# Sborník
# Dobrá Voda 2010

**Háňa Bendová**
**Jaroslav „Jardáč“ Hančl**
**Vojta Miloš**
**Vít „Vejtek“ Musil**
**Tomáš „Šavlík“ Pavlík**
**Monča Pospíšilová**
**Michal „Kenny“ Rolínek**
**Alča Skálová**
**Lenka Slavíková**
**Alexander „Olin“ Slávik**
**Miško Szabados**
**Pepa Tkadlec**
**Honzík Vaňhara**
**Martina Vaváčková**

editor : Alexander „Olin“ Slávik
vydání druhé, náklad 2 výtisky
duben 2011
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

# Funkcionální rovnice

*Háňa Bendová*

## Úvod

Funkcionální rovnicí míníme takovou rovnici, ve které nevystupují jako hledané neznámé čísla, ale funkce. Na této přednášce si osvojíme práci s funkcionálními rovnicemi a naučíme se některé základní metody jejich řešení.

## Substituční metoda

Substituční metoda je základní metodou řešení funkcionálních rovnic a spočívá v následujícím postupu:

Předpokládáme, že už máme řešení funkcionální rovnice, a vhodným dosazením za proměnné se snažíme zjistit, co toto řešení splňuje. Někdy zjistíme, že má nějakou užitečnou vlastnost, kterou můžeme dále využít, jindy dostaneme přímo tvar, jak musí vypadat. Pokud zjistíme, že řešení musí mít nějaký konkrétní tvar, je nutné jej dosadit do zadané rovnice a zkouškou ověřit, zda je skutečně řešením.

**Příklad.** Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnici

$$f(x+y) = f(x) + y$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

*Řešení.* Předpokládejme, že již máme řešení $f$. Označme $c = f(0)$ a dosaďme $x = 0$. Dostáváme

$$f(y) = y + c$$

a dozasením do původní rovnice snadno ověříme, že taková funkce je řešením pro libovolné reálné $c$:

$$f(x+y) = x + y + c = (x + c) + y = f(x) + y.$$

**Vhodné hodnoty k dozasení (nejčastěji používané):**

- $x, y = 0$,
- $y = x$, $y = -x$,
- $x = f(x)$,
- dozasení takové, aby se rovnaly výrazy, které se předtím nerovnaly.

## Využití vlastností funkce

**Definice.** *Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je*

(i) sudá, *resp.* lichá, *jestliže* $\forall x \in \mathbb{R}$ *platí* $f(x) = f(-x)$, *resp.* $f(x) = -f(-x)$,

(ii) rostoucí, *resp.* klesající, *jestliže* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *pokud* $x < y$, *pak* $f(x) < f(y)$, *resp.* $f(x) > f(y)$,
(iii) nezáporná *(nebo* kladná*), jestliže* $f(x) \geq 0$ *(nebo* $f(x) > 0$*) pro všechna* $x \in \mathbb{R}$,
(iv) prostá, *jestliže* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *platí* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ *(nebo ekvivalentně* $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$*),*
(v) na, *jestliže* $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\colon f(x) = y$,
(vi) bijekce, *jestliže je prostá a na.*

**Využití:**

- Sudost nebo lichost ulehčuje práci na polovinu, pokud je potřeba řešit rovnici zvlášť pro kladná a záporná čísla.
- Je-li funkce $f$ prostá a platí $f(A) = f(B)$, pak dostáváme $A = B$, přičemž $A$, $B$ mohou být i složitější výrazy.
- Je-li funkce $f$ rostoucí, pak je také prostá.
- Je-li funkce $f$ na a $x \in \mathbb{R}$, můžeme pracovat s $c \in \mathbb{R}$ takovým, že $f(c) = x$.

## Speciální tvary rovnic

Při řešení funkcionálních rovnic velmi často narazíme na to, že má funkce jednu z následující vlastností, proto je užitečné rozmyslet si, jak v takových případech postupovat.

1) $f(f(x)) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$: potom $f$ je bijekce, tedy můžeme využít jejích vlastností, a často se také vyplatí zkusit za $x$ dosadit $f(x)$, neboť $f(x)$ pak přejde v $x$;
2) $f(f(x)) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$: uvědomme si, že pro všechna $x \in \mathrm{Im} f = \{y \in \mathbb{R}\colon \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = y\}$ je $f(x) = x$.
3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$: tato rovnice se nazývá Cauchyova a za dodatečných předpokladů na funkci $f$ (spojitost, monotonie, … ) jsou jejími jedinými řešeními funkce tvaru $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. To se dá dokázat Cauchyovou metodou, kterou se na této přednášce nebudeme zabývat. Některé funkcionální rovnice se dají vyřešit převedením na Cauchyovu rovnici, jejíž řešení známe.

## Pevné body

**Definice.** Pevný bod *funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je takový bod* $x \in \mathbb{R}$, *pro nějž* $f(x) = x$.

V některých úlohách nám může vyšetření pevných bodů pomoci. Například pokud se dopracujeme k tomu, že $f(g(x)) = g(x)$, a dokážeme, že $f$ má jediný pevný bod, můžeme tím úlohu úplně vyřešit.

## Symetrie

Je-li výraz na jedné straně funkcionální rovnice symetrický, tj. nezmění se, pokud vzájemně zaměníme proměnné, pak z toho můžeme usoudit, že ani výraz na pravé straně se vzájemnou záměnou proměnných nezmění. Neobsahuje-li rovnice symetrický výraz rovnou, lze jej často zíkat vhodným dosazením.

**Příklad.** Najděte všechny funkce $f$, které splňují pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ funkcionální rovnici

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y.$$

*Řešení.* Výraz $f(f(x) + f(y))$ je symetrický, proto platí

$$f(x) + y = f(f(x) + f(y)) = f(f(y) + f(x)) = f(y) + x.$$

Dosazením $y = 0$ zjistíme, že $f(x) = x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, a zkouškou ověříme, že vyhovuje jediná funkce, a to $f(x) = x$.

## Příklady

**Příklad.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y).$$

**Příklad.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna kladná reálná $x, y$ rovnici

$$f\left(x + f\left(y\right)\right) = f\left(x + y\right) + f\left(y\right).$$

**Příklad.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x).$$

(Britská MO 1997 a 2000)

**Příklad.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnici

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část $x$. (IMO 2010)

**Příklad.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

(MEMO 2009)

**Příklad.** Najděte všechny funkce $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ takové, že

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pro všechna $w$, $x$, $y$, $z$ splňující $wx = yz$. (IMO 2008)

**Příklad.** Vyřešte pro $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcionální rovnici

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

(IMO 1999, Problem 6)

## Literatura


[1] Marko Radovanovič: *Functional equations*, *www.imomath.com.*
[2] Andrei Jorza: *Functional Equations*, USA MOSP.
[3] Franta Konopecký: *Funkcionální rovnice*, sborníčkový příspěvek Ramzová 2006.
[4] Franta Konopecký: *Funkcionální rovnice*, bakalářská práce, 2008.
[5] Fórum Mathlinks – *www.mathlinks.ro.*

# Indukce bez králíků

*Jaroslav „Jardáč" Hančl*

### Jak to funguje?

Matematická indukce je nástroj, který nám pomáhá formalizovat myšlenku „pro malá čísla to tak funguje a pro velká se to nepokazí".

**Tvrzení.** (Princip matematické indukce) *Buď $n \in \mathbb{N}$ a $V(n)$ výroková formule. Předpokládejme, že jsou splněny následující dvě podmínky:*

(i) *$V(1)$ je pravdivý výrok.*
(ii) *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.*

*Pak výrok $V(n)$ je pravdivý pro každé $n$ přirozené.*

**Poznámka.** Řešení využívající matematickou indukci *vždy* sestává ze dvou kroků. Bod (i) obvykle ověříme snadno. Důkaz bodu (ii) (tzv. indukční krok) pak zpravidla vedeme tak, že předpokládáme platnost $V(k)$ a odvodíme $V(k+1)$.

### Motivační a vzorový příklad

**Příklad.** Zapište výraz $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)$ v jednodušší formě.

*Řešení:* Ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Toto tvrzení dokážeme indukcí. Pro $k = 1$ skutečně nastává rovnost $(2 \cdot 1 - 1 = 1^2)$. Dále buď $t \in \mathbb{N}$ libovolné.

Dokážeme, že pokud tvrzení platí pro $t$, platí i pro $t + 1$. Jelikož jsme výše ukázali, že platí pro jedničku, bude pak muset platit také pro všechna přirozená $k$. Chceme tedy dokázat, že

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2t - 1) + (2t + 1) = (t + 1)^2,$$

přičemž můžeme využít toho, že

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2t - 1) = t^2. \tag{1}$$

Dosaďme nyní do levé strany dokazovaného tvrzení ze vztahu (1) a upravme

$$[1 + 3 + 5 + \cdots + (2t - 1)] + (2t + 1) = t^2 + (2t + 1) = (t + 1)^2.$$

Jsme hotovi.

## Příklady na zahřátí

**Příklad 1.** Mějme v rovině $N$ kružnic, které dělí rovinu na několik oblastí. Ukažte, že je možné každou z těchto oblastí vybarvit jednou ze dvou barev tak, že každé dvě oblasti se stejnou bavou spolu nesousedí.

**Příklad 2.** V rovině je dáno $2n$ bodů, $n \geq 2$, v obecné poloze[1]. Dále je mezi těmito body sestrojeno $n^2 + 1$ úseček. Dokažte, že existuje trojice bodů, ve které jsou každé dva spojeny úsečkou.

**Příklad 3.** Ukažte, že pro $n \geq 5$ lze čtverec rozdělit na $n$ (ne nutně různých) čtverců.

**Příklad 4.** Mějme reálné číslo $x$, pro které je hodnota $x + \frac{1}{x}$ číslo celé. Dokažte, že pak je celé i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (PraSe 26/4, 3. příklad)

**Příklad 5.** Pro přirozené číslo $n$ si napišme všechny zlomky tvaru $\frac{1}{pq}$, kde čísla $p$ a $q$ jsou nesoudělná a platí $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$. Dokažte, že pak součet všech těchto zlomků je konstantní pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (PraSe 26/4, 5. příklad)

**Příklad 6.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n$ existuje $n$-ciferné přirozené číslo dělitelné číslem $2^n$, které má za cifry pouze jeničky a dvojky. (PraSe 26/4, 6. příklad)

**Příklad 7.** Dokažte, že mezi každými $2^{n+1}$ čísly lze najít $2^n$ čísel takových, že jejich součet je dělitelný $2^n$.

**Příklad 8.** Dokažte, že pro libovolné $n \geq 0$ přirozené platí $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$.

**Příklad 9.** Mějme přirozená čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ taková, že součty $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ a $y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ jsou rovny témuž číslu menšímu než $m \cdot n$. Dokažte, že v rovnosti

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

lze vyškrtnout několik sčítanců (ale ne všechny) tak, aby vzniklo opět platné tvrzení.

**Příklad 10.** Pro $p$ liché označme $x_1$ a $x_2$ kořeny kvadratické rovnice $x^2 + px - 1 = 0$. Dále definujme posloupnost $y_n = x_1^n + x_2^n$, kde $n \geq 0$. Dokažte, že čísla $y_n$ a $y_{n+1}$ jsou nesoudělná pro libovolné $n$ přirozené.

**Příklad 11.** Uvažme všechny podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$, které neobsahují dvě po sobě jdoucí čísla. Ukažte, že součet čtverců součinu všech prvků těchto množin je $(N + 1)! - 1$.

[1] tj. žádné tři neleží na přímce

**Příklad 12.** Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.
(ii) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3n - 2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$.
(iii) $2^2 + 5^2 + 8^2 + \cdots + (3n - 1)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 + 3n - 1)$.

**Příklad 13.** Dokažte, že pro libovolné $n \geq 2$ platí nerovnost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

**Příklad 14.** Pro $n$ přirozené dokažte nerovnost

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

**Příklad 15.** Buď $n \geq 2$ přirozené číslo, pak platí

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}.$$

**Příklad 16.** Mějme $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

## Příklady pro myslitele

**Příklad 17.** Mějme $a, b$ přirozená čísla taková, že podíl $P = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ je přirozené číslo. Dokažte, že potom je to čtverec. (IMO 1988 – 6. příklad)

**Příklad 18.** Posloupnost $\{a_n\}$ je definovaná rekurentně vztahy $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$, $a_0 = 9$. Dokažte, že člen $a_{10}$ obsahuje ve svém desítkovém zápisu více než 1000 devítek. (Turnaj měst)

## Literatura a zdroje

Nejprve bych chtěl poděkovat J. Tkadlecovi za sepsání úvodu a H. Bendové za sepsání příspěvku, který se také stal předlohou pro výběr příkladů.

[1] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.
[2] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Seminář *Umění vidět v matematice.*

# Goniometrické triky

*Vojta Miloš*

Při řešení se jistě budou hodit tyto vzorce:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 - \sin^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \qquad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$$

Často užívané triky:

- Při řešení soustav rovnic se dá umocnit na druhou a šikovně sečíst tak, aby vzniklo $\sin^2 x + \cos^2 x$. Víme totiž, že takový součet je vždy roven jedné.
- Vhodně zvolená goniometrická substituce může znamenat přímočaré řešení i ve složité úloze, která původně žádnou goniometrii neobsahuje.
- Užitečný postřeh: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.
- Je dobré vzít v úvahu omezenost funkcí sinus a kosinus. Šikovné odhady mohou vyřešit nejednu úlohu.

### Lehčí úlohy

**Příklad 1.** Určete hodnotu $\sin 18° \cdot \sin 54°$ bez výpočtu hodnot dílčích sinů.

**Příklad 2.** Najděte všechna $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ taková, že

$$\sin x + \sin y = \sin(xy).$$

**Příklad 3.** Vyřešte soustavu pro $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin x + \sin y = \sin(x + y)$$
$$\cos x + \cos y = \cos(x + y).$$

*Nápověda.* Typická ukázka pro trik „umocni a sečti“.

