Domaſlaw

l. p. 2010

Haanja Bendovaa
Jarda Hanczl
Franta Konopeckyy
Piitr Korcſok
Miro Majercziik
Wiit Muſil, zvanyy Weytek
Tomaaß Pawliik, zvanyy Szawliik
Moncza Poſpiißilovaa
Michal Roliinek, zvanyy Kenny
Alcza Skaalovaa
Alexander Slaawik, zvanyy Olin
Pawel Szalom
Pepa Tkadlec
Honziik Wanjhara

autoři: Háňa Bendová, Jarda Hančl, Franta Konopecký, Pítr Korcsok, Miro Majerčík, Vít „Vejtek“ Musil, Tomáš „Šavlík“ Pavlík, Monča Pospíšilová, Michal „Kenny“ Rolínek, Alča Skálová, Alexander „Olin“ Slávik, Pavel Šalom, Pepa Tkadlec, Honzík Vaňhara
editoři: Jakub „šnEk“ Opršal, Alča Skálová
vydání první, náklad 50 výtisků
duben 2010
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Čtvrtá dimenze

Jednou v hospodě U Karla IV.
uviděl jsem kus prostoru čtvrtého.
Čtyři půllitry u stropu nad sálem
letěly tam sobě kolmo navzájem,
což není možné v dimenzi třetí,
kde nejvýše tři půllitry k sobě kolmo letí.

Tak jsem poznal díky Otci vlasti,
jaké jsou v půllitru skryty slasti,
jak všem Čechům rozšiřuje obzory
o n-dimenzionální prostory!

— *Emil Calda*

Burnsideovo lemma

Háňa Bendová

Abstrakt. Burnsideovo lemma je silný nástroj při řešení jistého typu kombinatorických úloh. V tomto příspěvku jsou na konkrétním příkladu vysvětlené potřebné pojmy a následně i samotné lemma. Příspěvek také obsahuje sadu několika dalších příkladů.

Jedná se o velice silný nástroj při počítání jistých kombinatorických úloh, které by nám bez znalosti tohoto lemmatu připadaly neřešitelné.

Příklad. Kolik různých náhrdelníků lze sestavit ze 3 skleněných a 5 dřevěných korálků? Korálky jsou navlečené na šňůrce, takže dva náhrdelníky lišící se jen pootočením považujeme za shodné.

Kdybychom nedodali poslední větu, byla by odpověď lehká, hledaný počet by byl $\binom{8}{3} = 56$ (počítáme „pevné“ náhrdelníky, tj. náhrdelníky, u kterých záleží na natočení). Nám ovšem některé náhrdelníky splynou, takže jich bude méně. Jednou z možností, jak spočítat kolik jich tedy je, je použít Burnsideovo lemma. Časem si povíme, co toto lemma říká i jak ho na takový příklad aplikovat. Nejdřív si ale přiblížíme několik pojmů.

Permutace, grupa

Permutace množiny X je *prosté* zobrazení množiny X *na* X, tzn. žádné dva prvky se nezobrazí na stejný prvek (prosté) a zároveň se na každý prvek něco zobrazí (na). Jde tedy o nějaké „přeházení“ prvků množiny X.

Grupa permutací[1] v podstatě znamená, že máme množinu, na ní permutace a mezi permutacemi jakožto prvky množiny binární operaci skládání (složit 2 permutace znamená provést je za sebou – POZOR, záleží na pořadí – běžně se permutace skládají zprava doleva). Ke každé permutaci existuje permutace k ní inverzní (složením permutace s permutací k ní inverzní dostaneme identitu).

Nechť $S(X)$ je grupa permutací na množině X. Pojmem **podgrupa** rozumíme podmnožinu grupy $S(X)$ takovou (označme ji G), která s každou permutací obsahuje i její inverzi a navíc je uzavřená na skládání (tzn. s každými dvěma permutacemi obsahuje i jejich složení – z čehož mimo jiné vyplývá, že obsahuje i identitu).

V našem příkladu si množinu X představme jako množinu všech možných „pevných“ náhrdelníků ze 3 skleněných a 5 dřevěných korálků, tedy takových, u kterých záleží na natočení. Za podgrupu G grupy všech permutací na X budeme brát jen ty permutace, které odpovídají nějakému otočení náhrdelníku (včetně identické permutace), tj. otočení o $k \cdot 45°$, $k = 0, 1, \ldots, 7$.

Klíčová slova. kombinatorika, náhrdelníky, obarvení, permutace, grupa, podgrupa, orbita, pevný bod

[1] Tohoto pojmu netřeba se bát. :-)

Orbita, pevné body

Pro $x \in X$ označme $O_x = \{\pi(x);\ \pi \in G\}$ takzvanou **orbitu** prvku x; v podstatě to jsou body, kam se můžu z x dostat použitím permutací z G. Množinu všech orbit, tj. $\{O_x;\ x \in X\}$, budu značit $\mathcal{O}$.

Všimni si, že pokud $y \in O_x$, tak $O_x = O_y$. Intuitivně je to jasné — pokud se z jednoho místa mohu dostat do druhého, tak se z obou mohu dostat do týchž míst. A není problém toto přeformulovat do přesného důkazu.

Z toho ovšem plyne důležitý důsledek: orbity tvoří rozklad množiny X. Tím se míní, že každé $x \in X$ leží v právě jedné orbitě. Zjevně totiž $x \in O_x$. Pokud by x ležel ještě v nějaké jiné orbitě, tj. $x \in O_y$ a $O_x \neq O_y$, pak je dle předchozího odstavce $O_x = O_y$, což je spor. V množině $\mathcal{O}$ jsou tedy množiny, které jsou po dvou disjunktní a jejichž sjednocení je celé X.

V našem příkladu tvoří orbity skupiny náhrdelníků, které se na sebe dají převést pouhým otočením (tj. nějakou permutací z G). Naším cílem je tedy spočítat počet všech orbit.

Bod x se nazývá *pevným bodem* permutace π, pokud $\pi(x) = x$. Jedná se tedy o body, které permutace π zachová (nepohne s nimi)). Množinu všech pevných bodů permutace π budeme značit $X_\pi = \{x \in X;\ \pi(x) = x\}$.

Uvážím-li tedy nějakou permutaci z G z našeho příkladu, tj. nějaké otočení náhrdelníku, pevné body této permutace budou všechny takové náhrdelníky, které se příslušným otočením nezmění. Je snadné ověřit, že v případě našeho náhrdelníku ze 3 skleněných a 5 dřevěných korálků je množina pevných bodů identické permutace celé X, tedy všech $\binom{8}{3} = 56$ náhrdelníků (každý se zobrazí sám na sebe) a ostatní permutace (otočení o $k \cdot 45^\circ$, $k = 1, 2, \ldots, 7$) nemají žádný pevný bod. Kdybychom ovšem měli jiný náhrdelník, třeba ze 4 skleněných a 4 dřevěných korálků, pak už by například otočení o 180° pevné body mělo, kupříkladu náhrdelník, kde se korálky pravidelně střídají.

Burnsideovo lemma

A teď již konečně přijde na řadu ono slíbené báječné mazané …

Lemma. (Burnsideovo)

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} |X_\pi|$$

Možná interpretace: „Počet orbit je roven průměrnému počtu pevných bodů permutací v G.“

Pěkný důkaz je v příspěvku Roberta Šámala: „Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati“.

Aplikujeme-li lemma na náš příklad, dostaneme, že počet orbit (to jest přesně to, co chceme spočítat – počet různých náhrdelníků, nezáleží-li na natočení) je roven

$$\frac{1}{8} \cdot (56 + 0 + \cdots + 0) = 7.$$

Úlohy

Příklad 1. Jak se změní výsledek příkladu z úvodu, budeme-li moci náhrdelník i převracet?

Příklad 2. Kolik náhrdelníků lze sestavit z k skleněných a $8-k$ dřevěných korálků?

Příklad 3. Kolika způsoby lze obarvit políčka šachovnice

(1) 3×3
(2) 4×4
(3) $n \times n$

dvěma barvami? Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud lze dostat jedno z druhého pootočením šachovnice.

Příklad 4. Řešte předchozí úlohu za předpokladu, že je šachovnice skleněná (sklo je průhledné, šachovnice se teď dá i překlápět).

Příklad 5. Dětská skládanka obsahuje 3 červené, 3 modré a 3 zelené čtvercové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého čtverce 3×3, nezáleží-li na natočení?

Příklad 6. Kolika způsoby lze obarvit stěny krychle

(1) 2 barvami?
(2) k barvami?

Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno dostat z druhého otočením krychle.

Příklad 7. Kolika způsoby můžeme obarvit hrany krychle

(1) 2 barvami?
(2) k barvami?

Příklad 8. Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy krychle

(1) 3 barvami?
(2) k barvami?

Příklad 9. Na každou ze stěn krychle máme nakreslit některou z úhlopříček. Kolik různých krychlí můžeme získat?

Příklad 10. Na každou ze stěn krychle máme nakreslit šipku mířící k některému z vrcholů krychle ležících v této stěně. Kolik různých krychlí můžeme získat?

Příklad 11. Jak se změní odpověď v předchozí úloze, můžeme-li na libovolný počet stěn šipku nenakreslit?

Příklad 12. Kolika způsoby lze na stěny krychle umístit čísla 1–6? Kolika způsoby to lze udělat tak, aby byl součet protilehlých čísel 7?

Příklad 13. Kolika způsoby lze obarvit stěny čtyřstěnu

(1) 2 barvami?
(2) k barvami?

Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno dostat z druhého otočením čtyřstěnu. Co se stane, pokud budeme uvažovat všechny symetrie čtyřstěnu?

Příklad 14. Kolika způsoby můžeme obarvit stěny pravidelného dvanáctistěnu, máme-li k dispozici 2 barvy?

Příklad 15. Kolika způsoby můžeme obarvit hrany pravidelného dvanáctistěnu, máme-li k dispozici 3 barvy?

Příklad 16. Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy pravidelného dvanáctistěnu, má-li být polovina bílých a polovina černých?

Příklad 17. Kolik různých náramků je možné vytvořit ze 3 bílých, 3 červených a 3 černých korálků, nemají být žádné dva korálky stejné barvy vedle sebe? Dva náramky, které na sebe umíme převést pouhým překlopením nebo otočením, považujeme za stejné.

Příklad 18. Pro všechna přirozená N a n dokažte, že n dělí $\sum_{k=1}^{n} N^{\mathrm{NSD}(n,k)}$, kde $\mathrm{NSD}(a,b)$ značí největší společný dělitel čísel a a b.

Úlohy jsou čerpány ze sbírky *Příklady z algebry* od Davida Stanovského, a z knihy *Metody řešení matematických úloh II* od kolektivu autorů Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša.

Poděkování

Tento text čerpá ze starších příspěvků

[1] Robert Šámal, *Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati*, Rokytnice 1998,
[2] Zuzanka Safernová, *Burnsideovo lemma*, Rapotín 2007.

Velká část je přímo převzata z jednoho či druhého, proto děkuji oběma autorům, neboť mi velmi ušetřili práci.

Posloupnosti alá kombinatorika

Jarda Hančl

Abstrakt. Tento příspěvek se zabývá kombinatorickými vlastnostmi posloupností, které jsou prezentovány pouze na příkladech. V první části se studují konečné posloupnosti, ve druhé části se vhodně vybírají podposloupnosti a nakonec je uvedeno několik velmi zajímavých vlastností geometrických a aritmetických posloupností.

Konečné posloupnosti

Většina úloh v této sekci bude o konečných posloupnostech, proto *Konečnou posloupností délky* n budeme rozumět každou uspořádanou n-tici čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Příklad 1. Každé číslo v posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je buď -1 nebo 0 nebo 1. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu S všech součinů $x_i x_j$ pro $1 \le i < j \le n$.

Příklad 2. Každé číslo v posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ leží v intervalu $[-1, 1]$. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu S všech součinů $x_i x_j$ pro $1 \le i < j \le n$.

Příklad 3. Mezi $2n$ reálnými čísly $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ platí nerovnost

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n > y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Avšak, zaměníme-li v ní libovolnou dvojici čísel x_i a y_i, nerovnost přestane platit. Zjistěte, pro které hodnoty n je to možné.

Příklad 4. Kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňují pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, n-1$ vztah $a_k \le a_{k+1} \le 2a_k$. Dokažte, že v součtu $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ umíme nastavit znaménka tak, že $0 \le S \le a_1$.

Příklad 5. Rozdíl největšího a nejmenšího z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je 1. Určete největší rozdíl mezi čísly

$$y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ldots,\ y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Příklad 6. Součet reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je roven 0, přesto ale pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $x_i = 1$. Dokažte, že největší z čísel

$$|x_1 - x_2|,\ |x_2 - x_3|,\ \ldots,\ |x_{n-1} - x_n|,\ |x_n - x_1|$$

je alespoň $4/n$.

Klíčová slova. posloupnosti, kombinatorika, aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost

Příklad 7. Součet členů cyklické posloupnosti $x_1, x_2, \dots, x_n$ je roven 0. Dokažte, že existuje index k takový, že všechna čísla

$$x_k,\ x_k + x_{k+1},\ \dots,\ x_k + x_{k+1} + \dots + x_{k+n-1}$$

jsou nezáporná.

Příklad 8. Dokažte, že pro libovolnou posloupnost $x_1, x_2, \dots, x_n$ reálných čísel existuje index $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takový, že platí nerovnost

$$\left| \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i \right| \leq \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Příklad 9. Součet druhých mocnin reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ je roven 1. Určete největší možnou hodnotu součtu absolutních hodnot všech 2^n čísel tvaru $\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$.

Příklad 10. Pro reálná čísla $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ se součtem 0 platí $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = A$. Dokažte, že $x_n - x_1 \geq 2A/n$.

Podposloupnosti

Vybereme-li část členů některé posloupnosti a zachováme-li jejich pořadí, hovoříme o těchto vybraných číslech jako o *vybrané podposloupnosti*. Vybírat podposloupnosti můžeme všelijak, mrkněme se na pár fint:

Příklad 11. Dokažte, že z libovolné posloupnosti 101 různých čísel lze vybrat jedenáctičlennou podposloupnost $b_1, b_2, \dots, b_{11}$ takovou, že buď platí $b_1 < b_2 < \dots < b_{11}$ nebo platí $b_1 > b_2 > \dots > b_{11}$.

Příklad 12. Všechna čísla posloupnosti $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou z intervalu $[0, 1]$. Platí, že hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$ nelze disjunktně rozdělit na dvě skupiny tak, že součet čísel v obou skupinách je větší než 1. Najděte největší možnou hodnotu součtu $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Pro která n je tato hodnota dosažitelná?

Příklad 13. Buď součet čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ roven $2n$ a největší z nich různé od $n+1$. Dokažte, že je-li n sudé, pak lze z posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ vybrat několik členů tak, aby jejich součet byl roven n.

Příklad 14. Mějme přirozená čísla $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ taková, že součty $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ a $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ jsou rovny témuž číslu menšímu než $m \cdot n$. Dokažte, že v rovnosti

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

lze vyškrtnout několik sčítanců (ne všechny) tak, aby vzniklo opět platné tvrzení.

Aritmetické a geometrické posloupnosti

Aritmetickou posloupností s počátečním členem a a diferencí d rozumíme posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ definovanou předpisem $a_i = a + (i-1)d$. Geometrickou posloupností s počátečním členem a a kvocientem q rozumíme posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ definovanou předpisem $a_i = aq^{i-1}$.

Příklad 15. První člen a_1 i diference d aritmetické posloupnosti jsou přirozená čísla. Dokažte pak, že některý člen posloupnosti bude mít v dekadickém zápisu číslici 9.

Příklad 16. Nekonečná posloupnost $x_1, x_2, \dots, x_n$ reálných čísel splňuje pro libovolná m, n vztah

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n}.$$

Dokažte, že potom je tato posloupnost aritmetická.

Příklad 17. Pro libovolné $n \geq 3$ najděte aritmetickou posloupnost délky n tvořenou složenými a navzájem nesoudělnými čísly.

Příklad 18. Existuje nekonečná geometrická posloupnost kladných čísel $a_1, \dots$ taková, že a_i je celé právě tehdy, když $i \in \{1, 2, \dots, 2010\}$?

Příklad 19. V geometrické posloupnosti kladných čísel se vyskytuje nekonečně mnoho celých čísel. Rozhodněte, zdali potom musí být její kvocient celé číslo.

Literatura

[1] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh II*, Masarykova Univerzita, Brno, 1991

[2] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998

Spirální podobnost

Franta Konopecký

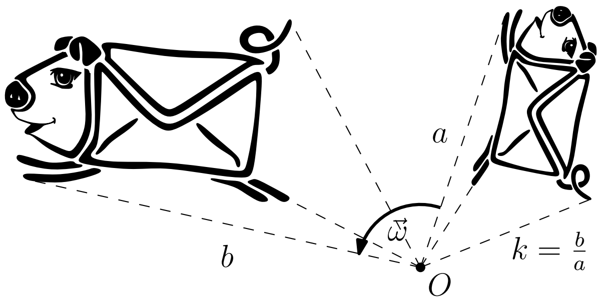
Abstrakt. Obsáhlý a souhrnný elaborát o *spirální podobnosti* (tj. složení stejnolehlosti a otočení), určený jednak jako ucelený studijní materiál využitelný i pro samostudium, druhak jako obsáhlý zdroj příkladů s návody a řešeními. Počet příkladů: 15, počet cvičení: 5, počet tvrzení o spirální podobnosti: 10.

