{n}$. V opačném případě řekneme, že a je *nezbytek*. Podobně definujeme zbytky kubické i vyšších řádů.

Diofantické rovnice

Příklad. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 - 12y = 2$.

Řešení. Podíváme-li se na rovnici modulo 4, vidíme, že má platit $x^2 \equiv 2 \pmod{4}$. Takový zbytek ale x^2 nemůže mít, o čemž se díky vlastnostem kongruence přesvědčíme dosazením za x čísel 0 až 3. Rovnice tedy nemá žádné řešení.

Jak už bylo řečeno, podobným postupem, tedy uvážením úlohy modulo vhodné číslo a rozebráním případů, lze vyřešit řada úloh. Ono vhodné číslo se většinou snažíme volit tak, aby jednak situaci zjednodušilo a jednak aby pro něj existovalo co nejméně kvadratických zbytků. To ospravedlňuje volbu $n = 4$ z minulého příkladu. Další užitečnou hodnotou bývá $n = 8$ (0, 1, 4). Pro kubické zbytky se vyplatí zkusit $n = 7$ (zbytky 0, 1, 6) či $n = 9$ (0, 1, 8).

Lemma. (Počet kvadratických zbytků) *Nechť p je liché prvočíslo. Pak mezi čísly $1, 2, \ldots, p-1$ je právě $\frac{p-1}{2}$ kvadratických zbytků modulo p a stejně tolik nezbytků.*

Příklady

Příklad 1. Dokažte, že pokud $7 \mid a^2 + b^2$, pak $7 \mid a$ a $7 \mid b$. Dokažte, že obdobné tvrzení pro pětku neplatí.

Příklad 2. Dokažte, že čísla tvaru $4k + 3$ nejdou zapsat jako součet dvou čtverců.

Příklad 3. Dokaž, že rovnice $7x^2 + 5y^3 + 14 = 0$ nemá celočíselné řešení.

Příklad 4. Bětka si myslí třísetciferné číslo, které se skládá ze sta nul, sta jediček a sta dvojek, přičemž první cifra není nula. Může být Bětčino číslo čtverec?

(MKS 29–2–4)

Příklad 5. Najděte všechna řešení rovnice $1! + 2! + \cdots + n! = x^2$.

Příklad 6. Vyřešte v $\mathbb{Z}$ rovnici $3x^2 = y^2 + z^2$.

Příklad 7. Mějme $x^2 + y^2 = z^2$. Dokažte, že hodnota alespoň jedné z neznámých x, y, z je dělitelná třemi a alespoň jedna čtyřmi.

Příklad 8. Mějme čísla x, y, z taková, že $x^3 + y^3 = z^3$. Dokažte, že alespoň jedno z nich je dělitelné sedmi.

Příklad 9. Dokažte, že součet tří, čtyř, pěti ani šesti čtverců po sobě jdoucích čísel není čtverec.

Příklad 10. Dokažte, že kongruence $a^2 + b^2 \equiv k \pmod{p}$ má řešení pro každé prvočíslo p.

Příklad 11. Lagrangeova věta o čtyřech čtvercích tvrdí, že každé číslo lze zapsat jako součet nejvýše čtyř druhých mocnin. Dokažte, že tři by nestačily.

Kvadratické zbytky modulo p

Tvrzení. *Prvočíslo p je tvaru $4k+1$, právě když je -1 kvadratický zbytek modulo p.*

Tvrzení. (těžší) *Prvočíslo p je tvaru $4k + 1$, právě když lze zapsat jako součet dvou čtverců.*

Definice. Nechť p je liché prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}$, pak definujeme *Legendreův symbol* $\left(\frac{a}{p}\right)$ následovně:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } p \mid a \\ +1 & \text{pokud } a \text{ je kvadratickým zbytkem a } p \nmid a \\ -1 & \text{pokud } a \text{ není kvadratickym zbytkem} \end{cases}$$

Tvrzení. *Pro Legendreův symbol platí*

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Příklad. Dokažte, že součin zbytků je zbytek, součin nezbytků je zbytek a součin zbytku a nezbytku je nezbytek.

Příklad. Dokažte, že tvrzení $p \mid a^2 + b^2 \Rightarrow p \mid a \wedge p \mid b$, kde p je prvočíslo, platí právě tehdy, když $p \equiv 3 \pmod 4$.

Tím pohádka o kvadratických zbytcích zdaleka nekončí, jejím zlatým hřebem je *Zákon kvadratické reciprocity*, který umožňuje pro p, q prvočísla spočítat $\left(\frac{p}{q}\right)$ ze znalosti $\left(\frac{q}{p}\right)$. Pro více informací doporučuji seriál o teorii čísel z 33. ročníku či příspěvky z PraSečí knihovničky.

My se ale raději podíváme ještě na nějaké příklady.

Těžší příklady

Příklad 12. Najděte všechna řešení rovnice $n! + 5 = x^3$.

Příklad 13. Dokažte, že pokud dva čtverce jdou zapsat jako $4x - 3y$ a $4y + 3x$, kde x, y jsou přirozená čísla, pak jsou oba dva dělitelné pěti. (MKS 29–2–7)

Příklad 14. Mějme množinu čtyř čísel $\{2, 5, 13, d\}$, kde $d \in \mathbb{N}$, $d \neq 2, 5, 13$. Dokažte, že si umíme zvolit dvě různá čísla a, b z této množiny taková, že $ab - 1$ nebude čtverec. (IMO 1986)

Návody

1. Rozeberte možnosti na zbytky modulo 7.

2. Modulo 4.

3. Modulo 5.

5. Modulo 5 pro $n \geq 5$.

6. Vezměte nejmenší nenulové řešení x, dokažte, že je pravá strana dělitelná třemi a pokraťte.

7. Modulo 3 a 4.

8. Kubické zbytky modulo 7.

9. Modulo 3, 4, 4 a 4.

10. Kolika různých hodnot modulo p nabývají obě strany?

11. Třeba 800000007 :-)

11. Použijte Eulerovo kritérium.

11. Kdy je -1 kvadratický zbytek modulo prvočíslo?

12. Kubické zbytky modulo 7.

13. Využijte faktu $2(4x - 3y) \equiv 4y + 3x \pmod 5$.

14. Vyzkoušejte možnosti modulo 16.

Zdroje

Chtěl bych poděkovat *Lukáši Zavřelovi*, jehož starší příspěvek jsem z velké části převzal.

Nebojíme se geometrie

David Hruška

Abstrakt. V úvodu příspěvku je uvedeno několik známých úloh, jejichž řešení ilustruje základní techniky rovinné geometrie, jako jsou například úhlení nebo mocnost. Zbytek tvoří pseudonáhodný výběr pěkných geometrických úloh různých obtížností, na jejichž řešení nejsou potřeba hluboké znalosti.

Nejprve si svižně projedeme několik typických „provarů", které je dobré znát, a pak se pustíme do řešení vesměs náhodných úloh. Budeme se snažit úlohy nejen vyřešit, ale i uvědomit si, proč naše řešení vede zrovna touto cestou. Úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.

Výzva. Kreslete si (co nejhezčí) obrázky! Často je daleko těžší přijít na to, co v obrázku platí, než to pak dokázat.

Základní vzdělání

Tvrzení. (Mocnost) *Dokažte, že spojnice průsečíků dvou protínajících se kružnic půlí jejich společnou tečnu (jakožto úsečku danou body dotyku).*

Tvrzení. (Bod Š) *Je dán trojúhelník ABC. Průsečík $\check{S}_a$ osy vnitřního úhlu u A a osy BC leží na kružnici opsané a je středem kružnice $BICE_a$, kde I a E_a jsou postupně vepsiště a A-připsiště.*

Tvrzení. (Shooting lemma) *Je dána tětiva BC kružnice k a střed jejího oblouku $\check{S}_a$. Jím procházející přímky p, q protnou přímku BC a kružnici k ve čtyřech bodech ležících na jedné kružnici.*

Tvrzení. (Equal tangents) *Body dotyku kružnice vepsané a připsané se stranou trojúhelníka jsou symetrické podle jejího středu.*

Kolik úloh dáte?

Úloha 1. Vnější společné tečny dvou neprotínajících se kružnic se jich dotýkají ve vrcholech rovnoramenného lichoběžníku. Dokažte, že jeho úhlopříčka vytíná na obou kružnicích stejně dlouhé tětivy.

Úloha 2. Mějme trojúhelník ABC s obvodem 4. Na polopřímkách AB a AC označme postupně body X, Y tak, že $|AX| = |AY| = 1$ a úsečky BC a XY se protínají v bodě M. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABM, ACM má obvod 2.

Úloha 3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Na stranách AB a AC zvolíme po řadě body M, N. Kružnice s průměry BN a CM se protínají v bodech P a Q. Dokažte, že body P, Q a ortocentrum H trojúhelníka ABC leží na přímce.

(KMS 2003)

Úloha 4. Dokažte, že kolmiště je středem kružnice vepsané trojúhelníku s vrcholy v patách výšek.

Úloha 5. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. (MO 53–III–4)

Úloha 6. Ve čtverci $ABCD$ označme M střed strany AB. Kolmice na MC procházející bodem M protíná stranu AD v bodě K. Ukažte, že $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle KCM|$.

Úloha 7. V trojúhelníku ABC se vepsaná kružnice dotýká strany BC v bodě D. Přímka $\check{S}_a D$ protne opsanou v bodě X. Dokažte, že $|\sphericalangle IXA| = 90°$, kde I je vepsiště trojúhelníka ABC.

Úloha 8. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (IMO 2014)

Úloha 9. Na straně BC ostroúhlého trojúhelníka ABC s kolmištem H je dán bod D. Kolmice na DH vedená bodem H protne strany AB, AC v bodech F, E. Dokažte, že

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|FH|}{|HE|}.$$

(Polsko)

Úloha 10. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v bodě P. Označme K, L paty kolmic z P na AB, CD a dále buď M střed strany AD. Dokažte, že $|MK| = |ML|$. (USA TST 2000)

Úloha 11. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ svírá spojnice středu stran BC a AD stejné úhly s oběma úhlopříčkami. Dokažte, že tyto úhlopříčky jsou stejně dlouhé.

(ARO 1990)

Úloha 12. V trojúhelníku ABC označme A_0 patu výšky z vrcholu A. Ukažte, že paty kolmic vedených z bodu A_0 na zbylé strany trojúhelníka a zbylé výšky leží v přímce.

Úloha 13. Úhlopříčky AC a BD tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v P. Středy kružnic opsaných $ABCD$, ABP, BCP, CDP a DAP označme postupně O, O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že OP, O_1O_3 a O_2O_4 procházejí jedním bodem.

Úloha 14. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 120°$. Označme D, E a F průsečíky os úhlů se stranami BC, AB, AC. Dokažte, že $|\sphericalangle EDF| = 90°$.

Úloha 15. Na straně AB pravoúhlého lichoběžníku $ABCD$ $(AD \parallel BC \perp AB)$ zvolíme bod X tak, aby $\sphericalangle CXD$ byl pravý. Dokažte, že se kolmice na CX skrz B a kolmice na DX skrz A protínají na CD.

Návody

1. Dokreselete chordálu kružnic.

2. Dokreslete připsanou kružnici k ABC a kružnici se středem v A a nulovým poloměrem.

3. Thaletovka a mocnost.

4. Vyúhlete.

5. Vyúhlete. Lépe se přenáší ty úhly, které mají na kružnici opsané čtverci svoji tětivu.

6. Najděte tětivák.

7. Dokažte $\sphericalangle \check{S}_a ID = \sphericalangle \check{S}_a XI$. Použijte vlastnosti bodu Š a Shooting lemma.

8. Dokreslete středy AB a AC a těžnicemi vyrobte podobné trojúhelníky

9. Na polopřímku BH naneste X, aby $|BH|/|HX| = |BD|/|DC|$, a odhalte kolmiště.

10. Středy PA a PD, jakožto středy přepon pravoúhlých trojúhelníků, vůbec nejsou špatné body.

11. Dokreslete střed AB.

12. Vyúhlete, že tři z daných bodů leží v přímce.

13. Odhalte rovnoběžníky a dokažte, že tam opravdu jsou.

14. Čím je E vůči ADC?

15. Využijte obdélník a jen ověřte nějaký poměr.

Zdroje

[1] Pepa Tkadlec: *Dokreslování*, Horní Lysečiny, 2013

Dále jsem čerpal z různých soutěží.

Magické čtverce

Bára Kociánová

Abstrakt. Příspěvek se zabývá magickými čtverci, které patří spíše do rekreační matematiky. Popisuje jejich základní vlastnosti, uvádí zajímavosti z historie a na závěr podává návod, jak vytvořit magický čtverec lichého řádu.

Definice. Mějme čtvercovou mřížku $n \times n$. Pokud se nám podaří vyplnit ji po sobě jdoucími čísly tak, aby součet čísel v řádcích, sloupcích i na hlavních diagonálách byl stejný, nazveme výsledek *magickým čtvercem*. Počtu řádků n říkáme *řád* magického čtverce, součtu čísel v řádku pak *magická konstanta*.

Poznámka. Ať ke všem číslům v magickém čtverci přičteme libovolnou konstantu, budou se součty v řádcích, sloupcích a diagonálách i nadále rovnat. Totéž platí o vynásobení stejným číslem. Proto se budeme bavit pouze o magických čtvercích obsahujících čísla od 1 do n^2.

Cvičení. Jak se obecně spočítá magická konstanta?

Kolik jich je?

Magický čtverec prvního řádu je jeden, a je naprosto nezajímavý. Druhého řádu nelze vytvořit, protože mezi čísly od jedné do čtyř jsou jen dvě dvojice čísel, jejichž součet je pět. To je magická konstanta pro $n = 2$, neboť $n(n^2 + 1)/2 = 10/2$.

Čtverec 3×3 existuje pouze jeden. Všechny ostatní jsou jen variacemi, které vzniknou otočením nebo převrácením podél nějaké osy symetrie.

Cvičení. Proč není čtverců 3×3 více?

Zní to jako málo? Magických čtverců řádu čtyři už je 880. Přišel na to v roce 1693 Bernard Frénicle de Bessy a dokonce je i všechny sestrojil, nicéně první analytický důkaz tohoto počtu vznikl až v roce 1982. Čtverců 5×5 je 275305224, což je poznatek z roku 1974, a pro řád 6 to ještě ani nikdo nespočítal.

Proč magické?

Pravděpodobně se čtvercům popsaných vlastností říká magické ze dvou důvodů. Prvním je krása stejných součtů a některé další vlastnosti, které se dají ve čtvercích objevit. Tím druhým a možná důležitějším je pak skutečnost, že magické čtverce se často objevovaly na nejrůznějších amuletech a talismanech, kterým měly zajistit čarovnou moc.

Magické čtverce jsou známé už velmi dlouho, podle některých zdrojů to jsou dokonce nejstarší matematické objekty uvedené v literatuře. Údajně to bylo v knize Zhuang Zi, která pochází zhruba ze čtvrtého století př. n. l. Zmiňuje i legendu vysvětlující, jak se magický čtverec řádu tři v Číně objevil.

Císař Jü zvaný Velký se prý za své vlády potýkal s mnoha povodněmi, a proto budoval hráze a přehrady. Když jednou stál u řeky Luo, vynořila se z ní želva, která měla na krunýři obrazec později nazvaný Luoshu. A to byl právě magický čtverec, jen místo čísel využíval odpovídající počty teček.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Čtverce v umění i na šachovnici

Nejen matematiky magické čtverce fascinovaly – například německý výtvarník Albrecht Dürer v roce 1514 vytvořil rytinu známou pod názvem Melancholia I., v jejímž pravém horním rohu se nachází magický čtverec čtvrtého řádu. Zajímavá jsou na ní hlavně čísla 15 a 14 umístěná vedle sebe uprostřed v posledním řádku, která odpovídají právě roku vzniku.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Další číselný čtverec řádu čtyři je na fasádě barcelonské katedrály Sagrada Família. Ten ale neobsahuje čísla po sobě jdoucí. Od čtyř čísel totiž autor odečetl jedničku, aby snížil magickou konstantu ze 34 na 33, Kristův věk při ukřižování.