**Příklad 4.** Najděte $n$, je-li dáno

$$(1 + \operatorname{tg} 1°)(1 + \operatorname{tg} 2°) \cdots (1 + \operatorname{tg} 45°) = 2^n.$$

(AMC12P 2002)

**Příklad 5.** Nechť $a, b, c, d$ jsou reálná čísla, která splňují $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ a $ac + bd = 0$. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat výraz $ab + cd$.

*Nápověda.* Substituce je mocná zbraň.

**Příklad 6.** Spočítejte:

(a) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$;

(b) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$;

(c) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

**Příklad 7.** Nechť $a$, $b$, $c$, $d$ jsou reálná čísla v intervalu $[0, \pi]$ taková, že

$$\sin a + 7 \sin b = 4(\sin c + 2 \sin d),$$
$$\cos a + 7 \cos b = 4(\cos c + 2 \cos d).$$

Dokažte, že $2 \cos(a - d) = 7 \cos(b - c)$.

## Těžší úlohy

**Příklad 8.** Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$\left| \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos y} \right|$$

pro reálná čísla $x$. (Putnam 2003)

**Příklad 9.** Reálná čísla $a$, $x$, $y$, $z$ vyhovují podmínce

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x + y + z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x + y + z)} = a.$$

Dokažte, že platí

$$\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(x + z) = a.$$

**Příklad 10.** Nechť $a$ a $b$ jsou reálná čísla taková, že

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Zjistěte hodnotu $\sin(a + b)$. (AMC12 2002)

## Literatura

[1] Zuming Feng, Titu Andreescu: *103 Trigonometry Problems*, Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin, 2005.

# Triky s kvadratickou rovnicí

*Vít „Vejtek" Musil*

### Pojem kvadratické rovnice

*Kvadratickou rovnicí* rozumíme rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a$, $b$, $c$ jsou reálná čísla neboli tzv. *koeficienty* této rovnice a $x$ je neznámá. Zároveň požadujeme, aby koeficient $a$ byl různý od nuly, jinak hovoříme o lineární rovnici. Takové reálné $x$, pro které rovnice platí, nazýváme řešením, nebo též kořenem rovnice. Někdy se kvadratická rovnice uvádí pouze se dvěma koeficienty $p$, $q$ ve tvaru $x^2 + px + q = 0$, kterého lze dosáhnout dělením $a$. Navíc lze každou kvadratickou rovnici převést do tvaru $(2ax + b)^2 - D = 0$ takzvaným doplněním na čtverec. Hodnotu $D$ nazýváme *diskriminantem* této rovnice. Snadno se již dá napsat, že

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Odtud vidíme, kdy má rovnice řešení, jelikož je-li $D$ záporné číslo, neexistuje jeho druhá odmocnina. Pokud je $D$ kladné, obdržíme dvě různá řešení, v případě že $D = 0$, oba kořeny splynou v jeden tzv. *dvojnásobný kořen.* Úvahy o hodnotě $D$ se nám budou často hodit v mnoha úlohách k diskusi existence či počtu řešení dané rovnice.

### Význam v geometrii

Jistou představu nám může poskytnout také následující geometrická úvaha. Představme si funkci $y = ax^2 + bx + c$ a zkoumejme, kdy $y = 0$, alébrž kdy nám naše funkce protne osu $x$. Dále si všimněme, že pokud se nějaké funkce $a_1x^2 + b_1x + c_1$ a $a_2x^2 + b_2x + c_2$ rovnají pro všechna $x$, pak již nutně platí

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

Ukažme si jednu takovou geometrickou úvahu na následujícím příkladě.

**Příklad.** Rozhodněte, zda existuji čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, že rovnice $ax^2 + bx + c + \lambda = 0$ má dva reálné kořeny, ať zvolíme parametr $\lambda$ jakkoliv.

*Řešení.* Představme si, že taková reálná čísla $a, b, c$ existují. Potom naše funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ musí nabývat všech reálných hodnot. Je-li $a = 0$, pak $f$ je lineární a každou hodnotu nabývá pouze jednou. Dále tedy buď $a \neq 0$. Upravíme-li si $f$ na čtverec $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ a uvědomíme-li si, že $(x - x_0)^2$ je nezáporné číslo, pak $f(x_0) = y_0$ je minimální možná hodnota, kterou může $f$ nabývat v případě, že je $a$ kladné, v opačném případě je $y_0$ maximum. Takové chování funkce je však v rozporu s tím, že nabývá všech hodnot.

### Viètovy vztahy

Další velice důležitou vlastností je skutečnost, že pokud má rovnice $ax^2+bx+c = 0$ dvě (ne nutně různá) řešení $x_1$ a $x_2$, pak platí

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Roznásobením pravé strany a porovnáním s levou obdržíme tzv. *Viètovy vztahy*

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}, \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Těchto rovností se také občas využívá k řešení úloh, příkladem budiž následující úloha.

**Příklad.** Určete všechny hodnoty reálných parametrů $p$ a $q$, pro něž má každá z rovnic

$$x(x - p) = 3 + q, \qquad x(x + p) = 3 - q$$

v oboru reálných čísel dva různé kořeny, jejichž aritmetický průměr je jedním z kořenů zbylé rovnice.

*Řešení.* Z Viètových vztahů pro první rovnici dostáváme, že součet kořenů je $p$, jejich aritmetickým průměrem je $p/2$, jež má být kořenem druhé rovnice, tedy platí

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \tag{1}$$

Obdobně pro druhou rovnici máme, že součet jejich kořenů je $-p$ a $-p/2$ je kořenem první rovnice a platí

$$-\frac{p}{2} \cdot \left( -\frac{3p}{2} \right) = 3 + q. \tag{2}$$

Odečtením (1) − (2) dostáváme, že $q = 0$, a dopočteme $p = \pm 2$. Obě možnosti vedou na tutéž dvojici rovnic

$$x(x - 2) = 3, \qquad x(x + 2) = 3.$$

Stačí se již jen přesvědčit, že zadání úlohy je splněno.

**Příklad.** Dokažte následující nerovnosti pro $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$,
(ii) $x^2 + y^2 + 2y + 4 \geq xy + 2x$,
(iii) $2x^2 + 2y^2 + 1 \geq x + y + 2xy$.

**Příklad.** Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny, pro které platí, že rovnice $P(Q(x)) = 0$ má kořeny $-22$, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice.

**Příklad.** Určete všechny dvojice $(a, b)$ reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \qquad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný. (MO 57-B-I)

**Příklad.** Uvažujme dvě kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \qquad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnými parametry $a$, $b$. Zjistěte, jaké nejmenší a jaké největší hodnoty může nabývat součet $a+b$, existuje-li právě jedno reálné číslo $x$, které současně vyhovuje oběma rovnicím. Určete dále všechny dvojice $(a, b)$ reálných parametrů, pro něž uvažovaný součet těchto hodnot nabývá. (MO 57-B-II)

**Příklad.** Reálná čísla $a$, $b$ mají následující vlastnost: kvadratická rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

(i) Dokažte nerovnost $b > 3$.
(ii) Vyjádřete kořeny obou rovnic pomocí $b$.

(MO 59-B-I)

**Příklad.** Nechť $f(x) = x^2 + ax + b$ je kvadratický trojčlen takový, že rovnice $f(f(x)) = 0$ má čtyři reálné kořeny (počítáno včetně násobnosti), přičemž součet nějakých dvou z nich je roven $-1$. Dokažte, že $b \leq -1/4$. (Mecz Domaslav 2010)

**Příklad.** Buďte $a$, $b$, $c$ reálná čísla. Dokažte, že alespoň jedna z rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + (a-b)x + (b-c) &= 0, \\ x^2 + (b-c)x + (c-a) &= 0, \\ x^2 + (c-a)x + (a-b) &= 0 \end{aligned}$$

má reálný kořen. (Rusko 2007)

**Příklad.** Určete počet neprázdných podmnožin $A \subsetneq M = \{2^0, 2^1, \dots, 2^{2005}\}$ takových, že rovnice $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$ má celočíselné kořeny. Symbolem $S(A)$ zde rozumíme součet všech čísel z množiny $A$ a $B = M \setminus A$. (Rusko 2005)

**Příklad.** Buďte $a$, $b$, $c$ reálná čísla taková, že pro každou dvojici rovnic

$$x^2 + ax + b = 0,$$
$$x^2 + bx + c = 0,$$
$$x^2 + cx + a = 0$$

existuje právě jedno společné reálné řešení. Určete všechny hodnoty, kterých může nabývat výraz $a^2 + b^2 + c^2$. (MEMO 2009)

**Příklad.** Nechť $a$, $b$ jsou různá reálná čísla taková, že rovnice

$$(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$$

nemá žádné reálné kořeny. Dokažte, že hodnota $20(b - a)$ není celočíselná. (Rusko 2010)

**Příklad.** Buďte $f(x)$ a $g(x)$ kvadratické trojčleny s koeficienty 1 u kvadratického členu. Dokažte, že pokud $f(g(x)) = 0$ a $g(f(x)) = 0$ nemá reálné kořeny, pak alespoň jedna z rovnic $f(f(x)) = 0$ a $g(g(x)) = 0$ nemá reálné kořeny. (Rusko 2007)

## Literatura a zdroje

[1] Michal Rolínek, Josef Tkadlec: Seminář *Umění vidět v matematice.*

# Grafové úlohy

*Tomáš „Šavlík" Pavlík*

Na přednášce si kromě základních definic ukážeme hlavně některé zajímavé úlohy, které se dají pěkně řešit pomocí teorie grafů. Většina příkladů se řeší trikem, takže není třeba hlubších znalostí. Také si ukážeme, jak se v grafech využívá extremální princip.

## Definice

**Definice.** Graf $G$ *je uspořádaná dvojice* $G = (V, E)$, *kde* $V$ *je neprázdná množina a* $E$ *je množina dvoubodových podmnožin* $V$. *Potom* $V$ *nazýváme množinou vrcholů a* $E$ *množinou hran.*

**Definice.** *Graf* $G$ *je* bipartitní, *pokud jeho vrcholy můžeme rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny* $A$ *a* $B$ *tak, aby* $\forall \{u, v\} \in E : u \in A \ \& \ v \in B$.

**Definice.** Kružnice *na* $n$ *vrcholech je graf, jehož množinou hran je*

$$E = \{\{v_i, v_{i+1}\}: i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{v_n, v_1\}.$$

**Definice.** *Graf je* rovinný, *pokud ho lze nakreslit do roviny bez křížení hran.* Stěna grafu *je část plochy, která je ohraničená hranami grafu a přitom žádnou neobsahuje.*

**Definice.** Stupeň vrcholu *je počet hran, které ho obsahují.*

## Jednoduché příklady

**Příklad 1.** Dokažte, že graf je bipartitní, právě když neobsahuje žádnou kružnici liché délky.

**Příklad 2.** Mějme graf na $n$ vrcholech. Každý vrchol má stupeň alespoň $1 < k < n$. Dokažte, že existuje kružnice o alespoň $k$ vrcholech.

**Příklad 3.** Mějme úplný graf na devíti vrcholech. Každou hranu obarvíme jednou ze tří barev. Dokažte, že v tomto grafu existuje jednobarevný trojúhelník, když víte, že graf obsahuje právě tři bílé hrany. (IMO 1992)

**Příklad 4.** Je dána tabulka $n \times n$, v níž je zaplněno $2n$ políček. Dvě políčka jsou spojená zelenou hranou, pokud jsou na stejném řádku, a červenou hranou, pokud jsou ve stejném sloupci. Dokažte, že existuje kružnice, ve které se střídají barvy hran. (IMC 1999)

**Příklad 5.** Je dán rovinný graf takový, že všechny jeho stěny jsou ohraničené třemi hranami. Každý vrchol obarvíme jednou ze tří barev. Dokažte, že počet trojúhelníků, které mají každý vrchol jinak barevný, je sudý.

## A hurá do Egypta!

**Příklad 6.** Dva archeologové se nudí, a tak se rozhodli zahrát si hru. Je dán rovinný graf takový, že vnější stěna je ohraničená čtyřmi hranami a všechny ostatní třemi hranami. Dva protější vrcholy jsou modré a druhé dva červené. Jeden archeolog má modrou a druhý červenou barvu. Střídavě obarvují dosud neobarvené vrcholy až jeden spojí dva své původní vrcholy svojí barvou. Hra končí remízou, pokud jsou obarvená všechna pole a nikdo zatím nevyhrál. Dokažte, že vždy má někdo vyhrávající strategii. (PraSe, 17. ročník, 3. série)

**Příklad 7.** Archeolog se při průzkumu pyramidy ztratí v labyrintu. Označí si křižovatku, kde právě stojí, jako $s$. Vymyslí následující strategii prohledávání:

(i) Žádnou chodbou neprojde dvakrát stejným směrem.
(ii) Pokud příjde na křižovatku, kde ještě nebyl, označí si cestu, po které přišel. Tuto cestu použije k odchodu, jen když nemá jinou možnost.
(iii) Pokud už nemá kam jít podle pravidla (i), dožene a sní ho mumie.

Dokažte, že pokud existuje východ, průzkumník ho touto strategií najde, a v opačném případě zemře na křižovatce $s$. (PraSe, 22. ročník, text k seriálu)

**Příklad 8.** Při vykopávkách se našla tabulka $n \times n$, kde v každém poli je vyryt jeden hieroglyf. Platí, že žádné dva řádky nejsou uplně shodné. Dokažte, že můžeme odebrat jeden sloupec tak, aby se tato vlastnost zachovala.