Úvod

Spirální podobnost je nejobecnější přímé podobné zobrazení roviny, které řeší některé jinak velmi složité úlohy. Cílem tohoto příspěvku je sestavit ucelený souhrn poznatků o spirální podobnosti, ukázat použití na příkladech a umožnit plnohodnotné nastudování problematiky.

Definice. *Spirální podobnost* je složení otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určena středem spirální podobnosti O, orientovaným úhlem otočení $\overrightarrow{\omega}$ a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.

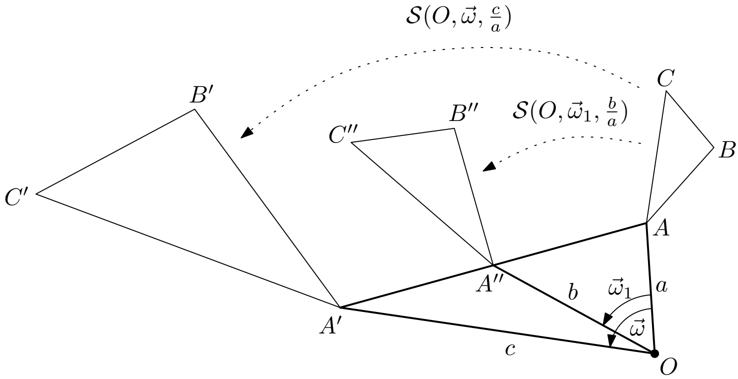
Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, k)$



Motivační příklady

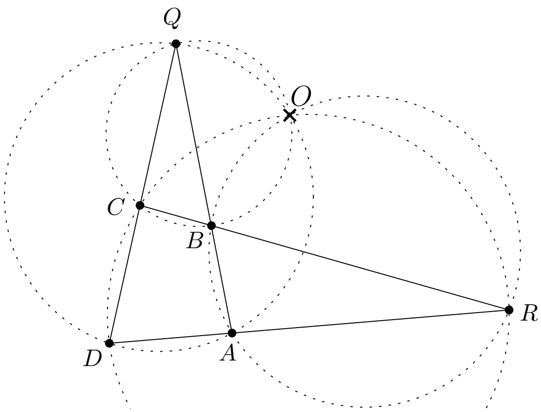
Příklad 1. V rovině jsou dány různě velké stejně orientované podobné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Středy úseček AA', BB', CC' označme po řadě A'', B'', C''. Ukažte, že i trojúhelník $A''B''C''$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

Klíčová slova. spirální podobnost, geometrie, zobrazení, podobnost, hardcore, studijní text, stejnolehlost, otočení



Řešení. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jednoznačně určují spirální podobnost $\mathcal{S}$ $(O, \overrightarrow{\omega}, \frac{c}{a})$, která převádí jeden na druhý (to bude jedno z následujících tvrzení). Trojúhelníky OAA', OBB', OCC' mají stejný úhel u vrcholu O a stejný poměr přilehlých stran. Jsou tedy podobné, a to i s těžnicemi, podobné jsou tak i trojúhelníky OAA'', OBB'', OCC''. Nová spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}_1, \frac{b}{a})$ zobrazuje trojúhelník ABC na $A''B''C''$. Spirální podobnost je podobné zobrazení, trojúhelníky jsou podobné.

Příklad 2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a CD označme Q a průsečík přímek AD a BC označme R. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BCQ, ADQ, ABR, CDR procházejí jedním bodem.



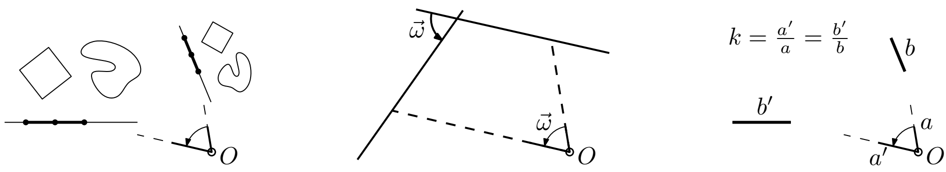
Řešení. Protože se všechny čtyři kružnice protínají ve středu spirální podobnosti O, která zobrazuje $A \to B$, $D \to C$, je důkaz dokončen.

S nynějšími znalostmi je předchozí důkaz neplatný, ale za několik málo okamžiků bude vše opravdu takto jednoduché!

Vlastnosti spirální podobnosti

Tvrzení 1. (Základní vlastnosti) *Pro spirální podobnost platí:*

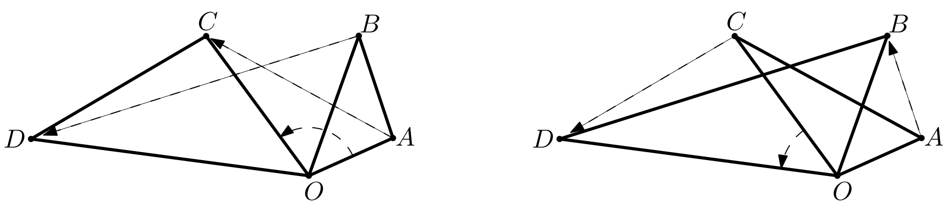
(i) *Je to podobné zobrazení, obrazem přímky je přímka, obrazem čtverce je čtverec, obrazem středu úsečky je střed obrazu úsečky, obecně obrazem útvaru je jemu podobný útvar.*
(ii) *Úhel mezi přímkou a jejím obrazem je úhel otočení.*
(iii) *Poměr délky úsečky a jejího obrazu je roven koeficientu stejnolehlosti.*



Tvrzení 2. (Speciální případy) *Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ se při speciálních hodnotách $\overrightarrow{\omega}$, k redukuje následovně.*

(i) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 0$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem k.*
(ii) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 180°$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem $-k$.*
(iii) *Pro $k = 1$ dostáváme otočení kolem O o úhel $\overrightarrow{\omega}$.*
(iv) *Pro $k = 1$ a $\overrightarrow{\omega} = 180°$ dostáváme středovou souměrnost se středem O.*
(v) *Žádná kombinace O, $\overrightarrow{\omega}$, k nám nedá posunutí nebo* nepřímé *zobrazení.*

Tvrzení 3. (Spirální podobnosti chodí po dvou!) *Nechť spirální podobnost se středem O převádí $A \to C$ a $B \to D$. Pak jednoznačně určená spirální podobnost, která převádí $A \to B$ a $C \to D$, má též střed v O. Úhel otočení a koeficient se může lišit.*



Tvrzení 4. (Existence a jednoznačnost) *V rovině jsou dány body A, B, C, D takové, že $ABDC$ (v tomto pořadí!) není rovnoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí $A \to C$, $B \to D$. (V případě rovnoběžníku $ABDC$ bychom potřebovali posunutí, které spirální podobnost neposkytuje.)*

Návod. Jednoznačnost: řekněme, že existují dvě takové spirální podobnosti $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ s různými středy O_1 a O_2. Zůstane v identitě $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2^{-1}$ bod O_1 na místě? Existence: je obsažena v *tvrzení 6*.

Lemma 5. (S.p. jednoznačně určena trojúhelníkem OAA'.) *Buď $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ spirální podobnost zobrazující bod A na A'. Potom platí následující.*

(i) *Pro různé body A jsou všechny trojúhelníky OAA' podobné.*
(ii) *Libovolný trojúhelník OAA' zpětně jednoznačně určuje spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.*

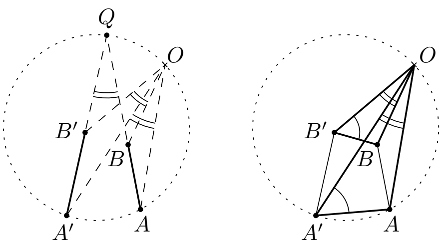
Značení. Orientovaný úhel ABC, tedy úhel od polopřímky $\mapsto BA$ k polopřímce $\mapsto BC$, budeme značit $\sphericalangle\overrightarrow{ABC}$.

Tvrzení 6. (Konstrukce středu; existence) *Buď $ABBA'$ čtyřúhelník takový, že se přímky AB a $A'B'$ protínají v bodě Q. Potom druhý průsečík O kružnic opsaných trojúhelníkům QAA' a QBB' je střed spirální podobnosti $\mathcal{S}\left(O, \sphericalangle\overrightarrow{AOA'}, \frac{|AB|}{|A'B'|}\right)$, která zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$.*

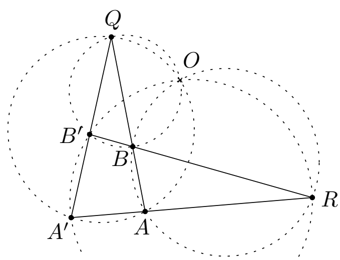
Důkaz. Pokud O splývá s Q, redukuje se spirální podobnost na otočení. Předpokládejme $O \neq Q$. Podle předchozího *lemmatu 5* nám stačí k existenci spirální podobnosti se středem v O ukázat podobnost trojúhelníků OAA' a OBB'. Tu prubne shodnost úhlů. Díky rovnostem obvodových úhlů je

$$|\sphericalangle AOA'| = |\sphericalangle AQA'| = |\sphericalangle BQB'| = |\sphericalangle BOB'|,$$
$$|\sphericalangle BB'O| = |\sphericalangle BQO| = |\sphericalangle AQO| = |\sphericalangle AA'O|$$

a trojúhelníky OAA' a OBB' jsou podobné.



K předcházejícímu tvrzení



K následujícímu tvrzení

Tvrzení 7. (Průsečík čtyř kružnic, Miquel's point of quadrilateral) *Buď $ABB'A'$ čtyřúhelník s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a $A'B'$ označme Q, průsečík přímek AA' a BB' označme R. Potom střed spirální podobnosti O, která zobrazuje $A \to A'$ a $B \to B'$, je průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'Q$, $BB'Q$, ABR a $A'B'R$.*

Důkaz. Podle *tvrzení 3* je O středem dvou spirálních podobností. Díky první z nich leží podle *tvrzení 6* na kružnicích opsaných ABQ a $A'B'Q$ a díky druhé na kružnicích opsaných $AA'R$ a $BB'R$.

Poznámka. Předchozí tvrzení nám zároveň (už regulérně) dokázalo druhý motivační příklad.

Cvičení na spirální podobnost

Následují **důležitá** cvičení na pochopení principů spirální podobnosti. Jejich vyřešení (většinou pomocí některých tvrzení) je esenciální k pochopení těžších příkladů. Používejte v nich hlavně analogie k motivačnímu *příkladu 1*. Dále si zkuste pomocí *tvrzení 4* o existenci a jednoznačnosti zdůvodnit, že spirální podobnost můžete použít, a navíc jednoznačně. Poté ze základních vlastností o podobnosti a *lemmatu 5* hledejte další spirální podobnosti, případně využijte existence „duální“ spirální podobnosti podle *tvrzení 3*.

Cvičení 1. Na stěně visí dvoje hodiny, jedny jdou o čtvrthodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček?

Cvičení 2. Kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Bodem A se otáčí přímka, která protíná kružnici k podruhé v bodě K a l podruhé v L. Jakou množinu vykresluje střed úsečky KL?

Cvičení 3. Zadání stejné jako v předchozím příkladě, akorát se ptáme, jakou množinu vykresluje bod N úsečky KL, pro který $|KN| = 2|LN|$.

Cvičení 4. Zadání stejné jako v předchozím příkladě plus je úsečka KL doplněna na rovnostranný trojúhelník KLM. Co maluje bod M?

Návod. Dokažte, že má čtyřúhelník $BLMK$ pořád stejný tvar (z obvodových úhlů a stejného tvaru rovnostranného trojúhelníku). Všechny trojúhelníky BLM jsou si tím pádem podobné a spirální podobnost se středem v B, úhlem $\sphericalangle \overrightarrow{LBM}$ a koeficientem $|BL|/|BM|$ zobrazuje každý bod L do nějakého bodu M.

Cvičení 5. Po třech různoběžných přímkách se rovnoměrně pohybují body A, B, C. Ukažte, že pokud jsou ve dvou časech t_1, t_2 trojúhelníky ABC podobné, tak už jsou podobné v každém okamžiku.

Shrnutí spirální podobnosti

A na závěr výkladu uvádíme důležité fakty o spirální podobnosti, které by si měl důrazně osvojit každý, kdo ji chce umět používat.

(i) S.p. je podobné zobrazení, všechny poměry a tvary se zachovávají.
(ii) Úhel otočení je i úhlem odpovídajících si přímek v zobrazení.
(iii) Středem s.p. prochází čtyři kružnice umožnující několikanásobnou rovnost obvodových úhlů.
(iv) Každá s.p. má vždy duální s.p., která má stejný střed a poskytuje další rovnosti úhlů.
(v) Pokud trojúhelník tvořený třemi rovnoměrně se pohybujícími body má dvakrát stejný tvar, má pořád stejný tvar.

Bohužel nejsou tvrzení o spirální podobnosti obecně známá, takže je dobré míti na paměti i náznaky jejich důkazů, abyste mohli použité fakty zdůvodnit. Viz *cvičení 5*.

Příklady na spirální podobnost

Příklad 3. (Simpsonova přímka) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že paty kolmic z D postupně na přímky AB, AC, BC leží na jedné přímce. Paty označme postupně P, Q, R.

Návod. Doplňte do obrázku bod S tak, aby byly trojúhelníky DQS, DRA a DPC podobné. Spirální podobnost $\mathcal{S}(D, \sphericalangle\overrightarrow{PDC}, \frac{|PD|}{|DC|})$ zobrazuje trojici bodů P-Q-R na C-S-A, které leží na přímce.

Příklad 4. (USAMO 2006) Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a nechť E, F jsou body postupně na stranách AD, BC takové, že dělí strany ve stejném poměru $|AE| : |ED| = |BF| : |FC|$. Přímka EF protíná přímky BA a CD postupně v bodech S a T. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE, SBF, TCF a TDE mají společný bod.

Návod. Najděte spirální podobnost zobrazující $A \to B$ a $D \to C$ a využijte *tvrzení 6* o konstrukci středu.

Příklad 5. (PraSe 27-3-8) ABC je ostroúhlý trojúhelník s výškou AD. Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že X, D, Y leží na jedné přímce a $X \neq D \neq Y \neq B$. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY. Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé.

Návod. Najděte spirální podobnost svazující tři Thaletovy kružnice.

Řešení. Dvě různá řešení najdete na *http://mks.mff.cuni.cz/archive/27/3.pdf*.

Příklad 6. (Od Kennyho) Stranám AB a BC trojúhelníka ABC připíšeme zvenčí podobné pravoúhelníky[2] $BKLC$ a $MNBA$. Ukažte, že přímky NC, ML a AK procházejí jedním bodem.

Návod. Vezměte vhodnou spirální podobnost a zobrazte na sebe kružnice opsané našim pravoúhelníkům.

Příklad 7. (Zobecnění IMO 2005) Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, který není lichoběžník. Na stranách AB a CD jsou body E a F, které dělí své strany ve stejném poměru $|AE| : |EB| = |CF| : |FD|$. Průsečíky úhlopříček a přímky EF označme P, Q, R. Potom pro různé polohy bodu E prochází kružnice opsané trojúhelníku PQR ještě jedním pevným bodem (různým od průsečíku úhlopříček P).

Návod.

(i) Vykreslete všechny kružnice vztahující se ke spirální podobnosti převádějící $A \to C$, $B \to D$.
(ii) Pomocí obvodových úhlů ukažte, že střed oné spirální podobnosti leží na kružnici opsané trojúhelníku PQR.

Příklad 8. (Od Kennyho) Je dán pětiúhelník $ABCDE$ takový, že jsou si trojúhelníky ABC, ACD, ADE podobné. Označme T průsečík BD a CE. Ukažte, že přímka AT je kolmá na spojnici středů S_1 a S_2 kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE.

Návod.

(i) Stačí vám ukázat, že $|AS_1| = |S_1T|$ a $|AS_2| = |S_2T|$.
(ii) Pomocí spirální podobnosti dokažte rovnost úhlů $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BTC|$ a $ABCT$ je tětivový.

Příklad 9. (IMO Shortlist 2006) Buď $ABCDE$ konvexní pětiúhelník takový, že jsou si trojúhelníky ABC, ACD, ADE podobné. Úhlopříčky BD a CE se protínají v P. Ukažte, že přímka AP půlí stranu CD.

Návod. Označme Q průsečík BD a AC, R průsečík DA a EC. Díky *Cèvově Větě*[3] nám stačí ukázat $|AQ| : |QC| = |AR| : |RD|$. Čtyřúhelníky $ABCD$ a $ACDE$ si odpovídají ve spirální podobnosti, tedy i jejich průsečíky úhlopříček, a jsou tak zachovány potřebné poměry.

[2] Pravoúhelník je obdélník nebo čtverec.

[3] **Cèvova věta:** Na stranách a, b, c trojúhelníka ABC jsou postupně body A_1, B_1, C_1. Přímky AA_1, BB_1, CC_1 se protínají v jednom bodě, právě když platí rovnost $\frac{|AC_1|}{|BC_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = 1$.

Příklad 10. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u C. Označme M střed přepony a D takový bod odvěsny BC, že platí $|CD| = |CM|$. Nechť dále P značí průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům CMB a BDA, $P \neq B$. Ukažte, že přímka BP je osou úhlu ABC.

Návod.

(i) Najděte spirální podobnost zobrazující $\triangle CPM$ na $\triangle DPA$.
(ii) Pomocí „duální“ spirálky a rovnosti $|CD| = |MA|$ ukažte shodnost $\triangle CPD$ a $\triangle MPA$.
(iii) Uvědomte si, v jakém vztahu jsou výšky ve shodných trojúhelnících.