Americký státník, zakladatel druhé nejstarší univerzity v USA a vynálezce hromosvodu Benjamin Franklin uměl doplnit čísla do magického čtverce rozumné velikosti stejně rychle, jako by je jen psal. S tím se však nespokojil, neboť to prý považoval za docela běžnou schopnost, a tak vymyslel čtverec 8×8 (a později i 16×16) splňující řadu dalších vlastností.

Například polovina každého řádku a sloupce dává součet 130, což je polovina magické konstanty. Můžete v něm zkusit najít i další zajímavosti:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

S magickými čtverci si samozřejmě hráli i významní matematici. Leonhard Euler si okolo roku 1759, když už byl docela slepý, lámal hlavu nad tím, jestli může šachový kůň přeskákat všechna pole šachovnice. Řešení nalezl, a navíc přišel na to, že pokud do každého pole vepíšeme pořadí, v jakém na něj kůň doskáče, dostaneme *polomagický čtverec* řádu osm. To znamená, že součty na diagonálách neodpovídají těm v řádcích a sloupcích.

Od té doby si matematici kladli otázku, jestli neexistuje i nějaká magická cesta koně po šachovnici. Odpověď jim dal až počítač v roce 2003, kdy našel všechny možné cesty, z nichž bylo 140 polomagických, ale magický čtverec netvořila žádná.

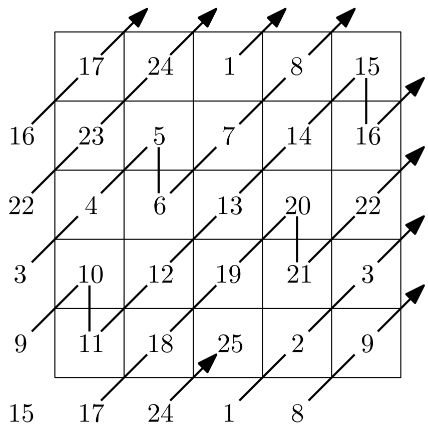
1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Vytvoření magického čtverce

Staří Číňané hledali magické čtverce prostým napsáním čísel (shora dolů a zprava doleva, jak měli ve zvyku) a následným prohazováním rohů, řádků, sloupců, dokud všude nevyšel správný součet. Pro čtverec 3×3 to je snadné, nicméně u větších už to muselo trvat docela dlouho.

Postupně byly objeveny různé elegantnější metody, ta nejznámější pro čtverce lichého řádu pochází ze 17. století, nese název Siamská a je prý výtvorem francouzského velvyslance v Siamu, Simona de la Loubère. Pro čtverce sudých řádů existuje zvlášť metoda pro řády tvaru $4k$ a $4k + 2$, nicméně ani jedna není tak snadná a kouzelná, proto je vynecháme.

Siamská metoda začíná napsáním jedničky do prostředního pole prvního řádku. Dále se vždy podíváme o jedno pole nahoru a doprava, přičemž pokud utečeme z tabulky, vrátíme se do ní na druhé straně. Tedy řádek o jeden výše než první je poslední, sloupec za posledním je první atd. Pokud je toto pole volné, dopíšeme na něj následující číslo. Pokud už je zabrané, napíšeme příští číslo o řádek níž. Nejlépe se postup pochopí z následujícího čtverce:



Cvičení. Proč uvedená metoda vytvoří magický čtverec?

Řešení. Stačí si rozmyslet, že v každém řádku, sloupci i diagonále budou vždy čísla s n různými zbytky po dělení n a s n různými celými částmi po dělení n. Důležité je, že úhybný manévr děláme po n krocích a číslo $nk + 1$ napíšeme o dva řádky níž a o jeden sloupec doleva oproti číslu $n(k-1)+1$, kde k značí pořadí vyplňované diagonály.

Cvičení. Zdůvodněte, proč podobná metoda nefunguje pro čtverce sudého řádu.

Řešení. Protože vyplňujeme čísla po lámaných diagonálách, musí být na hlavní diagonále vedoucí z levého dolního do pravého horního rohu n po sobě jdoucích čísel, která dávají správný součet. Takovým budeme pro tuto chvíli říkat *diagonální*.

Ověříme, jestli je součet čísel $(n^2-n)/2+1, \ldots, (n^2-n)/2+n$ roven magické konstantě:

$$n \cdot \frac{n^2-n}{2} + 1 + \cdots + n = n \cdot \frac{n^2-n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Výraz napravo je vzoreček pro výpočet magické konstanty. Vidíme tedy, že jsme našli diagonální čísla, ačkoli nevíme, kam na hlavní diagonálu máme nejmenší z nich umístit.

Dále zjistíme, kolik čísel je před těmi diagonálními. Je jich $(n^2-n)/2+1-1 = n(n-1)/2$. Všimneme si, že pro sudé n tento výraz není dělitelný n. Číslo $n-1$ je totiž nutně liché a dvojka ze jmenovatele se zkrátí s n.

Prvních $(n^2 - n)/2$ čísel tedy nevyplní celý počet lámaných diagonál, proto na hlavní diagonále nemůže být nejmenším číslem $(n^2 - n)/2 + 1$, a tudíž čísla na hlavní diagonále nedávají správný součet.

Literatura a zdroje

[1] Swetz, J., F.; *Legacy of the Luoshu*
[2] Polášek M.; *Latinské a magické čtverce*, is.muni.cz/th/211209/prif_m/
[3] Roskovec, T.; *Magické čtverce*, mks.mff.cuni.cz/library/

Goniometrie pomocí komplexních čísel

Matěj Konečný

Abstrakt. Pokročilá přednáška o využití komplexních čísel k řešení goniometrických úloh. Ukážeme si, jak vyjádřit goniometrické funkce pomocí exponenciálního tvaru komplexních čísel a jak tím převést goniometrickou úlohu na úlohu algebraickou. Je potřeba vědět něco o goniometrii, o komplexních číslech, mít dobrou praxi s úpravou výrazů a umět pracovat s aritmetickými a geometrickými řadami a notací sumy a produktu.

Komplexní čísla a jejich exponenciální tvar

Platí, že $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Potom můžeme každé komplexní číslo z, jehož goniometrický tvar je $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, zapsat zkráceně jako $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

Základní vzorce

Máme

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Sečtením, respektive odečtením těchto dvou rovností můžeme vyjádřit

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right).$$

Pokud označíme $z = e^{ix}$, máme

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Rozumíme si?

Cvičení. Odvoďte $\sin(kx)$, $\cos(kx)$.

Řešení. Víme, že $\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$. Dosazením $y = kx$ dostaneme

$$\begin{aligned}\sin(kx) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\left(e^{ix}\right)^k - \left(e^{-ix}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(z^k - z^{-k}\right).\end{aligned}$$

U $\cos(kx)$ postupujeme analogicky.

Cvičení. Dokažte $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cvičení. Vyjádřete $\tan x$, $\cot x$ v závislosti na z.

Cvičení. Dokažte platnost součtových vzorců pro $\sin x$, $\cos x$.

Brnkačka

Úloha 1. Vyřešte $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

Úloha 2. Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$. Dokažte:

(i) $3\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma)$

(ii) $3\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma)$

Úloha 3. Zjednodušte:

$$\prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x.$$

Úloha 4. Zjednodušte:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

Odmocniny z jedničky

Nechť $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$ a $z = e^{i\vartheta}$. Potom $z^n = 1$.

Lemma (Užitečné). *Mějme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a označme n-tý primitivní kořen jedničky jako w (tedy $w^n = 1$ a zároveň $\forall m \in \mathbb{N}, m < n : w^m \neq 1$). Potom pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\prod_{k=0}^{n-1}(x - w^k) = x^n - 1.$$

Idea důkazu. Představme si to jako polynom v x a porovnejme kořeny.

Úloha 5. Najděte $2\cos 72°$.

Řešení. $72° = \frac{2\pi}{5}$. Označme $z = e^{\frac{2\pi}{5}i}$. Potom $z^5 - 1 = 0$, ale protože zřejmě $z \neq 1$, máme

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

My chceme najít $t = z + \frac{1}{z}$. Vydělíme-li rovnost z^2 a přeuspořádáme, dostaneme $(z^2 + z^{-2}) + (z + z^{-1}) + 1 = 0$, tedy $(t^2 - 2) + t + 1 = 0$, což znamená, že $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (druhý kořen je záporný, zatímco $2\cos 72° > 0$).

Úloha 6. Zjednodušte

$$\sum_{k=1}^{1007} \cos^{2014}\left(\frac{k\pi}{1007}\right).$$

(HMMT 2014)

Úloha 7. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^n \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

(ISL)

Úloha 8. Nechť $x = \frac{\pi}{7}$. Zjistěte číselnou hodnotu $\tan x \tan 2x \tan 3x$.

Úloha 9. Ukažte, že

$$\sum_{k=1}^{90} 2k \sin 2k° = 90 \cot 1°.$$

(USAMO 1996, Myšmaš 2015)

Trojúhelníky

V následujících sekcích se trojúhelník bude vždy[1] jmenovat ABC s příslušnými úhly α, β a γ. Délky stran budeme značit $|BC|$, $|CA|$ a $|AB|$, obsah S (případně S_{ABC}), poloměr kružnice opsané R a kružnice vepsané r. V řešeních budeme značit $a = e^{i\alpha}$, b a c analogicky (**pozor**, nezaměnit za délky stran).

Trojúhelníky pro začátečníky

Nejprve si ukážeme úlohy, kde se vyskytují pouze goniometrické funkce s úhly v trojúhelníku. Jediné, co k tomu potřebujeme vědět, je, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Potom totiž

$$abc = e^{i\alpha} e^{i\beta} e^{i\gamma} = e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i\pi} = -1.$$

Úloha 10. Ukažte, že v trojúhelníku ABC platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Řešení. Převedeme do komplexních čísel a vynásobíme čtyřmi. Úloha je pak ekvivalentní s

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 + \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) = 4.$$

To upravíme na

$$4 = \sum_{cyc}\left(a^2 + a^{-2} + 2\right) + abc + \frac{1}{abc} + \sum_{cyc}\left(\frac{ab}{c} + \frac{c}{ab}\right).$$

Pomocí $abc = -1$ to převedeme na

$$0 = \sum_{cyc}\left(a^2 + a^{-2}\right) + \sum_{cyc} -\left(c^{-2} + c^2\right),$$

což platí.

Úloha 11. Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí

$$\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha = 1.$$

[1] Až na konečný počet případů.

Úloha 12. Dokažte, že pokud v trojúhelníku ABC platí

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

pak je ABC pravoúhlý.

Úloha 13. Buď ABC trojúhelník, v němž platí

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1.$$

Dokažte, že jeden z úhlů α, β, γ je roven $120°$. (AIME)

Trojúhelníky pro drsňáky

V olympiádních úlohách se obvykle vyskytují i nějaké negoniometrické věci jako například délky stran, obsahy nebo poloměry kružnice vepsané či opsané. Ukážeme si vzorečky, pomocí nichž si všechny tyto parametry vyjádříme v závislosti na R. Protože jsou v R z principu všechny identity homogenní (jsou invariantní vzhledem ke zvětšování), všechna R se nám nakonec vykrátí a zbyde nám k dokázání pouze goniometrická identita.

1) Podle sinové věty je $|BC| = 2R\sin\alpha$ (a cyklicky).

2) $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

3a) $r = \dfrac{2S}{|BC| + |AC| + |AB|}$.

3b) $r = 4R \sin\dfrac{\alpha}{2} \sin\dfrac{\beta}{2} \sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Úloha 14. Dokažte, že

$$\sum_{cyc} |BC|^3 \cos(\beta - \gamma) = 3|AB| \cdot |BC| \cdot |CA|.$$

Úloha 15. Dokažte identitu *3b)*.

Úloha 16. Dokažte, že ostroúhlý trojúhelník ABC je rovnoramenný právě tehdy, když

$$|BC|\cos\beta + |AC|\cos\gamma + |AB|\cos\alpha = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2}.$$

Úloha 17. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí

$$\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Návody

1. Zkuste tu goniometrii převést do komplexních čísel.

2. $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

3. Vynásobte to $z - z^{-1}$.

4. Geometrická řada.

6. Použijte binomickou větu a pak prohoďte pořadí vnořených sum.

7. Umocněte na druhou, na levé straně využijte $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pak užitečné lemma.

8. Nemáte šanci, zeptejte se mě na řešení. Fakt to chcete zkusit? Dobře:

$$\sin 7x = 0 \Leftrightarrow \Im(\cos 7x + i \sin 7x) = 0,$$

použijte Moivreovu větu a Viètovy vztahy.

9. Vynásobte to $z - z^{-1}$.

11. Vynásobte společným jmenovatelem a pak obě strany roznásobte.

12. ABC je pravoúhlý právě tehdy, když $i \in \{a, b, c\}$.

13. $120^\circ \in \{a, b, c\} \Leftrightarrow \left(a^3 - 1\right)\left(b^3 - 1\right)\left(c^3 - 1\right) = 0$.

14. Nebojte se roznásobit, vyjde to symetricky.

15. Definujte $\sqrt{z}$ pro $z = e^{i\varphi}$ jako $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}i\varphi}$ (funguje pouze pro $0 \le \varphi < 2\pi$).

16. ABC je rovnoramenný, pokud

$$\big(|AB| - |BC|\big)\big(|BC| - |CA|\big)\big(|CA| - |AB|\big) = 0.$$

17. Drsňáci nepoužívají hinty.

Zdroj

[1] Vincent Huang: *Complex Numbers in Trigonometry*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c13188h609795

MOP

Matěj Konečný

Abstrakt. I když MO-P znamená Matematická olympiáda, kategorie programování, k jejímu (úspěšnému) řešení není třeba umět programovat. Každé kolo je alespoň z části teoretické, přičemž teoretické úlohy jsou rozhodně blíže úlohám z matematické olympiády než nějaké práci s počítačem. Na přednášce si ukážeme, jak se dostat do celostátka MO-P jen s minimem práce.

Úvod

MO-P se v posledních letech potýká s nedostatkem řešitelů, což také znamená, že je velmi jednoduché dostat se z domácího kola do krajského a z krajského do celostátního. Například ve školním roce 2013/14 stačilo pro postup z domácího kola 5 bodů ze 40 a pro postup z krajského kola 15 bodů ze 40. Nenaučíme se, jak MO-P vyhrát ani jak vyřešit úlohy optimálně. Naučíme se pouze, jak vyřešit úlohy nějak, což pro postup do celostátka stačí.

Úloha 1. Dostaneme číslo a několik operací s ním (např. $+2$, $\cdot 6$, -100, $!$, ^{4}, $\ldots$) a chceme najít takovou posloupnost těchto operací (operace se vyhodnocují postupně zleva doprava), aby byl výsledek co největší.

Úloha 2. Máme posloupnost čísel a chceme najít takovou souvislou podposloupnost, aby měla co největší součet.

Úloha 3. Chceme vykrást zlatnictví. Každý předmět ve zlatnictví má cenu a váhu. My uneseme jenom m a chceme si vzít takové předměty, abychom si odnesli co největší bohatství.

Úloha 4. (Bonus) Máme posloupnost čísel a chceme je seřadit od nejmenšího po největší.

Co to vlastně je programování? O čem úlohy jsou?

Citát. Napsal jsem tam, že vyzkoušíme všechny možnosti ve faktoriálové složitosti, a dostal jsem se na celostátko.

(Totožnost autora výroku je redakci známa.)

Definice (vágní). *Program* je posloupnost kroků, má vstup a výstup. Vstup je třeba číslo, několik čísel, nějaký text, graf atd. V programu můžete používat proměnné, konstanty, základní aritmetické operace a přiřazování. Navíc můžete používat podmínky (pokud je tohle pravda, udělej a, jinak b) a cykly (dokud je tohle pravda, dělej a).

Příklad 5.

1. Načti čísla a, b.
2. Nastav $c := 0$.
3. Dokud $b > 0$:
4.   Nastav $c := c + a$.
5.   Sniž b o 1.
6. Vrať c.

Příklad 6.

1. Načti posloupnost čísel $a[i]$ dlouhou n.
2. Nastav $b := -\infty$.
3. Pro každé i od 1 do n:
4.   Pokud $a[i] > b$:
5.   Nastav $b := a[i]$.
6. Vrať b.

Příklad 7.