**Příklad 9.** Na průzkumné výpravě o $n > 6$ lidech se každý zná s přesně třemi kolegy. Výprava dorazí na křizovatku a musí se rozdělit. Dokažte, že se zvládne rozdělit na dvě části tak, aby každý znal alespoň dva kolegy, se kterými bude pokračovat dále. (ČS střetnutí 1997)

## Literatura a zdroje

Čerpal jsem hlavně z PraSečí knihovny *http://mks.mff.cuni.cz/library/*, a to konkrétně ze starších příspěvků Alči Skálové a Jardy Hančla, čímž jim děkuji.

[1] T. Andreescu, G. Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2008.

# Těžiště v kombinatorice

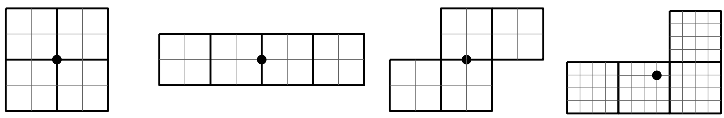
*Monča Pospíšilová*

## Úvod

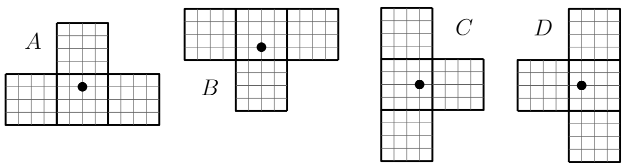
Kombinatorické úlohy, ve kterých máme danými útvary pokrýt určitou plochu, lze elegantně řešit pomocí obarvování. Zde se naučíme tytéž úlohy řešit jinak. Využijeme vlastností těžiště, čímž se řešení úlohy převede na jiný, jednodušší problém. Uvidíme, že zpravidla dojdeme k triviálnímu sporu typu „sudé není liché“ nebo naopak.

Obvykle se plocha pokrývá „kostičkami“, které se odborně nazývají $k$-mina nebo polymina (např. trimina, tetramina, pentamina). V následujících úlohách se využívají především tetramina. Těžiště všech existujících tetramin jsou znázorněna na obrázku:

a)



b)




## O těžišti

Jedna z hlavních vlastností těžiště, kterou budeme využívat, je

$$m_1\overrightarrow{OX_1} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0},$$

kde $O$ je těžiště bodů $X_1, \ldots, X_n$ s hmotnostmi $m_1, \ldots, m_n$. V našem případě body $X_1, \ldots, X_n$ představují těžiště tetramin, jež mají ale všechny stejnou „hmotnost“, proto platí:

$$\overrightarrow{OX_1} + \cdots + \overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0}.$$

### Návod jak začít

Než začneme úlohu řešit, rozmyslíme si, kde je těžiště daných kostiček a plochy, kterou pokrýváme. Potom si oba objekty „přeškálujeme" tak, aby obě těžiště ležela na průsečíku (viz obrázek) a dílčí malé kostičky obou objektů měly stejný rozměr. Pak do těžiště pokrývaného útvaru položíme střed souřadného systému. Jednotková vzdálenost bude délka strany malé dílčí kostičky. Potom součet všech $x$-ových i $y$-ových souřadnic těžišť $k$-min musí být roven 0.

### Příklady

**Příklad 1.** Čtvercová podlaha je pokryta dlaždicemi typu $2 \times 2$ a $1 \times 4$. Jedna dlaždice se ale rozbila. K dispozici máme dlaždici druhého typu. Ukažte, že není možné dlaždice přeskládat tak, aby podlahu pokryly.

**Příklad 2.** Dokažte, že šachovnici $10 \times 10$ nelze pokrýt 25 tetraminy typu $T$.

**Příklad 3.** Dokažte, že šachovnici $10 \times 10$ nelze pokrýt 25 tetraminy typu $I$.

**Příklad 4.** Dokažte, že šachovnici $8 \times 8$ nelze pokrýt 15 tetraminy typu $T$ a jedním tetraminem typu $O$.

**Příklad 5.** Máme šachovnici $n \times n$ bez rohových polí. Pro jaká $n$ lze šachovnici pokrýt tetraminy typu $L$?

**Příklad 6.** Středové souměrný útvar je složený z $n$ tetramin $L$ a $k$ tetramin $I$. Dokažte, že $n$ je sudé. (Prasolov)

**Příklad 7.** Čtverec $7 \times 7$ je pokryt šestnácti dílky $3 \times 1$ a jedním $1 \times 1$. Kde všude může být dílek $1 \times 1$?

**Příklad 8.** Máme šachovnici $n \times n$ pokrytou tetraminy typu $T$. Nechť $a$, $b$, $c$, $d$ jsou počty tetramin všech čtyř možných orientací (dle obr. b) označených $A$, $B$, $C$, $D$. Dokažte, že $4 \mid (a + b - c - d)$ (Dobosevych)

**Příklad 9.** Lze nějakou středově souměrnou plochu pokrýt tetraminy typu $L$ a triminy typu „roh"? Polymina je zakázáno otáčet či převracet.

### Literatura a zdroje

[1] Harun Šiljak: *Centroids and Tiling Problems*, Mathematical reflections 5, 2009.
[2] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.

# Angle chasing

*Michal „Kenny“ Rolínek*

Angle chasing neboli česky „počítání úhlů“ je nejsilnější geometrická technika vůbec. Přestože jsou její principy jednoduché, ovládnout ji důkladně se podaří málokomu. Na přednášce si ukážeme základní strategie při řešení úloh a vyřešíme s jejich pomocí úlohy jak klasické, tak i ty nejzajímavější úlohy z posledních let.

### Základy angle chasing

**Tvrzení.** (charakteristika tětivových čtyřúhelníků) *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *$ABCD$ je tětivový (má opsanou kružnici).*
(ii) $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$.
(iii) $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°$.

**Tvrzení.** (úsekový úhel) *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice $k$ a $p$ přímka procházející bodem $A$. Na přímce $p$ zvolme bod $X$ tak, aby úhel $XAB$ byl ostrý. Pak platí, že $p$ je tečna kružnice $k$, právě když $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle ACB|$.*

**Definice.** (antirovnoběžnost) *Je dán úhel $\sphericalangle XVY$. Je-li přímka $p$ rovnoběžná s osovým obrazem přímky $q$ podle osy úhlu $\sphericalangle XVY$, pak přímky $p, q$ nazveme* antirovnoběžné *vzhledem k úhlu $\sphericalangle XVY$.*

**Tvrzení.** (O antirovnoběžkách) *Je dán úhel $\sphericalangle XVY$. Pak různé přímky $p$, $q$ jsou v něm antirovnoběžné, právě když jejich průsečíky s rameny úhlu tvoří tětivový čtyřúhelník.*

### Dobré rady

(i) Určete, které úhly jsou v úloze dominantní.
(ii) Rozmyslete si, které úhly umíte vyjádřit pomocí dominantních úhlů.
(iii) Na kružnicích pracujte s velikostmi oblouků.
(iv) Postupujte odpředu („Vím, že …“) i odzadu („Stačilo by mi …“).
(v) Do obrázku kreslete s rozmyslem.
(vi) Naučte se (ideálně nazpaměť!) úhly v běžných situacích a ty pak v úlohách hledejte (jsou tam častěji, než si myslíte).
(vii) Přeformulujte zadání tak, abyste měli v ruce co nejsilnější tvrzení.

### Typické příklady

**Příklad 1.** Na stranách $BC$, $CD$ čtverce $ABCD$ jsou zvoleny body $P$, $Q$ tak, že $|\sphericalangle QAP| = 45°$. Dále buďte $X = AP \cap BD$, $Y = AQ \cap BD$. Ukažte, že body $X$, $Y$, $P$, $Q$, $C$ leží na jedné kružnici.

**Příklad 2.** (Lemma o dvou kružnicích) Jsou dány kružnice $k$, $l$, které se protínají v bodech $A$, $B$ Na kružnici $k$ zvolme bod $X$ a sestrojme $Y$ jako průsečík přímky $XB$ s kružnicí $l$. Ukažte, že nezávisle na volbě bodu $X$ má trojúhelník $AXY$ vždy stejné vnitřní úhly.

**Příklad 3.** (Brocard point) Je dán trojúhelník $ABC$. Sestrojme kružnici, která se dotýká strany $AB$ v bodě $A$ a prochází bodem $C$. Analogicky (cyklickou záměnou) sestrojme další dvě kružnice. Ukažte, že tyto kružnice se protínají v jednom bodě.

**Příklad 4.** (Simson line) Je dán trojúhelník $ABC$ a bod $D$ na jeho kružnici opsané. Z bodu $D$ spustíme (!) kolmice na strany $BC$, $CA$, $AB$ a jejich paty označíme $P$, $Q$, $R$. Dokažte, že $P$, $Q$, $R$ leží v přímce.

**Příklad 5.** (O přetržené kružnici) Uvnitř rovnoběžníka $ABCD$ je dán bod $P$ takový, že platí $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180°$. Dokažte $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PDC|$.

**Příklad 6.** Jsou dány kružnice $k$, $l$, které se protínají v bodech $A$, $B$. Označme $K$, $L$ po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod $B$ je vnitřním bodem trojúhelníku $AKL$. Na kružnicích $k$ a $l$ zvolme po řadě body $N$ a $M$ tak, aby bod $A$ byl vnitřním bodem úsečky $MN$. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka $MN$ je tečnou kružnice opsané trojúhelníku $AKL$.
(MO A-60-I)

## Lehké příklady

**Příklad 7.** Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap DA$. Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle APD$ a $\sphericalangle BQD$ jsou na sebe kolmé.

**Příklad 8.** Je dán pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu $C$. Osy úhlů $BAC$ a $ABC$ protnou strany $BC$ a $CA$ postupně v bodech $P$ a $Q$. Paty kolmic vedených z bodů $P$ a $Q$ na přímku $AB$ označme postupně $M$, $N$. Určete velikost úhlu $MCN$. (Britská MO 1995)

**Příklad 9.** Čtverec $ABCD$ je vepsaný do kružnice $k$. Na kratším oblouku $AB$ kružnice $k$ zvolme bod $P$. Dále buďte $X = PD \cap AB$, $Y = PC \cap BD$. Dokažte, že $XY \perp BD$.

**Příklad 10.** Průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$ vepsaného do kružnice $k$ se středem $O \in AB$ označme $E$. Nalezněme bod $F$ tak, aby $AOEF$ byl rovnoběžník. Ukažte, že $|AP| = |PD|$. (KMS 09/10)

**Příklad 11.** Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník. Sestrojme body $K$, $L$, $M$, $N$ tak, aby $ABMN$ a $LBCK$ byly shodné pravoúhelníky připsané zvenčí ke stranám $AB$ a $BC$. Dokažte, že přímky $AL$, $NK$, $MC$ procházejí jedním bodem.

**Příklad 12.** Čtverec $ABCD$ je vepsaný do kružnice $k$. Na kratším oblouku $CD$ kružnice $k$ zvolme bod $L$. Dále buďte $K = AL \cap CD$, $M = AD \cap CL$ a $N = MK \cap BC$. Dokažte, že body $B$, $L$, $M$, $N$ leží na jedné kružnici. (MO A-54-III)

### Středně obtížné příklady

**Příklad 13.** (Miquel point of quadrilateral) Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a body $P = AB \cap CD$, $Q = AD \cap BC$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $ABQ$, $CDQ$, $ADP$, $BCP$ procházejí jedním bodem.

**Příklad 14.** Nechť $I$ je střed kružnice vepsané $\triangle ABC$. Dále zvolme $E \in AI$ tak, aby $BE \perp AI$. Ukažte, že bod $E$ leží na spojnici bodů dotyku kružnice vepsané se stranami $AC$, $BC$.

**Příklad 15.** Nechť $K$ je bod na straně $AB$ trojúhelníka $ABC$. Přímka $CK$ protne kružnici opsanou podruhé v bodě $L$. Kružnice opsané trojúhelníkům $AKL$ a $BKL$ označme postupně $k_1$, $k_2$. Dokažte následující tvrzení:

(i) $AC$ je tečnou $k_1$, právě když $BC$ je tečnou $k_2$.
(ii) Nechť $AC$ protne $k_1$ podruhé v bodě $P$ ($P \neq A$) a $BC$ protne $k_2$ podruhé v bodě $Q$ ($Q \neq B$). Ukažte, že body $P$, $Q$, $K$ leží v přímce.

**Příklad 16.** V trojúhelníku $ABC$ označme $A_0$ patu výšky z vrcholu $A$. Ukažte, že paty kolmic vedených z bodu $A_0$ na zbylé strany trojúhelníka a zbylé výšky leží v přímce.

**Příklad 17.** Nechť $AK$, $BL$, $CM$ jsou výšky v ostroúhlém trojúhelníku $ABC$ a $H$ jeho ortocentrum. Označme $S = BL \cap KM$, $P$ střed úsečky $AH$ a $T = LP \cap AM$. Ukažte, že $TS \perp BC$.

**Příklad 18.** Kružnice $k_1$ a $k_2$ se středy $O_1$, $O_2$ se protínají v bodech $A$, $B$. Polopřímka $O_1B$ protne $k_2$ podruhé v bodě $F$ a polopřímka $O_2B$ protne $k_1$ podruhé v bodě $E$. Rovnoběžka s $EF$ procházející bodem $B$ protne $k_1$, $k_2$ postupně v bodech $M$, $N$. Ukažte, že platí $MN = AE + AF$. (Rusko 1995)

**Příklad 19.** Kružnice $k$ má střed na straně $AB$ tětivového čtyřúhelníka $ABCD$, přičemž zbylé strany tohoto čtyřúhelníka jsou tečny kružnice $k$. Ukažte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$. (IMO 1985)

**Příklad 20.** Dvě kružnice se protínají v bodech $A$, $B$. Bodem $B$ veďme přímku, která protne první kružnici v bodě $C$ a druhou v bodě $D$. Tečna k první kružnici vedená bodem $C$ protne tečnu ke druhé kružnici vedenou bodem $D$ v bodě $M$. Rovnoběžka s $CM$ procházející průsečíkem $AM$ a $CD$ protne $AC$ v bodě $K$. Ukažte, že $BK$ je tečna druhé kružnice.