Příklad 11. (Čína 1992) Střed kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$ označme O. Úhlopříčky AC a BD se protínají v P. Kružnice opsané trojúhelníkům ABP a CDP se protínají v P a Q. Předpokládejme, že jsou body O, P a Q různé. Dokažte, že $|\sphericalangle OQP| = 90°$.

Návod.

(i) Bod O si definujte jako průsečík os úseček AC a BD.
(ii) Spirální podobnost se středem v O zobrazuje $AC \to BD$.
(iii) Jestliže označíme S_1, S_2 středy úhlopříček, tak O, P, S_1, S_2 leží na Thaletově kružnici.
(iv) Díky spirální podobnosti leží Q, P, S_1, S_2 též na jedné kružnici.

Příklad 12. (Mathlinks) Ke stranám konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ připíšeme zvnějšku podobné trojúhelníky ABW, BCX, CDY, DAZ. Ukažte, že $WXYZ$ je rovnoběžník.

Návod.

(i) Čtyřúhelník je rovnoběžníkem, jestliže středy úhlopříček splývají.
(ii) Středy úseček AC, BD, WY, XZ označme R, S, T, U. Pomocí spirální podobnosti převádějící ABW na CDY ukažte podobnost $\triangle RST \sim \triangle ABW$ podobně jako v *příkladu 1.*
(iii) Druhou spirální podobností ukažte $\triangle RSU \sim \triangle BCX$.
(iv) Z podobností trojúhelníků plyne $T = U$.

Příklad 13. (PraSe 26-6-8) $PIVO$ je konvexní čtyřúhelník. Osy stran PI a VO se protínají v bodě Y. X je bod uvnitř $PIVO$ takový, že $|\sphericalangle XVO| = |\sphericalangle XPO| < 90°$ a $|\sphericalangle XIV| = |\sphericalangle XPO| < 90°$. Ukažte, že $|\sphericalangle VYO| = 2|\sphericalangle XIV|$.

Návod.

(i) Vezměme body X' a Y' tak, že platí podobnosti trojúhelníků $\triangle OPX \sim OY'X'$ a $\triangle VX'Y' \sim \triangle VXI$.
(ii) Pomocí spirálních podobností se středy v O, V zobrazujícími $P \to Y' \to I$ ukažte $|PY'| = |Y'I|$, z čehož vyplyne $Y = Y'$.

Řešení. Úplné řešení najdete na *http://mks.mff.cuni.cz/archive/26/6.pdf.*

Příklad 14. (IMO Shortlist 1992) V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky stejně dlouhé. Ukažte, že pokud vně každé straně připíšeme rovnostranný trojúhelník, tak jsou spojnice protějších středů těchto trojúhelníků na sebe kolmé.

Návod.

(i) Zafixujte AC a rovnoběžně posouvejte BD, dedukujte pohyb oněch spojnic středů.
(ii) Zjistěte, jestli kolmost platí v limitní poloze $B = C$.
(iii) Pomocí spirálních podobností ukažte, že se při pohybu bodů B, D z limitní polohy do obecné polohy pohybují protější středy trojúhelníků stejně.

Příklad 15. (IMO Shortlist 2006) Na stranách a, b, c trojúhelníka ABC zvolíme postupně body A_1, B_1, C_1. Kružnice opsané trojúhelníkům AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 protnou kružnici opsanou podruhé v bodech A_2, B_2, C_2. Body A_3, B_3, C_3 jsou středovými obrazy bodů A_1, B_1, C_1 postupně podle středů stran a, b, c. Ukažte, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ je podobný trojúhelníku $A_3B_3C_3$.

Návod.

(i) Pomocí znalosti průniku kružnic jako středu s.p. ukažte, že $\triangle A_2BC \sim \sim \triangle A_2C_1B_1$.
(ii) Označme středy úseček b, c, AA_2 postupně S_b, S_c, S_{AA_2}. Ukažte $\triangle S_{AA_2} S_cS_b \sim \triangle A_2BC$.
(iii) S odkazem na *cvičení 5* odůvodněte $\triangle A_2C_1B_1 \sim \triangle S_{AA_2}S_cS_b \sim \triangle AC_3B_3$.
(iv) Ukažte shodnost odpovídajících úhlů v $\triangle A_2B_2C_2$ a $\triangle A_3B_3C_3$.

Literatura, zdroje a poděkování

Především děkuji *Kennymu Rolínkovi*, že mě k tomuto tématu dotlačil a dodal kopu pěkných příkladů. Mými dalšími zdroji byly:

[1] Archiv prasátka, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/.*
[2] Franta Konopecký, *Hýbání s body*, *http://frakon.matfyz.cz/files/HybaniSBody.pdf.*
[3] Matematické fórum *http://www.mathlinks.ro.*
[4] Yufei Zhao, *Similarity (IMO Training 2007)*, 2007, *http://web.mit.edu/yufeiz/www/similarity.pdf.*

Tento elaborát i materiál o hýbání s body bude zanedlouho ke stažení v knihovně semináře *http://mks.mff.cuni.cz/library/.*

Pravidelnost mnohostěnů

Pítr Korcsok

Abstrakt. Přednáška má za cíl ukázat krásu pravidelných a polopravidelných mnohostěnů a vysvětlit základní pojmy z této oblasti. Taktéž se snaží naznačit základní vztahy, které v mnohostěnech a mezi nimi platí.

Při přípravě svojí přenášky jsem se nechal velmi výrazně inspirovat staršími příspěvkami Michala Hrocha (sborník ze soustředění v Olšance 2006) a Roberta Káldyho (sborník z Valdeku 2000), kterým na tomto místě děkuji.

Definice. (Mnohostěn) *Mnohostěn* je konečná množina mnohoúhelníků, v níž platí:

(1) Mnohoúhelníky se stýkají pouze na stranách nebo ve vrcholech.
(2) Každá strana mnohoúhelníka se stýká s právě jednou stranou jiného mnohoúhelníka.
(3) Pro každé dva mnohoúhelníky existuje cesta mezi jejich vnitřky.
(4) Pro každý vrchol V platí, že existuje cesta mezi vnitřky stěn k vrcholu V přilehlých taková, že neprochází vrcholem V.

Lemma. (Eulerova formule) *Pro mnohostěny platí*

$$v + f = e + 2,$$

kde v je počet vrcholů (vertices), s počet stěn (faces) a e počet hran (edges).

Poznámka. S toutéž Eulerovou formulí (vztahem) se lze setkat i v teorii grafů a říká, že výše uvedený vztah platí pro každý souvislý rovinný graf. Lze také ukázat, že pomocí stereografické projekce lze jakýkoli konvexní mnohostěn reprezentovat rovinným grafem.

Lemma. (Další podmínky pro existenci mnohostěnu)

$$3f \leq 2e, \quad 3v \leq 2e.$$

Věta. (Steinitzova) *Ke každé uspořádané trojici přirozených čísel $[f, v, e]$, pro které platí $f + v = e + 2$, $3f \leq 2e$, $3v \leq 2e$, existuje konvexní mnohostěn s počtem stěn f, vrcholů v a hran e.*

Poznámka. Pokud bychom opět zabrousili do teorie grafů, tak zjistíme, že platí následující věta. Pro libovolný vrcholově 3-souvislý rovinný graf G (tj. graf, který po vymazání libovolných 2 vrcholů zůstává souvislý) existuje konvexní mnohostěn, jehož grafem je právě G.

Klíčová slova. mnohostěn, Eulerova formule, Steinitzova věta, dualita, platónská tělesa, deltaedry, archimédovská tělesa, romboedry

Definice. (Dualita) Dualitou nazýváme vlastnost mnohostěnů, že každému z nich odpovídá jeden *duální mnohostěn*, který má vrcholy na místě stěn mnohostěnu původního, podobně stěny místo vrcholů, počet hran se nemění.

Příklad. Dokažte, že platí:

(1) Každý mnohostěn obsahuje aspoň jednu stěnu s méně než šesti vrcholy.
(2) $f \leq 2v - 4$.
(3) $v \leq 2f - 4$.
(4) $e \leq 3v - 6$.
(5) V každém mnohostěnu existuje aspoň jeden vrchol, v němž se stýká méně než šest hran.

Pravidelné mnohostěny

Definice. (Pravidelný mnohostěn) *Pravidelný mnohostěn* je mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné p-úhelníky ($p \geq 3$), takový, že v každém vrcholu se stýká stejný počet q ($q \geq 3$) hran a stěn. Takovéto mnohostěny, které jsou navíc konvexní nazýváme též *platónská tělesa*.

Poznámka. Podmínku o stejném počtu hran a stěn z předchozí definice můžeme nahradit jednou z následujících ekvivalentních podmínek

(1) všechny jeho vrcholy leží na jedné sféře,
(2) všechny jeho sousední stěny svírají stejný úhel,
(3) všechny prostorové úhly tvořené vrcholem a stěnami k němu přilehlými jsou shodné.

Poznámka. (Rovnice pro platónská tělesa) Vyjděme z podmínky pro počet stěn sousedních s každým vrcholem a označme p počet stran každé stěny, q počet hran stýkajících se v jednom vrcholu. Pak z Eulerovy formule vyplývá vztah

$$E = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}.$$

Lemma. *Platónských těles je pouze pět. Pravidelný čtyřstěn, šestistěn (krychle), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.*

Poznámka. (Dualita) Můžeme si všimnout duality mezi krychlí a osmistěnem a mezi dvanáctistěnem a dvacetistěnem. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě. Projevem této duality je i to, že středy stran každého pravidelného mnohostěnu určují pravidelný mnohostěn duální.

Polopravidelné mnohostěny

V definici pravidelného mnohostěnu požadujeme, aby jeho stěny byly navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky a všechny vrcholy měly stejnou *valenci* – počet hran/stěn z něj vycházejících. Budou-li nadále všechny stěny konvexního mnohostěnu pravidelné mnohoúhelníky, můžeme pravidelnost porušit dvěma způsoby. Buď dovolíme různou valenci vrcholů nebo použití vícerých typů mnohostěnů.

Definice. (Deltaedry) *Deltaedry* jsou tělesa, jejichž stěny jsou navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky. Nemusí splňovat např. podmínku stejného počtu stěn kolem každého vrcholu.

Konvexních deltaedrů je 8, 3 z nich jsou platónská tělesa. Deltaedry vyhovují „intuitivním“ kritériím platónských těles, ale nesplňují žádnou z uvedených dodatečných podmínek.

Definice. (Archimédovská tělesa) *Archimédovská tělesa* jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou ne nutně stejné pravidelné mnohoúhelníky a jejichž vrcholy jsou rovnocenné, tj. žádné dva vrcholy nejdou odlišit.

Archimédovských těles je 13 (platónská tělesa ani hranoly a antihranoly za ně nepovažujeme), největší z nich má 96 stěn. Každé archimédovské těleso lze reprezentovat kombinací pravidelných mnohoúhelníků kolem jednoho vrcholu. Tímto lze matematicky dokázat, že žádné další archimedovské těleso neexistuje.

Pokud nebudeme požadovat rovnocennost vrcholů, stoupne počet vyhovujících těles na 75, nepočítaje v tom hranoly a antihranoly, jichž je nekonečně mnoho.

Uvažujme dále tělesa, jejichž stěny jsou shodné, ale ne nutně pravidelné mnohoúhelníky. Máme dvě možnosti.

Definice. (Romboedry) Stěny *romboedrů* tvoří shodné kosočtverce, jejichž délky úhlopříček jsou v poměru $1 : \sqrt{2}$.

Existují dva pravidelné romboedry – dvanáctistěn a čtyřiadvacetistěn.

Definice. (Nastavovaná platónská tělesa) Na každé stěně tělesa vztyčíme pravidelný jehlan, jehož základnou je původní stěna platónského tělesa.

Protože výška oněch jehlanů může být libovolná, můžeme přidat ještě jednu omezující podmínku navíc. Jedna možnost je požadovat, aby stěny byly rovnostranné trojúhelníky, druhá možnost je požadovat stejné konvexní úhly mezi stěnami. Druhá z nich je výhodnější v tom, že výsledné těleso zůstává vždy konvexní, tedy na něj můžeme rekurzivně použít stejný postup a tvořit pseudopravidelné mnohostěny o $9 \cdot 3^n$, $24 \cdot 3^n$ a $60 \cdot 3^n$ trojúhelníkových stěnách.

Literatura a zajímavé odkazy

[1] Robert Káldy, *Pravidelné mnohostěny aneb o hledání dokonalosti*, Valdek 2000,
[2] Michal Hroch, *Pravidelná tělesa*, Olšanka 2006,
[3] *http://www.korthalsaltes.com/* (stránka věnovaná mnohostěnům a mnohému dalšímu)

Geometria

Miro Majerčík

Abstrakt. Příspěvek obsahuje několik lehkých úloh na základní obraty v geometrii. Používají se převážně obvodové, úsekové úhly a mocnost bodu ke kružnici.

Na prednáške si zopakujeme vety o obvodových a stredových uhloch a mocnosti bodu ku kružnici a budeme riešiť príklady, v ktorých sa využívajú. Na záver si dokážeme niekoľko jednoduchých vlastností trojuholníka, na ktoré sa často zabúda a môžu sa hodiť.

Veta. (Obvodové a stredové uhly) *Majme kružnicu k so stredom S, jej tetivu AB a ľubovoľný bod $M \in k$ na väčšom (menšom) oblúku AB. Potom menší (väčší) z uhlov ASB nazývame stredový uhol príslušný k tetive AB a uhol AMB obvodový a platí $2|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle ASB|$.*

Veta. (Úsekový uhol) *Majme kružnicu k so stredom S, jej tetivu AB a dotyčnicu AX ku kružnici v bode A. Uhol BAX nazývame úsekový uhol a má rovnakú veľkosť ako obvodový uhol príslušný k tomu oblúku AB, ktorý leží v opačnej polrovine určenej priamkou AB ako uhol BAX.*

Veta. (Mocnosť) *Majme kružnicu k a bod P. Bodom P vedieme ľubovoľnú sečnicu kružnice k, ktorá ju pretne v bodoch A, B. Mocnosť bodu P ku kružnici k definujeme ako $\mu(P,k) = |PA| \cdot |PB|$ a je rovnaká pre všetky sečnice kružnice k prechádzajúce bodom P. Ak t je dotyčnica ku kružnici k z bodu P, tak $A = B$ a $\mu(P,k) = |PA|^2$.*

Príklad. Nech k_1, k_2 sú kružnice pretínajúce sa v dvoch bodoch A, B. Priamky p, q také, že $A \in p$, $B \in q$ pretínajú k_1 a k_2 v ďalších štyroch bodoch, C, $D \in k_1$, E, $F \in k_2$. Dokáž, že CD a EF sú rovnobežné.

Príklad. Nech k_1, k_2 sú kružnice pretínajúce sa v dvoch bodoch A, K. Potom zostrojíme ΔKLM taký, že $A \in LM$, $L \in k_1$ a $M \in k_2$. Kedy bude mať ΔKLM najväčší obsah?

Príklad. Dve kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v dvoch bodoch A, B. Na k_1 sú ďalej dané 2 rôzne body C, D. Sečnica BC vytína na k_2 bod E, podobne BD bod F. Dokáž, že ak $|DF| = |CE|$, tak bod A je rovnako vzdialený od priamok BC a BF.

Príklad. Majme 3 zhodné kružnice pretínajúce sa v jednom bode O. Ostatné priesečníky označme A, B, C. Dokáž, že O je ortocentrum ΔABC.

Príklad. Vnútri strany AC trojuholníka ABC leží bod D taký, že $|AB| = |CD|$ a uhly ACB a ABD majú rovnakú veľkosť. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode E. Dokáž, že priamky AB a DE sú rovnobežné.

Kľúčové slová. Geometrie, obvodové úhly, úsekový úhel, mocnost

Veta. *V trojuholníku ABC nech os uhla ACB pretína stranu AB v bode X. Potom*

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AX|}{|BX|}.$$

Tj. os uhla v trojuholníku rozdeľuje protiľahlú stranu v pomere priľahlých.

Veta. *V trojuholníku ABC nech p je os uhla ACB, q nech je os strany AB a k nech je kružnica opísaná trojuholníku ABC. Potom p, q, k sa pretínajú v jednom bode. Tj., os uhla a os protiľahlej strany sa pretínajú na opísanej kružnici.*

Veta. *V trojuholníku ABC nech O je ortocentrum a výška na stranu AB nech sa pretína so stranou AB v bode Y a s opísanou kružnicou v bode X. Potom $|OY| = |YX|$. Tj., výška pretína opísanú kružnicu v bode súmerne združenom s ortocentrom podľa strany trojuholníka.*

Veta. *V trojuholníku ABC nech X je päta výšky na stranu AB a Y nech je priesečník osi uhla ACB so stranou AB. Potom*

$$|\sphericalangle XCY| = \left| \frac{|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BAC|}{2} \right|.$$

Tj., uhol medzi osou uhla a výškou prislúchajúcou k jednému vrcholu sa rovná polovici rozdielu zvyšných dvoch uhlov v trojuholníku.

Poďakovanie

Príspevok je presná kópia príspevku Zuzky Pôbišovej z Rapotína 2007. Týmto jej ďakujem.