1. Načti posloupnost čísel $a[i]$ dlouhou n.
2. Pro každé i od 1 do n:
3.   Označ j pozici minima z prvků $a[i], \ldots, a[n]$.
4.   Prohoď $a[i]$ s $a[j]$.
5. Vrať posloupnost $a[i]$.

Složitost

U úloh je třeba určit časovou a paměťovou složitost. Časová složitost znamená, kolik řádově operací program provede v závislosti na velikosti vstupu. Paměťová složitost znamená, kolik řádově zabere paměti v závislosti na velikosti vstupu. Velikost vstupu je typicky třeba počet čísel nějaké posloupnosti či počet vrcholů a hran nějakého grafu.

Zajímá nás pouze, „jak rychle ta časová složitost roste“, tzn. provede-li program například $3n^2 - n + 6$ kroků, chceme jen, že to roste řádově jako n^2. Potom říkáme, že časová složitost programu je v $\mathcal{O}(n^2)$.

Odkazy

[1] KSP Kuchařka: *http://ksp.mff.cuni.cz/encyklopedie/kucharky/programatorske-kucharky.html*

[2] Stránky MO-P: *http://mo.mff.cuni.cz/p/*

Vietove vzťahy

Marta Kossaczká

Abstrakt. Príspevok oboznamuje s Vietovými vzťahmi a ukazuje ich použitie v algebraických úlohách.

Zopakujme si nejaké definície

Definícia. *Polynomická funkcia* (polynóm, mnohočlen) premennej x je funkcia tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazývame *koeficienty* polynómu. Výrazy $a_i x^i$ voláme *členy* polynómu. Člen a_0 voláme *absolútny člen.*

Definícia. Polynóm $P(x) = 0$ (t.j. taký, ktorého všetky koeficienty sú nulové) voláme *nulový. Stupeň* nenulového polynómu definujeme ako najväčšie n také, že $a_n \neq 0$, a toto a_n je *vedúci koeficient.*

Definícia. Číslo r voláme *koreň* polynómu, ak platí $P(r) = 0$.

Vietove vzťahy v polynómoch stupňa 2

Tvrdenie. *Majme polynóm $P(x) = ax^2 + bx + c$ s koreňmi r_1, r_2. Potom platí*

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a},$$
$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}.$$

Dôkaz. Nie je ťažký. Stačí si uvedomiť, že ak je a vedúci koeficient polynómu $P(x)$ a x_1, x_2 jeho korene, potom platí

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Požadované rovnosti dostávame po roznásobení a porovnaní koeficientov v jednotlivých členoch. $\square$

Úloha. Majme kvadratickú rovnicu $x^2 - 7x + 5 = 0$ s koreňmi α a β. Spočítajte $\alpha^2 + \beta^2$.

Riešenie. Z Vietových vzťahov pre našu rovnicu dostávame $\alpha + \beta = 7$ a $\alpha\beta = 5$, ďalej si upravíme

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta,$$

dosadíme a dostávame hľadaný výsledok $49 - 10 = 39$.

Predchádzajúce tvrdenie sa dá zovšeobecniť pre polynómy ľubovolného stupňa.

Vietove vzťahy

Tvrdenie. *Majme polynóm $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ stupňa n s koreňmi $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Potom platí pre každé $i \in \{0, \ldots n\}$*

$$\frac{a_i}{a_n} = (-1)^{n-i} \cdot \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-i}} r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{j_{n-i}},$$

kde $j_k \in \{0, \ldots n\}$.

Dôkaz je analogický ako pre polynómy druhého stupňa.

Príklad 1. Majme polynóm $x^2 - 3x - 1$ s koreňmi a a b. Nájdite polynóm druhého stupňa, ktorý má korene a^2, b^2. Spočítajte

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}.$$

Príklad 2. Polynóm $x^3 - 3x^2 + 1$ má korene a, b, c. Nájdite polynóm tretieho stupňa, ktorý má korene a^2, b^2, c^2.

Príklad 3. Nájdite všetky možné hodnoty čísel p, q tak, aby $p + q = 198$ a aby polynóm $x^2 + px + q$ mal dva prirodzené korene.

Príklad 4. Polynóm $5x^3 - 11x^2 + 7x + 3$ má korene a, b, c. Spočítajte $a^3 + b^3 + c^3$.

Príklad 5. Tri korene polynómu $x^4 + ax^2 + bx + c$ sú 2, -3, 5. Spočítajte $a + b + c$. (HMMT 1998)

Príklad 6. Nájdite všetky možné hodnoty m tak, aby polynómy $x^2 + mx - 3$ a $x^2 - 4x - m + 1$ mali spoločný koreň.

Príklad 7. Máme tri reálne čísla x, y, z také, že $x = 6 - y$ a $z^2 = xy - 9$. Dokážte, že $x = y$.

Príklad 8. Korene polynómu $x^3 + 3x^2 + 4x - 11$ sú a, b, c. Korene polynómu $x^3 + rx^2 + sx + t$ sú $a + b$, $b + c$, $c + a$. Určite r, s, t. (AIME 1996)

Príklad 9. Nájdite súčet všetkých koreňov polynómu $x^{2015} + (\frac{1}{2} - x)^{2015}$.

Príklad 10. Súčin dvoch koreňov polynómu $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$ je -32. Určite k. (USAMO 1984)

Príklad 11. Nájdite všetky polynómy

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

také, že $a_i = \pm 1$ pre všetky $0 \leq i \leq n - 1$, ktoré majú n reálnych koreňov.
(1968 Putnam Exam)

Literatúra a zdroje

[1] *http://www.math.cmu.edu/ mlavrov/arml/13-14/polynomials-02-09-14.pdf*
[2] *http://www.slideshare.net/RongYifei/application-of-vietas-theorem*
[3] *https://brilliant.org/wiki/vietas-formula/*

Kombinatorické hry, Nim a SG funkce

Kuba Krásenský

Abstrakt. První část příspěvku představuje základní způsoby řešení kombinatorických her a ilustruje je na velkém množství příkladů. Druhá část se věnuje hře Nim, sčítání her a Spragueově–Grundyho funkci. Příspěvek je zkrácenou verzí PraSečího seriálu z 32. ročníku napsaného Alčou Skálovou.

Nejhravější oblastí olympiádní matematiky je pochopitelně teorie (kombinatorických) her. Nějaké hry zná každý z nás, ale zdaleka ne všechny je možné zkoumat a zcela vyřešit pomocí elementárních nástrojů – podívejme se proto nejprve na to, co odlišuje hry kombinatorické od her jiných, ať už míčových, společenských, maticových, nebo divadelních.

Kombinatorickou hrou nazveme hru s následujícími vlastnostmi:

(1) Hrají dva *hráči* proti sobě.
(2) Hráči se pravidelně střídají. Není-li uvedeno jinak, hráč nesmí vynechat tah.
(3) Je dáno (zpravidla konečně mnoho) *pozic*, ve kterých se hra může nacházet. Jedna z pozic je označena jako *startovní*. Pozicím, ve kterých hra končí, a to buď *výhrou* jednoho z hráčů a *prohrou* druhého, nebo *remízou*, se říká *koncové*.
(4) Pravidla hry určují pro každého hráče všechny přípustné *tahy* z každé pozice.
(5) Ve hře nejsou žádné náhodné prvky.
(6) Oba hráči mají *úplnou informaci*.
(7) Oba hráči jsou *racionální*.

Často se ještě přidává podmínka, že hra má být *konečná*, čili má skončit po konečném počtu kol bez ohledu na to, jak hráči hrají.

Strategie

Strategií hráče rozumíme soubor rozhodnutí, jaké tahy volit v jednotlivých pozicích hry.[1] *Vyhrávající strategie* je taková, která vede k vítězství hráče bez ohledu na to, jak chytře hraje jeho protihráč (tedy bez ohledu na protihráčovu strategii). Obdobně, má-li jeden z hráčů *neprohrávající strategii*, znamená to, že pokud se jí bude držet, hru neprohraje, ať jeho soupeř hraje sebelépe. Hra tedy buď skončí vítězstvím tohoto hráče, nebo bude jejím výsledkem remíza.

[1] Přesněji lze definovat strategii jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče.

Uvědomme si, že obecně existují dvě formy remízy (obě mohou nastat například v šachách). Buď hra přímo skončí v pozici, kterou pravidla posoudí jako remízovou, nebo neskončí v konečném počtu tahů – neboli nikdy se nedostane do koncové pozice.

Vyhrávající a prohrávající pozice

V této kapitole budeme uvažovat pouze konečné hry nepřipouštějící remízu. V takových hrách můžeme každou pozici označit buď jako vyhrávající (V), nebo jako prohrávající (P). Jak už název napovídá, nachází-li se hráč ve *vyhrávající pozici*, pak (bude-li hrát, jak nejlépe lze) hru vyhraje. Naopak, nachází-li se v *prohrávající pozici*, hru nutně prohraje (pokud jeho soupeř neudělá chybu).

Nejlepší bude osvětlit si právě zavedené pojmy na příkladu.

Hra 1. Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

Z úvah o vyhrávajících a prohrávajících pozicích vyplývá následující věta, kterou často používáme, aniž bychom si toho byli vědomi.

Věta. (O vyhrávající strategii) *V konečné hře nepřipouštějící remízu má právě jeden z hráčů vyhrávající strategii.*

Zamyšlení. Rozmyslete si, jak je potřeba přeformulovat předešlou větu a jak změnit její důkaz, pokud pravidla remízový závěr připustí. Také si promyslete, proč v předpokladech věty potřebujeme konečnost.

Když už známe všechny podstatné pojmy, můžeme se vesele pustit do hraní rozličných kombinatorických her. V následujících podkapitolách si postupně představíme různé metody hledání vyhrávajících a neprohrávajících strategií.

Zpětný rozbor

V podkapitole o vyhrávajících a prohrávajících pozicích jsme se naučili, jak v libovolné konečné kombinatorické hře nalézt vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů (máme-li dostatečnou výpočetní kapacitu). Tuto metodu budeme nazývat *zpětný rozbor*, cizím slovem *backtracking*, neboť hru vlastně (vy)řešíme od konce.

Zkusme s její pomocí vyřešit následující hry. Není-li řečeno jinak, pak „vyřešením“ hry se míní nejen nalezení vyhrávající strategie pro jednoho z hráčů, ale i její popsání.

Hra 2. Na stole leží 15 sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat 1 až 4 sirky. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 3. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranná věž – může se pohybovat jen doleva nebo dolů. Hráči se střídají v tazích, přičemž si mohou vybrat, o kolik polí (minimálně však o jedno) pohnou věží v jednom z povolených směrů. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 4. Na stole leží hromádka n sirek, kde n je libovolné přirozené číslo. Hráči z ní sirky střídavě odebírají a kdo nemůže hrát, prohrál. Tentokrát ale může hráč v jednom tahu odebrat 1, 2, nebo 4 sirky. Který hráč má (v závislosti na n) vyhrávající strategii? A co kdyby se směly odebírat všechny mocniny dvojky?

Hra 5. Pravidla jsou stejná jako v předchozí hře, ale kdo nemůže hrát, vyhrál.

Hra 6. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranný král (smí se pohybovat právě o jedno pole dolů, doleva nebo doleva dolů). Hráči jím střídavě táhnou a kdo nemůže hrát, prohrál.

Kradení strategií

Každý ví, že v šachách, dámě i piškvorkách má výhodu ten hráč, který začíná. Dokázat to ale umíme jen o jedné z těchto her – uhodnete, o které?

Tvrzení. *V piškvorkách má první hráč neprohrávající strategii.*

Principu, který se využívá v důkazu, se říká *kradení strategií* a je možné jej využít i při řešení dalších her.

Hra 7. (Přičítání dělitelů) Začíná se dvojkou. V jednom tahu hráč přičte k číslu jeho libovolného vlastního dělitele.[2] Kdo jako první překročí hodnotu 5773, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? A co kdyby ten, kdo první překročí 5773, vyhrál?

Hra 8. (Dvojité šachy) Pravidla jsou stejná jako v klasickém šachu s jediným rozdílem – hráč, který je na řadě, dělá tahy dva.

Hra 9. (Mazání dělitelů) Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, smaže nějaké číslo a spolu s ním všechny jeho dělitele, kteří na tabuli ještě zbyli. Prohrává hráč, který nemůže táhnout – tedy ten, na kterého zbyla čistá tabule.

Symetrie

Následující technika se dá použít ve hrách, které jsou určitým způsobem symetrické – umožňují hráči kopírovat soupeřovy tahy. Základní myšlenka by se dala popsat slovy „dokud může hrát soupeř, mohu i já“.

Hra 10. (Mince na stole) Loupežníci Kenny a Jarda ukořistili truhlu plnou zlatých kulatých mincí a rozhodli se zahrát si o ně hru. Odněkud vytáhli čtvercový stůl a postupně na něj pokládají mince. Ten, kdo je zrovna na řadě, na stůl položí jednu minci tak, aby (ani zčásti) neležela na jiné minci a nepřesahovala okraj stolu.[3] Začíná Kenny. Prohraje ten, kdo už na stůl nemůže položit další minci. Kdo má vyhrávající strategii? (MKS 27–2–5)

Hra 11. (Lámání čokolády) Riikka a Jussi dostali velkou (200 gramů, 4×8 kostiček) finskou hruškovou čokoládu a rozhodli se zahrát si s ní následující hru. Ve

[2] Vlastní dělitelé jsou dělitelé ostře menší než číslo samotné. Např. vlastní dělitelé čísla 12 jsou čísla 6, 4, 3, 2, 1.

[3] Všechny mince jsou stejně velké a stůl je tak obrovský, že se na něj vejde alespoň jedna mince.

svém tahu může hráč rozlomit (láme se rovně po vyznačených čárách) libovolný kus čokolády, který ještě rozlomit lze. Kdo rozlomí poslední kousek, vyhrál a může celou čokoládu sníst. Kdo vyhraje, začíná-li lámat Riikka a pravidelně se s Jussim střídají?

Hra 12. (Lámání čokolády bez 1×1) Na Vánoce Riikka s Jussim dostali jinou velkou (4×8 kostiček) finskou čokoládu, tentokrát peprmintovou. Protože minule se jim hra moc nelíbila, přidali pravidlo, že se nesmí ulamovat dílky velikosti 1×1. Kdo nemůže v souladu s pravidly táhnout, prohrál. Má začínající Riikka vyhrávající strategii, nebo si na čokoládě pochutná pro změnu Jussi? (MKS 21–7–3)

Hra 13. Dvě šachu znalá PraSátka – Kuba a Anička – střídavě pokládají jezdce své barvy na šachovnici tak, aby se žádná dvojice znepřátelených jezdců neohrožovala. Kdo nemůže položit dalšího jezdce, prohrál. Kuba je galantní a nechá Aničku začínat.

Hra 14. Je dána tabulka o rozměrech 17×68 políček. Hráč si ve svém tahu vybere nějaký podčtverec tabulky, ve kterém ještě není vybarveno žádné políčko, a celý ho vybarví. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Párování a obarvování

Není-li možné nalézt ve hře takovou symetrii, která by nám dovolila použít předchozí metodu, můžeme zkusit metodu *párování*. Myšlenka je stále stejná – „dát hráči do ruky odpověď na každý protihráčův tah". Často se tak děje rozdělením pozic do párů, odtud také název metody. Zahraje-li soupeř na jednu z pozic v páru, já zahraji na druhou. Další možností je rozdělení pozic/tahů do obecnějších skupin – viz následující příklad.

Hra 15. (Proužek čísel) Na proužku papíru je za sebou napsáno $2n$ čísel, kde n je libovolné přirozené číslo. Mišo sHáňou čísla postupně odstřihávají – ten, který je na řadě, si vybere jeden ze dvou konců a číslo na něm si ustřihne. Na konci oba sečtou všechna čísla, která si pro sebe ustřihli, a kdo má větší součet, vyhrál. Je-li součet stejný, nastává remíza. Který z nich má neprohrávající strategii, když Háňa začíná a pravidelně se v tazích střídají?

Hra 16. (Piškvorky do čtverce) Lukáše s Viktorem už přestalo bavit hrát při hodinách obyčejné piškvorky, a tak vymysleli obměnu – hrají na čtverečkovaném papíře 10×10. V každém tahu hráč nakreslí svůj symbol do volného pole. Lukáš vyhraje, pokud vytvoří ze svých symbolů čtverec 2×2, a Viktor vyhraje, když se mu v tom podaří zabránit. V tazích se pravidelně střídají, Lukáš začíná. Který z nich má vyhrávající strategii?