**Příklad 21.** Nechť $AD$, $BE$, $CF$ jsou výšky v ostroúhlém $\triangle ABC$. Dále $P$, $Q$, $R$ jsou postupně středy úseček $EF$, $FD$, $DE$. Ukažte, že kolmice vedené z bodů

$P$, $Q$, $R$ postupně na přímky $BC$, $CA$, $AB$ procházejí jedním bodem.

**Příklad 22.** Rovnoramennému trojúhelníku $ABC$ ($|AC| = |BC|$) je vepsána kružnice, která se dotýká jeho stran $AB$, $BC$ postupně v bodech $D$ a $E$. Přímka procházející bodem $A$ různá od $AE$ protíná kružnici vepsanou postupně v bodech $F$ a $G$. Přímka $AB$ protíná $EF$ a $EG$ postupně v $K$ a $L$. Ukažte, že $|DK| = |DL|$. (MEMO 2008)

**Příklad 23.** Dvě zrcadla tvoří úhel $\sphericalangle XVY$. Z bodu $A$ uvnitř tohoto úhlu vyšleme paprsek světla, který se odrazí v bodech $B$, $C$ ležících postupně na přímkách $VX$ a $VY$ a pak se vrátí opět do $A$. Ukažte, že střed kružnice opsané $VBC$ leží na přímce $VA$. (KMS 09/10)

**Příklad 24.** Kružnice $k$, $l$ se protínají v bodech $A$, $B$. Společná tečna $t$ se jich dotýká postupně v bodech $K$, $L$. Dále tečna ke kružnici opsané $KLA$ vedená bodem $A$ protne $t$ v bodě $H$. Ukažte, že $H$ leží na spojnici středů $k$ a $l$.

## Těžké příklady

**Příklad 25.** V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ existuje na úhlopříčce $AC$ takový bod $E$, že platí $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Dále buď $M$ střed kružnice $k$ opsané trojúhelníku $BDE$. Kružnice $k$ protne $AC$ podruhé v bodě $F$. Ukažte, že přímky $FM$, $AD$, $BC$ procházejí jedním bodem. (MEMO 2010)

**Příklad 26.** Úhlopříčky lichoběžníka $ABCD$ se protínají v bodě $P$. Bod $Q$ leží mezi rovnoběžkami $BC$ a $AD$ tak, že $|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle CQB|$ a přímka $CD$ odděluje body $P$ a $Q$. Dokažte, že $|\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle DAQ|$. (IMO shortlist 2007)

**Příklad 27.** Označme $D$ střed strany $BC$ rovnoramenného trojúhelníka $ABC$ ($|AB| = |AC|$). Bod $E$ leží vně trojúhelníka $ABC$ tak, aby $CE \perp AB$ a $|BE| = |BD|$. Buď $M$ střed úsečky $BE$ a bod $F$ nalezneme na kratším oblouku $AD$ kružnice opsané trojúhelníku $ABD$ tak, aby $MF \perp BE$. Dokažte, že $ED \perp FD$. (China girls MO 2010)

**Příklad 28.** Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsaný do půlkružnice s průměrem $AB$. Označme $P$, $Q$, $R$, $S$ paty kolmic z bodu $Y$ postupně na přímky $AX$, $BX$, $AZ$, $BZ$. Dokažte, že ostrý úhel mezi přímkami $PQ$ a $RS$ má poloviční velikost než úhel $\sphericalangle XOZ$, kde $O$ je střed úsečky $AB$. (USAMO 2010)

**Příklad 29.** Kružnice $k_1$ a $k_2$ se středy $O_1$, $O_2$ se protínají v bodech $A$, $B$. Přímka vedená bodem $A$ protne podruhé kružnice $k_1$, $k_2$ po řadě v bodech $Y$, $Z$. Nechť se tečny vedené body $Y$ a $Z$ postupně ke kružnicím $k_1$, $k_2$ protnou v bodě $X$ a $P = YO_1 \cap ZO_2$. Označme ještě $O$ střed kružnice opsané $k$ trojúhelníku $O_1O_2B$ a $Q$ její druhý průsečík s přímkou $XB$. Dokažte, že $PQ$ je průměr kružnice $k$. (China 1991)

**Příklad 30.** Je dán rovnoběžník $ABCD$ a bod $E$ takový, že čtyřúhelník $BCED$ je tětivový. Bodem $A$ veďme přímku $\ell$ a její průsečíky s úsečkami $DC$ a $BC$ označme postupně $F$ a $G$. Předpokládejme, že platí $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokažte, že $\ell$ je osa úhlu $\sphericalangle DAB$. (IMO 2007)

**Příklad 31.** Nechť $ABC$ je trojúhelník, v němž průsečíky strany $BC$ s osou úhlu $\sphericalangle BAC$ a těžnicí z vrcholu $A$ označíme postupně $N$ a $M$. Dále buďte $P$ a $Q$ body, v nichž kolmice k $AN$ vedená bodem $N$ protne postupně $MA$ a $BA$. Konečně $O$ je průsečík kolmice k $AB$ vedené bodem $P$ a přímky $AN$. Dokažte, že $OQ \perp BC$. (APMO 2000)

**Příklad 32.** (Pascal theorem) Body $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ leží na jedné kružnici. Ukažte, že body $P = AE \cap BF$, $Q = BD \cap CE$, $R = AD \cap CF$ leží na přímce.

**Příklad 33.** Označme $O$ střed kružnice opsané $\triangle ABC$. Přímka vedená bodem $O$ protne $AB$, $AC$ postupně v bodech $M$ a $N$. Označme $R$ a $S$ středy $CM$ a $BN$. Ukažte, že $|\sphericalangle ROS| = |\sphericalangle BAC|$. (KMS 09/10-$\gamma$)

**Příklad 34.** Na kratším oblouku $BC$ kružnice opsané trojúhelníku $ABC$ zvolme bod $K$. Kružnice $k, l$ mají obě vnitřní dotyk s kružnicí opsanou v bodě $K$. První z nich se dotýká strany $AB$ v bodě $M$ a druhá se dotýká $AC$ v bodě $N$. Dokažte, že střed kružnice vepsané $ABC$ leží na $MN$.

**Příklad 35.** Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník, jehož strany jsou všechny různě dlouhé. Označme $M$, $N$ a $P$ postupně středy stran $BC$, $CA$ a $AB$. Osy stran $AB$ a $BC$ protínají přímku $AM$ postupně v bodech $D$ a $E$. Konečně buď $F = BD \cap CE$ bod uvnitř $ABC$. Dokažte, že body $A$, $N$, $F$, $P$ leží na jedné kružnici. (USAMO 2008)

## Literatura a zdroje

[1] Fórum Mathlinks – *www.mathlinks.ro*.

# Teorie her

*Alča Skálová*

### Co je teorie her?

Hrou rozumíme jakoukoliv konfliktní situaci dvou a více hráčů, ve které každý hráč ovlivňuje výsledek. Patří sem jak klasické hry (šachy, člověče nezlob se), tak i situace, které se hrám, jak je známe, vůbec nepodobají (firmy na trhu si navzájem konkurují, zvířata soupeří o zdroj potravy nebo teritorium, … ). Konfliktní neznamená nutně, že hráči hrají proti sobě (takzvaný antagonostický konflikt), ale pouze to, že se navzájem ovlivňují.

Teorie her se zjednodušeně řečeno zabývá tím, jak má hráč hrát, aby vyhrál (případně prohrál co nejméně).

Abychom mohli povědět, jak se má hráč zachovat, aby co nejvíce získal, potřebuje vědět, co je pro něj podstatné. Protože v matematice se špatně pracuje s hodnocením „vyhrát dvě hrušky je o trochu lepší, než jedno jablko, a o hodně lepší, než vyhrát kokos“, ohodnotíme si všechny možné výsledné situace reálnými čísly tak, aby výhodnější situace měla větší číslo než méně výhodná. Například pokud by se jednalo o sázky, mohli bychom za tato čísla vzít přímo počet vyhraných nebo prohraných korun.

### Pár pojmů

(1) *hráč* – účastník hry.
(2) *strategie* – předpis pro hráče, jak se zachovat. Každý hráč může mít celou *množinu strategií*, samozřejmě klidně jiných než soupeři.
(3) *optimální strategie* – strategie, která hráči přinese největší zisk.
(4) *výplatní funkce* – udává zisk nebo ztrátu[2] konkrétního hráče. Závisí na zvolených strategiích všech hráčů.
(5) *racionální hráč* – chová se tak, aby dopadl co nejlépe. Obecně hráči inteligentní být nemusí a mohou se rozhodovat např. na principu náhody.
(6) *hra s úplnou/neúplnou informací* – velmi důležité je také, zda mají hráči veškeré dostupné informace ve hře, či jen část, nebo dokonce žádné. Případně vědí-li, že i ostatní vědí. Viz první příklad.
(7) *kooperativní/nekooperativní hra* – v kooperativní hře se hráči mohou předem domlouvat, případně se dělit o zisky. V nekooperativní hře nesmějí ani jedno.

[2] Ztráta je vlastně jen zisk s minusem. (-;

**Příklad 1.** Dva hráči, Xenie a Yetti, hrají následující hru. Oba si nezávisle na sobě vyberou přirozené číslo od 1 do 10, napíší je na papírek a poté své volby zveřejní. Je-li součet obou sudý, dostane Xenie od Yettiho korunu, v opačném případě mu korunu dá ona.

(1) Jakou strategii Yettimu poradíte, aby nebyl oškubán? (hraje se nekonečně krát)
(2) Jak se hra/strategie změní, pokud Xenie smí vybírat pouze sudá čísla a Yetti to neví? (hraje se jednou)
(3) Jak se hra/strategie změní, pokud Xenie smí vybírat pouze sudá čísla a Yetti to ví? (-: (hraje se jednou)

## Hry v explicitním tvaru

Jsou hry, ve kterých se hráči střídají ve volbě strategií, předpokládá se, že všichni hráči jsou racionální. K těmto hrám teoreticky[3] lze nakreslit „rozhodovací strom“, což je graf, jehož uzly jsou stavy, ve kterých se hra může nacházet, a hrany jsou možné tahy hráčů.

**Příklad 2.** Tři zákonodárci hlasují o tom, mají-li si zvýšit platy. Všichni tři si zvýšení přejí, ale hlasování je veřejné, takže toho, kdo bude hlasovat pro, čeká ztráta obliby u voličů v hodnotě $c$. Prospěch ze zvýšení platu je $b$, $b > c$. Hlasují-li postupně a otevřeně, je lepší volit jako první, nebo jako poslední?

## Hry v normálním tvaru

Jsou hry, kde každý hráč má na výběr jen konečně strategií. Všechny možné výsledky je tedy možné zapsat do (vícerozměrné) tabulky. My se budeme zabývat jen hrami dvou hráčů, takovým se říká *dvojmaticové*. Prvně ještě dvě definice:

**Definice.** *Nechť je dána neprázdná $n$-prvková množina $Q = \{1, 2, \dots, n\}$, $n$ množin $S_1, S_2, \dots, S_n$ a $n$ reálných funkcí $u_1, u_2, \dots, u_n$ definovaných na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.* Hrou $n$ hráčů v normálním tvaru (HNT) *budeme rozumět uspořádanou $(2n+1)$-tici*

$$(Q; S_1, S_2, \dots, S_n; u_1(s_1, \dots, s_n), \dots, u_n(s_1, \dots, s_n)).$$

*Množinu $Q$ nazveme* množinou hráčů, *množinu $S_i$ nazveme* prostorem strategií hráče *$i$ a funkci $u_i(s_1, \dots, s_n)$ nazveme* výplatní funkcí hráče *$i$. Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o* zisku, *je-li záporná, hovoříme o* ztrátě.

[3]Teoreticky proto, že například pro šachy by graf dosahoval obřích rozměrů a pro praktické účely by byla nutná optimalizace.

**Definice.** *Dvojice strategií* $(s^*, t^*)$ *se nazývá* rovnovážný bod, *právě když platí:*

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*) \qquad \textit{pro každé } s \in S$$

*a zároveň*

$$u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*) \qquad \textit{pro každé } t \in T.$$

Neboli rovnovážný bod je taková dvojice strategií, u které se ani jednomu hráči nevyplatí jednostranné odchýlení. Rovnovážný bod nemusí být vždy optimálním řešením (viz příklad 5). A v ryzích strategiích nemusí dokonce ani existovat (příklad 1.1), nebo jich může existovat víc (příklad 6). Pokud ale povolíme tzv. *smíšené strategie*[4], pak rovnovážný bod vždy existuje.[5]

**Příklad 3.** Dvě firmy se uchází o dvě stavební zakázky vypsané jedním úřadem, velkou (za 15 milionů) a malou (za 9 milionů). Firma v obálce pošle, zda si přeje pracovat sama na velké, sama na malé nebo spolupracovat na obou. Úředník poté rozdělí zakázky podle následujících pravidel:

(1) Pokud o nějakou zakázku projevila zájem pouze jedna firma, dostane ji celou.
(2) Pokud obě firmy projeví zájem o stejnou zakázku a o druhou žádná, budou kooperovat na obou a rozdělí se rovným dílem. Stejně tak nabízejí-li obě spolupráci.
(3) Pokud se jedna z firem uchází pouze o jednu zakázku a druhá nabízí kooperaci na obou, získá firma, která nabízí realizaci celé stavby 60% a druhá 40%, jde-li o velkou stavbu. Jde-li o malou, získá firma, která nabízí celou realizaci 80% a druhá 20%. Na zbývající zakázce si zisky dělí napůl.