Toky v sítích, Hallova věta

Vít „Vejtek" Musil

Abstrakt. Cílem přednášky je seznámit se základními definicemi a poznatky týkajících se toků v sítích a problému hledání maximálního toku. Další část přednášky se zabývá párováním a důkazem Hallovy věty pomocí aplikace poznatků o tocích.

Představte si čajovnu, kde u každého stolečku je kohoutek na čaj. K němu se čaj distribuuje systémem čajovodů od jednoho centrálního čajovaru. Jako každého zvídavého milovníka čaje vás zajímá, kolik maximálně čaje k vám může daným čajovodem téci.

Ukázka s čajovnou je zřejmě analogií k mnoha v praxi fungujícím systémům jako jsou například rozvody elektrické energie, vodovodu, telefonních linek, dopravní sítě a mnoho dalších, které mají společné atributy a stojí zato se jimi zabývat. Pro tyto účely si vybudujeme patřičnou abstraktní teorii a ukážeme si několik zajímavých poznatků.

Nejprve si zavedeme pro nás klíčové pojmy, bez kterých se neobejdeme.

Orientovaným grafem nazveme uspořádanou dvojici (V, E), kde V je neprázdná množina a $E \subseteq V \times V$, neboli množina nějakých uspořádaných dvojic z V. Hovoříme-li o konkrétním grafu G, píšeme $G = (V, E)$. Prvkům z V říkáme vrcholy, prvkům z E hrany.

Sítí nazveme čtveřici (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, z a s dva různé vrcholy grafu G (říkáme jim *zdroj* a *stok*), a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany nezápornými čísly.

A jak si takový graf a síť představovat? Stačí si nakreslit množinu puntíků a mezi nimi nějaké šipky a máme orientovaný graf. Když navíc vyznačíme dva vrcholy jako zdroj a stok a ke každé hraně napíšeme kladné reálné číslo, máme síť.

Tok v síti je každá funkce $f\colon E \to {\mathbb{R}^+}_0$, která splňuje

(1) pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \le f(e) \le c(e)$,
(2) pro každý vrchol $u \in V$ mimo zdroj a stok platí

$$\sum_{(x,u)\in E} f(x,u) = \sum_{(u,y)\in E} f(u,y).$$

Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z).$$

Klíčová slova. Orientovaný graf, síť, tok, řez, toky v sítích, maximální tok, množinový systém, systém různých reprezentantů, párovnííní, Hallova podmínka, Hallova věta

A co nám definice vlastně říká? Pokud použijeme náš příměr s čajovodem, pak první podmínka říká, že v žádné části čajovodu nesmí téci více čaje, než na kolik je čajovod dimensován. Druhá podmínka odpovídá přirozené představě, že co do spoje trubek vteče, to také vyteče. Fysikové tento fakt nazvou *Kirchhoffovým zákonem*. Velikost toku potom bude množství čaje posílaného do čajovodu.

Protože nás zajímá maximální tok pro danou síť, uveďme si pro klid v duši následující tvrzení.

Tvrzení. *Pro každou síť existuje maximální tok.*

Jakkoliv se to může zdát, toto tvrzení není vůbec samozřejmé. Toků je nekonečně mnoho a jejich velikosti jsou obecně reálná čísla (například interval $(0, 1)$ v reálných číslech nemá maximum). Pro nás toto tvrzení není až tak zajímavé a proto si jej nebudeme dokazovat. Naším cílem bude dokázat takzvanou hlavní větu o tocích. Nejprve však definujeme nové pojmy, aby se nám lépe pracovalo.

Řezem v síti (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$, nazveme množinu hran $R \subseteq E$ takovou, že v grafu $(V, E \setminus R)$ neexistuje žádná orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.

Orientovaná cesta z bodu a do b není nic jiného než „jdi z a do b po šipkách a nikde se nezdržuj“. Jak vypadá neorientovaná cesta už každého jistě napadne. Na rozdíl od toků je řezů jen konečně mnoho, proto určitě existuje řez minimální kapacity.

Věta. *Pro každou síť platí*

$$\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R).$$

Neboli „maximální tok je roven minimálnímu řezu“

Abychom poodkryli pravdu kolem tohoto tvrzení, povíme si na přednášce ještě něco o řezech a cestách. K tomu se nám bude hodit následující definice.

Nasycená cesta vzhledem k toku f je neorientovaná cesta taková, že pro nějakou hranu ve směru od zdroje do stoku tok dosáhl své kapacity (neboli $f(e_i) = c(e_i)$ pro nějaké i) nebo je nulový pro nějakou hranu v opačném směru. Přirozeně, pokud cesta není nasycená, říkáme, že je to *nenasycená cesta*, nebo někdy také zlepšující cesta.

Už slovo „zlepšující“ nám říká, že by mohlo jít tok podle této cesty vylepšit. A skutečně je pravda, že

Tvrzení. *Tok je maximální, právě když je každá cesta nasycená.*

A k velkému překvapení nám samotný důkaz ukáže, jak maximální tok najdeme. Co více si jen přát?

Algoritmus. (Ford, Fulkerson)

(1) Polož $f(e) = 0$ pro všechny hrany e.
(2) Pokud existuje vylepšující cesta, vylepši tok podle této cesty a opakuj, dokud existuje nějaká nenasycená cesta.
(3) Nyní je f maximální tok.

Ovšem úplně zadarmo to nebude. Z algoritmu není vidět, jak takové cesty hledat. Dokonce existují i takové sítě, kde nevhodným výběrem vylepšujících cest nedosáhneme maximálního toku ani po nekonečně mnoha krocích. Jistě se vám podaří takovou síť vymyslet.

Nyní začneme trochu z jiného soudku a ukážeme si poněkud nečekané souvislosti.

Úloha. Na rytířském plese se sešlo několik rytířů a několik urozených dam. Každý z rytířů má na první tanec několik adeptek, se kterými si chce zatančit (když si s dovolením očíslujeme dámy od 1 do n, každý z rytířů 1 až k má svoji volbu M_i, což je množina čísel těch dam, se kterými chce tančit). A nás zajímá, za jakých podmínek (volby oněch M_i) bude uspokojeno všech k rytířů?

Na tuto otázku nám dá spolehlivou odpověď následující definice a věta.

Definice. Buďte X a I konečné množiny. *Množinovým systémem* nazveme I-tici $\mathcal{M} = \{M_i;\, i \in I,\, M_i \subseteq X\}$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je potom funkce $f\colon I \to X$ taková, že

(1) pro všechna $i \in I$ je $f(i) \in M_i$,
(2) f je prostá.

Takto jsme vlastně pouze přepsali zadání, neboť X je množina dam, I množina rytířů, množinový systém jsou volby jednotlivých rytířů a zajímá nás, zda systém různých reprezentantů existuje, neboli zda můžeme každému rytíři přiřadit různou urozenou dámu, se kterou je ochoten tančit.

Věta. (Hallova) *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje tehdy a jen tehdy když pro každou $J \subseteq I$ je pravda, že $|\bigcup_{j\in J} M_j| \geq |J|$. Této podmínce se říká Hallova.*

Přirozeně se nabízí otázka, jak toto „párování“ souvisí s toky v sítích. Inu matematika často spojuje zdánlivě odlišná témata, a tak si na přednášce ukážeme, kterak čajovod dopomohl rytířům najít tu pravou dámu.

Literatura a zdroje

[1] Tomáš Valla, Jiří Matoušek: *Kombinatorika a grafy I*, KAM MFF UK, 2008.

Variace na invariant

Vít „Vejtek" Musil

Abstrakt. Seznámení se s pojmem invariant, jeho představení na ukázkové úloze a seznam nejčastějších invariantů. Příspěvek obsahuje množství různých úloh na procvičení, od lehčích až po starší či aktuální úlohy MO či IMO.

Jedním ze základních principů řešení úloh je hledání invariantů, neboli neměnných jevů. Typicky se tato metoda nabízí u úloh, kde v každém kroku provádíme nějakou transformaci, změnu nebo výpočet a ptáme se, jak může tento postup či třeba hra dopadnout. Hlavní strategie tedy zní: *Tam kde se něco opakuje, hledej to, co zůstává stejné.* Ukažme si použití tohoto přístupu na následujícím příkladu.

Úloha. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, 3, \dots, 2n$, kde n je liché přirozené číslo. Vybereme si libovolná dvě čísla a, b, která smažeme, a místo nich napíšeme číslo $|a-b|$. Ukažte, že poslední zbylé číslo bude liché.

Řešení. Uvažme součet $S = 1 + 2 + \dots + 2n = n(2n+1)$. Vidíme, že S je liché. Odebráním čísel a a b snížíme součet o $2\min(a,b)$, což je však sudé číslo, tedy S zůstane liché. Postupným mazáním se tedy parita S nezmění a na konci zbyde liché číslo.

V tomto příkladě byla invariantem parita součtu. Dalšími užitečnými invarianty může být součet modulo dané n, vzdálenost nějakých bodů, počet jevů atd. Ne vždy musíme najít něco neměnného, často pomůže najít jev, jenž se sice mění, zato však kontrolovaným způsobem. Příkladem budiž posloupnost, jež má limitu.

Příklad 1. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla $1, 0, 1, 0, 0, 0$. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

Příklad 2. Na zájezdě má každý turista nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem. Zobecněte.

Příklad 3. Mějme celá čísla a, b, c a d, ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a, b, c, d) čtveřicí $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Ukažte, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě větší než libovolné kladné číslo.

Příklad 4. Každé z čísel $a_1, \dots, a_n$ je $+1$ nebo -1 a platí $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

Příklad 5. Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, z nichž každý má nejvýše $n-1$ nepřátel. Ukažte, že je možno je rozesadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.

Klíčová slova. invariant, důkazové techniky.

Příklad 6. Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček, nebo dvojek?

Příklad 7. Mějme množinu $\{3, 4, 12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0.6a - 0.8b$ a $0.8a + 0.6b$. Můžeme někdy dostat množinu (a) $\{4, 6, 12\}$ nebo (b) $\{x, y, z\}$, kde $|x - 4|, |y - 6|, |z - 12| < 1/\sqrt{3}$?

Příklad 8. V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \leq k \leq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí. (Celostátní kolo MO 2009)

Příklad 9. Na nekonečném pásu čtverečků leží konečný počet mincí. V jednom tahu provedeme následující operaci: Z každého čtverečku, který obsahuje více jak jednu minci vezmeme dvě a jednu umístíme na sousední čtvereček vlevo a druhou na sousední pravý. Pokud se na pásu vyskytují jen samostatné mince, už dále nepokračujeme. Pro dané původní rozmístění mincí ukažte, že každá posloupnost tahů skončí po konečně krocích a ve stejné konfiguraci. (IMO 1996)

Příklad 10. Na tabuli jsou napsána čísla 1,2, ... ,20. Uvažme následující operaci: Vybereme dvě čísla taková, že $a - b \geq 2$, a nahradíme je čísly $a - 1$ a $b + 1$. Určete maximální počet takovýchto operací.

Příklad 11. Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

(a) Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?

(b) Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany. (Celostátní kolo MO 2010)

Příklad 12. Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x, y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x + y$, $-y$, $y + z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (IMO 1986)

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.

Obarvení a dláždění

Vít „Vejtek" Musil

Abstrakt. Využití obarvení a dláždění v důkazech, vysvětlení na příkladu a sada úloh na procvičení.

Velice užitečnou důkazovou metodou je rozklad množiny do několika podmnožin. Aby se nám lépe pracovalo používáme pro každou takovou podmnožinku jinou barvu. Nejlépe je to opět vidět na příkladu.

Úloha. Šachovnici 8×8 lze pokrýt dominovými kostkami 2×1 právě $2^4 \cdot 901^2 = 12{,}988{,}816$ způsoby. Kolika způsoby lze týmiž kostkami pokrýt šachovnici 8×8 bez dvou diagonálně protilehlých rohů?

Řešení. Na první pohled vypadá úloha obtížně, avšak stačí si uvědomit, že každá dominová kostka pokryje jedno bílé a jedno černé políčko. Každé pokrytí tedy bude obsahovat 31 černých a 31 bílých polí. Avšak naše šachovnice obsahuje 30 bílých a 32 černých nebo naopak, tedy hledané rozmístění kostek neexistuje.

V příkladu jsme použili pojem domino, pro snažší práci si zavedeme několik podobných pojmů.

Definice. Objekt, který vznikne postupným spojováním stejných polygonů tak, že přidaný polygon má s původním objektem společnou hranu, nazveme *polyformem*. Objektu, jehož základním polygonem je čtverec, říkáme *polyomino*, speciálně polyomino velikosti n, kde n je počet použitých čtverců. Pro $n = 2, 3, 4, 5, 6$ používáme pojmy *domino, trimino, tetramino, pentomino, hexomino*. Pro kostky tetramina používáme označení I, L, O, S, T,[4] což trochu vzdáleně připomíná všech 5 typů kostek.

Příklad 1. Je možno z pěti tetramin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?

Příklad 2. Lze pokrýt šachovnici 8×8 pomocí patnácti tetramin T a jednoho tetramina O?

Příklad 3. Lze pokrýt obdélník 10×10 pomocí 25 tetramin I?

Příklad 4. Je možno vyplnit krychli $10 \times 10 \times 10$ pomocí 250 cihel $1 \times 1 \times 4$?

Příklad 5. Jeden z rohů čtverce $(2n + 1) \times (2n + 1)$ je vyříznut. Pro která n lze pokrýt zbývající čtverce dominy, z nichž polovina je vodorovně a polovina svisle?

Klíčová slova. obarvení, dláždění, důkazové techniky.

[4] Česky „P, R, O, H, R, Á, L, J, S, E, M", pozn. red.

Příklad 6. Na jedno z políček čtverce 5×5 napíšeme -1 na ostatních 24 políček 1. Jedním tahem můžeme změnit znaménko u všech čísel v nějakém čtverci $a \times a$, pro $a > 1$. Chceme docílit toho, aby na všech políčkách byla 1. Kde může být na začátku -1, aby to bylo možné?

Příklad 7. Na každém políčku šachovnice 9×9 sedí beruška. V jeden okamžik každá beruška přeleze na jedno z políček sousedících rohem s výchozím. Některá políčka zůstanou volná. Jaký je nejmenší možný počet volných políček?

Příklad 8. Výstavní síň má půdorys tvaru (ne nutně konvexního) n-úhelníku. Najděte co nejmenší počet hlídačů, kteří (pro dané n) takovou síň ohlídají (hlídač je bod, který vidí všemi směry).

Příklad 9. Čtverec 7×7 je pokryt šestnácti dílky 3×1 a jedním 1×1. Kde všude může být dílek 1×1?

Příklad 10. Lze do krychle $6\times 6\times 6$ umístit 53 cihel velikosti $1\times 1\times 4$ (rovnoběžně se stěnami)?

Příklad 11. Čtverec 23×23 je vyplněn čtverci 1×1, 2×2 a 3×3. Kolik nejméně čtverců 1×1 potřebujeme?

Příklad 12. Na šachovnici $4 \times n$ neexistuje uzavřená cesta jezdcem, která by procházela každým políčkem právě jednou. Dokažte.

Příklad 13. Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$, $(n \geq 2)$ postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou. (Celostátní kolo MO 2007)

Příklad 14. Čtverec 6×6 je vyplněn dominovými kostkami 1×2. Dokažte, že vždy existuje přímka, která dělí celý čtverec a nedělí žádnou z kostek.

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.

Cèvova a Menelaova věta

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

Abstrakt. Přednáška se zabývá pokročilejšími metodami řešení geometrických úloh s využitím poměrů. Důkladně si procvičíme Cèvovu a Menelaovu větu a ukážeme si, jak vypadá úloha, kde jdou použít.

Jak na poměry v geometrii

Jak vůbec poznat úlohu na poměry? Při řešení takových úloh budeme používat hlavně podobnost, mocnost bodu ke kružnici, sinovou větu, Cèvovou/Menelaovou větu. Při zapisování poměrů dbejte na přehlednost - při pohledu na poměr musíte vidět, co říká (např. na pojmenovani úhlů používejte zásadně řecká písmenka). O to větší si dávejte pozor při sepisování vyřešené úlohy.

Cevova věta

Věta. (Cèvova) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Příklad 1. Pomocí Cèvovy věty dokažte, že se těžnice protínají v jednom bodě.

Příklad 2. Označme X, Y, Z ty body trojúhelníka ABC, ve kterých se kružnice vepsaná dotýká jeho obvodu. Dokažte, že se jim příslušné cèviány se protínají v jednom bodě.

Příklad 3. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P, který leží na těžnici z vrcholu C. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík BP a AC. Ukažte, že $|AC| = |BC|$, víte-li, že $ABXY$ je tětivový.

Příklad 4. Mějme trojúhelník ABC. Na výšce AX zvolme bod P. Dále $BP \cap \cap AC = K$ a $CP \cap AB = L$. Dokažte, že $|\sphericalangle AXK| = |\sphericalangle AXL|$.

Příklad 5. (Goniometrický tvar Cèvovy věty) Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem právě, když platí

$$\frac{\sin(\sphericalangle ACZ) \cdot \sin(\sphericalangle BAX) \cdot \sin(\sphericalangle CBY)}{\sin(\sphericalangle BCZ) \cdot \sin(\sphericalangle CAX) \cdot \sin(\sphericalangle ABY)} = 1$$

Klíčová slova. planimetrie, geometrie, Cèvova věta, Menelaova věta, Van Aubelova věta, sinová věta, podobnost, mocnost bodu ke kružnici, poměry

Příklad 6. Pomocí goniometrického tvaru Cèvovy věty dokažte, že se a) výšky, b) osy úhlů protínají v jednom bodě.