Hra 17. (Razítka) Vejtek se z dlouhé chvíle pustil do následující hry. Postupně dává na prázdná šachovnicová pole razítka, střídavě červené a zelené, a to tak, že nově orazítkované pole musí hranou sousedit s polem, které bylo orazítkováno těsně před ním. První – zelené – razítko může dát Vejtek kamkoliv. Prohrává ta barva, jejíž razítko už Vejtek nikam dát nemůže. Během celé hry Vejtek samozřejmě hraje co nejlépe podle toho, kterou barvu zrovna zastupuje – je-li na tahu zelené razítko, hraje Vejtek v jeho prospěch, a je-li na tahu razítko červené, pak hraje ve prospěch červeného.

Hra 18. (Trojúhelníkové piškvorky) Dva hráči hrají piškvorky na nekonečně velkém trojúhelníkovém papíře a střídají se v tazích. Ten, kdo je na tahu, vždy nakreslí svou značku do některého volného políčka. Vyhraje hráč, který má jako první nepřerušenou rovnou řadu (směřující jedním ze tří možných směrů podél čar trojúhelníkové sítě) alespoň n svých znaků, kde n je nějaké přirozené číslo. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající nebo neprohrávající strategii.

Zkuste si sami!

Podstatnou částí řešení rovněž bývá přijít na to, kterou metodu použít. Proto v této podkapitole najdete směs úloh, u kterých vám nikdo předem neprozradí, jakou metodou se mají řešit. Úlohy jsou přibližně seřazené podle obtížnosti.

Hra 19. (Dělitelnost sedmi) Dva hráči píší dvaceticiferné číslo tak, že zleva doprava střídavě připisují jednu cifru. První hráč vyhraje, pokud výsledné číslo nebude dělitelné sedmi. Druhý vyhraje, pokud dělitelné sedmi bude.

Hra 20. (Dělitelnost třinácti) Stejná hra jako předchozí, pouze vyměníme číslo 7 za 13.

Hra 21. (Plus minus) V řadě za sebou je napsáno několik minusů. Matěj s Jonášem střídavě překreslují jeden až dva sousední minusy na plus. Vyhraje ten, který překreslí poslední minus.

Hra 22. (Plus minus podruhé) Ema se rozhodla předchozí hru mírně pozměnit – minusy napsala do kruhu (tedy každé znaménko mělo na začátku dva sousedy), zbylá pravidla ponechala stejná.

Hra 23. (Kocouři) Dva kocouři dostali řetěz z n buřtů a střídavě přehryzávají spojnice mezi nimi. Buřty, které ve svém tahu osamostatní (tedy ty, které už nebudou spojeny s žádným jiným buřtem), snědí. Vyhraje ten kocour, který sní více buřtů. Řešte postupně pro $n = 6$, $n = 7$, libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Hra 24. (Šestiúhelníky) Helča s Alčou se neznámo kde dostaly k čokoládám ve tvaru pravidelného šestiúhelníku. Každá čokoláda je rozdělena na trojúhelníkové dílky. Hráčky si vybraly jednu čokoládu o hraně délky n a hrají s ní následující hru. Ta, která je na tahu, rozlomí (láme se rovně po vyznačených čárách) čokoládu na dvě části, z nichž jednu sní a druhou předá zpátky soupeřce. V tazích se pravidelně střídají, začíná Helča. Kdo nemůže táhnout, prohrává.

Hra 25. (Dvě hromádky) Šavlík s Mončou mají dvě (ne nutně stejně početné) hromádky kávových bonbónů. Hráč, který je na tahu, sní všechny bonbóny z jedné hromádky a druhou hromádku rozdělí na dvě – dle vlastního uvážení, ale v obou nových hromádkách musí být alespoň jeden bonbón. Pravidelně se střídají v tazích.

Kdo nemůže táhnout (což nastane právě tehdy, bude-li na obou hromádkách po jednom bonbónu), prohrál.

Hra 26. (Chomp) Tabulka čokolády je rozlámána na kostičky. Kostička v levém dolním rohu je otrávená (kdo ji sní, prohraje). Hráč si ve svém tahu vybere kostičku, sní ji a spolu s ní sní rovněž všechny kostičky v pomyslném obdélníku, jehož levým dolním rohem je právě vybraná kostička.[4] Hráči se pravidelně střídají v tazích. V závislosti na rozměrech určete, kdo zvítězí, je-li čokoláda

(i) čtvercová,
(ii) obdélníková.

Hra 27. (Barvení bodů) Pepa a Mirek obarvují body v rovině. Začíná Pepa obarvením jednoho bodu oranžově, poté Mirek obarví 100 bodů žlutě, Pepa jeden oranžově, Mirek 100 žlutě, ... Přebarvovat již jednou obarvené body není možné. Dokažte, že se Pepovi podaří vytvořit rovnostranný trojúhelník s oranžovými vrcholy.

Hra 28. (Piškvorky 2 : 1) Majkl s Ančou hrají piškvorky na nekonečně velkém papíře s následující úpravou pravidel. Začínající Anča v každém svém tahu nakreslí jeden křížek, zatímco Majkl nakreslí v každém tahu dvě kolečka. Majkl vyhraje, když vytvoří nepřerušenou řadu sta koleček – buď svisle, nebo vodorovně. Anča se mu v tom samozřejmě snaží zabránit. Dokažte, že Majkl má vyhrávající strategii.[5]

Hra Nim

Hra Nim je jednou z nejznámějších kombinatorických her. Nejde o nic jiného, než o odebírání[6] sirek, jehož obměny jsme potkali v minulé kapitole. Základní varianta hry je následující:

Hra 29. (Nim) Na stole je n hromádek, $n \in \mathbb{N}$, obsahujících postupně x_1 až x_n sirek. Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere jednu hromádku a odebere z ní libovolný počet sirek, minimálně však jednu. Hráč, který nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál. Pro hru s n hromádkami a počty sirek $x_1, \ldots, x_n$ budeme pozice zapisovat ve tvaru $(x_1, \ldots, x_n)$.

Cvičení 30. Vyřešte hru pro případ jedné a dvou hromádek.

Kdo si zkusil „ručně“ rozebírat možnosti, které nastanou při hraní Nimu o třech hromádkách, záhy zjistil, že je těžké vypozorovat ve struktuře vyhrávajících a prohrávajících pozic nějaký vzor. Naštěstí existuje metoda, jak i pro hromádky s větším počtem sirek rychle určit, zda se jedná o V, nebo P pozici. A co víc! Stejná metoda funguje nejen pro tři hromádky, ale i pro čtyři, pět, ... Pro její pochopení je potřeba zavést Nim-součet. Abychom jej odlišili od klasického součtu, budeme místo symbolu

[4] Tedy včetně kostičky samotné a kostiček přímo napravo a nahoru od ní.

[5] Jak víme, obecně má u nekonečných her jeden z hráčů pouze neprohrávající strategii. V této hře si ale Majkl umí zajistit výhru.

[6] Však také samotný název hry nejspíš pochází z německého „Nimm!“, tedy „Ber!“.

$+$ používat symbol $\oplus$. Budeme také využívat zápis čísel ve dvojkové soustavě, tj. například $11 = (1011)_2$.

Definice 31. (Nim-součet) *Nim-součtem* čísel $(x_m \dots x_0)_2$ a $(y_m \dots y_0)_2$ je takové číslo $(z_m \dots z_0)_2$, že pro každé $k = 0, 1 \dots, m$ platí $z_k = x_k + y_k \pmod 2$, neboli $z_k = 1$, pokud $x_k + y_k = 1$, a $z_k = 0$ jinak. Píšeme

$$(x_m \dots x_0)_2 \oplus (y_m \dots y_0)_2 = (z_m \dots z_0)_2.$$

Pro názornost si můžeme sčítance zapisovat pod sebe:

$$\begin{array}{r} 11010_2 \\ \oplus\ 1010011_2 \\ \hline 1001001_2 \end{array}$$

Tvrzení. *Pro Nim-součet libovolných tří nezáporných celých čísel x, y, z platí*

(i) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, (asociativita)
(ii) $x \oplus y = y \oplus x$, (komutativita)
(iii) $0 \oplus x = x$, (neutrální prvek)
(iv) $x \oplus x = 0$, (opačný prvek)
(v) $x \oplus y = 0 \Leftrightarrow x = y$. (jednoznačnost opačného prvku)

Díky vlastnosti (i) nezáleží na pořadí sčítání, a tedy budeme přebytečné závorky vynechávat. Bod (iv) znamená, že v Nim-sčítání je každý prvek opačný sám k sobě. Bod (v) budeme často mlčky využívat při hledání „vítězných“ tahů (tahů vedoucích do P pozic).

Tvrzení. (Pravidlo krácení) *Pokud pro nezáporná celá čísla x, y, z platí rovnost $x \oplus y = x \oplus z$, potom nutně $y = z$.*

Cvičení. Pro jaká x, y platí, že $x \oplus y = x + y$?

Jak vyhrát Nim

Následující větu dokázal v roce 1902 Charles L. Bouton. Na první pohled není jasné, jak spolu souvisí Nim (Hra 29) a binární zápis čísel, ale nenechte se tím zmást. Funguje to!

Věta. (Bouton) *Ve hře Nim s n hromádkami je pozice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prohrávající právě tehdy, když je Nim-součet velikostí jednotlivých hromádek roven nule, čili $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.*

Poznámka. Díky předchozí větě můžeme nejen rychle určit, je-li daná pozice V, či P, ale také kýžený tah z V pozice do P pozice najít. Zkusme si to na příkladu.

Cvičení. Jak spolu souvisejí hry (a, b, c) a $(a, b, c, 10, 10)$ pro libovolná přirozená čísla a, b, c?

Cvičení. Znáte-li pozice ve hře $(3, 5, 6)$ a nyní hrajete hru $(3, 5, 6, 9, 13, 21)$, je nutné rozebírat celou hru, nebo by stačilo zjistit, jak se hraje $(9, 13, 21)$ a „hrát každou hru zvlášť“? Fungovalo by to i v případě, že by pozice $(3, 5, 6)$ nebyla prohrávající?

Nim v převleku

Ve chvíli, kdy umíme hrát (a z každé vyhrávající pozice také skutečně vyhrát) Nim, umíme rázem hrát širokou škálu dalších her (alespoň teoreticky), neboť velká část konečných kombinatorických her se dá na Nim převést. Co to přesně znamená a jak se něco takového dokáže, si povíme v dalších podkapitolách. Teď zkusme najít vyhrávající strategie v následujících hrách. Nápověda je jasná – alespoň zčásti je v nich ukrytý Nim.

Hra 32. (Želvy) V řadě za sebou stojí/leží n želv. Každá želva buď stojí, tedy je nahoru krunýřem, nebo je vzhůru nohama. Dva hráči střídavě želvy obracejí. V jednom tahu si hráč vybere želvu, která je vzhůru nohama, obrátí ji nahoru krunýřem, a pokud chce, může ještě převrátit jednu libovolnou želvu nalevo od ní – ať už je nahoru krunýřem, nebo nohama. Hráč, který už nemůže převrátit žádnou želvu (všechny stojí na nohou), prohrál.

Hra 33. Mějme pásek polí očíslovaných $0, 1, 2, 3, \ldots$ a na pásku konečný počet mincí. Každá mince je na nějakém políčku, přičemž na jednom políčku jich může být i více. Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere nějakou minci a posune ji na libovolné pole nalevo od původního. S mincemi, které leží na nultém poli, už nejde hrát. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 34. (Northcott) Northcottova hra se hraje na šachovnici, na jejímž každém řádku je umístěný právě jeden bílý kámen a právě jeden černý kámen. Dva kameny nikdy nesmějí ležet na stejném poli. Dva hráči – Bílý a Černý – se pravidelně střídají v tazích. Hráč, který je na tahu, pohne jedním svým kamenem o libovolný počet polí doprava nebo doleva, přičemž nesmí opustit šachovnici ani přeskočit soupeřův kámen. Kdo nemůže hrát, prohrál.

Poznámka. Northcottova hra sice není konečná, ale přesto má jeden z hráčů vyhrávající strategii.

Hra 35. (Bídný Nim) Hraje se stejně jako klasický Nim s jedinou změnou – hráč, který nemůže táhnout, vyhrál.

Hra 36. (Nim_k) Mějme pevně dané číslo k. Hra je podobná jako Nim – na stole je n hromádek sirek, dva hráči z nich střídavě odebírají. Tentokrát smí ale hráč ve svém tahu odebrat sirky až z k různých hromádek. Z každé hromádky může vzít libovolné množství, celkem však musí odebrat alespoň jednu sirku.

Spragueova–Grundyho funkce

Abychom si usnadnili vyjadřování, zavedeme pojem *následníka* dané pozice – budeme tak označovat kteroukoliv pozici, do níž se ze zkoumané pozice dá dostat jedním tahem.

Definice 37. *Spragueova–Grundyho funkce* hry je funkce g přiřazující každé pozici nejmenší celé nezáporné číslo, které není Spragueovou–Grundyho hodnotou žádného z jejích následníků. Namísto celého názvu Sprague–Grundy budeme pro zkrácení psát často jen SG.

Stejně jako v případě V a P pozic definujeme hodnoty SG funkce „od konce“. Pokud už pro nějakou pozici známe hodnotu SG funkce všech jejích následníků, můžeme určit i její SG hodnotu. SG hodnota koncových pozic je z definice nulová.

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Nim s počáteční pozicí $(1, 2)$.

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Nim o jedné hromádce velikosti n.

Definice. O kombinatorické hře řekneme, že je *progresivně omezená*, pokud existuje takové přirozené číslo m, že každá hra skončí nejvýše po m tazích bez ohledu na to, jak hráči hrají.

Odteď se budeme dále zabývat jen hrami, které jsou progresivně omezené. Nim mezi ně zjevně patří – pro počáteční pozici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ skončí každá partie nejpozději po $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ tazích, jelikož každým tahem ubude minimálně jedna sirka.

A proč nás zajímají pouze progresivně omezené hry? Protože **pro každou progresivně omezenou hru existuje SG funkce, která je navíc jednoznačně určena!** Dokázat to není těžké – hodnoty SG funkce definujeme od koncových pozic a díky progresivní omezenosti budou mít všechny pozice konečnou hodnotu.

Pokud hra není progresivně omezená, SG funkce pro ni existovat může, nicméně teorie kolem jejího zavedení je o něco složitější a my se jí věnovat nebudeme.

Definice. Hrám, ve kterých prohrává hráč nemající tah (neboli všechny koncové pozice jsou prohrávající) říkáme *normální* (anglicky *under the normal play rule*). Pokud naopak hráč nemající tah vyhrává (koncové pozice jsou vyhrávající) nazýváme hru *bídnou* (anglicky *under the misère play rule*).

Pozorování. Pro normální hru platí, že prohrávající pozice přesně odpovídají pozicím, ve kterých je SG funkce nulová.

Pro progresivně omezené normální hry se nám tedy pomocí SG funkce podařilo přiřadit každé pozici nezáporné celé číslo, přičemž kladným hodnotám odpovídají V pozice a nulovým P pozice.

Může se zdát, že jsme odvedli nezanedbatelný kus práce a přitom jsme zavedením SG funkce nezískali nic nového. Nenechte se mýlit – právě SG funkce nám umožní hry sčítat.

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Hru 2. (Na stole je 15 sirek, hráči střídající se v tazích mohou odebrat 1 až 4 sirky, kdo nemůže táhnout, prohrál.)

Sčítání her

Aniž bychom poskytovali formální definici, budeme za *součet* n her považovat hru, která probíhá takto: Hráč si ve svém tahu nejprve zvolí, ve které z oněch n her udělá tah, a pak táhne podle pravidel příslušné hry. Po něm je na řadě jeho protihráč, který postupuje naprosto stejně.

Například na Nim s n hromádkami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ můžeme nahlížet jako na součet n Nimů s jednou hromádkou postupně o velikosti x_1 až x_n. Z toho je patrné, že i součet nezajímavých snadno řešitelných her může mít komplikované řešení.

Poznámka. Jsou-li všechny hry H_1 až H_n normální a progresivně omezené, je jejich součet rovněž normální a progresivně omezený.