Co poradíte majiteli?

**Příklad 4.** V chlívku žijí dvě prasátka, tlusté a malé. Na jedné straně chlívku je páčka, po jejímž zmáčknutí se trochu naplní korýtko na druhé straně chlívku. Malé prasátko nemá dost sil tlusté prasátko od korýtka odstrčit, kdežto tlusté prasátko odstrčí malé bez problémů. Zisky z jednotlivých strategií zachycuje následující tabulka. Tlusté prasátko volí řádky, jeho zisky jsou první čísla. Malé prasátko volí sloupce a jeho zisky jsou druhá čísla.

Kdo tedy bude sedět u koryta a kdo běhat a mačkat?

| strategie | stiskni páku | seď u koryta |
|---|---|---|
| stiskni páku | $(8, -2)$ | $(5, 3)$ |
| seď u koryta | $(10, -2)$ | $(0, 0)$ |

[4]Strategie, které pomocí pravděpodobnosti kombinují původní ryzí strategie.

[5]Existenci rovnovážného bodu ve smíšených strategiích dokázal roku 1951 J. F. Nash, tzv. *Nashova rovnováha*.

**Příklad 5.** (Vězňovo dilema) Policie zatkla Ignáce a Gustava a vyslýchá je o samotě tak, aby se nemohli domluvit. Pokud budou oba zapírat, dostane každý dva roky za menší prohřešky, které jim policie umí prokázat. Pokud jeden druhého udá a druhý bude mlčet, dostane udavač pouze 1 rok a druhý dostane 10 let. Pokud se oba udají navzájem, dostanou po pěti letech. Co je optimálním řešením této situace a jaký je rovnovážný bod?

**Příklad 6.** (Manželské dilema) Manželé se rozhodují, kam večer půjdou. Žena by ráda na box, kdežto muž do opery. Oba ale budou spokojenější, když budou spolu, než když bude každý jinde, viz tabulka (žena volí sloupce, muž řádky). Jak byste jim poradili, nesmějí-li se předem domlouvat?

| strategie | box | opera |
|---|---|---|
| box | $(1,2)$ | $(0,0)$ |
| opera | $(0,0)$ | $(2,1)$ |

Speciálním případem her v normálním tvaru je *antagonistický konflikt dvou hráčů*. Oba hráči hrají přímo proti sobě a zisk jednoho se rovná ztrátě druhého. Vyznačuje se tím, že příslušná matice má konstantní součet v každém poli. Proto se těmto hrám říká rovněž *s konstantním součtem*. Takové hry jsou nutně nekooperativní. Patří sem příklady 1, 3 a 4.

## Závěr

Teorie her původně vznikla zejména pro modelování situací v ekonomii (slavný matematik *John Forbes Nash* získal Nobelovu cenu za ekonomii v roce 1994 právě za výzkum v teorii her), ovšem velmi dobré uplatnění nalezla jak v evoluční biologii, tak ve spoustě dalších oborů. Je to velmi bohatá disciplína a toto byla jen malá ukázka. Pokud bys chtěl/a vědět víc, můžeš začít třeba s knížkou [2]. Je psaná zejména pro biology, tedy se nemusíš bát, že by v ní matematika byla vysvětlována příliš složitě.

## Literatura a zdroje


[1] přednáška RNDr. Magdaleny Hykšové, Ph.D. na MFF UK, zimní semestr 2010/2011: *Teorie her.*

[2] John Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1982.

[3] Miroslav Maňas: *Teorie her a optimální rozhodování*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1974.

# Ciferné součty

*Lenka Slavíková*

## Úvod

V této přednášce se seznámíme s nejdůležitějšími vlastnostmi ciferných součtů a ukážeme si, jak jich využít při řešení konkrétních příkladů. Ačkoliv lze ciferný součet čísel počítat v soustavách o různých základech, my se omezíme výhradně na soustavu desítkovou.

Jak jistě víš, každé přirozené číslo $n$ lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

kde $k$ je nezáporné celé číslo, $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $a_k \neq 0$. Ciferným součtem čísla $n$ budeme rozumět číslo $s(n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$.

**Tvrzení.** *Nechť $m, n$ jsou přirozená čísla. Pak platí*

(i) $s(n) = n - 9 \sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{10^k} \rfloor$,
(ii) $s(n) \equiv n \pmod 9$,
(iii) $s(m + n) \leq s(m) + s(n)$,
(iv) $s(mn) \leq s(m)s(n)$.

**Příklad.** (motivační, lehký) Dokažte, že mezi 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly můžeme vždy najít nějaké, jehož ciferný součet je dělitelný 11.

(Ruská MO 1961)

## Různé metody používané při řešení příkladů

### Využití poznatků z Tvrzení

Začneme jednoduchým příkladem na aplikaci nerovnosti (iii) (místo ní můžeš použít rovněž nerovnost (iv)).

**Příklad 1.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n$ platí $s(2n) \leq 2s(n) \leq 10s(2n)$.

(MKS 2004)

*Řešení.* Platí $s(2n) = s(n + n) \leq s(n) + s(n) = 2s(n)$, z čehož plyne první z dvojice nerovností, které chceme dokázat. Nyní si uvědomíme, že $s(n) = s(10n)$, a podobně jako v předchozím případě dostáváme $s(n) = s(10n) = s(2n + 2n + 2n + 2n + 2n) \leq 5s(2n)$.

**Příklad 2.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n$ platí $s(8n) \geq \frac{1}{8}s(n)$.

(Lotyšská MO 1995)

V následujících příkladech využijeme faktu, že ciferný součet libovolného přirozeného čísla dává po dělení 9 stejný zbytek jako číslo samé (vlastnost (ii) zmíněná výše).

**Příklad 3.** Existuje přirozené číslo $n$ takové, že $s(2^n) = s(2^{n+1})$?

**Příklad 4.** Najděte všechny možné hodnoty ciferných součtů druhých mocnin přirozených čísel. (Domácí kolo MO 1993)

### Další nerovnost pro ciferný součet

Pro ciferný součet přirozeného čísla $n$ platí následující jednoduchá nerovnost:

$$s(n) \leq 9(\lfloor \log n \rfloor + 1)$$

(Výrazem $\log n$ budeme v celém tomto textu rozumět desítkový logaritmus čísla $n$.) Jelikož výraz na pravé straně není nic jiného než devítinásobek počtu cifer čísla $n$, celá nerovnost říká pouze to, že mezi všemi $k$-cifernými čísly má největší ciferný součet číslo $99\ldots99$. Díky známé vlastnosti logaritmu $\log a^b = b \log a$ je právě uvedená nerovnost často užitečná při řešení příkladů, v nichž se vyskytují ciferné součty mocnin přirozených čísel.

**Příklad 5.** Určete hodnotu výrazu $s(s(s(4444^{4444})))$. (IMO 1975)

**Příklad 6.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo $N$ existuje přirozené číslo $n \geq$ $\geq N$ takové, že $s(3^n) \geq s(3^{n+1})$. (Ruská MO)

### Vlastnosti čísel tvaru $10^k - 1$

Již jsme si všimli, že číslo

$$\underbrace{99\ldots99}_{k} = 10^k - 1$$

má největší ciferný součet mezi všemi $k$-cifernými čísly. Nyní se přesvědčíme, že stejný ciferný součet jako $10^k - 1$ má i poměrně velký počet násobků tohoto čísla.

**Tvrzení.** *Nechť $k$ je přirozené číslo. Pak každý násobek čísla $10^k - 1$ má ciferný součet alespoň $9k$. Je-li navíc $n$ přirozené číslo splňující $1 \leq n \leq 10^k$, platí dokonce $s(n(10^k - 1)) = 9k$.*

Následující příklad ukazuje, že vlastnost, kterou jsme si právě uvedli, je pro čísla tvaru $99\ldots99$ charakteristická.

**Příklad 7.** Dokažte, že přirozené číslo $n > 1$ je tvaru $10^k - 1$ pro nějaké $k$ přirozené, právě když platí $s(n) = s(2n) = \cdots = s(n^2)$.
(Soutěž Józsefa Kürscháka 1989)

Ukažme si pár aplikací předchozího tvrzení:

**Příklad 8.** V závislosti na $n$ přirozeném určete hodnotu výrazu

$$s(9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdots \underbrace{99\ldots 99}_{2^n}).$$

(USAMO 1992)

**Příklad 9.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n$ existuje $n$-ciferné přirozené číslo $N$, které je dělitelné svým ciferným součtem a jehož všechny cifry jsou nenulové. (IMO 1998 Shortlist)

**Příklad 10.** Nechť $S$ je množina přirozených čísel, v jejichž desítkovém zápisu jsou pouze nuly a jedničky, přičemž jedniček je nejvýše 1988. Dokažte, že existuje přirozené číslo, které nedělí žádný prvek množiny $S$. (Turnaj měst 1988)

**Příklad 11.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo $k$ existuje nekonečná aritmetická posloupnost s diferencí nesoudělnou s 10 taková, že ciferný součet každého jejího členu je alespoň $k$. (IMO 1999 Shortlist)

### Omezenost posloupností tvaru $s(a^n m)$

**Tvrzení.** *Nechť $a$, $m$ jsou přirozená čísla. Pak posloupnost $s(a^n m)$ je omezená, právě když $a = 10^k$ pro nějaké nezáporné celé číslo $k$.*

Poslední příklad této přednášky je (možná trochu překvapivou) aplikací předchozího tvrzení.

**Příklad 12.** Nechť $a$, $b$ jsou přirozená čísla taková, že $s(an) = s(bn)$ pro všechna přirozená čísla $n$. Dokažte, že $a/b = 10^k$ pro nějaké celé číslo $k$.

(Adrian Zahariuc, Gabriel Dospinescu)

## Literatura a zdroje

[1] T. Andreescu, G. Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2008.

Dále jsem čerpala ze stránek *www.artofproblemsolving.com* a z archivu PraSátka.

# Množiny velké a větší

*Alexander „Olin“ Slávik*

## Úvod

Co jsou to množiny? Kdy jsou dvě množiny stejně velké a kdy je naopak jedna větší než druhá? A co vlastně jsou čísla? Tyto otázky si začali klást matematici na přelomu 19. a 20. století, kdy už sice byly mnohé partie matematiky značně rozvinuté, k množinám (a nejen jim) se však stále přistupovalo spíše intuitivně, bez solidního matematického podkladu. Účelem této přednášky je pokusit se na tyto otázky odpovědět nebo alespoň odpověď naznačit.

## Paradoxy aneb Kde je chyba?

Následujících několik myšlenkových postupů mělo poměrně zásadní význam pro rozvoj teorie množin a matematické logiky. Vžilo se pro ně poněkud nesprávné označení *paradoxy*, ačkoliv jde o sporná tvrzení.

**Paradox.** (Russelův) Nechť $m$ je množina všech množin takových, že nejsou svým vlastním prvkem, tedy $m = \{x : x \notin x\}$. Platí $m \in m$?

**Paradox.** (Cantorův) Označme $\mathbf{V}$ množinu všech množin. Dle Cantorovy věty platí $\mathbf{V} \prec \mathcal{P}(\mathbf{V})$, ovšem zároveň snadno nahlédneme, že $\mathcal{P}(\mathbf{V}) \subseteq \mathbf{V}$, tedy by mělo platit i $\mathbf{V} \succcurlyeq \mathcal{P}(\mathbf{V})$ (pro vysvětlení symbolů viz dále).

**Paradox.** Jak vypadá množina $\check{c}$ definovaná jako množina všech čísel, které lze popsat nejvýše dvaceti českými slovy? Množina $\check{c}$ je určitě konečná, protože českých slov je konečně mnoho, tedy má největší prvek. Patří do množiny $\check{c}$ číslo definované jako „největší prvek množiny čísel sestávající z prvků, které lze popsat dvaceti českými slovy, zvýšený o jedna“?

Současná všeobecně používaná teorie množin (Zermelova-Fraenkelova teorie s axiomem výběru, ZFC) se s těmito nepříjemnými skutečnostmi vyrovnává tak, že jednoduše žádný z výše uvedených objektů neuznává jako množinu. Předně je hlavním rysem této teorie, že není nijak založena na přirozeném jazyce, pouze na jazyce matematické logiky. V tomto jazyce je zformulováno několik axiomů, které popisují, co vlastně množiny jsou (přesněji jak lze vytvořit množiny z jiných množin) a ostatní objekty se za množiny nepovažují. Rozbor těchto „základních kamenů“ moderní teorie množin je nad rámec tohoto příspěvku.

## Mohutnost množin

Uvažme následující situaci: na lekci tanečních se sešlo mnoho chlapců a dívek – tolik, že kdybychom je chtěli spočítat, tak bychom se při tom skoro určitě „sekli“.

Přesto můžeme poměrně snadno zjistit, které pohlaví je v sále více zastoupeno. Jednoduše vyhlásíme volenku (v tuto chvíli nezáleží na tom, zda pánskou, či dámskou) a jakmile párování ustane, všimneme si, jestli „na ocet" zůstali nějací hoši, nebo děvčata[6]. Pokud všichni tančí, je jasné, že je chlapců i dívek stejně mnoho.

Tyto úvahy snadno přepíšeme do formálních definic, hovořících o mohutnostech množin.