Příklad 7. (O existenci isogonal cojugate) Mějme trojúhelník a v něm tři cèviány protínající se v bodě P. Každou z nich nyní zobrazíme v osové souměrnosti podle osy úhlu (toho, ze kterého ona cèviána vychází). Tím získáme tři jiné cèviány. Dokažte, že i ty se protínají v jednom bodě. Tomuto bodu se říká isogonal cojugate k bodu P.

Příklad 8. Mějme trojúhelník ABC a AL, BM, CN jsou jeho výšky. Dokažte, že se kolmice z bodů A, B a C postupně na přímky MN, LN, LM protínají v jednom bodě.

Menelaova věta

Věta. (Menelaova) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě body na přímkách BC, AC a AB (jeden z nich je vně $\triangle ABC$). Body X, Y a Z leží v přímce právě, když platí*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Příklad 9. Dokažte, že body, v nichž se protnou strany trojúhelníka ABC s osami dvou vnitřních a zbývajícího vnějšího úhlu, leží v přímce.

Příklad 10. Kružnice procházející vrcholy B a C trojúhelníka ABC se protne se stranou AB v bodě P a se stranou AC v bodě R. Označme $PR \cap BC = Q$. Dokažte, že

$$\frac{|QC|}{|QB|} = \frac{|RC||AC|}{|PB||AB|}.$$

Příklad 11. Mějme trojúhelník ABC a přímku vedoucí přes těžiště trojúhelníka, která protne strany AB a AC postupně v bodech M a N. Dokažte, že

$$\frac{|CN|}{|NA|} + \frac{|BM|}{|MA|} = 1.$$

Příklad 12. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník s $|AC| = |BC|$. Kružnice vepsaná se dotýká stran AB a AC postupně v bodech D a E. Bodem B vedeme přímku různou od BE, která protne kružnici vepsanou v bodech F a G. Nechť AB protíná přímky EF a EG postupně v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$. (MEMO 2008)

Těžší úlohy

Nyní si spočítáme několik úloh. Bude dobré vědět, že Cèvova věta platí i pro bod vně trojúhelníku a Menelaova věta i pro přímku, která trojúhelník neprotne (oba důkazy se dělají obdobně). Nezapomeňte používat také mocnost, podobnost, sinovou větu nebo dokonce kombinovat více Cèvových/Menelaových vět. Jak se na úloze pozná, že můžeme použít Cèvovu nebo Menelaovu větu? Posuďte sami.

Příklad 13. Strany AB, BC, CD a DA čtyřúhelníku $ABCD$ protne přímka postupně v bodech K, L, M a N. Dokažte, že

$$\frac{|BL||AK||DN||CM|}{|LC||KB||NA||MD|} = 1$$

Příklad 14. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho výšky AA', BB'. Zvolme bod D na oblouku ACB kružnice opsané trojúhelníku ABC. Buď $AA' \cap BD = P$ a $BB' \cap AD = Q$. Ukažte, že střed úsečky PQ leží na $A'B'$.

Příklad 15. Nechť ABC je trojúhelník a M je jeho vnitřní bod, který zároveň leží na ose úhlu γ. Přímky AM, BM a CM protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech A', B' a C'. Dále $A'C' \cap BC = P$ a $B'C' \cap AC = Q$. Dokažte, že $PQ \parallel AB$. (Indie 2010)

Příklad 16. Je daný konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, kde $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD|$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|$ a $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokažte, že přímky AD, BE a CF se protnou v jednom bodě. (Trojstřetnutí 2008)

Příklad 17. V trojúhelníku ABC zvolme body E a F, tak, že $E \in AB$, $F \in AC$ a zároveň $|AE| = |AF|$. Dále bod M je střed strany BC a $EF \cap AM = Q$. Dokažte, že

$$\frac{|QE|}{|QF|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Příklad 18. Tečny kružnice opsané $\triangle ABC$ v bodech A, B a C protnou strany BC, AC a AB postupně v bodech P, Q a R. Dokažte, že P, Q a R leží na jedné přímce.

Příklad 19. (O skládání stejnolehlostí) Jsou dané tři kružnice. Pro každé dvě kružnice vezmeme průsečík jejich vnějších společných tečen. Dokažte, že všechny tři tyto průsečíky leží v přímce.

Příklad 20. O něco jiný tvar goniometrické Cèvovy věty, avšak stejně dobře použitelný: Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí

$$\frac{\sin(\sphericalangle AYZ) \cdot \sin(\sphericalangle BZX) \cdot \sin(\sphericalangle CXY)}{\sin(\sphericalangle AZY) \cdot \sin(\sphericalangle BXZ) \cdot \sin(\sphericalangle CYX)} = 1.$$

Příklad 21. Mějme tři cèviány AX, BY a CZ trojúhelníka ABC protínající se v jednom bodě. Označme P, Q, R po řadě středy úseček YZ, XZ, XY. Dokažte, že přímky AP, BQ a CR procházejí jedním bodem. (Mathematical Reflections)

Příklad 22. Nechť se cèviány AK, BL a CM v trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě. Označíme-li $KL \cap AB = X$, $LM \cap BC = Y$ a $KM \cap AC = Y$, pak dokažte, že X, Y a Z leží na jedné přímce.

Příklad 23. V trojúhelníku ABC jsou body P, Q a R středy stran AB, BC a AC. Cèviány AN, BL a CM se protínají v jednom bodě. Dále $PL \cap BC = J$, $MQ \cap AC = I$ a $NR \cap AB = H$. Dokažte, že H, I a J leží na jedné přímce.

Příklad 24. Je daný trojúhelník ABC. Kružnice dotýkající se strany BC v jejím středě protne strany AB a AC v bodech R, R' a S, S'. Buď $RS \cap BC = P$ a $R'S' \cap BC = P'$. Dokažte, že $|BP'| = |CP|$.

Příklad 25. (Pascalova věta) Body A, B, C, D, E a F leží na jedné kružnici v libovolném pořadí. Nechť $AB \cap DE = L$, $BC \cap EF = M$ a $CD \cap FA = N$. Dokažte, že body L, M a N leží na jedné přímce.

Příklad 26. Je daný čtyřúhelník $ABCD$ a body $Q = AD \cap BC$, $P = AB \cap CD$, $R = AC \cap BD$, $K = QR \cap AB$, $L = PR \cap BC = L$ a $T = AC \cap PQ$. Dokažte, že K, L a T leží na jedné přímce.

Příklad 27. (Van Aubelova věta) Mějme trojúhelník ABC a v něm cèviány AL, BM a CN, které se protínají v bodě P. Dokažte, že

$$\frac{|AP|}{|PL|} = \frac{|MA|}{|CM|} + \frac{|AN|}{|NB|}.$$

Literatura a zdroje

[1] Alfred S.Posamentier, Charles T. Salkind, *Challenging Problems in Geometry*, 1996.

[2] Webová stránka *http://www.mathlinks.ro/Forum*

[3] Přednášky *Umění vidět v matematice* vedené Michalem „Kenny“ Rolínkem

Falešné důkazy

Monča Pospíšilová

Abstrakt. Krátký příspěvek obsahuje zadání absurdních tvrzení, která je možné (s malým podvodem :)) dokázat.

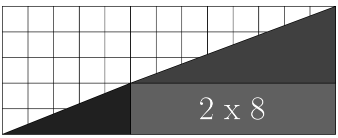
Úvod

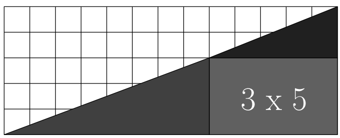
Falešné důkazy jsou špatně provedené důkazy, u nichž obvykle není na první pohled zřejmé, proč jsou chybné. Na falešně dokázaných příkladech se poučíme, na jaké typy chyb je obecně dobré si dávat pozor.

Příklady

(1) Každý trojúhelník je rovnoramenný.
(2) $a > b$ a zároveň $a = b$.
(3) Kružnice má 2 středy.
(4) $1 = 2$.
(5) Kam se ztratil dolar?
(6) Je každý lichoběžník rovnoběžník?
(7) $1 = -1$.
(8) $2 + 2 = 5$.

Na ukázku se můžeme podívat na příklad zvaný Curryho paradox (viz obrázek). Máme čtvercovou síť 5×13, v ní dva pravoúhlé trojúhelníky a obdélník. Jeden trojúhelník má odvěsny délek 2 a 5 a druhý 3 a 8. Obdélník má obsah 16 čtverečních jednotek.





Trojúhelníky přesuneme dle obrázku, ale ejhle, nový obdélník má obsah 15 čtverečních jednotek! Kam se ztratil jeden čtvereček?

Klíčová slova. důkaz, falešný důkaz, paradox

Důkazové metody v teorii čísel

Michal „Kenny“ Rolínek

Abstrakt. Příspěvek nejen ukazuje klasická tvrzení z elementární teorie čísel, ale především ukazuje obvyklé postupy při jejich používání, a to převážně na úlohách olympiádního typu. Dohromady obsahuje 45 příkladů, z nichž 6 je přímo z mezinárodních olympiád a mnoho dalších je převzato z prestižních domácích či zahraničních soutěží.

Teorie čísel je patrně nejrozsáhlejší a též i nejobtížnější oblast olympiádnické matematiky. Získat v ní orientaci je o mnoho náročnější než například u geometrie, neboť mnoho běžných úvah působí v první chvíli velmi nezvykle. Tato přednáška má za cíl počáteční nedůvěru překonat a pomoci získat vhled i do temných zákoutí této královské disciplíny.

Úmluva. Všechny proměnné v dalším textu jsou z oboru celých čísel, nebude-li řečeno jinak.

Základy dělitelnosti

Tvrzení. (Zásadní!) *Pro dělitelnost zavádíme symbol $a \mid b$, který čteme „a dělí b“. Platí pro něj následující tvrzení.*

(i) *Pokud je p prvočíslo, pak platí implikace $p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$.*
(ii) *Pokud $d \mid a, d \mid b$, pak $d \mid ka + lb$.*
(iii) *Pokud $a \mid b$, pak $|a| \le |b|$ (často dokonce $2|a| \le |b|$ atd.).*

Tvrzení. *Nechť a, b jsou celá čísla. Jejich největší společný dělitel d značíme (a, b) a platí, že d je nejmenší nezáporné číslo, které lze zapsat ve tvaru $ka + lb$, kde k a l jsou celá čísla. Též platí $(a - b, b) = (a, b)$, díky čemuž lze (a, b) snadno vypočítat (tento postup se nazývá Euklidův algoritmus).*

Definice. Nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b budeme značit $[a, b]$.

Definice. Čísla a, b nazveme nesoudělná, pokud $(a, b) = 1$.

Příklad 1. Čísla a, b jsou nesoudělná. Rozhodněte, co víte o soudělnosti následujících dvojic čísel.

(i) $a + b, ab$
(ii) $a^2 + b^2, ab$
(iii) $a + b, a - b$
(iv) $a^3, (a + 1)^5$

Klíčová slova. Malá Fermatova věta, Čínská zbytková věta, kongruence, dělitelnost, p-valuace, řád prvku, teorie čísel

Příklad 2. Nalezněte všechna přirozená čísla, kterými lze krátit některý ze zlomků tvaru

$$\frac{3p-q}{5p+2q},$$

kde p a q jsou nesoudělná celá čísla. (Školní kolo MO 2008)

Příklad 3. Ukažte, že zlomek

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

je v základním tvaru pro každé $n \in \mathbb{N}$. (IMO 1959)

Příklad 4. Určete všechna celá kladná čísla m, n taková, že n dělí $2m-1$ a zároveň m dělí $2n-1$. (Krajské kolo MO 2009)

Příklad 5. Pro přirozená čísla a, b, c platí

$$a+b+c \mid abc.$$

Ukažte, že $a+b+c$ je složené číslo.

Příklad 6. Pro která celá čísla n je výraz

$$\frac{n^3-3}{n-3}$$

celočíselný. (Náboj 2007)

Příklad 7. Zjistěte, pro která přirozená čísla a, b je hodnota podílu

$$\frac{b^2+ab+a+b-1}{a^2+ab+1}$$

rovna celému číslu. (Celostátní kolo MO 2008)

Příklad 8. Ukažte, že pokud je p takové liché prvočíslo, že i $2p+1$ je prvočíslo, pak existují právě čtyři přirozená čísla k taková, že

$$2p+k \mid 2p+k^2.$$

(Variace na celostátní kolo MO 2008)

Příklad 9. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

je prvočíslo. (Domácí kolo MO 2008)

Rozklady, rozklady, rozklady!

Přirozená čísla mají z hlediska násobení velmi zajímavou strukturu. Všechna jsou postavena ze základních kamenů, kterým se říká prvočísla. Při řešení úloh bývá často klíčové si prvočíselné rozklady představovat a umět s nimi pracovat. Například budeme-li dokazovat, že $a = b$, často bude výhodnější ukázat, že mají ve svých rozkladech všechna prvočísla ve stejných mocninách. Podobně pak můžeme ukazovat, že $a \mid b$ atd.

Tvrzení. *Každé přirozené číslo lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel nebo jejich mocnin.*

Definice. Buď n přirozené číslo. Pak je pro každé prvočíslo p jednoznačně určený exponent v prvočíselném rozkladu čísla n. Tento exponent budeme označovat $v_p(n)$ a říkat mu p-valuace čísla n. Pokud $(p, n) = 1$ je $v_p(n) = 0$.

Tvrzení. *Pro libovolná přirozená čísla a, b platí*

(i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$
(ii) $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$
(iii) *Pokud* $v_p(a) \neq v_p(b)$, *pak dokonce* $v_p(a + b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.
(iv) $v_p((a, b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$
(v) $v_p([a, b]) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$

Příklad 10. Ukažte, že platí $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

Příklad 11. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, c platí

$$\frac{[a, b, c]^2}{[a, b] \cdot [b, c] \cdot [c, a]} = \frac{(a, b, c)^2}{(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)}.$$

(USAMO 1972)

Příklad 12. Přirozená čísla a, b, c, d splňují $ab = cd$. Ukažte, že platí

$$(a, c) \cdot (a, d) = a \cdot (a, b, c, d).$$

(Polská MO, Mecz 2009)

Příklad 13. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots b_k$ jsou přirozená čísla, která splňují $(a_i, b_i) = 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Dále buď $m = [b_1, b_2, \ldots, b_k]$. Ukažte, že platí

$$\left(\frac{a_1 m}{b_1}, \frac{a_2 m}{b_2}, \ldots, \frac{a_k m}{b_k}\right) = (a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

(IMO shortlist 1974)

Příklad 14. Na tabuli jsou napsána přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots a_n$. V jednom kroku vybereme dvě čísla a_i, a_j taková, že $i < j$ a po řadě je nahradíme čísly

$(a_i, a_j), [a_i, a_j]$. Ukažte, že po konečném počtu kroků dospějeme do stavu, který takto už nepůjde změnit. (Putnam 2009)

Finta na faktoriály

Nejlépe využijeme vlastnosti p-valuací při manipulaci s dělitelností faktoriálů a kombinačních čísel. Většinu práce za nás odvede následující tvrzení.

Tvrzení. *Buď n přirozené číslo. Pak platí*

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots = \frac{n - s_p(n)}{p-1},$$

kde $s_p(n)$ je ciferný součet čísla n zapsaného v soustavě o základu p.

Příklad 15. Určete kolika nulami končí číslo 2010!.

Příklad 16. Ukažte, že $n!$ není dělitelné 2^n pro žádné přirozené číslo n.

Příklad 17. Dokažte, že platí

$$v_p\left(\binom{m}{n}\right) = \frac{v_p(n) + v_p(m-n) - v_p(m)}{p-1}.$$

Příklad 18. Buď p libovolné prvočíslo. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že p dělí $\binom{n}{k}$ pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. (PraSe 26-Myšmaš)

Příklad 19. Pro každé přirozené číslo platí

$$(n+1) \cdot \left[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right] = [1, 2, \ldots, n+1].$$

Dokažte. (Rumunsko TST 1990)

Příklad 20. Nalezněte nejvyšší mocninu dvojky, která dělí

$$\binom{2^{n+1}}{2^n} - \binom{2^n}{2^{n-1}}.$$

(IMO shortlist 2007)

Zbytky a jejich chování

Definice. Skutečnost, že $p \mid a - b$ budeme značit $a \equiv b \pmod p$ a říkat a je kongruentní s b modulo p.

Tvrzení. *Kongruence o stejném modulu lze sčítat, odečítat a násobit.*

Definice. Buď p prvočíslo. Množinu $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ budeme nazývat úplnou sadou zbytků.

Tvrzení. *Nenulovým násobkem úplné sady zbytků je úplná sada zbytků. Násobkem máme na mysli množinu $\{0, k, 2k, \ldots, k(p-1)\}$.*

Tvrzení. („Zbytky lze dělit!“) *Buď p prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $(a, p) = 1$. Pak právě jedno existuje $b \in \mathbb{Z}, 0 < b < p$, že $ab \equiv 1 \pmod{p}$.*

Příklad 21. Nalezněte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že $p + q = (p - q)^3$.
(Ruská MO 2001)

Příklad 22. Ukažte, že každé prvočíslo má nekonečně mnoho násobků, jejichž posledních 10 cifer je různých.

Tvrzení. (Čínská zbytková věta) *Nechť $m_1, m_2, \ldots m_k$ jsou po dvou nesoudělná čísla. Pak soustava kongruencí*

$$
\begin{aligned}
x &\equiv a_1 \pmod{m_1}\\
x &\equiv a_2 \pmod{m_2}\\
&\vdots\\
x &\equiv a_k \pmod{m_k}
\end{aligned}
$$

má právě jedno řešení modulo $m_1 m_2 \ldots m_k$.