Věta. (Sprague–Grundy) *Buď g_i SG funkce hry H_i pro $i = 1, \ldots, n$. Pak součet her $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ má SG funkci*

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

Nalezněte SG funkce v následujících hrách. Všechny hry jsou normální, neboli kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 38. Na stole je hromádka n sirek, dva hráči se střídají v tazích. V jednom tahu lze z hromádky odebrat buď libovolný sudý počet sirek, ne však celou hromádku, nebo všechny sirky, pokud jich je lichý počet.

Hra 39. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze odebrat libovolný sudý počet sirek z jedné hromádky, nebo libovolnou hromádku, na které už je jen jedna sirka.

Hra 40. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze buď odebrat libovolné množství sirek z jedné hromádky, nebo jednu hromádku rozdělit na dvě neprázdné hromádky (v takovém případě hráč žádné sirky nebere).

Hra 41. (Vločka) Hra začíná s vločkou V_n o n ramenech, tj. grafem s $n+1$ vrcholy, z nichž všechny až na jeden sousedí právě s tím jediným zbývajícím. V jednom tahu hráč smaže jeden vrchol a všechny hrany s ním spojené. V každém tahu musí být smazána alespoň jedna hrana, čili nelze smazat vrchol, který již není „spojený“ s žádným jiným.

Návody

1. Pomocí zpětného rozboru snadno zjistíme, že vítězná strategie prvního hráče je tato: Hraj tak, aby protihráči zbyl na stole vždy počet sirek dělitelný třemi.

2. Vyhrávající strategii má druhý hráč – stačí mu nechávat na stole vždy počet sirek dělitelný pěti.

3. Vyhrávající strategii má druhý hráč a můžeme ji popsat slovy „udržuj věž na úhlopříčce“.

4. Oba případy vyjdou stejně, stačí provést zpětný rozbor. Prohrávající pozice jsou právě ty, ve kterých je počet sirek násobkem tří.

5. Oba případy vyjdou stejně, stačí provést zpětný rozbor. Prohrávající pozice jsou právě ty, ve kterých počet sirek dává po dělení třemi zbytek jedna.

6. Vyhrávající strategii má první hráč. Prohrávající jsou právě ty pozice, do nichž se lze z levého dolního rohu dostat konečným počtem tahů šachovou věží o dvě pole.

7. Začínající hráč bude určitě na tahu i v pozici 4. Díky tomu, že hra je konečná a nepřipouští remízu, je pozice 6 buď vyhrávající, nebo prohrávající. Podle toho se začínající hráč rozhodne, zda přičte jedničku, nebo dvojku.

8. Neprohrávající strategii má první hráč. Kdyby ji měl druhý hráč, může první hráč ve svých dvou počátečních tazích táhnout jedním z koňů „tam a zpět“, čímž by se dostal do role druhého hráče.

9. Vyhrávající strategii má první hráč. Jako vyčkávací tah totiž může umazat z tabule jedničku, která by libovolným jiným tahem tak jako tak zmizela.

10. Vyhrávající strategii má Kenny. V prvním tahu položí minci doprostřed stolu a dál vždy kopíruje Jardovy tahy pomocí středové souměrnosti.

11. Vyhrává Riikka, a to bez jakékoliv námahy – ať hrají oba hráči jakkoli, hra skončí právě po 31 tazích.

12. Vyhraje Riikka. V prvním tahu rozlomí čokoládu napůl podél jedné z os souměrnosti a podle tohoto lomu se bude celou hru osově symetricky řídit. Alternativní možností by bylo využití symetrie středové.

13. Vyhrávající strategii má Kuba. Stačí, když bude hrát středově symetricky s Aničkou. Její nejnověji položený kůň nemůže nikdy svůj souměrný obraz ohrožovat, protože jde o dvě pole různých barev.

14. Vyhrávající strategii má první hráč. V prvním tahu vybarví čtverec 16×16 tak, aby tabulka byla osově symetrická, a dál hraje osově symetricky s druhým hráčem.

15. Neprohrávající strategii má Háňa – umí se totiž postarat o to, aby jí připadla právě čísla na sudých pozicích, případně aby jí připadla právě čísla na lichých pozicích. Pokud jsou tyto součty různé, má Háňa dokonce strategii vyhrávající.

16. Vyhrávající strategii má druhý hráč – Viktor. Chytře si rozdělí hrací plán na pomyslná domina tak, aby každý čtvereček 2×2 obsahoval alespoň jedno celé domino.

18. Pro $n \leq 3$ vítězí první hráč, jindy má druhý neprohrávající strategii. Ta spočívá v rafinovaném rozdělení herního plánu na kosočtverečky tak, aby každá vyhrávající řada nutně obsahovala jeden celý kosočtvereček.

32. Místo želvy ležící na n-tém místě nohama nahoru si můžeme představit hromádku o n mincích. V Želvách je na každém políčku vždy právě jedna želva – nemůžeme mít dvě želvy vzhůru nohama, které by značily dvě hromádky o velikosti 7. Naštěstí v Nimu platí, že jsou-li ve hře dvě hromádky stejné velikosti, hra se nezmění, pokud obě hromádky odstraníme.

36. Podobně jako v případě klasického Nimu se pro Nim_k dá dokázat, že pozice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je prohrávající právě tehdy, když v binárním zápise čísel x_1, x_2, … , x_n pod sebe je počet jedniček v každém sloupci dělitelný $k + 1$. Zkuste to!

Poděkování a zdroje

Příspěvek je z velké části jen zkrácenou verzí diplomové práce Teorie her pro nadané žáky středních škol Alči Skálové vzniklé na základě PraSečího seriálu[7] z 32. ročníku. Část textu jsem pozměnil, ale úlohám jsem nechal jejich opohádkování – například se tedy můžete dočíst o orzích, kteří už jsou v PraSečím důchodu.

[7] *mks.mff.cuni.cz/archive/32/12.pdf*

Cyklické soustavy rovnic

Honza Krejčí

Abstrakt. V příspěvku jsou rozebrány základní metody řešení soustav rovnic aplikovatelné na cyklické soustavy. Příspěvek rovněž obsahuje řadu příkladů na procvičení těchto postupů.

Úvod

Na střední škole se často setkáte s řešením soustav rovnic, které se však ukazuje jako těžkopádné pro složitější příklady. Mimo tyto metody existují ještě další, jež jsou schopny soustavy rovnic řešit účinněji. V příspěvku si o některých z nich povíme. Budou to metoda extremálního prvku, odhadování pomocí nerovností, sčítání, odčítání nebo násobení rovnic a úprava na čtverec nebo součinový tvar.

Úmluva. Vzhledem k tomu, že soustavy jsou cyklické, tj. všechny rovnice lze dostat z první cyklickou záměnou proměnných, v příkladech bude vždy uvedena pouze jedna z rovnic. Není-li řečeno jinak, bude se jednat o soustavu tří rovnic o třech neznámých nad reálnými čísly.

Příklad 1. (Motivační) Řešte cyklickou soustavu rovnic $x^2 + y^2 = 2yz$.

Úprava na součet čtverců

Soustavu upravíme tak, abychom v ní dostali rovnost, ve které porovnáváme čtverce s nulou. Typicky na začátku rovnice vhodně sečteme nebo odečteme a poté podle vzorečků upravíme na čtverec. Někdy nám do vzorečku kousek výrazu chybí, a tak musíme do rovnice něco přidat.

Příklad 2. (Lehký) Řešte soustavu $x^2 + 1 = y$.

Příklad 3. (Lehký) Najděte všechna řešení soustavy $x^2 = yz$.

Příklad 4. (Těžší) Vyřešte cyklickou soustavu $x^4 + y^2 + 4 = 5yz$.

Úprava na součin

Další hezká možnost (podobná první) vychází z jednoduchého pozorování – pokud se má součin rovnat nule, musí být jeden z činitelů nula. Máme-li soustavu, ze které dostaneme „dobrou“ rovnici tohoto typu, může nám o řešení mnohé prozradit.

Příklad 5. (Lehký) Nalezněte všechna řešení soustavy $x^2 = y + z + 2$.

Příklad 6. (Těžší) Vyřešte $x + y^2 = y^3$.

Metoda extremálního prvku

Tento postup se hodí pro soustavy, jejichž řešením jsou n-tice stejných čísel. Je postavený na tom, že pro každou konečnou množinu můžeme najít největší a nejmenší prvek. Ze soustavy ukážeme, že největší a nejmenší prvek se rovnají, a tudíž se musejí rovnat všechny neznámé.

Příklad 7. (Lehký) V oboru nezáporných reálných čísel řešte pro proměnné a, b, c, d a e soustavu $a + b = c^2$.

Příklad 8. (Těžší) Nalezněte všechna řešení soustavy $\sqrt{x^2 - y} = z - 1$.

Příklad 9. (Těžší) Vyřešte $(x + y)^3 = z$.

Nerovnosti

V matematice existuje mnoho pěkných nerovností, kterými lze odhadovat výrazy. Mezi nejčastěji používané nerovnosti patří Cauchy-Schwarzova nebo AG nerovnost. Často přes odhady nalezneme omezující podmínku pro řešení (typicky tu, že v dané nerovnosti musí nastat rovnost).

Příklad 10. (Lehký) Najděte všechna x, y, z splňující soustavu $x^2 = yz$.

Příklad 11. (Těžší) Řešte pro x, y, z kladné:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ xyz &= 8 \end{aligned}$$

Příklad 12. (Těžší) Nalezněte všechna řešení soustavy $x^4 + y^2 + 4 = 5yz$.

Cvičení

Příklad 13. $x^2 + y^2 = z$

Příklad 14. $x^2 + 1 = 2y$

Příklad 15. Pro kladné x, y, z řešte $x + \frac{1}{y} = 2$.

Příklad 16. Pro k reálné vyřešte $2x + y + 3z = k$.

Příklad 17. $x = y^3 + 1$

Příklad 18. Pro reálné proměnné a, b, c, d řešte $a^3 + b = c$.

Příklad 19. Určete všechny kladné n-tice čísel splňující soustavu:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \cdots + \frac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2$$

Příklad 20. Pro x, y reálné řešte $x + y^2 = y^3$.

Příklad 21. $(x^2 - 6x + 13)y = 20$

Příklad 22. Nalezněte minimum výrazu pro a, b, c celá a větší než 1:

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{NSN(a,b) + NSN(b,c) + NSN(a,c)}{a+b+c}$$

Literatura a zdroje

[1] Jaroslav Švrček: *Metody řešení soustav rovnic*
[2] Vít Musil: *Cyklické soustavy rovnic*
[3] Jaroslav Hančl: *Soustavy rovnic*
[4] Jan Vaňhara: *Soustavy rovnic*

Lifting The Exponent lemma

Anh Dung „Tonda“ Le

Abstrakt. LTE je sice jednoduchý, ale mocný nástroj, který nám za určitých podmínek umožňuje najít největší mocninu prvočísla, která dělí součet nebo rozdíl dvou mocnin se stejným exponentem. Ve většině případů nám LTE ušetří hodně práce a času. Díky tomuto lemmatu můžeme odkrývat spoustu zajímavých, překvapujících a záhadných aspektů olympiádní teorie čísel.

Značení. Pro dělitelnost zavádíme symbol $a \mid b$, který čteme „a dělí b“.

Tvrzení. (Zásadní!) *Pro dělitelnost platí následující tvrzení:*

(i) *Pokud je p prvočíslo, pak $p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$.*
(ii) *Pokud $d \mid a, d \mid b$, pak $d \mid ka + lb$.*
(iii) *Pokud $a \mid b$, pak $|a| \leq |b|$ (často dokonce $2|a| \leq |b|$ atd.).*

Tvrzení. *Nechť a, b jsou celá čísla. Jejich největší společný dělitel d značíme (a, b). Platí, že d je nejmenší nezáporné číslo, které lze zapsat ve tvaru $ka + lb$, kde k a l jsou celá čísla. Též platí $(a - b, b) = (a, b)$, díky čemuž lze (a, b) snadno vypočítat (tento postup se nazývá Euklidův algoritmus).*

Definice. Skutečnost, že $p \mid a - b$, budeme značit $a \equiv b \pmod p$ a říkat a je *kongruentní* s b modulo p.

Definice. Nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b budeme značit $[a, b]$.

Definice. Čísla a, b nazveme *nesoudělná*, pokud $(a, b) = 1$.

Definice. Buď n přirozené číslo. Pak je pro každé prvočíslo p jednoznačně určený exponent v prvočíselném rozkladu čísla n. Tento exponent budeme označovat $v_p(n)$ a říkat mu *p-valuace* čísla n. Pokud $(p, n) = 1$, je $v_p(n) = 0$, a pokud $n = 0$, je $v_p(n) = \infty$.

Tvrzení. *Pro libovolná přirozená čísla a, b platí:*

(i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,
(ii) $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$,
(iii) *pokud $v_p(a) \neq v_p(b)$, pak dokonce $v_p(a + b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$,*
(iv) $v_p((a, b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$,
(v) $v_p([a, b]) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$.

Tvrzení. (Eulerova věta) *Nechť a, n jsou nesoudělná čísla. Pak platí $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, kde $\varphi(n)$ je Eulerova funkce, která značí počet čísel nesoudělných s n a menších než n.*

Tvrzení. (LTE pro lichá prvočísla) *Nechť p je liché prvočíslo a n přirozené číslo. Pro celá čísla x, y, která nejsou dělitelná prvočíslem p, platí:*

(i) $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$, *pokud* $x \equiv y \pmod{p}$,

(ii) $v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n)$, *pokud n je liché a* $x \equiv -y \pmod{p}$.

Tvrzení. (LTE pro 2) *Nechť n je přirozené číslo. Pro lichá celá čísla x, y platí:*

(i) $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y)$, *pokud n je liché,*

(ii) $v_2(x^n - y^n) = v_2(x + y) + v_2(x - y) + v_2(n) - 1$, *pokud n je sudé.*

Důkaz LTE ukážeme na přednášce, ale můžete ho zkusit vymyslet sami. Použijte matematickou indukci na $v_p(n)$.

Lemma. *Hodnota $n - v_p(n)$ roste nade všechny meze pro $n \to \infty$.*

Příklad 1. Dokažte, že pro přirozené n platí $3^{n+3} \mid 1997^{3^n} + 1$.

Příklad 2. Nechť a, n jsou přirozená čísla a p liché prvočíslo takové, že $p^n \mid a^p - 1$. Dokažte, že $p^{n-1} \mid a - 1$.

Příklad 3. Dokažte, že jediné přirozené číslo a takové, že $4(a^n + 1)$ je krychle pro všechna přirozená n, je 1.

Příklad 4. Pro prvočíslo p najděte $v_p((p-2)^{2(p-1)} - (p+4)^{p-1})$.

Příklad 5. Nechť p je prvočíslo a a, n přirozená čísla. Dokažte, že pokud platí $2^p + 3^p = a^n$, pak $n = 1$. (Irsko 1996)

Příklad 6. Najděte všechna přirozená n, pro která platí $2^n \mid 3^n - 1$.

Příklad 7. Nechť a, b jsou racionální čísla. Dokažte, že je-li hodnota $a^n - b^n$ celá pro nekonečně mnoho přirozených n, pak jsou obě čísla a, b celá.

Příklad 8. Mějme čísla $a, n \geq 2$ taková, že existuje přirozené číslo $k \geq 2$, pro které platí $n \mid (a-1)^k$. Dokažte, že $n \mid a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1$. (Romania TST 2009)

Příklad 9. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) takových, že $b^a \mid a^b - 1$.

Příklad 10. Nechť $k > 1$ je přirozené číslo. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n, pro která platí $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + k^n$.