**Definice.** *Řekneme, že množiny $x$, $y$* mají stejnou mohutnost*, pokud existuje prosté zobrazení množiny $x$ na množinu $y$ (píšeme $x \approx y$). Řekneme, že množina $x$ má* mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti $y$*, pokud existuje prosté zobrazení množiny $x$ do množiny $y$ (zapisujeme $x \preccurlyeq y$). Řekneme, že množina $x$ má* mohutnost menší než $y$*, pokud existuje prosté zobrazení množiny $x$ do množiny $y$ a neexistuje prosté zobrazení množiny $y$ do množiny $x$ (zapisujeme $x \prec y$). Analogicky definujeme vztahy $x \succcurlyeq y$, $x \succ y$.*

Jaké problémy nastanou, pokud se podíváme na nekonečné množiny, tj. když připustíme, že se v tanečních sešlo nekonečně mnoho lidí? Mohlo by se nám třeba stát, že chlapci i dívky budou očíslováni (všemi) přirozenými čísly. Při pánské volence si pak hoch 1 vyvolí jako partnerku dívku 2, hoch 2 dívku 4, obecně hoch $n$ dívku $2n$ – všichni hoši tančí, ale „polovina" děvčat zůstala sedět! Totéž se nám může stát při dámské volence: kdyby třeba dívka $n$ šla na parket s chlapcem $2^n$, je patrné, že z chlapců „téměř nikdo" netančí. Přesto je patrné, že by mohli tančit všichni (třeba když bude $n$ tančit s $n$). Tento problém řeší následující věta:

**Věta.** (Cantor-Bernsteinova) *Pokud pro nějaké dvě množiny $x$, $y$ platí zároveň $x \preccurlyeq y$* a *$x \succcurlyeq y$, tak platí i $x \approx y$.*

Jak je to s mohutnostmi běžných množin čísel? Následující tvrzení se může zdát překvapující – vždyť racionálních čísel je o tolik víc než přirozených!

**Tvrzení.** $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \approx \mathbb{C}$, *ale* $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

**Definice.** *Řekneme, že nekonečná množina $x$ je* spočetná*, pokud $x \approx \mathbb{N}$. V opačném případě je* nespočetná.

**Příklad.** Historicky zajímavá je otázka existence transcendentních čísel, tedy reálných čísel, která nejsou řešením žádné rovnice tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. S prostředky teorie množin lze rozhodnout snadno – stačí ukázat, že doplněk této množiny (množina tzv. algebraických čísel) je spočetná množina.[7]

[6] Zde mlčky předpokládáme, že všichni přítomní jsou opravdu „tancechtiví", a tedy si nenechají ujít žádnou příležitost k tanci.

[7] Lze ukázat, že např. e nebo $\pi$ jsou transcendentní čísla.

**Definice.** Potenční množinou *množiny $x$ nazveme množinu všech podmnožin množiny $x$, značíme $\mathcal{P}(x)$.*

**Věta.** (Cantorova) *Pro každou množinu $x$ platí $x \prec \mathcal{P}(x)$.*

Cantorova věta nám říká, že škála mohutností množin není omezená – kdykoliv si vezmeme nějakou množinu, jsme schopni k ní najít množinu s větší mohutností. To však není všechno. Uvažme posloupnost množin

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \ldots.$$

Sjednotíme-li všechny tyto množiny, dostaneme množinu, která má mohutnost větší než kterákoliv z množin v posloupnosti.

Dále nás může zajímat, „o kolik“ je potenční množina větší než původní množina. Řečeno přesněji a konkrétněji, ptáme se, zda existuje taková množna $x$, že platí

$$\mathbb{N} \prec x \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Tato otázka po dlouhá léta zaměstnávala matematiky, až se nakonec ukázala překvapivá skutečnost – jde o tzv. *nerozhodnutelné tvrzení*, tedy v teorii ZFC nejsme schopni tento výrok ani dokázat, ani vyvrátit.

## Přirozená čísla

Axiomy teorie množin hovoří pouze o množinách, o číslech není nikde zmínka – chceme-li tedy pracovat s objekty, jako jsou přirozená čísla či $\mathbb{N}$, musíme je nadefinovat jako množiny. Konstrukci přirozených čísel provedeme tak, že za přirozené číslo prohlásíme množinu všech menších přirozených čísel. Nula[8] je tedy prázdná množina, jednička je $\{0\}$, dvojka $\{0,1\} = \{0,\{0\}\}$, $3 = \{0,1,2\} = \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}$ atd.

Snadno nahlédneme, že obecně platí[9] $n+1 = n \cup \{n\}$. Dále nám tato definice přirozeným způsobem generuje známé uspořádání přirozených čísel: $n < m$, právě když $n \in m$, a $n \leq m$, právě když $n \subseteq m$. Na tomto místě raději precizujme pojem uspořádání:

**Definice.** *Relaci $\trianglelefteq$ na množině $u$ nazveme* (částečným) uspořádáním, *pokud pro všechna $x, y, z \in m$ platí:*

(i) $x \trianglelefteq x$,
(ii) $(x \trianglelefteq y \wedge y \trianglelefteq x) \Rightarrow x = y$,
(iii) $(x \trianglelefteq y \wedge y \trianglelefteq z) \Rightarrow x \trianglelefteq z$.

[8] V teorii množin zpravidla nulu za přirozené číslo považujeme.

[9] Toto tvrzení není úplně správně, jelikož je v něm použito sčítání, které zatím není nijak definováno. Zpravidla se množina $n \cup \{n\}$ značí $s(n)$ a nazývá se *následník* $n$.

*Platí-li navíc pro každé $x, y \in u$ alespoň jedna z možností $x \trianglelefteq y$, $x \trianglerighteq y$, hovoříme o* lineárním uspořádání. *Pokud ještě k tomu platí, že každá podmnožina $v \subseteq u$ má v uspořádání $\trianglelefteq$ nejmenší prvek (tedy existuje takové $x \in v$, že pro všechna $y \in v$ platí $x \trianglelefteq y$), jde o* dobré uspořádání.

**Poznámka.** Každé uspořádání přirozeně existuje ve dvou verzích – neostré a ostré. Neostrá verze je definovaná výše, ostrá verze zakazuje rovnost. Příkladem takové dvojice je např. $\leq$ a $<$ na přirozených číslech.

Běžné uspořádání přirozených čísel je dobré, oproti tomu uspořádání celých čísel dobré není, stejně tak třeba uspořádání reálných čísel v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Každé lineární uspořádání konečné množiny je nutně dobré.

Všimněme si následující (prakticky zřejmé) vlastnosti přirozených čísel: pokud libovolnou konečnou množinu lineárně uspořádáme, je toto uspořádání stejné jako uspořádání nějakého přirozeného čísla (tedy množiny po sobě jdoucích přirozených čísel) pomocí $\in$. Přirozená čísla jsou tedy jakési modelové příklady uspořádání konečných množin. Chtěli bychom vytvořit podobné reprezentatny i pro dobrá uspořádání nekonečných množin. Těmito reprezentanty budou ordinální čísla (krátce ordinály).

## Ordinální čísla

**Definice.** *Množinu $u$ nazveme* ordinálním číslem, *pokud je na ní $\in$ ostré dobré uspořádání a pro všechna $x \in u$ platí $x \subseteq u$.*

**Příklad.** Všechna přirozená čísla jsou ordinální čísla, množina $\mathbb{N}$ je také ordinálním číslem (v této souvislosti ji zpravidla značíme $\omega$).

Jaká jsou další ordinální čísla? Např. $\omega \cup \{\omega\}$, což velmi připomíná konstrukci přirozených čísel. Toto ordinální číslo odpovídá uspořádání přirozených čísel, ke kterým ještě navíc přidáme „nekonečno“, tedy prvek, který je větší než všechna přirozená čísla. Vlastnosti ordinálních čísel čísel shrneme v následující větě:

**Věta.** (Vlastnosti ordinálních čísel)

(i) *Prvky ordinálního čísla jsou opět ordinální čísla.*
(ii) *$\in$, resp. $\subseteq$ je ostré, resp. neostré dobré uspořádání (značíme $<$, resp. $\leq$) na třídě*[10] *všech ordinálních čísel (kterou značíme* **On***).*
(iii) **On** *není množina.*
(iv) *Každé dobré uspořádání nějaké množiny je isomorfní*[11] *uspořádání právě jednoho ordinálního čísla (tzv. ordinální typ uspořádání).*

[10] *Třída* je v ZFC soubor všech množin, které splňují nějaký zadaný výrok. Může, ale nemusí jít o množinu (pak hovoříme o *vlastní třídě*).

[11] Jsou-li dvě uspořádané množiny *isomorfní*, znamená to, že mezi nimi existuje *isomorfismus*, tedy bijekce, která zachovává uspořádání.

(v) *Sjednocení a průnik množiny (souboru) ordinálních čísel je opět ordinální číslo. Navíc pro množinu ordinálních čísel $u$ je její sjednocení $\alpha = \bigcup u$ supremem této množiny, tedy jde o nejmenší*[12] *ordinální číslo, pro které platí, že pro všechna $\beta \in u$ je $\beta \leq \alpha$. Analogicky průnik je infimem této množiny.*

**Definice.** *Ordinální číslo $\alpha$ nazveme* izolované, *jestliže existuje takové ordinální číslo $\beta$, že $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Ordinální číslo, které není izolované, nazveme* limitní.

**Příklad.** Všechna přirozená čísla jsou izolovanými ordinály, oproti tomu $\omega$ je limitní ordinál.

Stejně jako na přirozených číslech, i na ordinálních číslech můžeme zavést základní aritmetické operace.

**Definice.** (Aritmetika ordinálních čísel)

(i) Součet *ordinálních čísel $\alpha$, $\beta$ (značíme $\alpha + \beta$) definujeme jako ordinální typ tzv. lexikografického uspořádání na množině $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$, tedy uspořádání, které se v rámci $\alpha$ i $\beta$ „chová stejně“ jako $\leq$ a všechny prvky z $\beta$ jsou větší než všechny prvky z $\alpha$.*[13]

(ii) Součin *ordinálních čísel $\alpha$, $\beta$ (značíme $\alpha \cdot \beta$) definujeme jako ordinální typ lexikografického uspořádání na množině $\beta \times \alpha$.*[14]

(iii) Ordinální mocninu *definujeme rekurzivně:*

*(a)* $\alpha^0 = 1,$

*(b)* $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$

*(c)* $\alpha^\beta = \bigcup\{\alpha^\gamma : 0 < \gamma < \beta\}$ *pro $\beta$ limitní.*

**Poznámka.** Ordinální součet i součin jsou asociativní, nejsou však obecně komutativní: např. $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$, $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2$. Platí však distributivita zleva: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

**Poznámka.** Ordinální mocnina je pro nekonečné exponenty téměř nemožná na představu. Není možné např. představovat si $\omega^\omega$ jako lexikografické uspořádání nekonečných posloupností přirozených čísel, protože toto uspořádání není dobré a navíc je množina těchto posloupností nespočetná, zatímco $\omega^\omega$ je spočetná množina.

---

[12] Ve smyslu uspořádání $<$, neboli $\in$.

[13] Přesnější popis „technického provedení“ je tento: z prvků $\gamma \in \alpha$ „vyrobíme“ uspořádané dvojice $(0, \gamma)$ a z prvků $\delta \in \beta$ zase $(1, \delta)$. Vzniklé množiny sjednotíme a výsledné uspořádání se nejprve „dívá“ na první složky uspořádaných dvojic. Pokud jsou stejné, rozhodne se podle druhých složek. Dvojice jsou tedy uspořádány „jako ve slovníku“ – nejprve podle prvního písmena, pak podle druhého, odtud pojem lexikografické uspořádání.

[14] Opačné pořadí v kartézském součinu je z historických důvodů.

## Kardinální čísla

Zatímco ordinální čísla popisují uspořádání množin, kardinální čísla (krátce kardinály) popisují mohutnosti. Zkonstruujeme je jednoduše tak, že pro každou mohutnost vezmeme ze všech ordinálů dané mohutnosti ten nejmenší (ve smyslu uspořádání ordinálů).

**Definice.** *Řekneme, že ordinální číslo $\kappa$ je* kardinální číslo, *pokud pro všechna $\alpha < \kappa$ platí $\alpha \prec \kappa$.*

Příkladem kardinálních čísel jsou opět přirozená čísla a $\omega$. Avšak $\omega + 1$ již není kardinální číslo, jelikož $\omega + 1 \approx \omega$. Třídu všech ordinálních čísel značíme $\mathbf{Cn}$, třídu všech nekonečných ordinálních čísel $\mathbf{Cn}^\infty$.

**Tvrzení.** *Třída $\mathbf{Cn}$ je dobře uspořádána $\in$ (ostře) i $\subseteq$ (neostře).*

**Definice.** *Pro libovolnou množinu $u$ definujeme* mohutnost *či* kardinalitu *jako kardinální číslo $\kappa$ splňující $u \approx \kappa$ (značíme $|u|$).*

**Definice.** (Aritmetika kardinálních čísel)

(i) Součet *kardinálních čísel $\kappa$, $\lambda$ (značíme $\kappa + \lambda$) definujeme jako mohutnost množiny $(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \lambda)$.*
(ii) Součin *kardinálních čísel $\kappa$, $\lambda$ (značíme $\kappa \cdot \lambda$) definujeme jako mohutnost množiny $\kappa \times \lambda$.*
(iii) Kardinální mocninu *$\kappa^\lambda$ definujeme jako mohutnost množiny všech funkcí z $\lambda$ do $\kappa$.*

**Věta.** *Pro nekonečná kardinální čísla $\kappa$, $\lambda$ platí $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.*

Je vidět, že sčítání a násobení kardinálů se chová poměrně „nudně". Oproti tomu kardinální mocnina je velmi divoká – obecně jsme o ní schopni říct jen velmi málo. Tato skutečnost není dána tím, že by tvrzení o kardinální mocnině byla obtížně dokazatelná, ale tím, že jsou mnohá z nich z povahy teorie ZFC prostě nedokazatelná (viz otázka mohutnosti potenční množiny výše).