Příklad 23. Rozhodněte, zda existuje nekonečná množina $K \subset \mathbb{N}$ taková, že kdykoliv p je prvočíslo a $k \in K$, pak $p^2 + k$ je složené.

Příklad 24. Nechť n je kladné celé číslo a $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ jsou navzájem různá celá čísla z množiny $\{1, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i = 1, \ldots, k-1$ je číslo $a_i(a_{i+1} - 1)$ dělitelné n. Dokažte, že číslo $a_k(a_1 - 1)$ není dělitelné n. (IMO 2009)

Příklad 25. Je dáno přirozené číslo n. Ukažte, že existuje n po sobě jdoucích čísel takových, že každé z nich je dělitelné alespoň dvěma různými prvočísly.

Příklad 26. Dokažte, že existuje přirozené číslo n takové, že pro libovolné celé číslo k nemá číslo $k^2 + k + n$ žádného prvočíselného dělitele menšího než 2008.
(Mezinárodní střetnutí česko-slovensko-polské 2008)

Příklad 27. Ukažte, že existuje nekonečná rostoucí posloupnost přirozených čísel a_n taková, že kdykoliv $k \geq 0$, pak posloupnost $b_n = k + a_n$ obsahuje jen konečně mnoho prvočísel. (Česká MO 1997)

Příklad 28. Rozhodněte, zda existuje posloupnost obsahující každé přirozené číslo právě jednou taková, aby součet jejích prvních k členů byl dělitelný k, kdykoliv $k \in \mathbb{N}$. (Ruská MO 1995)

Příklad 29. Ukažte, že existuje přirozené číslo k takové, že $k \cdot 2^n + 1$ je složené pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Umocňování a Malá Fermatova věta

Nejtěžší úlohy z teorie čísel jsou ty, v nichž se dělitelnost míchá s umocňováním a sčítáním. Krom trošky potřebné teorie o tom, jak se čísla při umocňování chovají, je potřeba hlavně celková orientace a nadhled. Ukažme si, oč jde.

Tvrzení. (Malá Fermatova) *Buď p prvočíslo a n číslo s ním nesoudělné. Pak $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.*

Tvrzení. *Buď p prvočíslo a n číslo s ním nesoudělné. Pak existuje nejmenší přirozené číslo r takové, že $n^r \equiv 1 \pmod p$. Všechna ostatní čísla s touto vlastností jsou jeho násobky. Číslo r pak budeme nazývat řádem prvku n modulo p a značit $r = ord_p(n)$.*

Tvrzení. *Pokud $n^a \equiv 1 \pmod p$ a zároveň $n^b \equiv 1 \pmod p$, pak též $n^{(a,b)} \equiv 1 \pmod p$.*

Příklad 30. Ukažte, že kdykoliv je p prvočíslo a a, b přirozená čísla, pak $p \mid ab^p - ba^p$.

Příklad 31. Ukažte, že pro různá prvočísla p, q platí

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

Příklad 32. Buď $p > 3$ prvočíslo. Pak ukažte, že

$$p \mid 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1.$$

(IMO 2005)

Příklad 33. Buď p prvočíslo tvaru $4k + 3$. Platí, že $p \mid a^2 + b^2$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Ukažte, že pak i $p \mid a, p \mid b$.

Příklad 34. Buď p prvočíslo tvaru $3k+2$. Platí, že $p \mid a^2+ab+b^2$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Ukažte, že pak i $p \mid a, p \mid b$.

Příklad 35. Ukažte, že

$$(n^a + 1, n^b + 1) \mid n^{(a,b)} + 1,$$

kde a, b, n jsou přirozená čísla.

Příklad 36. Buď p prvočíslo a q přirozený dělitel čísla $2^p - 1$. Ukažte, že $p \mid q - 1$.

Příklad 37. Buď p prvočíslo a n, q přirozená čísla taková, že $q \mid (n+1)^p - n^p$. Ukažte, že $p \mid q-1$. (Výběrko 2007)

Příklad 38. Prvočíslo p dělí n-té Fermatovo číslo $2^{2^n}+1$. Ukažte, že $2^{n+1} \mid p-1$.

Příklad 39. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že

$$p^2+1 \mid 2003^q+1,$$
$$q^2+1 \mid 2003^p+1.$$

(Gabriel Dospinescu)

Příklad 40. Nalezněte všechny trojice prvočísel p, q, r splňující soustavu dělitelností

$$p \mid q^r+1,\ q \mid r^p+1,\ r \mid p^q+1.$$

(USA TST 2003)

Závěrečný náklep!

Nejobvyklejší metody jsou již probrány a nastal čas řešit ty nejobtížnější úlohy z olympiádní teorie čísel. Držte si klobouky!

Tvrzení. *Buď p liché prvočíslo a A, B přirozená čísla, která nejsou dělitelná p, a platí $p \mid A-B$. Pak pro každé přirozené n platí*

$$v_p(A^n-B^n) = v_p(n) + v_p(A-B).$$

Příklad 41. Buďte a, b, c přirozená čísla taková, že $c \mid a^c - b^c$. Ukažte, že pak $c \mid \frac{a^c-b^c}{a-b}$. (AMM)

Příklad 42. Ukažte, že pro každé přirozené n je číslo $n!$ dělitelem čísla

$$(2^n-2^0)(2^n-2^1)\ldots(2^n-2^{n-1}).$$

Příklad 43. Pro přirozená čísla a, b platí, že $a^n+n \mid b^n+n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že $a=b$. (IMO shortlist 2005)

Příklad 44. Najděte všechna přirozená čísla, pro něž $n^2 \mid 2^n+1$. (IMO 1990)

Příklad 45. Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že existuje prvočíslo q takové, že pro žádné přirozené číslo n není n^p-p dělitelné q. (IMO 2003)

Literatura a zdroje

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*, XYZ Press, Texas, 2008.

[2] Razvan Gelca, Titu Andreescu, *Putnam and Beyond*, Springer, New York, 2007.

[3] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng, *104 Number Theory Problems from USA IMO Training*, BirkHauser, Boston, 2007.

[4] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh I*, MU, Brno, 2001.

[5] *http://www.mathlinks.ro*

Příklady z pravděpodobnosti

Alča Skálová

Abstrakt. V příspěvku najdete spoustu neotřelých příkladů z pravděpodobnosti. Teorii nikoliv, budeme se spoléhat především na intuitivní uchopení pravděpodobnosti.

Na rozjezd

Příklad 1. (Čtyřstěny) Morgana nedávno objevila hrací kostky po babičce – mají tvar čtyřstěnu a jsou na nich čísla od 1 do 4 (každé právě jednou). Morganu by velmi zajímalo, jaká je pravděpodobnost, že

(i) při hodu čtyřmi kostkami padnou vesměs různá čísla,
(ii) při hodu čtyřmi kostkami padnou pouze lichá čísla,
(iii) součet čísel hozených na dvou kostkách bude 3 $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, sudý, lichý)?

Příklad 2. (Skleněnky) Mordred pro změnu objevil měšec se skleněnkami. Celkem jich je 100, z toho 30 zelených a ostatní jsou modré. Pokud Mordred náhodně vytáhne 5 kuliček, jaká je pravděpodobnost, že nejvýše dvě budou zelené? A jaká, že právě dvě budou zelené?

Příklad 3. (Ohrada) Artušův vraník Lamri se prohání v obdélníkové ohradě o stranách 100 a 40 metrů. Jedna z delších stran ohrady přímo přiléhá k hradbám Kamelotu. Jaká je pravděpodobnost, že je Lamri blíže hradbám než kterékoliv jiné ze zbylých stran ohrady?

Příklad 4. (Jablka) V košíku je 15 jablek, z toho 9 špinavých a 6 umytých. Služka náhodně vytáhne 3, umyje je a vrátí zpátky. Jaká je pravděpodobnost, že když znovu vytáhne 3 jablka, budou všechna špinavá?

Pořádné příklady

Příklad 5. (Dvě poroty) Tříčlenná kamelotská porota má dva členy, kteří nezávisle na sobě posoudí případ správně s pravděpodobností p, a jednoho člena, který si vždycky hodí korunou, a padne-li orel, rozhodne správně. Celkové rozhodnutí poroty se řídí názorem většiny. Jednočlenná porota rozhodne správně s pravděpodobností p. Která porota má větší šanci, že vydá správné rozhodnutí?

Klíčová slova. Pravděpodobnost, příklady z pravděpodobnosti.

Příklad 6. (Sir Gawain) Sir Gawain jede na rytířské klání a může si vybrat, zda bude soupeřit po řadě s Artušem-Lancelotem-Artušem, nebo Lancelotem-Artušem-Lancelotem. Artuš je samozřejmě mnohem těžší soupeř, než Lancelot. Kterou možnost si má sir Gawain raději zvolit, chce-li vyhrát dvakrát těsně za sebou?

Příklad 7. (Hazard) Pravidla oblíbené hazardní hry na dvoře krále Artuše byla následující. Hráč si může vsadit na jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Potom hodí třemi šestistěnnými kostkami. Pokud se zvolené číslo objeví na jedné (dvou, třech) z nich, dostane zpátky svoji sázku a navíc jedenkrát (dvakrát, třikrát) tolik, co vsadil. Pokud se jeho číslo na kostkách neobjeví, sázka propadá.

Vyplatí se tato hra? Jaká je očekávaná výhra/ztráta na jedno kolo?

Příklad 8. (Mince na stole) Dvorní dáma Floribella se jedno odpoledne ukrutně nudila, a tak si vymyslela následující hru. Hází minci na stůl, pokrytý čtverečkovaným ubrusem. Pokud mince zůstane ležet celá uprostřed nějakého čtverečku, tak vyhrává, v opačném případě prohrála a pokračuje dál v házení. Jakou šanci Floribella má, že se trefí hned na první pokus? Strana jednoho čtverečku je 1 palec a mince má v průměru 3/4 palce.

Příklad 9. (Turnaj) Rytířský turnaj vypadá podobně jako tenisový – na začátku se všichni rozlosují do „pavouka“ a vítěz postupuje do dalšího kola. Předpokládejme, že nejlepší rytíř, sir Percival, vždycky porazí všechny ostatní a druhý nejlepší, sir Galahad, zase všechny zbývající. Poražený ve finálovém souboji získává stříbrný pohár (vítěz má samozřejmě zlatý). Jaká je pravděpodobnost, že stříbrný pohár získá sir Galahad?

Příklad 10. (Dvojčata) Na dubnový turnaj přijelo osm rytířů, mezi nimi i dvojčata Balin a Balan. Na začátku byli rytíři náhodně rozlosováni. Jaká je pravděpodobnost, že se spolu dvojčata utkají? (Klání probíhá stejně jako v předchozím příkladě, tentokrát ale Galahad ani Percival nedorazili.)

Příklad 11. (Schůzka) Guinevera s Lancelotem si dali tajnou schůzku v podhradí, někdy mezi jedenáctou večer a půlnocí. Oba jsou ale ochotni čekat na druhého jenom 10 minut, a když ten do té doby nepřijde, tak odejdou. Jaká je pravděpodobnost, že se potkají?

Příklad 12. (Děti sira Percivala) Sir Percival se onehdá svěřil Artušovi: „Když se náhodně vyberou dvě mé děti, je stejná pravděpodobnost, že mají obě stejné pohlaví, jako pravděpodobnost, že mají různé pohlaví.“ Artuš se ho zeptal, jaká je pravděpodobnost, že to budou dvě dívky. „Stejná, jako že náhodně vybrané dítě bude chlapec,“ odpověděl sir Percival. Kolik má sir Percival dětí?

Příklad 13. (Poměry) Morgana poprvé hraje hazardní hru a potřebovala by poradit, na kterou možnost si má vsadit. Nebo je to úplně jedno?

(i) Při hodu šesti kostkami alespoň jednou padne šestka.
(ii) Při hodu dvanácti kostkami alespoň dvakrát padne šestka.
(iii) Při hodu osmnácti kostkami alespoň třikrát padne šestka.

Příklad 14. (Nedokončená hra) Merlin hrál včera s Artušem „Rytíři, nezlob se“. Vsadili se o celou truhlu zlatek a byli domluveni na pět her, ale po třech hrách byl Artuš odvolán ke královským povinnostem. Jak si mají spravedlivě rozdělit sázku, když Merlin vedl 2 : 1?

Příklad 15. (Tristan v tramvaji) V daleké budoucnosti jezdí Tristan tramvají číslo 5. Pracovní dobu nemá stálou, takže na zastávku přichází zcela náhodně. Jedním směrem bydlí jeho maminka, druhým směrem Isolda. Tristan vždy nasedne do té tramvaje, která přijede dřív, a povečeří buď s maminkou, nebo s Isoldou. Po půl roce zjistil, že s Isoldou večeřel čtyřikrát častěji než s maminkou. Jak je to možné? Intervaly tramvaje v obou směrech jsou samozřejmě stejné.

Příklad 16. (Mince a měšce) Merlin postavil Artuše před následující úkol. Má rozdělit 10 stříbrných a 10 zlatých mincí do dvou měšců tak, aby měl co největší šanci, že si vytáhne zlatou, bude-li tahat z náhodného měšce.[5]

Příklad 17. (Upravené kostky) Mordred má tři šestistěnné hrací kostky, na nichž jsou čísla od jedné do šesti, ovšem nikoliv nutně všechna a nikoliv nutně stejná na každé kostce. S důvěřivým šaškem Dagonetem hraje následující hru. Nabídne mu na výběr kteroukoliv ze svých kostek (aby to bylo spravedlivé), pak teprve si ze zbývajících dvou kostek vybere on. Kdo hodí vyšší číslo na své kostce, dostane od druhého zlatku. Umí Mordred očíslovat kostky tak, aby vyhrával?

Příklad 18. (Drak) Tři rytíři (sir Ector, sir Kay a sir Tandariáš) se vydali zabít draka. V útoku se postupně střídají a to v pořadí Ector $\rightarrow$ Kay $\rightarrow$ Tandariáš $\rightarrow$ Ector $\rightarrow \dots$ Pravděpodobnost, že draka při výpadu usmrtí sir Ector, je 0,4, sir Kay má šanci 0,5 a sir Tandariáš dokonce 0,6. Spočítejte pravděpodobnost, že poslední ránu zasadí drakovi sir Tandariáš.

Příklad 19. (Červotoč u kulatého stolu) Kolem kulatého stolu je rovnoměrně rozestavěno n židlí, ($n \geq 4$). Všechny jsou ze zdravého dřeva, pouze do Artušovy se dostal červotoč. Po každém zasedání se červotoč přesune buď do nejbližší židle napravo nebo nalevo (se stejnou pravděpodobností) a celou ji skrz naskrz prožere. Kam si má Lancelot postavit svoji židli, aby ji červotoč prožral jako poslední?

[5] Zlaté mince od stříbrných nejdou hmatem rozeznat.

Příklad 20. (Čarodějnictví) Víme, že na Kamelotu holduje čarodějnictví 0,5% obyvatel. Ovšem Merlin vynalezl test s následující spolehlivostí. Pokud daná osoba čarodějnictví holduje, dá test pozitivní odpověď s pravděpodobností 95%, pokud mu neholduje, pak test ukáže negativní odpověď s pravděpodobností rovněž 95%. Jestliže sir Gawain měl v testu pozitivní výsledek, jaká je pravděpodobnost, že je skutečně čaroděj?

Příklad 21. (Počet orlů) Šašek Dagonet hází $(n+1)$-krát mincí, zatímco sir Ector hází jenom n-krát, $n \geq 1$. Jaká je pravděpodobnost, že Dagonetovi padne orel vícekrát než Ectorovi?

Příklad 22. (Tandariáš a Floribella) Manželé Tandariáš a Floribella se nemohli dohodnout, kdo z nich umyje nádobí, a tak začali házet mincí. Padne-li panna, zapíší si P, padne-li orel, zapíší O. Skončí ve chvíli, kdy bude na papíře jako poslední POP (pak myje Tandariáš) nebo PPO (potom je nádobí na Floribelle). S jakou pravděpodobností bude mýt nádobí Tandariáš a s jakou Floribella?

Příklad 23. (Úkol pro Isoldu) Merlin zadal Isoldě následující úkol. Zjednoduš a vhodně interpretuj následující výraz

$$p_1 + (1-p_1)\cdot p_2 + (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot p_3 + \cdots + (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdots(1-p_{n-1})\cdot p_n,$$

kde $p_i \in (0,1)$ pro každé $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Příklad 24. (Lukostřelkyně) Guinevera a Isolda se utkaly v lukostřelbě. V každém kole obě vystřelí na terč. Pokud jedna z nich trefí a druhá ne, vítězí ta s přesnější muškou. Pokud trefí obě nebo obě minou, pokračuje se dalším kolem. Guinevera zasáhne terč s pravděpodobností g, Isolda s pravděpodobností i. Jaká je pravděpodobnost, že zvítězí Isolda? Jaká je pravděpodobnost, že souboj skončí v n-tém kole?

Příklad 25. (Lukostřelci) Lukostřelci Tristan a Percival spolu soutěží. Každý z nich má jeden šíp. Kráčejí spolu po úsečce $[0,1]$, vyjdou z bodu $x=0$ a snaží se zasáhnout cíl umístěný v bodě $x=1$. Tristan nestřílí tak dobře jako Percival. Pravděpodobnost, že z bodu $x \in [0,1]$ zasáhne cíl, je x^2. Pro Percivala je tato pravděpodobnost rovna x. Vítězem je ten, kdo zasáhne cíl jako první. Jaká je nejlepší strategie pro Tristana?