Příklad 11. Najděte všechna přirozená x, y taková, že $p^x - y^p = 1$, kde p je prvočíslo. (Celostátko 1996)

Příklad 12. Najděte všechny dvojice prvočísel (p, q) takových, že

$$pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q).$$

Příklad 13. Pro která přirozená n platí, že $2^{n+2}(2^n - 1) - 8 \cdot 3^n + 1$ je čtverec?
(Vietnam TST 2011)

Příklad 14. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (m, n), které splňují

$$m^2 + 2 \cdot 3^n = m\left(2^{n+1} - 1\right).$$

(IMO shortlist 2010)

Příklad 15. Najděte všechna přirozená čísla n splňující $n^2 \mid 2^n + 1$.
(IMO 1990)

Nápovědy

1. Přímé dosazování do vzorce.

2. Berte p jako společný exponent.

3. Porovnejte $4(a^{np} + 1)$ a $4(a^n + 1)$, kde p je liché prvočíslo dělící $4(a^n + 1)$.

4. Berte $(p - 1)$ jako společný exponent.

5. Berte p jako společený exponent.

6. Použijte LTE na prvočíslo 2 a pak ukažte, že n nemůže být moc velké.

7. Je-li t nejmenší číslo, pro které platí, že $a^t - b^t$ je celé číslo, pak dokažte, že každý exponent s touto vlastností je násobek čísla t.

8. Použijte LTE na výraz $a^n - 1$.

9. Dokažte, že je-li p nejmenší prvočíslo dělící b, pak $p \mid a - 1$.

10. Pokud k je liché, pak vyberte p^m pro liché prvočíslo p dělící k. Pokud k je sudé, pak vyberte p^m pro liché prvočíslo dělící $k + 1$.

11. Použijte LTE, pak poslední lemma.

12. Předpokládejte, že p je menší pročíslo, a ukažte, že p musí být 3.

13. Předpokládejte, že číselný výraz se rovná a^2, a upravte rovnici tak, aby na jedné straně stálo $8 \cdot 3^n$ a na druhé součin dvou závorek. Snažte se eliminovat a a použijte lemma na prvočíslo 3. Dále ukažte, že n nemůže být moc velké.

14. Převeďte na úlohu 9.

15. Zjistěte, jaké můžou být dva nejmenší prvočíselné dělitele čísla n.

Literatura a zdroje

[1] Amir Hossein Parvardi: *Lifting The Exponent Lemma (LTE)*

Matematika ve filmech

Anh Dung „Tonda“ Le

Abstrakt. Mnohdy se matematika stala námětem umělecky i komerčně úspěšných filmů. Bohužel pro jednoduchost a přístupnost k většímu publiku stojí matematické teorie a úlohy většinou v pozadí. Právě jimi se budeme zabývat a ukážeme, jakou historickou roli pro vědu hrály.

Čistá duše

Už jako mladý student projevil John Nash svůj talent v matematice. V roce 1947 získal Carnegieho stipendium, což mu umožnilo studovat na Princetonu. Po třech letech dokončil svoji dizertační práci, která významně rozšířila teorii her a učinila ji plnohodnotným matematickým oborem. V roce 1994 získal Nobelovu cenu za průkopnickou analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her.

X+Y

Nathan (A. Butterfield) je trochu jiný než ostatní puberťáci. Je stydlivý, příliš se s nikým nekamarádí a pořád je zahleděný do knížek. Jenže jeho talent pro matematiku je naprosto výjimečný. Dokonce tak, že se mu za pomoci velmi nekonformního učitele podaří kvalifikovat na prestižní matematickou olympiádu v Cambridge.

Kód Enigmy

Během druhé světové války se Alan Turing pokoušel o rozluštění Enigmy, což ho motivovalo k vybudování prvního výpočetního stroje. Jeho úspěch významně přispěl k vítězství Aliance a díky němu je považován za zakladatele moderní informatiky.

Dobrý Will Hunting

Psychologické drama líčí osudy dvacetiletého matematického génia, ale zároveň i hospodského flákače Willa Huntinga. Mladíkovy neuvěřitelné početní vlohy vyjdou najevo, když jako uklízeč na bostonské univerzitě náhodně vyřeší složitý matematický příklad, který zůstal na tabuli.

Vyměřování světa

Vypráví příběh dvou německých vědců, přírodovědce Alexandera von Humboldta a matematika Carla Friedricha Gausse. Zatímco Alexander von Humboldt cestuje po světě, sbírá rostliny a provádí různá geografická měření, Carl Friedrich Gauss pobývá převážně doma a Zemi měří na papíře pomocí matematických a fyzikálních výpočtů.

Literatura a zdroje

[1] *www.imdb.com*
[2] *www.plus.maths.org*

Shodná zobrazení

Martin „E.T.“ Sýkora

Abstrakt. Příspěvek obsahuje několik příkladů, k jejichž řešení je vhodné využít shodná zobrazení.

Na přednášce se zaměříme převážně na řešení mnoha úloh a osvojení běžných metod, v nichž nám pomáhají shodná zobrazení. Teorii poněkud odbudeme, abychom měli více času na příklady. Koho zajímají hlubší poznatky k tomuto tématu, může si přečíst seriál z 31. ročníku od Pepy Tkadlece a Mirka Olšáka o geometrických zobrazeních.

S čím budeme pracovat

Definice. Shodné zobrazení je zobrazení s z roviny ψ do roviny ψ, které zachovává délky úseček, tedy pro všechna $A, B \in \psi$ platí $|AB| = |s(A)s(B)|$.

Tvrzení. *Každé shodné zobrazení je buď osová souměrnost, otočení, posunutí, nebo posunutá souměrnost.*

A jdeme na to

Příklad 1. Mějme v rovině kružnici, přímku a bod. Nalezněte všechny úsečky, které mají jeden koncový bod na dané kružnici, druhý na dané přímce a střed v daném bodě.

Příklad 2. V rovině je dána přímka p a body A, B v jedné polorovině jí určené. Nalezněte bod $X \in p$ takový, že délka $|AX| + |XB|$ je nejmenší možná.

Příklad 3. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC a bod P. Dokažte, že délky úseček PA, PB a PC tvoří délky stran nějakého (i degenerovaného) trojúhelníku. Degenerovaný případ nastává, pokud P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (Pompeiuova věta)

Příklad 4. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li délky jeho čtyř stran a, b, c, d a odchylku ω přímek a, c.

Příklad 5. V rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod P tak, že $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180°$. Dokažte, že $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle ADP|$.

Příklad 6. Na těžnici z vrcholu C trojúhelníku ABC nalezněme bod X tak, aby $|BX| = |AC|$. Označme Y průsečík přímky BX a strany AC. Ukažte, že trojúhelník CXY je rovnoramenný.

Příklad 7. Jednotkové kružnice k a l se dotýkají v bodě T. Kružnice m o poloměru 2 má střed na kružnici k a dotýká se jí v bodě B. Ukažte, že přímka BT prochází jedním z průsečíků kružnic l a m.

Příklad 8. Sestrojte lomenou čáru $ABCDE$, jsou-li dány body S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, které jsou středy úseček AB, BC, CD, DE, EA.

Příklad 9. Uvnitř pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C je dán bod P. Ukažte, že úsečky o délkách $|PA|$, $|PB|$ a $|PC|\sqrt{2}$ tvoří strany trojúhelníku.

Příklad 10. Uvnitř ostrého úhlu s rameny p, q je dán bod A. Nalezněte body P na p a Q na q tak, aby $|AP|+|PQ|+|QA|$ bylo minimální. Co se stane, pokud bude zadaný úhel pravý nebo tupý?

Příklad 11. Existuje útvar se dvěma středy souměrnosti?

Příklad 12. Uvnitř čtverce $ABCD$ je dán bod P tak, že $|PD| = 1$, $|PA| = 2$ a $|PB| = 3$. Určete velikost úhlu APD.

Příklad 13. V rovině je dána přímka p a mimo ni (ve stejné polorovině) dva různé body A, B. Sestrojte na přímce p bod X tak, aby odchylka přímky AX od přímky p byla dvojnásobkem odchylky přímky BX od přímky p.

Příklad 14. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ vznikl slepením rovnostranného trojúhelníku AEF o straně a, rovnoběžníku $ABDE$ splňujícího $|AB| = 1$ a trojúhelníku BCD splňujícího $|BC| + |CD| = 2$. Navíc platí $|CF| = 3$. V závislosti na a určete obsah šestiúhelníku $ABCDEF$.

Příklad 15. Najděte body K, L a M, z nichž každý leží na jedné straně daného trojúhelníku a pro které je $|KL| + |LM| + |MK|$ minimální.

Příklad 16. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho průsečík výšek H. Ukažte, že obrazy bodu H v osových souměrnostech podle stran a středových souměrnostech podle středů stran trojúhelníku ABC leží na kružnici jemu opsané.

Příklad 17. (Fermatův bod) Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. Najděte bod X takový, že $|AX| + |BX| + |CX|$ je minimální.

Poděkování a zdroje

Rád bych poděkoval *Pepovi Tkadlecovi* a *Mirkovi Olšákovi*, z jejichž seriálu (31. ročník) jsem čerpal. Dále dlužím díky *Frantovi Konopeckému* za příspěvek *Geometrická zobrazení*, kterým jsem se také nechal inspirovat.

Barevné grafy pro pokročilé

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Příspěvek uvádí do problematiky vrcholového a hranového obarvování grafů a formuluje některé důležité věty, se kterými se obvykle středoškolák nepotká.

V celém textu budeme uvažovat neorientované grafy. Obvykle budeme graf značit G a množinu jeho vrcholů, resp. hran budeme značit V, resp. E.

Definice. (Základní grafové pojmy) Pro graf G definujeme tyto pojmy:

(i) $\Delta(G)$ je velikost nejvyššího stupně v grafu.

(ii) *Klika* je úplný podgraf grafu G.

(iii) *Nezávislá množina* je podmnožina vrcholů V, mezi kterými nevedou žádné hrany.

(iv) *Doplněk* grafu G je graf na stejné množině vrcholů, který obsahuje hranu mezi dvěma vrcholy, právě když v grafu G tato hrana není.

(v) *Indukovaný podgraf* H grafu G je takový podgraf grafu G, který má hranu mezi dvěma vrcholy, právě když je tato hrana i v G.

Definice. (Barevnost grafu) Říkáme, že graf G má *(vrcholovou) barevnost* $\chi(G)$, pokud můžeme každý vrchol obarvit jednou z $\chi(G)$ barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. *Hranovou barevnost* $\chi_E(G)$ definujeme obdobně, ale barvíme hrany, přičemž dvě hran nesmějí mít stejnou barvu, pokud mají společný vrchol.

Cvičení. Platí $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Věta. (Brooksova) *Pokud G není úplný graf ani kružnice liché délky, tak platí:*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Věta. (Vizingova) *Pro graf G platí:*

$$\Delta(G) \leq \chi_E(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Definice. (Perfektní graf) *Perfektní graf* je takový graf, jehož každý indukovaný podgraf má přesně takovou barevnost, jako je velikost jeho největší kliky.

Věta. (Slabá věta o perfektních grafech) *Graf je perfektní, právě když jeho doplněk je perfektní.*

Věta. (Silná věta o perfektních grafech) *Graf je perfektní, právě když neobsahuje jako indukovaný podgraf žádnou lichou* díru *(tj. kružnici liché délky alespoň 5) ani lichou* antidíru *(tj. doplněk díry).*

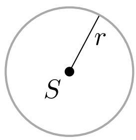
Geometrické množiny bodů

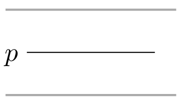
Štěpán Šimsa

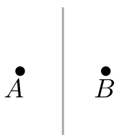
Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní geometrické množiny bodů a obsahuje řadu převážně snadných úloh, k nimž jsou na konci uvedeny stručné postupy a výsledky.

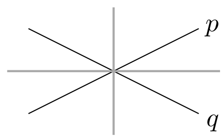
Tvrzení. *Množina bodů, které mají*

(i) *danou vzdálenost r od daného bodu S, je kružnice $k(S, r)$.*
(ii) *danou vzdálenost od dané přímky p, je dvojice přímek rovnoběžných s p.*
(iii) *stejnou vzdálenost od dvou daných bodů A, B, je osa úsečky AB.*
(iv) *stejnou vzdálenost od dvou daných přímek p, q, je dvojice přímek, které jsou osami úhlů vytvořenými přímkami p, q.*









Věta. (Věta o obvodovém úhlu) *Množina bodů, z nichž je daná úsečka AB vidět pod daným úhlem φ, je dvojice kružnicových oblouků symetrických podle přímky AB s krajními body A, B. Speciálně pro $\varphi = 90^\circ$ je hledanou množinou kružnice nad průměrem AB.*

Lehounké úložky

Příklad 1. Jsou dány rovnoběžné přímky p, q. Najděte množinu středů úseček AB takových, že bod A leží na p a bod B na q.

Příklad 2. Je dána kružnice k a bod O. Určete množinu středů všech úseček OP, kde P probíhá kružnici k.

Příklad 3. Jsou dány body A, B. Najděte všechny přímky p, jejichž vzdálenost od A je stejná jako od B.

Příklad 4. Je dána úsečka AB. Určete množinu obrazů A' bodu A v osové souměrnosti podle libovolné přímky procházející bodem B.

Příklad 5. Uvnitř kružnice k se středem O je dán bod P. Určete množinu středů všech tětiv AB kružnice k, které procházejí bodem P. Co kdyby bod P ležel vně kružnice k?

Příklad 6. Polem vede rovná cesta, po které se rozjel autobus.

(i) Kde musí člověk stát, aby autobus dostihnul, pokud běží stejnou rychlostí, jakou autobus jede?
(ii) Co kdyby člověk vyrážel o minutu dřív?
(iii) Co kdyby byl člověk dvakrát pomalejší?

Příklad 7. Po ramenech VX, VY pravého úhlu XVY se pohybují body A, B tak, že úsečka AB má konstantní délku d. Určete množinu středů M úseček AB.

Příklad 8. Je dána úsečka AB. Uvažme všechny dvojice kružnic k, l, které se dotýkají úsečky AB postupně v bodech A, B a navíc mají samy vnější dotyk v T. Určete množinu bodů T.

Běžné příklady

Příklad 9. Na úsečce AC je dán bod B. Určete množinu druhých průsečíků X shodných kružnic, z nichž jedna prochází body A, B a druhá body B, C.

Příklad 10. Osa úhlu ABC protne stranu AC trojúhelníku ABC v bodě D. Najdeme bod E v polorovině určené přímkou BC ve které neleží bod A, tak, aby $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BAC|$ a $|CE| = |AD|$. Dokažte, že střed úsečky DE leží na BC.

Příklad 11. Určete množinu středů všech úseček AB, jejichž krajní body leží na dané půlkružnici t.

Příklad 12. Bod C probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou AB. Určete množinu opsišť, těžišť, ortocenter a vepsišť všech takových trojúhelníků ABC.

Příklad 13. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu opsišť trojúhelníků ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k.

(MO 56–A–I–5)

Příklad 14. Je dána kružnice k s tětivou AC, jež není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný kružnici k. Určete množinu průsečíků přímek BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům. (MO 59–A–III–4)

Příklad 15. Bod C probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou AB. Označme P patu kolmice vedené středem M strany BC na přímku AC. Určete množinu bodů P.

Příklad 16. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod O tak, že $|\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle OAC|$, $|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle OCB|$ a $|\sphericalangle BOC| = 90^\circ$. Určete poměr $|AC| : |OC|$.

(Moskva 2011)

Příklad 17. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Označme D, E, F průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B, C s protějšími stranami. Ukažte, že $|\sphericalangle DEF| = 90°$.

Návody

1. Nakreslete přímky vodorovně. Jak vysoko leží střed? (Vyjde osa pásu určeného přímkami p, q.)

2. Stejnolehlost. (Vyjde „poloviční“ kružnice vzhledem k bodu O.)

3. Konstuujte tečny ke stejně velkým kružnicím se středy v A a B. (Vyjdou rovnoběžky s AB a přímky skrz střed AB.)

4. Ukažte, že $\triangle ABA'$ je rovnoramenný. (Vyjde kružnice o středu B a poloměru $|BA|$.)

5. Tětiva je kolmá na spojnici svého středu se středem kružnice. (Vyjde Thaletova kružnice nad OP případně její oblouk.)

6. Množina bodů, ze kterých je člověk schopen autobus dostihnout v jistém pevném bodě X, je kruh. Sjednoťte tyto kruhy přes všechny přípustné body X. (Vyjde postupně polorovina, posunutá polorovina, úhel o velikosti $60°$.)

7. Vzdálenost středu přepony od vrcholu s pravým úhlem je rovna polovině délky přepony. (Vyjde čtvrtkružnice se středem V a poloměrem $\frac{1}{2}d$.)