**Věta.** *Existuje právě jeden třídový isomorfismus tříd $\mathbf{On}$ a $\mathbf{Cn}^\infty$, značíme ho $\aleph$.*

Platí $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_1$ je první nespočetný ordinál (kardinál). Je jasné, že $\aleph$ je rostoucí funkce, navíc se zdá být enormně rychle rostoucí (vždyť už $\aleph_\omega$ je nepředstavitelně velká množina). Následující tvrzení je tedy téměř šokující:

**Tvrzení.** *Funkce $\aleph$ má (vlastní) třídu pevných bodů (tj. takových ordinálních čísel, pro která platí $\aleph_\alpha = \alpha$), která je isomorfní s $\mathbf{On}$.*

## Literatura a zdroje


[1] Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek: *Teorie množin*, Academia, Praha, 2000.
[2] Vojtěch Jarník: *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1984.
[3] Josef Mlček: *Poznámky k přednášce Úvod do teorie množin*
[4] Martin Tancer: *Teorie množin*, sborníkový příspěvek, Olšanka, 2006.
[5] Robert Šámal: *Ordinály, kardinály – taková zvláštní čísla*, sborníkový příspěvek, Jablonná, 1999.

# Diskrétný kalkulus (alebo ako počítať sumy)

*Miško Szabados*

Určite ste už všetci počuli o deriváciách a integráloch. Tie dávajú do súvislosti obsah pod grafom funkcie s tým, ako rýchlo funkcia rastie. My si ukážeme analogické vzťahy pre postupnosti a uvidíme, že tým vznikne metóda na rátanie súm.

V príspevku budeme pracovať s postupnosťami $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a niekedy si rozšírime indexy aj na záporné čísla (veď prečo nie).

### Diferencie alias rozdiely

**Definícia.** *Pre postupnosť $s$ definujeme postupnosť $\Delta s$ tak, že*[15]

$$(\Delta s)_n = s_{n+1} - s_n.$$

Postupnosť $\Delta s$ budeme nazývať *diferenciou* postupnosti $s$, alebo jednoducho *rozdielmi* postupnosti $s$. Predtým, ako si ukážeme, ako sa táto operácia správa na konkrétnych postupnostiach, uvedieme ešte definíciu:

**Definícia.** *Pre $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme $k$-*tu klesajúcu mocninu *$x$ ako*

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\ldots(x-k+1),\ x^{\underline{0}} = 1.$$

| $s_n$ | $n$ | $n^{\underline{k}}$ | $2^n$ | $c^n$ | $\binom{n}{k}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(\Delta s)_n$ | $1$ | $kn^{\underline{k-1}}$ | $2^n$ | $(c-1)c^n$ | $\binom{n}{k-1}$ |

Ďalšie užitočné vzťahy dostaneme pre niektoré operácie s celými postupnosťami $s, t$. $E$ je operátor posunu definovaný v poznámke dole[15].

| $s$ | $cs$ | $s+t$ | $st$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta s$ | $c\Delta s$ | $\Delta s + \Delta t$ | $s\Delta t + Et\Delta s$ |

**Cvičenie 1.** Určte diferenciu postupností $n^2$, $n2^n$, Fibonacciho postupnosti a nejakej vami obľúbenej postupnosti.

**Cvičenie 2.** Aká je $k$-ta diferencia postupnosti $n^{\underline{k}}$? A postupnosti $n^k$?

**Cvičenie 3.** Roznásobte $(x+y)^{\underline{3}}$ a upravte na tvar obsahujúci iba klesajúce mocniny.

[15] Vo vysokoškolskej reči by sme povedali, že $\Delta$ je operátor. Ak navyše definujeme operátor posunu $(Es)_n = s_{n+1}$, môžeme jednoducho písať $\Delta s = Es - s$.

**Cvičenie 4.** Určte diferenciu postupnosti $1/n$. Viete dodefinovať klesajúcu mocninu pre záporné čísla?

**Cvičenie 5.** Pomocou viacnásobných diferencií spočítajte $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^n$.

**Cvičenie 6.** Operátor rozdielu sme mohli definovať aj inak, konkrétne $(\nabla s)_n = s_n - s_{n-1}$. Akú analogickú funkciu by sme potrebovali namiesto klesajúcej mocniny, aby sa diferencovanie správalo pekne?

## Sumy

K operátoru diferencie teraz definujeme inverzný operátor a (možno) prekvapivo zistíme, že je to klasická suma. Pozor na to, že budeme používať značenie odlišné od toho klasického.

**Definícia.** *Pre postupnosť $s$ označme $\sum s$ ľubovoľnú postupnosť $S$, ktorá spĺňa $\Delta S = s$. Symbolom $\sum_a^b s$ označme číslo $S_b - S_a$.*

**Veta.** *Číslo $\sum_a^b s$ nezávisí na voľbe postupnosti $S$ z $\sum s$. Navyše platí*

$$\text{(naša)}\sum_a^b s = \text{(klasická)}\sum_{n=a}^{b-1} s_n$$

Pojem našej sumy by bol samoúčelný, ak by preň neexistovali zaujímavé vzťahy. V prvom rade sa správa slušne voči sčítaniu: $\sum_a^b s + \sum_b^c s = \sum_a^c s$. Ďalšie vzťahy dostaneme obrátením vzťahov o diferencii.

| $s_n$ | $1$ | $n^{\underline{k}}$ | $2^n$ | $c^n$ | $\binom{n}{k}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(\sum s)_n$ | $n + C$ | $\frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} + C$ | $2^n + C$ | $\frac{c^n}{c-1} + C$ | $\binom{n}{k+1} + C$ |

Posledný vzťah v nasledujúcej tabuľke sa nazýva *sumácia per partes*. Je analogický integrovaniu per partes a odvodzuje sa zo vzorca pre diferenciu súčinu dvoch postupností.

| $s$ | $cs$ | $s + t$ | $s\Delta t$ |
|---|---|---|---|
| $\sum s$ | $c\sum s$ | $\sum s + \sum t$ | $st - \sum Et\Delta s$ |

**Príklad.** Vyjadrite $\sum_{n=0}^{k} n2^n$.

*Riešenie.* Položme $s_n = n$ a $t_n = 2^n$, potom $\Delta s = 1$ a $\Delta t = 2^n$. Použime per partes:

$$\sum s\Delta t = st - \sum Et\Delta s = n2^n - \sum 2^{n+1} = n2^n - 2^{n+1} = (n-2)2^n.$$

Uvedomme si ale, že sme sa dopustili istej nekorektnosti, keďže na ľavej strane máme postupnosť a na pravej číslo. To ale ľahko napravíme tým, že výrazy obsahujúce $n$ stotožníme s príslušnými postupnosťami. Môžeme teda pokračovať:

$$\text{(kl.)} \sum_{n=0}^{k} n2^n = \sum_{0}^{k+1} n2^n = \Big[(n-2)2^n\Big]_0^{k+1} = (k-1)2^{k+1} + 2.$$

**Cvičenie 7.** Spočítajte $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$.

**Cvičenie 8.** Vyjadrite $n^3$ pomocou klesajúcich mocnín a odvoďte vzorec pre $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3$.

**Cvičenie 9.** Spočítajte $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$.

**Cvičenie 10.** Spočítajte $1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \cdots + (2k-5) \cdot (2k-3) \cdot (2k-1)$.

**Cvičenie 11.** Spočítajte $1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n}$.

**Cvičenie 12.** Súčet $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ sa nazýva $n$-té harmonické číslo a má mnoho súvislostí s prirodzeným logaritmom. Vyjadrite $\sum nH_n$.

## Literatúra a zdroje

[1] Graham, Knuth, Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.

# Mocnost a chordály

*Pepa Tkadlec*

## Úvod

Za mocností bodu ke kružnici se skrývá elementární tvrzení, které však až překvapivě zjednodušuje argumenty a zprůhledňuje řešení mnohých úloh. Příklady řešitelné pomocí mocnosti jsou také v poslední době velmi populární na všech úrovních matematické olympiády (včetně té mezinárodní). Mocnost je tedy nástroj nad jiné užitečný, a proto neváhejme a pusťme se do výkladu.

## Definice a základní vlastnosti

**Definice.** *Je dán bod $M$ a kružnice $k$ se středem $O$ a poloměrem $r$.* Mocností *bodu $M$ ke kružnici $k$ rozumíme číslo $p(M,k) = |MO|^2 - r^2$.*

Nechť $M$ je bod a $k(O;r)$ kružnice.

(i) Číslo $p(M,k)$ je nulové právě tehdy, když bod $M$ leží na kružnici $k$. Číslo $p(M,k)$ je kladné/záporné právě tehdy, když $M$ leží vně/uvnitř kružnice $k$.

(ii) Buď $N$ další bod. Je-li $p(M,k) = p(N,k)$, pak $|MO| = |NO|$.

(iii) Pokud $M$ leží vně $k$, označme $T$ ten bod kružnice $k$, pro který je přímka $MT$ ke kružnici $k$ tečnou. Pak platí $p(M,k) = |MT|^2$.

(iv) (zásadní!) Nechť přímka $p$ vedená bodem $M$ protne $k$ v bodech $A$, $B$. Pak $MA \cdot MB = p(M,k)$, kde úsečky $MA$, $MB$ nahlížíme jako orientované.

**Tvrzení.** *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a $Q = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|QA| \cdot |QD| = |QB| \cdot |QC|$.*

**Definice.** *Nechť $k$, $l$ jsou kružnice. Množinu bodů $X$ splňujících $p(X,k) = p(X,l)$ nazýváme* chordálou *kružnic $k$, $l$.*

**Tvrzení.** *Chordálou dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.*

**Poznámka.** Obecněji: Přímka kolmá na spojnici středů kružnic $k$, $l$ je množina těch bodů $X$, pro něž je rozdíl $p(X,k) - p(X,l)$ roven dané konstantě.

**Definice.** *Bodu, který má stejnou mocnost ke třem daným kružnicím, říkáme* potenční střed.

**Poznámka.** Mocnost se *neobyčejně skvěle* kombinuje s úsekovými úhly a velmi dobře s Cèvovou a Menelaovou větou nebo s kruhovou inverzí.

## Běžné konfigurace

Následující tři situace se v úlohách vyskytují tak často, že si zaslouží oproti všem ostatním zvýraznit. Buďte ve střehu a vždy, když na podobné rozestavení bodů narazíte, vzpomeňte si na mocnost.

**Příklad.** Nechť přímka $p$ vedená bodem $M$ protne kružnici $k$ v bodech $A$, $B$. Buď $T$ libovolný bod na $k$. Pak přímka $MT$ je tečnou $k$ právě tehdy, když $|\sphericalangle MAT| = |\sphericalangle MTB|$.

**Příklad.** Kružnice $k$, $l$ se středy $K$, $L$ se protínají v bodech $A$, $B$. Přímka $AB$ protne společnou tečnu kružnic $k$, $l$, která se jich dotýká v bodech $T$, $U$, v bodě $P$. Pak $|PT| = |PU|$.

**Příklad.** Kružnice $k$, $l$ se protínají v bodech $X$, $Y$. Bodem $M$ vedeme přímky $p$ resp. $q$, které protnou kružnice $k$ resp. $l$ v bodech $A$, $B$ resp. $C$, $D$. Pak body $A$, $B$, $C$, $D$ leží na jedné kružnici právě tehdy, když $M \in XY$.

Dost už bylo úvodu, vrhněme se na příklady. Jsou řazeny zhruba dle obtížnosti, ale tato je vždy relativní, tak se neboj řešit příklady i na přeskáčku.

## Lehké příklady

**Příklad 1.** Na prodloužení tětivy $KL$ kružnice $k$ se středem $O$ leží bod $A$. Tečny z bodu $A$ ke kružnici $k$ se jí dotýkají v bodech $T$, $U$. Označme $M$ střed úsečky $TU$. Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový.

**Příklad 2.** Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice $k$ takový, že přímky $AD$ a $BC$ se protínají v bodě $Q$. Označme $M$ průsečík přímky $BD$ a rovnoběžky s přímkou $AC$ vedenou bodem $Q$. Zvolme $T \in k$ tak, aby $MT$ byla tečnou kružnice $k$. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$. (PraSe 2005)

**Příklad 3.** Na stranách $AB, AC$ ostroúhlého trojúhelníka $ABC$ leží body $K$, $L$. Ukažte, že společná tětiva kružnic nad průměry $CK$, $BL$ prochází ortocentrem $H$ trojúhelníka $ABC$.

**Příklad 4.** Mějme pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s přeponou $AB$. Na jeho odvěsně $AC$ zvolme bod $D$. Nyní sestrojme kružnici $k_1$, která se dotýká $AB$ v bodě $A$ a prochází bodem $D$. Dále též kružnici $k_2$, která se dotýká $AB$ v bodě $B$ a též prochází bodem $D$. Označme $E$ druhý průsečík kružnic $k_1$ a $k_2$. Dokažte, že úhly $BAC$ a $DEC$ jsou shodné.

**Příklad 5.** Na kružnici $m$ jsou dány body $K$, $L$ tak, že $KL$ není průměr. Uvažme všechny dvojice kružnic $k$, $l$ ležící uvnitř $m$, které se $m$ dotýkají v bodech $K$, $L$ a samy se protínají v bodech $X$, $Y$. Ukažte, že přímka $XY$ prochází pevným bodem.