Příklad 26. (Hlasování) Tři rytíři (Artuš, Balin a Cador) se v jakékoliv situaci rozhodují správně s pravděpodobností $a = 0{,}9$, $b = 0{,}8$ a $c = 0{,}75$. Jaká je pravděpodobnost, že porota složená z těchto tří rytířů rozhodne správně?[6]

Cador si po čase všimne, že právě on se nejčastěji mýlí, a tak začne hlasovat stejně jako Balin. Jaký vliv to bude mít na hlasování celé poroty?

[6] Platí hlas většiny.

Kdyby Cador namísto uvažování a přemýšlení založil své rozhodnutí na hodu mincí, jak tím ovlivní společný úsudek?

Řekněme, že Cador odpadl od ideálů rytířství a rozhodl se vědomě škodit. Co se stane teď?

Literatura

[1] Jiří Anděl, *Matematika náhody*, Matfyzpress, Praha, 2007.

[2] Frederick Mosteller, *Fifty challenging problems in probability with solutions*, Dover publications, Inc., New York, 1965.

[3] *http://www.mathlinks.ro/*.

Zajímavé funkce

Alexander „Olin“ Slávik

Abstrakt. Příspěvek uvádí příklady funkcí v reálných číslech, které se v mnoha ohledech vymykají intuitivním představám o funkcích. Zejména je diskutována spojitost.

Úvod

Jaké znáte ze školy různé funkce? Lineární a kvadratické? Či snad i exponenciální, logaritmické a goniometrické? Svět funkcí v reálných číslech ale je mnohonásobně větší – podíváme se na některé jeho zajímavé obyvatele a jejich vlastnosti, zejména (ne)spojitost.

Spojitost

O spojitosti a spojitých funkcích jste už asi zaslechli, i když asi ne ve škole. Běžně uváděná intuitivní „definice“ zní: „Funkce je spojitá, když její graf jde nakreslit jedním tahem.“ Jako úvodní představa to možná postačí, ovšem z matematického pohledu nám vlastně toto tvrzení mnoho neříká – není totiž vůbec jasné, co to vlastně znamená „nakreslit jedním tahem“. Pro další práci tedy budeme potřebovat formální definici.

Definice. (možná poněkud děsivá) Řekneme, že funkce f je *spojitá* v bodě a, pokud ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

je splněna pro všechna x, pro něž platí

$$|x - a| < \delta.$$

Na přednášce si ukážeme trochu názorněji, co toto trochu nejasné tvrzení vlastně znamená, a přesvědčíme se, že některé „běžné“ funkce jsou vskutku spojité.

Příklad. Funkce $f(x) = x$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru (tedy $\mathbb{R}$).

Příklad. Funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (dolní celá část čísla x) je spojitá ve všech reálných číslech s výjimkou celých čísel.

Klíčová slova. funkce, spojitost, monotónnost, protipříklad

Příklad. (Dirichletova funkce) Funkce f definovaná předpisem

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{pokud } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

není spojitá nikde.

Dirichletova funkce dobře ukazuje, jak je ošemetné spoléhat se na grafickou představu o funkcích – její graf asi těžko někdo někdy „nakreslí“. Od takto nadefinované funkce by se i dalo čekat, že to s její spojitostí nebude moc slavné. Následující příklad však ukazuje, že i zdánlivě „divoká“ funkce může být někde spojitá:

Příklad. (Riemannova funkce) Funkce f definovaná předpisem

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{pokud } x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{p}{q},\ \mathrm{NSD}(p,q)=1\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

je spojitá ve všech iracionálních číslech, v racionálních není.

Vlastnosti funkcí

Funkce, které jsou spojité ve všech bodech nějakého intervalu, se v mnoha ohledech chovají hezky (alespoň v tom intervalu). Jednou z jejich příjemných vlastností je takzvané „nabývání mezihodnot“:

Věta. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí $f(a)<f(b)$. Potom pro každé $y\in(f(a),f(b))$ existuje takové $x\in(a,b)$, že $f(x)=y$.*

Z grafického názoru bychom mohli předpokládat, že funkce s touto vlastností už automaticky musí být i spojitá. Ukážeme si však, že opak je pravdou.

Příklad. Funkce f definovaná předpisem

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{pokud } x\neq 0\\ 0 & \text{pokud } x=0\end{cases}$$

není spojitá v nule, avšak na libovolném intervalu (byť obsahujícím nulu) má vlastnost „nabývání mezihodnot“.

Podívejme se na jednu ještě podivuhodnější funkci. Pro jednoduchost se omezíme na interval $\langle 0,1\rangle$.

Příklad. Nechť se číslo $x\in\langle 0,1\rangle$ zapíše v desítkové soustavě[7] jako $x=0{,}a_1a_2\,a_3a_4\ldots$. Funkci f definujeme následujícím předpisem:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\ldots & \text{pokud je číslo } 0{,}a_1a_3a_5\ldots \text{ racionální}\\ 0 & \text{jinak,}\end{cases}$$

[7] Tento zápis bohužel není jednoznačný, jak se můžeme přesvědčit např. na skutečnosti, že $1=0{,}999\ldots$. Pro účely sestrojení této funkce však nezáleží na tom, který z možných zápisů čísla použijeme.

přičemž v prvním případě je n definováno tak, že číslem a_{2n-1} začíná první perioda v zápisu čísla $0{,}a_1a_3a_5\dots$. Tato funkce nabývá na každém (jakkoliv malém!) intervalu všech hodnot z intervalu $\langle 0,1\rangle$. Mimo jiné má tedy také vlastnost „nabývání mezihodnot".

Podíváme se ještě na to, jak jde dohromady spojitost s monotónností[8]. Čekají nás dvě funkce nesoucí jména významných matematiků.

Příklad. (Cantorova funkce) Pracujme opět pouze na intervalu $\langle 0,1\rangle$. Stejně jako v předchozím příkladu, využijeme zápis čísla $x = 0{,}a_1a_2a_3\dots$, tentokrát ovšem v trojkové soustavě. V těch číslech x, které lze zapsat bez použití číslice 1, nadefinujeme funkční hodnotu

$$f(x) = \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \frac{a_4}{2^5} + \cdots,$$

jinak řečeno, všechny dvojky nahradíme jedničkami a výsledek „přečteme" jako číslo ve dvojkové soustavě. V číslech, v jejichž trojkovém zápisu se nějaká jednička vyskytuje, postupujeme tak, že za první jedničkou všechny cifry přepíšeme na nuly, zbývající nenulové číslice nahradíme jedničkami a opět se na výsledek podíváme ve dvojkové soustavě. Takto sestrojená funkce f je na celém intervalu $\langle 0,1\rangle$ neklesající a spojitá, platí $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$, ovšem pokud sečteme délky všech intervalů, na kterých je konstantní (to je třeba $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ nebo $\langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\rangle$), dostaneme jedničku – kde tedy tato funkce tak narostla?

Příklad. (Bolzanova funkce) Než zkonstruujeme finální produkt, budeme potřebovat nadefinovat pomocné funkce. Funkci f_1 definujeme jako $f_1(x) = |x|$ pro $|x| \le \frac{1}{2}$ a pro zbytek reálných čísel periodicky: $f_1(x+m) = f_1(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$. Pro $n > 1$ pak bude $f_n(x) = 4^{-n+1} \cdot f_1(4^{n-1}x)$. Grafy těchto funkcí vypadají jako čím dál více se zjemňující „pily". Funkci f pak definujeme jako

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \cdots$$

Na pravé straně máme součet nekonečně mnoha funkcí, což je poměrně komplikovaný objekt. Bohužel se budeme muset bez formálních důkazů spokojit s faktem, že takto je funkce f korektně definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a je dokonce všude spojitá. Na přednášce si ale dokážeme, že tato funkce není na žádném (opět libovolně malém!) intervalu monotónní.

Pokud nám na přednášce zbude nějaký čas, možná se podíváme i na něco dalšího – v galerii zajímavých reálných funkcí ještě zbývají mnohé další skvosty!

[8]To jest jestli je funkce rostoucí, klesající, neklesající či nerostoucí.

Literatura

[1] Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet I a II*, Academia, Praha, 1984.
[2] Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1964.

Cauchyho tajemství

Pavel Šalom

Abstrakt. Příspěvek na příkladech ukazuje dvě techniky při používání AG nerovnosti a Cauchyho nerovnosti.

Co se předpokládá

Na přednášce se bude předpokládat, že všichni znají Cauchyho nerovnost, AG nerovnost a jsou zvyklí na zápis pomocí cyklických sum. Hodit se bude též Schurova nerovnost. Podrobnosti se lze dočíst v letošním seriálu. Pro připomenutí

Tvrzení. (Schurova nerovnost) *Pro $a, b, c \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, platí*

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Tvrzení. (Cauchyho nerovnost) *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $u_1, u_2, \dots u_n \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2.$$

Tvrzení. (CS zlomkobijec) *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$. Pak platí*

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Tvrzení. (CS na odmocniny) *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$. Pak platí*

$$\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \dots + \sqrt{a_nb_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}.$$

Co nám Cauchy zatajil

Ukážeme si dva nové přístupy k řešení nerovností obsahující zlomky a odmocniny. To většinou bývají právě ty méně příjemné nerovnosti. První z nich by se mohl jmenovat „AG zlomkobijec“, protože se hodí na zlomky podobně jako CS zlomkobijec. Ukažme si jej na příkladě.

Příklad. Pro kladná a, b, c splňující $a + b + c = 3$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1 + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Klíčová slova. AG nerovnost, Cauchyho nerovnost

Návod. Úpravou a jednoduchým AG dostaneme

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2},$$

což spolu s jednoduchou nerovností $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9$ už dává dokazovanou nerovnost.

Druhý přístup se týká odmocnin. CS na odmocniny funguje dobře pro odhad jedním směrem, ale co když potřebujeme odhad druhým směrem? Na první pohled se může zdát, že s použitím Cauchyho nerovnosti příliš nepochodíme, ale opak je pravdou. Heslo zní: „Neboj se umocnit!“

Příklad. Buďte $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ pevná. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}$ taková, že $x^2+y^2+z^2=1$, dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2} \geq a+b+c.$$

Návod. Po umocnění chceme dokázat už jen

$$2\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(a^2y^2+b^2z^2+c^2x^2)} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Použitím Cauchyho nerovnosti (členy přeskupíme, aby šlo použití CS lépe vidět)

$$\sqrt{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(c^2x^2+a^2y^2+b^2z^2)} \geq acx^2+aby^2+bcz^2$$

a sečtením analogicky získaných nerovností, dostaneme dokazovanou nerovnost.

Příklad 1. Pro kladná a, b, c, d splňující $a+b+c+d=4$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1+b^2c} \geq 2.$$

Příklad 2. Pro kladná a, b, c, d dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{a^2+b^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Příklad 3. Pro kladná a, b, c splňující $a+b+c=3$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a+2b^2} \geq 1.$$

Příklad 4. Pro kladná a, b, c, d splňující $a + b + c + d = 4$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{1 + a^2} \geq 2.$$

Příklad 5. Pro kladná a, b, c, d splňující $a + b + c + d = 4$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1 + ab}{1 + b^2c^2} \geq 4.$$

Příklad 6. Pro kladná a, b, c splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2 + a^3} \geq 1.$$

Příklad 7. Pro kladná a, b, c splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2 - a} \geq 3.$$

Příklad 8. Pro nezáporná x, y, z splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{1 - \left(\frac{x + y}{2}\right)^2} \geq \sqrt{6}.$$

Příklad 9. Pro kladná a, b, c dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{b + c}} \geq 2\sqrt{1 + \frac{abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}}.$$

Příklad 10. Pro nezáporná a, b, c splňující $a + b + c = 1$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a + (b - c)^2} \geq \sqrt{3}.$$

Příklad 11. Pro nezáporná a, b, c splňující $a + b + c = 2$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a + b}{2} - ab} \geq \sqrt{2}.$$

Příklad 12. Pro nezáporná x, y, z splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{1 - xy}\sqrt{1 - yz} \geq 2.$$

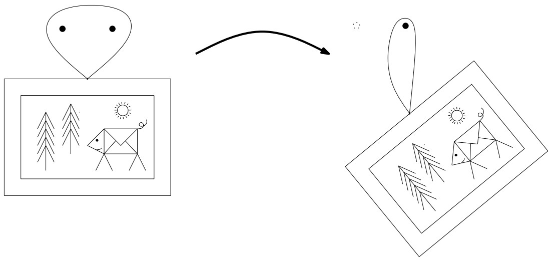
Příklad 13. Pro nezáporná x, y, z splňující $x + y + z = 1$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} x\sqrt{1 - yz} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Věšení obrazu na zeď

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek se celý točí kolem jedné úlohy okrajově se dotýkající topologie a teorie uzlů, která je však řešitelná pomocí výhradně středoškolských znalostí.

Snad každý z nás ví, jak funguje věšení obrazu na hřebík přibitý do stěny. Prostě se na obraz přidělá oko z kusu provázku a to se přes hřebík přehodí. Pokud si chceme na zeď pověsit skutečně drahocenný obrázek, můžeme pro jistotu zatlouct hřebíky hned dva a oko přehodit přes oba. Kdyby totiž (nedejbože!) jeden hřebík povolil, obraz stále „uvisí“ na tom druhém (ačkoliv se určitě povážlivě zhoupne).



Představme si teď, že za námi přijde náš úhlavní nepřítel a snažně nás poprosí, zdali bychom mu nepověsili jeho drahocennou olejomalbu na jeho dva hřebíky co nejbezpečněji (obyčejné přehození oka přes oba dva je mu málo …). Jako správní záporáci začneme samozřejmě ihned přemýšlet, jestli by to nešlo vykutit tak, že by obrázek vypadal, jako že visí na obou hřebících, ale přitom by spadnul, pokud bychom vyndali ten hřebík vlevo. Anebo nebuďme troškaři – nešlo by to třeba i tak, že by obraz spadnul, pokud bychom vyndali libovolný ze dvou hřebíků?

Touto otázkou a otázkami úzce souvisejícími se budeme zabývat na přednášce. Pokusíme se nějak matematicky popsat, co to znamená, když se řekne, že obraz „visí“, a naučíme se poznat, zda (a jak!) je provázek zašmodrchaný. To vše ale jen pomocí teorie, kterou si vymyslíme sami.

Literatura a zdroje

Celá přednáška byl vystavěna na základě podobné přednášky na soustředění slovenského semináře STROM a za vydatné pomoci článku

[1] Leland McInnes, *Picture Hanging Problem*, 2003, *http://jedidiah.stuff.gen.nz/link_problem.pdf*.

Klíčová slova. uzly, algebraická topologie

Turnaje a orientované grafy

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní vlastností úplných orientovaných grafů (neboli turnajů) a nabízí řadu úloh na turnaje a následně i na orientované grafy vůbec. Zahrnuto je jen nutné minimum definicí.

Teorie grafů je široké téma se širokými aplikacemi. Abychom si trochu ulehčili život, budeme se v této přednášce zabývat pouze orientovanými grafy, a po většinu času dokonce jen jednou konkrétní třídou orientovaných grafů – takzvanými *turnaji*. Nemůžeme se ovšem ani začít bavit, dokud si neujasníme alespoň ty nejzákladnější pojmy.

Trocha definic

Definice. Orientovaný graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina a E je množina uspořádaných dvoubodových podmnožin (hran) množiny V. Jinak řečeno V jsou puntíky a E šipky mezi nimi. Je-li $e = (u, v)$ šipka v grafu, píšeme $(u, v) \in E$, kde $u, v \in V$, nebo $u > v$.

Poznámka. Ačkoliv to z definice přímo nevyplývá, my se budeme zabývat pouze takovými orientovanými grafy, ve kterých mezi každou dvojicí $u, v \in V$ vede šipka nejvýše jedním směrem. Také budeme předpokládat, že šipky nespojují vrchol se sebou samým (tj. netvoří *smyčky*).

Definice. Kladným okolím bodu u nazveme množinu těch bodů v, pro které existuje šipka (u, v). Značíme $N^+(u) = \{v; (u, v) \in E\}$. Analogicky definujeme záporné okolí bodu u jako $N^-(u) = \{v; (v, u) \in E\}$.

Vstupní stupeň $\deg^-(u)$ nebo též $\mathrm{in}(u)$ vrcholu u definujeme jako $\deg^-(u) = |N^-(u)|$. Číslo $\mathrm{in}(u)$ tedy počítá šipky, které vedou do u. Analogicky $\deg^+(u) = \mathrm{out}(u) = |N^+(u)|$ značí výstupní stupeň vrcholu u a počítá šipky z u vycházející. Vrcholu v, pro který platí $\mathrm{in}(v) = 0$, budeme říkat *hrubák*. Vrcholu w, pro který platí $\mathrm{out}(w) = 0$, budeme říkat *lama*.

Definice. Cesta je posloupnost po dvou různých vrcholů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ pro kterou $(u_i, u_{i+1}) \in E, \forall i = 1, 2, \ldots, n-1$. Cyklus je cesta sjednocená s hranou (u_n, u_1).

Definice. Řekneme, že graf G je *turnaj*, pokud pro každou dvojici $u, v \in V, u \neq v$ je buď $(u, v) \in E$, nebo $(v, u) \in E$. Graf G je tedy turnaj, pokud mezi každými dvěma jeho různými vrcholy vede šipka.