8. Ať vnitřní společná tečna v T protne AB v M. Pak $|MA| = |MT| = |MB|$ (stejně dlouhé tečny). (Vyjde kružnice nad průměrem AB bez bodů A, B.)

9. Úhly $\sphericalangle XAB$ a $\sphericalangle BCX$ jsou obvodové k téže tětivě ze stejně velkých kružnic, takže mají stejnou velikost. (Vyjde osa usečky AC.)

10. Označme A' obraz A podle osy $\sphericalangle ABC$. Pak $A'D$ a CE jsou stejně dlouhé a svírají týž úhel s BC, tedy D je „nad“ BC přesně o tolik, o kolik je E „pod“.

11. Vyjde vnitřek půlkruhu bez půlkruhů nad průměry určenými koncovými body t a jejím středem.

12. Vyjde po řadě bod, „přitřetěný“ oblouk C ke středu strany AB, oblouk nad AB odpovídající úhlu $180° - \gamma$, oblouk odpovídající úhlu $90° + \frac{1}{2}\gamma$ (resp. oblouk posunutý tak, aby procházel A a B).

13. Mocnost S ke všem takovým kružnicím je stejná ($|SB| \cdot |SC|$), takže druhý průsečík kružnice opsané trojúhelníku ABC a AS je pevný a množina opsišť je přímka.

14. Dokreslete si bod E, průsečík tečen ke k z bodů A, C. Hledanou množinou je sjednocení vnitřků kratších oblouků CE a AE kružnice opsané trojúhelníku EAC.

15. Ukažte, že všechny takové přímky procházejí středem X tětivy kolmé na AB skrz B. Vyjde pak Thaletova kružnice nad AX.

16. Začněte od $\triangle BOC$, nakreslete obraz C' bodu C přes OB a ukažte, že A je bod dotyku tečny z C ke kružnici opsané $\triangle BOC'$. Z mocnosti vyjádřete hodnotu poměru $\sqrt{2}$.

17. Ukažte, že D a F jsou připsiště trojúhelníků AEB a ECB.

Literatura a zdroje

Chtěl bych poděkovat *Pepovi Tkadlecovi*, jehož příspěvek jsem téměř beze změn převzal.

[1] Nathan Altschiller-Court: *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, New York, 2007.
[2] V. V. Prasolov: *Zadachi po planimetrii*, MCCME, Moskva, 2006.
[3] *http://www.problems.ru*

Dokonalá čísla

Rado van Švarc

Abstrakt. Tzv. dokonalá čísla, tj. čísla, která jsou rovna součtu svých dělitelů, fascinovala matematiky již od starověku. V příspěvku je uvedeno několik známých tvrzení jak o dokonalých číslech obecně, tak specificky o sudých a lichých dokonalých číslech.

Definice. Jako funkci $\sigma(n)$ budeme značit součet všech dělitelů čísla n včetně n. Například $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 1 + 2 = 3$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Definice. *Dokonalým číslem* nazveme takové číslo n, pro které $\sigma(n) = 2n$. Jinými slovy, dokonalá čísla jsou součty svých dělitelů menších než ona sama. Například 6 je dokonalé číslo, protože šestku dělí 1, 2, 3 a 6, přičemž $6 = 1 + 2 + 3$, nebo též $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

Tvrzení. *Pro dvojici nesoudělných přirozených čísel x a y platí $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. Této vlastnosti se říká multiplikativita .*

Tvrzení. *Pro dokonalé číslo n platí*

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2.$$

Důsledek. *Pokud m a n jsou dokonalá čísla, pak $m \nmid n$.*

Sudá dokonalá čísla

Věta. (Eukleides) *Pokud $2^p - 1$ je prvočíslo, pak $2^{p-1}(2^p - 1)$ je dokonalé číslo.*

Věta. (Euler) *Pokud n je sudé dokonalé číslo, tak se dá zapsat jako $2^{p-1}(2^p - 1)$, kde $2^p - 1$ je prvočíslo.*

Úloha. Rado našel sudé dokonalé číslo n větší než 6. Líbilo se mu, jak je zapsané, a tak mu sečetl všechny cifry a jejich součet si označil jako $S(n)$. Poté tuto operaci zopakoval a dostal $S(S(n))$. Ukažte, že po dostatečně dlouhém opakování těchto operací nakonec dostal jedničku.

Věta. (Heathova) *Každé sudé dokonalé číslo větší než 6 se dá zapsat jako součet třetích mocnin několika různých lichých přirozených čísel.*

Intermezzo s úložkami

Úloha 1. Dokonalé číslo $n > 6$ je dělitelné třemi. Ukažte, že $9 \mid n$.
(Rusko 2000)

Úloha 2. Dokonalé číslo $n > 28$ je dělitelné sedmi. Ukažte, že $49 \mid n$.
(Rusko 2000)

Úloha 3. Nechť p je nejmenší prvočíselný dělitel dokonalého čísla $n > 6$. Potom p dělí n v sudé mocnině. (IMC 2014)

A co lichá?

Věta. (Ochem-Rao) *Pokud n je liché dokonalé číslo, pak $n > 10^{1500}$.*

Věta. (Nielsen-Norton) *Pokud n je liché dokonalé číslo, má alespoň 12 různých prvočíselných dělitelů. Pokud není dělitelné třemi ani pěti, má jich alespoň 15. Pokud navíc ani sedmička nedělí n, má n alespoň 27 různých prvočíselných dělitelů.*

Věta. (Ochem-Rao) *Pokud n je liché dokonalé číslo, pak má alespoň 101 prvočíselných dělitelů, kde prvočíselné dělitele počítáme s násobností.*

Věta. (Goto-Iannucci) *Pokud n je liché dokonalé číslo, pak jeho největší prvočíselný dělitel má velikost alespoň 10^7, druhý největší alespoň 10^4 a třetí alespoň 10^2.*

Věta. *Liché dokonalé číslo n lze zapsat jako $q^e \cdot p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \cdots p_k^{2a_k}$, kde q i e dávají zbytek 1 po dělení čtyřmi.*

Věta. (Touchard) *Pokud n je liché dokonalé číslo, pak buď $n \equiv 1 \pmod{12}$, nebo $n \equiv 9 \pmod{36}$.*

Věta. (Nielsen) *Pokud n je liché dokonalé číslo s k různými prvočíselnými děliteli, pak $n < 2^{4^k}$.*

Isogonal Conjugates

Rado van Švarc

Abstrakt. Isogonal conjugates a práce s nimi je oblíbené téma moderní eukleidovské geometrie. V příspěvku jsou popsána některá základní tvrzení, po kterých následuje několik úloh, které se isogonal conjugates buď zabývají, nebo je přímo využívají.

Definice. Nechť bod P leží v rovině trojúhelníku ABC. Přímky AP, BP a CP zobrazíme podle os úhlů $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle BCA$. Pokud se tyto tři přímky protínají v jednom bodě Q, pak tento bod nazveme *isogonal conjugate* bodu P vzhledem k $\triangle ABC$.

Tvrzení. *Pokud P neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$, pak vzhledem k $\triangle ABC$ má P isogonal conjugate.*

Tvrzení. (Six feet theorem) *Nechť P a Q jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$. Nechť P_a je projekce bodu P na BC. Analogicky definujme P_b, P_c, Q_a, Q_b a Q_c. Pak P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b a Q_c leží na jedné kružnici, jejíž střed splývá se středem PQ.*

Úmluva. Budeme používat *opsiště*, *vepsiště* a *připsiště* jako zkrácený pojem pro střed kružnice opsané, kružnice vepsané a kružnice připsané. Navíc budeme místo „ortocentrum“ používat pojem *kolmiště*.

Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, pak v trojúhelníku ABC bude I, O a H označovat vepsiště, opsiště a kolmiště.

Příklad. V trojúhelníku ABC je I svůj vlastní isogonal conjugate. Dále pokud E je A-připsiště, pak i ono je svým vlastním isogonal conjugate.

Příklad. Body O a H jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$.

Tvrzení. *V trojúhelníku ABC označíme body dotyku kružnice vepsané s BC, CA, AB jako D, E, F. Body dotyku kružnic připsaných se stranami BC, CA a AB si označíme jako X, Y, Z. Pak trojice přímek AD, BE a CF se protíná v jednom bodě a stejně tak i trojice přímek AX, BY, CZ.*

Definice. Ve výše použitém značení se průsečík AD, BE a CF nazývá *Gergonnův bod*. Pro průsečík AX, BY, CZ se používá označení *Nagelův bod*.

Příklad. Nechť H^- je střed záporné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom H^- je isogonal conjugate Gergonnova bodu.

Příklad. Nechť H^+ je střed kladné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom H^+ je isogonal conjugate Nagelova bodu.

Příklad. (Brocardovy body) Uvnitř $\triangle ABC$ leží dvojice bodů P a Q tak, že

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \varphi \quad \text{a} \quad \sphericalangle QBA = \sphericalangle QCB = \sphericalangle QAC = \phi.$$

Potom tyto dva body jsou isogonal conjugates.

OH, oni jsou kamarádi!

Úloha 1. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ si označme průsečík úhlopříček jako P. Dále si označme opsiště čtyřúhelníku $ABCD$ jako O a opsiště trojúhelníků APB, BPC, CPD a DPA jako O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že přímky PO, O_1O_3 a O_2O_4 se protínají v jednom bodě. (Čína 1990)

Úloha 2. Ukažte, že rovnost $|IH| = |IO|$ platí právě tehdy, když jeden z úhlů trojúhelníku je roven $60°$.

Úloha 3. V $\triangle ABC$ osa úsečky BH protíná strany AB a BC v bodech D a E. Ukažte, že $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BOE$. (Crux)

Úloha 4. V $\triangle ABC$ leží body D a E na stranách AB a BC tak, že čtyřúhelník $ADEC$ je tětivový. Kružnice opsaná $\triangle DBE$ protne stranu AC ve dvou bodech X a Y. Nechť M je střed XY. Ukažte, že $BM \perp AC$. (Baltic Way 2010)

Úloha 5. Kružnice k_1 a k_2 se středy I_1 a I_2 se protínají ve dvou bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D. Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

Další hrátky s isogonal conjugates

Úloha 6. Elipsa s ohnisky P a Q se dotýká stran $\triangle ABC$. Ukažte, že P a Q jsou isogonal conjugates.

Úloha 7. V rovině trojúhelníku ABC leží kružnice k se středem X. Tato kružnice protíná stranu AC v bodech B_1 a B_2. Kružnici nad průměrem B_1B_2 nazveme k_b. Analogicky vytvoříme kružnice k_a a k_c. Potenční střed k_a, k_b a k_c označme jako Y. Ukažte, že X a Y jsou isogonal conjugates. (zobecněné IMO 2008)

Úloha 8. (General Feuerbach Theorem) Body P a Q jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ a přitom platí, že P, Q a O leží na přímce. Ukažte, že kružnice opsaná projekcím bodů P a Q na strany trojúhelníku se dotýká kružnice devíti bodů.

Úloha 9. Nechť P a Q jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ s kružnicí opsanou Ω. Průsečík BP s Ω různý od B označme D. Přímka DO protne AC a Ω v M a N. Pokud $BA < BC$, ukažte, že $\sphericalangle AMP = \sphericalangle QNB$. (Zobecněné Rusko 2005)

A je taková hloupost vůbec k něčemu?

Úloha 10. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Nechť A', B', C' jsou paty kolmic z P na příslušné strany. Kružnice opsaná $\triangle A'B'C'$ protíná stranu BC podruhé v bodě A''. Na úsečce $A''B'$ nalezneme bod X takový, že $\sphericalangle XAC = \sphericalangle PAB$. Ukažte, že $\sphericalangle AXB = 90°$. (*i*KS 1 – G3)

Úloha 11. Je dán úhel o velikosti α s hlavním vrcholem A sevřený mezi polopřímkami u_1 a u_2 vycházejícími z A. Uvnitř úhlu u_1u_2 je dán bod B neležící na jeho ose a je dána velikost úhlu β, kde $\alpha < \beta < 180°$. Uvažme všechny možné dvojice bodů X, Y takové, že $X \in u_1$, $Y \in u_2$, A leží mimo úhel XBY a $\sphericalangle XBY = \beta$. Pak každý z bodů A, B má tu vlastnost, že vidí úsečku XY stále pod stejným úhlem. Ukažte, že existuje třetí bod s touto vlastností. (*i*KS 4 – G6)

Úloha 12. Je dán trojúhelník ABC a jeho kružnice opsaná. Bod P je středem oblouku BAC. Kružnice nad průměrem CP protíná osu úhlu BAC v bodech K a L, kde $AK < AL$. Bod M je obrazem bodu L v osové souměrnosti podle přímky BC. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BKM prochází středem BC. (ČPS 2013)

Úloha 13. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že přímka BD nepůlí ani úhel $\sphericalangle ABC$, ani $\sphericalangle CDA$. Bod P ležící uvnitř $ABCD$ splňuje $\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA$ a $\sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA$. Ukažte, že $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $AP = CP$. (IMO 2004)

Návody

1. Díky isogonálnosti O s H a tětivovosti $ABCD$ je $O_1P \perp CD$ a analogicky pro ostatní, z čehož plyne, že O_1PO_3O a O_2PO_3O jsou rovnoběžníky.

2. Buď je $\triangle BIH \cong \triangle BIO$, nebo je $BOIH$ tětivový čtyřúhelník.

3. Ukažte $\triangle BOC \sim \triangle BDH$ a použijte spirální podobnost.

4. Pokud S je opsiště $\triangle BDE$, pak $BS \perp AC$.

5. Vyúhlete, že E je opsiště $\triangle ACD$.

6. Pokud se elipsa dotýká AC v D, pak $\sphericalangle PDA = \sphericalangle QDC$. Překlopte Q podle stran.

7. Dokreslete středy k_a, k_b a k_c. Chordála je kolmá na jejich spojnici. Střed k leží na osách B_1B_2 a dalších dvou analogických osách.

8. Nechť PQ protíná kružnici opsanou $\triangle ABC$ v X a Y. Pak Simsonovy přímky X a Y jsou na sebe kolmé a protínají se právě v našem bodě dotyku.

9. Dokreslete $D' \in \Omega$ tak, že $DD' \parallel AC$. S trochou úhlení dostaneme $\triangle PAD \sim \triangle AQD'$. Potom dostaneme $\triangle PDM \sim \triangle ND'Q$ a $\triangle AMD \sim \triangle NAD'$.

10. Dokreslete isogonal conjugate k P a použijte six feet theorem. Doúhlete.

11. Ten bod je isogonal conjugate k B vzhledem k (libovolnému) trojúhelníku XAY. Na dokázání toho, že je to pro všechny ten samý bod, použijte definici isogonal conjugate jako střed kružnice opsané obrazům přes strany.

12. Ukažte, že K a L jsou isogonal conjugates a doúhlete.

13. Body A a C jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle BPD$.

Zdroje

Jako primární zdroj bych rád označil příspěvek od Michala „Kennyho“ Rolínka, kterému bych tímto chtěl poděkovat.

[1] Michal Rolínek: *Antirovnoběžnost*

[2] András Hraskó: *The Isogonal Conjugate*

[3] Yufei Zhao: *Lemmas in Euclidean Geometry*

[4] Tran Quang Hung, Pham Huy Hoang: *Generalization of a Problem with Isogonal Conjugeta Points*

[5] *www.artofproblemsolving.com*

Cèvova a Menelaova věta

Martin Töpfer

Abstrakt. Přednáška se zabývá pokročilejšími metodami řešení geometrických úloh s využitím poměrů. Důkladně si procvičíme Cèvovu a Menelaovu větu a ukážeme si, jak vypadá úloha, kde jdou použít.

Jak na poměry v geometrii

Většina jednodušších geometrických úloh se dá rozdělit na dvě základní skupiny podle způsobu řešení – na ty, kde se hlavně počítají úhly, a na ty, kde vyjadřujeme poměry délek úseček. My se budeme zabývat tou druhou skupinou. Při řešení takových úloh se používá hlavně podobnost, mocnost bodu ke kružnici, sinová věta nebo Cèvova/Menelaova věta.