Klíčová slova. teorie grafů, orientované grafy, turnaje

Turnaje

Úplným orientovaným grafům se říká turnaje, protože si je můžeme představit jako znázornění výsledku soutěže, ve které hrál každý hráč s každým právě jednou a žádná hra neskončila remízou. O turnajích můžeme z fleku pronést řadu zajímavých tvrzení. Při důkazech těchto tvrzení budeme s výhodou používat matematickou indukci, extremální princip (podíváme se na *nejdelší* cestu v grafu, *nejkratší* kružnici, ...) či počítání dvěma způsoby a samozřejmě budeme celou dobu bezostyšně využívat také toho, že každé dva vrcholy jsou spojeny šipkou v nějakém směru.

Tvrzení 1. *Pokud turnaj neobsahuje lamu, pak v něm existuje trojcyklus.*

Příklad 2. Řekneme, že hráč v je *polohrubák* v grafu $G = (V, E)$, pokud se z něj ke každému dalšímu hráči dá dostat pomocí nejvýše dvou šipek (píšeme $N^{++}(v) = V \setminus \{v\}$). Ukažte, že pokud v turnaji T neexistuje hrubák, pak v něm existují alespoň dva polohrubáci. Musí nutně existovat tři?

Příklad 3. Anglické království dříve sestávalo z 1001 měst spojených jednosměrnými cestami. Z každého města vedlo přesně 500 cest a v každém městě přesně 500 cest končilo. Loni se z království vyčlenila nezávislá republika, která obsahuje 668 měst. Ukažte, že se dá dostat z každého města republiky do každého města republiky, aniž by člověk musel republiku opustit. (ARO 2004 10.6)

Příklad 4. Ukažte, že v každém turnaji existuje cesta, která prochází všemi vrcholy.

Příklad 5. Ukažte, že v turnaji n hráčů nastane právě jeden z následujících dvou případů: Buď existuje n-cyklus, nebo můžeme hráče rozdělit do dvou neprázdných skupin tak, že každý hráč z první skupiny porazil každého hráče z druhé skupiny. (KMS 11 2008)

Příklad 6. Dáno $N \geq m \geq 3$ a turnaj N hráčů, ve kterém neexistuje m-cyklus. Ukažte, že můžeme hráče ohodnotit čísly $1, 2, \ldots, N$ tak, že kdykoliv $a \geq b+m-2$, pak hráč ohodnocený číslem a porazil hráče s číslem b. (USA TST 2009)

Příklad 7. Uvědomte si, že v každém orientovaném grafu platí

$$\sum_{v \in V} \mathrm{in}(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{out}(v).$$

Ukažte, že v turnajích platí dokonce i

$$\sum_{v \in V} (\mathrm{in}(v))^2 = \sum_{v \in V} (\mathrm{out}(v))^2.$$

(Putnam 1965)

Jak jsme poznali na příkladu s polohrubáky, vyplatí se často vybrat si jednoho účastníka turnaje a zbylé rozdělit podle toho, zda našeho vyvoleného porazili, nebo s ním prohráli. Díky definici turnaje totiž víme, že každý další účastník padne do právě jedné z těchto skupin. Drobné obměny této myšlenky využijeme v následujících dvou příkladech. První z nich je trikový, druhý je těžký.

Příklad 8. Dáno je $N \geq 3$ bodů očíslovaných $1, 2, \ldots N$. Z bodu s menším číslem vede vždy šipka do bodu s větším číslem. Obarvení šipek červenou a modrou barvou nazveme *jednobarevné*, pokud pro libovolnou dvojici různých vrcholů A, B neexistuje zároveň modrá a červená cesta z A do B. V závislosti na N určete počet jednobarevných obarvení. (ARO 2005 11.3)

Příklad 9. Turnaje se účastní 10 rytířů. Víme, že kdykoliv rytíř A porazil rytíře B, pak počet rytířů, kteří porazili A, sečtený s počtem rytířů, které porazil B, dá alespoň 8 (čili $\mathrm{in}(A) + \mathrm{out}(B) \geq 8$, kdykoliv $A > B$). Ukažte, že v celém turnaji existuje právě 40 trojcyklů. (Hong Kong 1994)

Orientované grafy

Turnaj je jen speciální případ orientovaného grafu. Mohli bychom tedy očekávat, že tvrzení, která jsme dokázali pro turnaje, budou (případně v nějaké lehce pozměněné podobě) platit i pro všechny orientované grafy. Tak je tomu bohužel jen velmi zřídka. Uvědomme si totiž, že orientovaných grafů je ve srovnání s turnaji „fakt hodně“. Speciálně mohou být takové grafy nepříjemně „řídké“ (například na každou permutaci se můžeme dívat jako na orientovaný graf). Spíš než přejímání tvrzení proto bude fungovat přejímání metod. Pomocí fint, které jsme si osvojili na úlohách s turnaji, teď budeme zkoušet řešit úlohy na orientované grafy.

Příklad 10. Hrany konvexního mnohostěnu jsou orientované jednosměrnými šipkami tak, že z každého vrcholu vychází a do každého vrcholu vstupuje alespoň jedna šipka. Dokažte, že existuje stěna, na které tvoří šipky cyklus.
(KMS gama, Romania TST)

Příklad 11. Devět měst je nějak pospojováno jednosměrnými cestami, přičemž z každého města vedou právě tři cesty. Také víme, že pokud vede přímá cesta z A do B, pak určitě nevede přímá cesta z B do A. Ukažte, že existuje trojice měst, mezi kterými může Artuš jezdit neustále dokola. (Ukrajina)

Příklad 12. Je dán orientovaný bipartitní graf s partitami X, Y. V jednom kroku vybere Amir vrchol a obrátí orientaci všech hran, které vedou z, resp. do tohoto vrcholu. Ukažte, že lze po konečném počtu kroků dosáhnout stavu, kdy pro všechny vrcholy $u \in X$ platí $\mathrm{in}(u) \geq \mathrm{out}(u)$ a pro všechny vrcholy $v \in Y$ platí $\mathrm{in}(v) \leq \mathrm{out}(v)$. (Írán 2002)

Příklad 13. Kolem kulatého stolu sedí N rytířů. Na povel každý z nich na někoho ukáže (nikdo neukazuje na sebe). Dokažte, že umíme rytířům nasadit na hlavy přilbice tří barev tak, že nikdo neukazuje na kolegu se stejně barevnou přilbicí.

Příklad 14. Z každého náměstí ve městě M vedou přesně dvě jednosměrné uličky. Dokažte, že město může být rozděleno na 1014 čtvrtí tak, že uličky vedou vždy jen ze čtvrti do jiné čtvrti a zároveň pokud vede nějaká ulička ze čtvrti c_1 do čtvrti c_2, pak žádná ulička nevede opačně. (ARO 2002)

Příklad 15. Francouzská výzvědná služba vyslala na Kamelot 16 špehů. Každý z nich sleduje některé své kumpány (pokud špeh A sleduje B, pak B nesleduje špeha A). Kterýchkoliv 10 špehů lze očíslovat tak, že první špehuje na druhého, druhý na třetího atd. až desátý na prvního. Dokažte, že lze podobně očíslovat i každých 11 špehů. (Baltic Way 1994, 19/20)

Literatura a zdroje

Příklady jsem čerpal především z národních olympiád (ARO, čili *All-Russian olympiad*), z výběrových soustředění před IMO (TST, čili *team selection test*), ze slovenského semináře KMS a z matematického folklóru.

[1] Internetové fórum Mathlinks, *http://mathlinks.ro*

[2] PraSečí knihovna, *http://mks.mff.cuni.cz/library*

[3] Archiv KMS, *http://kms.sk/archiv*

Cvičení z diofantických rovnic

Honzík Vaňhara

Abstrakt. Toto cvičení slouží k získání hlubší zkušenosti s řešením diofantických rovnic.

Rozumíte si s Diofantickými rovnicemi? Ne? Tak je na čase si s nimi začít rozumět a ostřílet si své zbraně. Zkuste to třeba na této:

Příklad 1. Najděte všechny dvojice $x,y \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x^2 + 7 = 2^y.$$

U diofantických rovnic se při řešení využívá hlavně dělitelnosti a zbytků po dělení nějakým prvočíslem. Dělitelnost je třeba vhodné aplikovat, když na jedné straně rovnice máte výraz dělitelný nějakým prvočíslem, protože potom musí být i druhá strana tímto prvočíslem dělitelná a potom si celý tento výraz můžete vydělit, což může být pro další část řešení klíčové. Zbytky po dělení prvočíslem se také používají na eliminaci řešení, tedy na dokázání, že už žádná další řešení nejsou. Všimli jste si už, že například 2^k dává po dělení třemi zbytek 1, pokud je k sudé, a 2, pokud je k liché, anebo že prostá druhá mocnina přirozeného čísla dává po dělení třemi nebo čtyřmi zbytky pouze 1 a 0? Při řešení také nezapomínejte na obvyklé finty jako je používání známých vzorečků, nerovností nebo, jak si ukážeme hned na prvním příkladě, i zajímavých vlastností některých čísel.

Příklad 2. F_n je n-té Fibonacciho číslo ($F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Najděte všechny dvojice $a, n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$F_n + F_{2n} + F_{3n} = a! + 3.$$

Příklady k vašemu řešení

Příklad 3. Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $n^2 + n + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Příklad 4. Najděte všechny trojice $x, y, z \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x + y + z = xyz.$$

Příklad 5. Následující rovnici vyřešte v oboru přirozených čísel:

$$3m^2 + 3m + 7 = n^3.$$

Klíčová slova. teorie čísel, diofantické rovnice, přirozená čísla, spousta příkladů

Příklad 6. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$x^3 + y^3 = x^2 + y^2.$$

Příklad 7. Nalezněte všechny dvojice celých čísel a, b takových, že číslo $a + b$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 + ax + b$. (Kraj MO 2007)

Příklad 8. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x! + y! = x^y.$$

(MEMO 2007)

Příklad 9. Vyřešte v přirozených číslech diofantickou rovnici

$$a!b^2 = c^3 - 1.$$

Příklad 10. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(IMO 2006)

Příklad 11. Nalezněte celočíselná řešení rovnice

$$4x^2 + 9 = y^3.$$

Příklad 12. Následující rovnici vyřešte v oboru přirozených čísel:

$$13x + 3 = 2^y.$$

Příklad 13. Najděte všechny dvojice čísel x a p, kde $x \in \mathbb{N}$ a p je prvočíslo takové, že

$$2^{p-1} - 1 = px^2.$$

Příklad 14. Zjistěte všechny trojice čísel $x, y \in \mathbb{N}$ a p prvočíslo takové, že

$$y^2 + 1 = x^p.$$

Literatura

[1] Fórum Mathlinks, *http://www.mathlinks.ro/*.
[2] Víťa Kala, *Diofantické rovnice*, Bernartice, 2005.

Funkce na přirozených a celých číslech

Honzík Vaňhara

Abstrakt. V přednášce se naučíte základy funkcionálních rovnic a nerovnic na přirozených číslech, což Vám může pomoci k lepšímu pochopení funkcionálních rovnic jako celku. A později přejdeme i na více než základy.

Ačkoliv se toto může zdát jako úzké téma, v podstatě pokrývá ty nejlepší finty jak z vlastností přirozených čísel, tak z funkcionálních rovnic a kupodivu může zasáhnout i do kombinatoriky, protože funkce je vlastně taková krabička, která nějakou věc „sešrotuje“ a místo ní „vyplivne“ nějakou jinou, která náleží do jejího oboru. A pokud je to funkce na přirozených číslech, tak nic nebrání, aby se v některých případech chovala jako permutace. Jenže stále je to funkce, a tak u ní můžeme hledat vlastnosti, jako je prostota, nebo zkoušet dosazovat. Nakonec díky tomu, že pracujeme v celých nebo přirozených číslech, můžeme používat matematickou indukci nebo (v případě přirozených čísel) i nekonečný sestup. Metod se nabízí opravdu hodně.

Finty funkcionální

První fintou je důkaz prostoty a její využití. Nejlepší bude, když si toto ukážeme na jednoduchém příkladě:

Příklad 1. Dokažte, že každá funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taková, že pro každé $m \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(f(m)) = -m,$$

je lichá a bijekce.

Idea je jednoduchá. Kdyby existovaly dvě hodnoty x a y, pro která platí $x \neq y$ a zároveň $f(x) = f(y)$, pak by platilo

$$-x = f(f(x)) = f(f(y)) = -y.$$

A nyní vidíme, že pokud je $f(x) = f(y)$, potom $x = y$, tedy funkce je prostá. Využití je ještě trošku sofistikovanější, a to že pokud máme rovnost dvou funkčních hodnot, potom se nám rovnají i argumenty oněch funkcí. Tedy pokud je f prostá funkce, A nějaký výraz a B nějaký jiný výraz, potom $f(A) = f(B)$ implikuje $A = B$.

Druhou fintou je využití symetrie, což je klasický postup u funkcionálních rovnic. Využíváme například rovností typu $f(xy) = f(yx)$, $f(x+y) = f(y+x)$ apod. A tohoto dosáhneme pouhým dosazením x za y a naopak.

Klíčová slova. funkce, funkcionální rovnice a nerovnice, přirozená čísla, celá čísla

Příklad 2. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro každou dvojici m, n celých čísel platí
$$f(f(m) + f(n)) = f(m) - n.$$

Příklad 3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro každou dvojici m, n celých čísel platí
$$f(n + m) - f(n) + f(m) = 2f(mn) - mn.$$

Třetí fintou zastupující permutace je transpoziční prohození. Ač se to může zdát zvláštní názvem, jde v podstatě o zcela jednoduchou věc. Pokud platí $f(f(a)) = a$, potom funkce na daném oboru funguje právě jako transpozice. Tedy vezmeme-li si a takové, že $f(a) = c$, tak potom z dané podmínky vyplývá přímo, že $f(c) = a$. Když si to člověk představí na ose čísel, tak krásně vidí, jak se některá čísla mohou prohazovat anebo samozřejmě některá budou ukazovat zpátky na sebe.

Příklad 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro každé n celé platí
$$\begin{aligned} f(f(n)) &= n, \\ f(f(n+2)+2) &= n. \end{aligned}$$

Využití vlastností přirozených čísel

První fintou je klasická matematická indukce. Je to vlastně úplně jednoduchý princip. Jenže je i stejně silný, jak je jednoduchý. Jen si to zkuste:

Příklad 5. Rozhodněte, jestli existuje funkce $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující
$$h(h(n)) + h(n + 1) = n + 2.$$

Příklad 6. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující
$$\begin{aligned} f(2) &= 2, \\ f(n+1) &> f(n), \\ f(mn) &= f(m)f(n). \end{aligned}$$

Druhou fintou je nekonečný sestup. Jak na něj? Jsou dva způsoby. Jeden, užívaný hlavně v teorii čísel, vypadá tak, že ke každému řešení naleznete i řešení menší. Jenže na přirozených číslech nemůžeme jít dolů do nekonečna, a tedy se někdy zastavíme, což je většinou spor. Druhý způsob nekonečného sestupu – obecněji používaný – využívá extremálního principu. Vezmeme-li si, že existuje nejmenší prvek splňující rovnici, a najdeme i menší prvek, který též vyhovuje zadání, máme spor. Zkuste si to sami.

Příklad 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(n)) < f(n+1).$$

(IMO 1977)

Třetí fintou je postupný vzestup. Je to v podstatě prostý postup. Najdete, jak se chová nejmenší člen, a potom najdete, jak se chová další člen. A další. A další. Až tímto postupem vystavíte všechna přirozená čísla.

Příklad 8. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(1) = 2,$$
$$f(f(n)) = f(n) + n.$$

A nyní pár příkladů na procvičení

Protože hezkých příkladů není nikdy dost a nejvíc se člověk naučí, když to zkusí na vlastní kůži, tak tady jich pár je.

Příklad 9. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Příklad 10. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, jejichž oborem hodnot je množina $\mathbb{N}_0$, splňující

$$f(n) \geq n + (-1)^n.$$

Příklad 11. Existuje nějaká funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f\left(f(n)\right) + f(n+1) = 2n?$$

Příklad 12. Existuje nějaká funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f\left(f(n)\right) + f(n+1) = 3n?$$

Příklad 13. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

Příklad 14. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(m + f(n)) = f(m) + n.$$

Příklad 15. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(m) + f(n)) = m + n.$$

Příklad 16. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + n.$$

Příklad 17. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(mf(n)) = n^2 f(mn).$$

Příklad 18. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(n)) = 3n.$$

Příklad 19. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(m)) = m + 1.$$

Příklad 20. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(m + f(n)) = f(m) - n.$$

Příklad 21. Najděte nejmenší možnou hodnotu $f(2007)$ pro $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

(Celostátní kolo MO 2007)

Příklad 22. Najděte $f(2002)$ a $f(2011)$ pro $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která pro všechna prvočísla p, q a všechny dvojice přirozených čísel a, b splňuje

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f(b) &= f(ab), \\ f(p + q) &= f(p) + f(q). \end{aligned}$$

Příklad 23. Určete všechny takové funkce f z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých čísel, že pro všechna kladná celá čísla a, b existuje nedegenerovaný trojúhelník, jehož strany mají délky

$$a, f(b), f(b + f(a) - 1).$$

(Trojúhelník je nedegenerovaný, neleží-li všechny jeho vrcholy na téže přímce.)
(IMO 2009)

Obsah