Sinová věta

Věta. (Sinová věta) *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ, stranami a, b, c a poloměrem kružnice opsané R platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Příklad 1. Mějme trojúhelník ABC, průsečík osy úhlu ACB se stranou AB označme P. Dokažte, že

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Cèvova věta

Věta 2. (Cèvova) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí*

$$\frac{|AZ|\cdot|BX|\cdot|CY|}{|BZ|\cdot|CX|\cdot|AY|} = 1.$$

Příklad 3. Pomocí Cèvovy věty dokažte, že se těžnice protínají v jednom bodě.

Příklad 4. Označme X, Y, Z ty body trojúhelníka ABC, ve kterých se kružnice vepsaná dotýká jeho obvodu. Dokažte, že se jim příslušné cèviány se protínají v jednom bodě.

Příklad 5. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P, který leží na těžnici z vrcholu C. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík BP a AC. Ukažte, že $|AC| = |BC|$, víte-li, že $ABXY$ je tětivový.

Příklad 6. Mějme trojúhelník ABC. Na výšce AA_0 zvolme bod P. Dále $BP \cap \cap AC = K$ a $CP \cap AB = L$. Dokažte, že $|\sphericalangle BA_0K| = |\sphericalangle CA_0L|$.

Příklad 7. (Goniometrický tvar Cèvovy věty) Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí

$$\frac{\sin(\sphericalangle ACZ) \cdot \sin(\sphericalangle BAX) \cdot \sin(\sphericalangle CBY)}{\sin(\sphericalangle BCZ) \cdot \sin(\sphericalangle CAX) \cdot \sin(\sphericalangle ABY)} = 1$$

Příklad 8. Pomocí goniometrického tvaru Cèvovy věty dokažte, že se a) výšky, b) osy úhlů protínají v jednom bodě.

Příklad 9. (O existenci isogonal cojugate) Mějme trojúhelník a v něm tři cèviány protínající se v bodě P. Každou z nich nyní zobrazíme v osové souměrnosti podle osy úhlu (toho, ze kterého ona cèviána vychází). Tím získáme tři jiné cèviány. Dokažte, že i ty se protínají v jednom bodě. Tomuto bodu se říká *isogonal cojugate* k bodu P.

Příklad 10. Mějme trojúhelník ABC a AL, BM, CN jsou jeho výšky. Dokažte, že se kolmice z bodů A, B a C postupně na přímky MN, LN, LM protínají v jednom bodě.

Menelaova věta

Věta. (Menelaova) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě body na přímkách BC, AC a AB (jeden z nich je vně $\triangle ABC$). Body X, Y a Z leží v přímce, právě když platí*

$$\frac{|AZ| \cdot |BX| \cdot |CY|}{|BZ| \cdot |CX| \cdot |AY|} = 1.$$

Příklad 11. Dokažte, že body, v nichž se protnou strany trojúhelníka ABC s osami dvou vnitřních a zbývajícího vnějšího úhlu, leží v přímce.

Příklad 12. Kružnice procházející vrcholy B a C trojúhelníka ABC se protne se stranou AB v bodě P a se stranou AC v bodě R. Označme $PR \cap BC = Q$. Dokažte, že

$$\frac{|QC|}{|QB|} = \frac{|RC| \cdot |AC|}{|PB| \cdot |AB|}.$$

Příklad 13. Mějme trojúhelník ABC a přímku vedoucí přes těžiště trojúhelníka, která protne strany AB a AC postupně v bodech M a N. Dokažte, že

$$\frac{|CN|}{|NA|} + \frac{|BM|}{|MA|} = 1.$$

Příklad 14. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník s $|AC| = |BC|$. Kružnice vepsaná se dotýká stran AB a AC postupně v bodech D a E. Bodem B vedeme přímku různou od BE, která protne kružnici vepsanou v bodech F a G. Nechť AB protíná přímky EF a EG postupně v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$. (MEMO 2008)

Těžší úlohy

Nyní si spočítáme několik úloh. Bude dobré vědět, že Cèvova věta platí i pro bod vně trojúhelníku a Menelaova věta i pro přímku, která trojúhelník neprotne (oba důkazy se dělají obdobně). Nezapomeňte používat také mocnost, podobnost, sinovou větu nebo dokonce kombinovat více Cèvových/Menelaových vět. Jak se na úloze pozná, že můžeme použít Cèvovu nebo Menelaovu větu? Posuďte sami.

Příklad 15. Strany AB, BC, CD a DA čtyřúhelníku $ABCD$ protne přímka postupně v bodech K, L, M a N. Dokažte, že

$$\frac{|BL| \cdot |AK| \cdot |DN| \cdot |CM|}{|LC| \cdot |KB| \cdot |NA| \cdot |MD|} = 1.$$

Příklad 16. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho výšky AA', BB'. Zvolme bod D na oblouku ACB kružnice opsané trojúhelníku ABC. Buď $AA' \cap BD = P$ a $BB' \cap AD = Q$. Ukažte, že střed úsečky PQ leží na $A'B'$.

Příklad 17. Nechť ABC je trojúhelník a M je jeho vnitřní bod, který zároveň leží na ose úhlu γ. Přímky AM, BM a CM protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech A', B' a C'. Dále $A'C' \cap BC = P$ a $B'C' \cap AC = Q$. Dokažte, že $PQ \parallel AB$. (Indie 2010)

Příklad 18. Je daný konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, kde $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD|$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|$ a $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokažte, že přímky AD, BE a CF se protnou v jednom bodě. (Trojstřetnutí 2008)

Příklad 19. V trojúhelníku ABC zvolme body E a F tak, že $E \in AB$, $F \in AC$ a zároveň $|AE| = |AF|$. Dále bod M je střed strany BC a $EF \cap AM = Q$. Dokažte, že

$$\frac{|QE|}{|QF|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Příklad 20. Tečny kružnice opsané $\triangle ABC$ v bodech A, B a C protnou strany BC, AC a AB postupně v bodech P, Q a R. Dokažte, že P, Q a R leží na jedné přímce.

Příklad 21. O trochu jiný tvar goniometrické Cèvovy věty, avšak stejně dobře použitelný: Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí

$$\frac{\sin(\sphericalangle AYZ) \cdot \sin(\sphericalangle BZX) \cdot \sin(\sphericalangle CXY)}{\sin(\sphericalangle AZY) \cdot \sin(\sphericalangle BXZ) \cdot \sin(\sphericalangle CYX)} = 1.$$

Příklad 22. Mějme tři cèviány AX, BY a CZ trojúhelníka ABC protínající se v jednom bodě. Označme P, Q, R po řadě středy úseček YZ, XZ, XY. Dokažte, že přímky AP, BQ a CR procházejí jedním bodem. (Mathematical Reflections)

Příklad 23. Nechť se cèviány AK, BL a CM v trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě. Označíme-li $KL \cap AB = X$, $LM \cap BC = Y$ a $KM \cap AC = Y$, pak dokažte, že X, Y a Z leží na jedné přímce.

Příklad 24. V trojúhelníku ABC jsou body P, Q a R středy stran AB, BC a AC. Cèviány AN, BL a CM se protínají v jednom bodě. Dále $PL \cap BC = J$, $MQ \cap AC = I$ a $NR \cap AB = H$. Dokažte, že H, I a J leží na jedné přímce.

Příklad 25. Je daný trojúhelník ABC. Kružnice dotýkající se strany BC v jejím středě protne strany AB a AC v bodech R, R' a S, S'. Buď $RS \cap BC = P$ a $R'S' \cap BC = P'$. Dokažte, že $|BP'| = |CP|$.

Příklad 26. (Pascalova věta) Body A, B, C, D, E a F leží na jedné kružnici v libovolném pořadí. Nechť $AB \cap DE = L$, $BC \cap EF = M$ a $CD \cap FA = N$. Dokažte, že body L, M a N leží na jedné přímce.

Příklad 27. Je daný čtyřúhelník $ABCD$ a body $Q = AD \cap BC$, $P = AB \cap CD$, $R = AC \cap BD$, $K = QR \cap AB$, $L = PR \cap BC = L$ a $T = AC \cap PQ$. Dokažte, že K, L a T leží na jedné přímce.

Příklad 28. (Van Aubelova věta) Mějme trojúhelník ABC a v něm cèviány AL, BM a CN, které se protínají v bodě P. Dokažte, že

$$\frac{|AP|}{|PL|} = \frac{|MA|}{|CM|} + \frac{|AN|}{|NB|}.$$

Literatura a zdroje

Chtěl bych poděkovat Tomáši Pavlíkovi, jehož příspěvek jsem téměř beze změn převzal.

[1] Alfred S.Posamentier, Charles T. Salkind: *Challenging Problems in Geometry*, 1996.
[2] *http://www.mathlinks.ro/Forum*
[3] Michal „Kenny“ Rolínek: Přednášky *Umění vidět v matematice*

Pravděpodobnostní metoda

MARTIN TÖPFER

ABSTRAKT. Pravděpodobnostní metoda je způsob důkazu existence kombinatorických objektů „počítáním". Navíc pro mnoho důležitých objektů je to jediný známý důkaz. Použití pravděpodobnosti nám oproti počítání možností nejen výpočet zjednodušší, ale poskytne nám i pokročilejší techniky, jak potřebné odhady dokázat.

Pravděpodobnostní metodu používáme hlavně na důkaz existence nějakých matematických objektů. Místo snahy o konstrukci (která mnohdy ani není známá) se pokusíme najít nějaký postup využívající pravděpodobnost, o kterém dokážeme, že s nenulovou pravděpodobností uspěje. Z toho již nutně vyplývá existence hledaného objektu.

Definice. *Elementárním jevem* nazýváme kompletní situaci, která nastala po náhodném procesu, tedy například „Na první kostce padla trojka, na druhé dvojka a na třetí trojka." *Jevem* pak nazýváme nějakou vlastnost takové situace, například „Na první kostce padlo sudé číslo." Pravděpodobnost, že jev A nastal značíme $P(A)$. Symbolem $A \cap B$ značíme, že nastal jev A a současně nastal jev B, a $A \cup B$ značí, že nastal jev A nebo nastal jev B. *Nezávislé jevy* jsou takové, pro které platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Tvrzení. (Union bound) *Nechť $A_1, A_2, \dots A_n$ jsou jevy (nemusí být nezávislé). Pak*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Příklad 1. V jazykové škole se vyučuje $2n$ jazyků. Každý z 500 místních učitelů umí mluvit alespoň n jazyky. Dokažte, že najdeme 14 nebo méně jazyků tak, aby každý učitel mluvil alespoň jedním z nich.

Řešení. Zvolme si náhodnou 14-tici jazyků (uspořádanou, jazyky se můžou opakovat) a pevného učitele. Pravděpodobnost, že tento učitel nezná první jazyk, je nejvýše 1/2, stejně tak u druhého jazyku, atd. Celkem je tedy pravděpodobnost, že tento učitel nezná ani jeden ze 14 jazyků, rovna 2^{-14}. Za pomoci tvrzení výše získáváme, že pravděpodobnost, že alespoň jeden učitel nezná ani jeden z těchto 14 jazyků, je nejvýše $500 \cdot 2^{-14}$. Tedy pravděpodobnost, že všichni učitelé znají alespoň jeden z těchto 14 jazyků, je $1 - (500 \cdot 2^{-14}) > 0$. A nyní přichází klíčová myšlenka pravděpodobnostní metody: Má-li jev nenulovou pravděpodobnost, může nastat. Tedy opravdu existuje 14-tice jazyků taková, že každý učitel mluví alespoň jedním z nich.

Příklad 2. Jsou dána nesoudělná přirozená čísla m, n. Jaký je počet cest po mřížce v obdélníku $m \times n$ z levého dolního rohu do pravého horního, které vedou jen doprava a nahoru a jsou celé pod úhlopříčkou? (MKS 26–5)

Příklad 3. Ve skupině 90 dětí má každé alespoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že lze děti rozdělit do tří 30-členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupince alespoň jednoho kamaráda. (MO 61–III)

Příklad 4. Matematické soutěže se účastnilo 200 studentů, každý z nich řešil šest úloh. Je známo, že každou úlohu správně vyřešilo alespoň 120 studentů. Dokažte, že můžeme najít dva studenty, kteří dohromady vyřešili všechny úlohy. (IMC 2002)

Příklad 5. Ukažte, že je možné obarvit prvky množiny $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ čtyřmi barvami tak, aby neexistovala jednobarevná desetiprvková aritmetická posloupnost. (IMO 1987)

Příklad 6. V rovině je dáno 100 bodů v obecné poloze. Dokažte, že počet ostroúhlých trojúhelníků nepřekračuje 70% počtu všech trojúhelníků. (IMO 1970)

Příklad 7. (Dolní odhad na Ramseyova čísla) Dokažte, že hrany úplného grafu na $2^{k/2}$ vrcholech je možné obarvit dvěma barvami tak, aby v nich nebyl žádný úplný jednobarevný podgraf na k vrcholech.

Příklad 8. V tabulce 100×100 jsou napsaná čísla $1, 2, \ldots, 5000$, každé právě dvakrát. Dokažte, že je možné vybrat 100 čísel tak, že z každého sloupce a z každého řádku vybereme právě jedno číslo, a navíc budou tato čísla různá.

Střední hodnota

Definice. *Náhodná veličina* je reálné číslo, které spočteme na základě elementárního jevu, tedy například „číslo, které padlo na první kostce“ nebo „počet kostek, na kterých padla trojka“.

Definice. *Střední hodnota* náhodné veličiny X je její průměrná hodnota a značí se $E(X)$. Přesněji je $E(X)$ vážený aritmetický průměr přes všechny hodnoty X na elementárních jevech, kde váhy jsou pravděpodobnosti těchto jevů.

Tvrzení. (Počítání střední hodnoty)

(1) *Buď A jev a I_A náhodná veličina, která dává nulu resp. jedničku, pokud A nastal resp. nenastal. Pak $E(I_A) = P(A)$.*

(2) *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, pak $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*

(3) *Nechť X je náhodná veličina a r reálné číslo, pak $E(r \cdot X) = r \cdot E(X)$.*

Pozor! Další zobecnění tohoto tvrzení, jako například $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, již obecně neplatí.

Tvrzení 9. (použití střední hodnoty) *Buď X náhodná veličina. Pak existuje elementární jev, na kterém $X \leq E(X)$, a také jiný elementární jev, na kterém $X \geq E(X)$.*

Příklad 10. Nechť F je množina všech n-tic $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, kde každé A_i je podmnožinou $\{1, 2, \dots, 1998\}$. Označme $|A|$ počet prvků množiny A. Najděte hodnotu

$$\sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n)} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

(APMO 1998)

Příklad 11. V šachovém turnaji, kterého se zúčastnilo 40 hráčů, se odehrálo celkem 80 partií, přičemž žádná dvojice spolu nehrála víckrát. Ukažte pro co největší n, že existuje n hráčů, kteří mezi sebou nesehráli žádný zápas.

Příklad 12. V soutěži je a soutěžících a b porotců, kde $b \geq 3$ je liché číslo. Každý porotce hodnotí každého soutěžícího buď jako „dobrý", nebo jako „špatný". Předpokládejme, že k je takové číslo, že pro libovolnou dvojici porotců se jejich hlasy shodovaly u nejvýše k soutěžících. Dokažte nerovnost $k/a \geq (b-1)/(2b)$.

(IMO 1998)

Příklad 13. V turnaji n hráčů hrál každý s každým právě jednou. Hamiltonovská cesta je takové uspořádání n hráčů, že první porazil druhého, druhý třetího, ... Dokažte, že turnaj mohl dopadnout tak, že existovalo alespoň $n!/2^{n-1}$ hamiltonovských cest.

Příklad 14. Na večírku je $n \geq 2$ lidí, někteří se znají[1]. Dokažte, že existují dva lidé A, B takoví, že mezi zbylými $n-2$ najdeme $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ lidí, kteří mají stejný vztah k A i k B.

Příklad 15. Mějme graf G s n vrcholy a $m \geq 4n$ hranami. Dokažte, že kdykoli takový graf nakreslíme do roviny, bude obsahovat alespoň $m^3/(64n^2)$ průsečíků.

Literatura a zdroje

[1] Mirek Olšák: *Od Dirichleta k pravděpodobnosti*, sborník *i*KS 2012
[2] Law Ka Ho: *Probabilistic Method*, Mathematical Excalibur, 2009
[3] Sourav Chakraborty: *Probabilistic method*, lecture notes

[1] Vztah znát se je vzájemný.

Obsah