**Příklad 6.** Označme $H$ ortocentrum ostroúhlého trojúhelníka $ABC$. Kružnice $k_a$ se středem ve středu strany $BC$ procházející bodem $H$ protíná stranu $BC$ v bodech $A_1$, $A_2$. Body $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ definujeme podobně. Ukažte, že body $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ leží na jedné kružnici. (IMO 2008, P1)

**Příklad 7.** Je dána kružnice $k$, bod $O$, který na ní neleží, a přímka $p$, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici $l$, která má vnější dotyk s kružnicí $k$ a dotýká se i přímky $p$. Příslušné body dotyku označme $A$ a $B$. Pokud body $O$, $A$, $B$ neleží v přímce, sestrojíme kružnici $m$ opsanou trojúhelníku $OAB$. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí společným bodem různým od bodu $O$, anebo se dotýkají téže přímky. (MO 57–A–I–5)

**Příklad 8.** Na přímce $p$ leží body $A$, $B$, $C$, $D$ v tomto pořadí. Kružnice nad průměry $AC$, $BD$ se protnou v $X$, $Y$. Na přímce $XY$ zvolíme bod $P$ ($P \notin BC$). Přímka $CP$ protne kružnici nad $AC$ podruhé v bodě $M$, přímka $BP$ kružnici nad $BD$ v bodě $N$. Ukažte, že přímky $AM$, $DN$, $XY$ procházejí jedním bodem. (IMO 1995, P1)

**Příklad 9.** Trojúhelník $ABC$ je vepsaný do kružnice $k$. Tečna ke $k$ vedená bodem $C$ protne přímku $AB$ v bodě $P$. Označme $M$ střed $CP$. Přímka $MB$ protne kružnici $k$ podruhé v bodě $Q$. Přímka $PQ$ protne $k$ podruhé v bodě $R$. Dokažte, že trojúhelník $ARC$ je rovnoramenný. (Alex Zhai)

## Středně obtížné příklady

**Příklad 10.** Označme $AD$, $BE$, $CF$ výšky trojúhelníka $ABC$. Přímky $EF$, $FD$, $DE$ protnou přímky $BC$, $CA$, $AB$ po řadě v bodech $L$, $M$, $N$. Ukažte, že body $L$, $M$, $N$ leží v přímce. Bonus: Na co je tato přímka kolmá?

**Příklad 11.** Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník vepsaný do kružnice se středem $O$. Nechť $P$ je jeho průsečík úhlopříček, $Q = AD \cap BC$ a $R = AB \cap CD$. Označme $S$ druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům $ABP$ a $CDP$. Ukažte, že body $R$, $P$, $S$ leží v přímce. Dále ukažte, že i body $Q$, $S$, $O$ leží v přímce.

**Příklad 12.** Označme $O$ střed kružnice opsané trojúhelníku $ABC$. Body $P$, $Q$ leží na stranách $AC$, $AB$. Označme $K$, $L$, $M$ středy úseček $BP$, $CQ$, $PQ$. Předpokládejme, že kružnice opsaná trojúhelníku $KLM$ se dotýká přímky $PQ$. Dokažte, že $|OP| = |OQ|$. (IMO 2009, P2)

**Příklad 13.** Nechť $ABC$ je trojúhelník. Kružnice procházející body $B$, $C$ podruhé protíná strany $AB$, $AC$ v bodech $C'$, $B'$. Ukažte, že přímky $BB'$, $CC'$, $HH'$ procházejí jedním bodem, kde $H$, $H'$ jsou ortocentra trojúhelníků $ABC$, $AB'C'$. (ISL 1995, G7)

**Příklad 14.** Nechť $ABC$ je trojúhelník s ostrým úhlem u vrcholu $A$ a označme $M$ střed strany $BC$. Na $AM$ zvolme bod $D$ a zkonstruujme kružnice $k$, $l$ procházející bodem $D$, které se dotýkají přímky $BC$ po řadě v bodech $B$, $C$. Přímka $AB$ resp. $AC$ protne kružnici $k$ resp. $l$ podruhé v bodě $P$ resp. $Q$. Ukažte, že tečna ke kružnici $k$ vedená bodem $P$ a tečna ke kružnici $l$ vedená bodem $Q$ se protínají na $AM$. (Vietnam TST 2010)

**Příklad 15.** Tečny ke kružnici $k$ se středem $O$ v bodech $A$, $B$ se protnou v bodě $P$. Na kratším oblouku $AB$ zvolíme bod $C$ (různý od středu). Označme $D = AC \cap PB$ a $E = BC \cap AP$. Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům $ACE$, $BCD$ a $PCO$ leží v přímce. (ARO 2010)

**Příklad 16.** Kružnice vepsaná trojúhelníku $ABC$ se dotýká jeho stran $BC$, $CA$, $AB$ v bodech $D$, $E$, $F$. Bod $X$ leží uvnitř trojúhelníka $ABC$ tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku $BCX$ se dotýká $BC$ v $D$ a stran $CX$, $XB$ po řadě v $Y$, $Z$. Ukažte, že body $E$, $F$, $Y$, $Z$ leží na kružnici.

**Příklad 17.** (Brianchon theorem) Předpokládejme, že šestiúhelníku $ABCDEF$ se dá vepsat kružnice. Ukažte, že přímky $AD$, $BE$, $CF$ procházejí jedním bodem.

## Triky

Mocnost bodu ke kružnici použitá vtipně a ve správný okamžik často velmi rychle vyřeší jinak nepříjemnou úlohu. Někdy si vystačíme s mocností samotnou, jindy je potřeba ji vhodně zkombinovat například s Viètovými vztahy. Obzvláště fikaným trikem je pak chápání bodu jako kružnice s nulovým poloměrem.

**Příklad 18.** Je dána kružnice $k$ a bod $A$ různý od jejího středu. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům $ABC$, jejichž strana $BC$ je průměrem kružnice $k$. (MO 56–A–I–5)

**Příklad 19.** Uvažujme ty paraboly určené rovnicí $x^2+px+q=0, p, q \in \mathbb{R}$, které protínají osy $x$, $y$ ve třech různých bodech. Ke každé trojici průsečíků uvažme kružnici, která jimi prochází. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem. (Španělsko 1997)

**Příklad 20.** Je dán trojúhelník $ABC$ a $I$, $O$ středy jeho vepsané a opsané kružnice. Označme $A'$ průsečík přímky $BC$ a kolmice na $AI$ vedené bodem $I$. Body $B'$, $C'$ jsou definované podobně. Ukažte, že body $A'$, $B'$, $C'$ leží v přímce, která je kolmá na $OI$.

**Příklad 21.** Kružnice vepsaná trojúhelníku $ABC$ se dotýká jeho stran $AB$, $BC$, $CA$ v bodech $F$, $D$, $E$. Označme písmeny $Y_1$, $Y_2$, $Z_1$, $Z_2$, $M$ středy úseček $FB$, $BD$, $DC$, $CE$, $BC$. Konečně buď $X = Y_1Y_2 \cap Z_1Z_2$. Dokažte, že $XM \perp BC$. (Alex Anderson)

**Příklad 22.** Kružnice $k$, $l$ mají vnější dotyk v bodě $T$. Bod $A$ probíhá kružnici $l$. Na kružnici $k$ najdeme body $B$, $C$, aby $AB$, $AC$ byly tečny kružnice $k$. Přímky $BT, CT$ protnou kružnici $l$ podruhé v bodech $D$, $E$. Najděte množinu průsečíků přímek $DE$ a tečen ke kružnici $l$ v bodě $A$. (KMS 2009/10, 13)

**Příklad 23.** Kružnice vepsaná trojúhelníku $ABC$ se dotýká stran $AC$, $BC$ v bodech $E$, $D$. Průsečík $AD \cap BE$ označme $G$. Zkonstruujeme body $U$, $V$, aby $ABUE$ a $ABDV$ byly rovnoběžníky. Dokažte, že $|GU| = |GV|$. (ISL 2009, G3)

## Literatura a zdroje

Čerpal jsem převážně z archivů mezinárodní matematické olympiády stejně jako z národních olympiád, korespondenčních seminářů (PraSe a KMS) a z příspěvku *Alči Skálové*, jíž tímto děkuji.

## Hinty

### Běžné konfigurace

**Hint.** Úsekový úhel.

**Hint.** Bod $P$ má k oběma kružnicím stejnou mocnost. Mocnost se dá měřit po tečnách.

**Hint.** Oboje je ekvivalentní $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.

### Lehké příklady

**Hint 1.** Měřte z bodu $A$. Vzpomeňte na Euklidovu větu o odvěsně (nebo jen odhalte podobné trojúhelníky).

**Hint 2.** Dokažte podobnost $MDQ$ a $MQB$ pomocí *uu* a pomocí mocnosti vyvoďte $|MT|^2 = |MQ|^2$.

**Hint 3.** Ukažte, že $H$ má stejnou mocnost k oběma zadaným kružnicím. Použijte při tom, že $BCB_0C_0$ je tětivový ($B_0, C_0$ značí paty výšek).

**Hint 4.** Uvědomte si, že $DE$ protne $AB$ v jejím středu $M$. Pak ukažte, že $AMCE$ je tětivový.

**Hint 5.** Průsečík $P$ tečen k $m$ v bodech $K$ a $L$ má ke kružnicím $k, l$ stejnou mocnost $|PK|^2 = |PL|^2$, tedy leží na jejich chordále.

**Hint 6.** Když je $AB$ vodorovná, musí být spojnice druhého průsečíku $k_a \cap k_b$ a $H$ svislá, takže $C$ leží na chordále $k_a, k_b$. Pozorně dokončete.

**Hint 7.** Přímky $AB$ protínají $k$ podruhé v pevném bodě. Z něj měřte mocnost.

**Hint 8.** Stačí ukázat, že $ADNM$ je tětivový. To vyúhlete s využitím toho, že $BCNM$ je tětivový.

**Hint 9.** Dokreslete $B'$, aby $BPB'C$ byl rovnoběžník. Pak $QPB'C$ je tětivový. Zbytek doúhlete.

### Středně obtížné příklady

**Hint 10.** Body $L, M, N$ mají stejnou mocnost ke kružnicím opsaným trojúhelníkům $ABC$ a $DEF$. Bonus: Na přímku $O, T, H$.

**Hint 11.** Bod $R$ je potenční střed tří kružnic, takže $R, P, S$ máme. Vyúhlete tětivové čtyřúhleníky $BCSO$ a $AOSD$ a podobně odvoďte i $Q, S, O$.

**Hint 12.** Pomocí úsekových úhlů ukažte podobnost $KLM$ a $APQ$. Následně ověřte, že body $P, Q$ nají stejnou mocnost ke kružnici opsané trojúhelníku $ABC$.

**Hint 13.** Ukažte, že body $H, H'$ a $BB' \cap CC'$ mají všechny stejnou mocnost ke kružnicím nad průměry $BB', CC'$.

**Hint 14.** Těžnice je chordála $k$ a $l$, takže $BCQP$ je tětivový (mocnost z $A$). Hledaný průsečík označte $X$ a dokažte, že trojúhelník $PXQ$ je rovnoramenný (u $P, Q$ znáte úhly).

**Hint 15.** Spočtěte, že kružnice opsané $BCD$ a $AOBP$ se dotýkají. Dokreslete průsečík tečen k $AOBP$ v $A$ resp. $B$ a ukažte, že je to potenční střed všech tří zadaných kružnic. Vyvoďte, že tyto mají i druhý společný průsečík různý od $C$.

**Hint 16.** Srovnáním Menelaovy a Cèvovy věty pro $ABC$ a $EF$ resp. $XBC$ a $YZ$ ukažte, že $EF$ a $YZ$ protínají $BC$ v témže bodě. Z něj měřte mocnost.

**Hint 17.** Dokreslete tři kružnice tak, aby se každá dotýkala jedné dvojice přímek z nabídky $AB$ a $DE$, $BC$ a $EF$, $CD$ a $FA$, a navíc aby přímky $AD, BE, CF$ byly chordálami vždy dvou z těchto tří kružnic. Takové kružnice kupodivu lze sestrojit pro libovolný tečnový šestiúhelník $ABCDEF$.

### Triky

**Hint 18.** Kružnice opsaná trojúhelníku $ABC$ protíná přímku $AO$ podruhé v pevném bodě (mocnost středu $k$).

**Hint 19.** Viètovy vztahy. Pozor na 2 případy.

**Hint 20.** Dokažte, že rozdíl mocností bodu $A'$ k opsané a vepsané kružnici trojúhelníka $ABC$ je $r^2$ ($r$ je poloměr vepsané), čili konstanta. Může se hodit vědět, že střed oblouku $BC$ je střed kružnice opsané trojúhelníku $BIC$.

**Hint 21.** Interpretujte přímky $Y_1Y_2$ resp. $Z_1Z_2$ jako chordály kružnice vepsané a bodů $B$ resp. $C$.

**Hint 22.** Je to chordála (společná vnitřní tečna) $k$ a $l$. Tečnu k $l$ v $A$ chápejte jako chordálu $l$ a $A$, zbývá ukázat, že $DE$ je chordála $k$ a $A$, tj. že $|DA|^2 = |DT| \cdot |DB|$ (a obdobně pro $E$), což je podobnost nějakých dvou trojúhelníků. Přeneste vhodný úhel pomocí stejnolehlosti.

**Hint 23.** Dokreslete kružnici připsanou $ABC$ vzhledem k $A$. Vhodně popřenášejte délky úseků z vrcholů k bodům dotyku. Vyjde, že přímka $AD$ je chordála připsané a bodu $V$ a $BE$ je chordála připsané a bodu $U$. Tedy $G$ leží na chordále $U$ a $V$, což jsme přesně chtěli.

# Logika, důkazy, argumentace

*Honzík Vaňhara*

Každý příklad, který potkáte, každá věta, kterou vidíte, všechno v matematice je postavené na principu exaktního dokazování. Je to přímo základ matematiky, a jako dům musí stát na pevných základech, tak i matematika je potřebuje mít co nejpevnější. Ať se jedná o celou matematiku, anebo váš malý příklad, který řešíte do PraSátka.

### Na úvod pár definic

**Definice.** (Výrok) Výrokem *nazveme každé tvrzení, jemuž lze (v principu) jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu.*

**Definice.** (Výroková formule) Výrokovou formulí *nazveme výrok závislý na jedné či více proměnných.*

**Definice.** (Konjunkce) *Jsou dány výroky $A, B$. Výrok $C$ zní: „$A$ je pravdivý a zároveň $B$ je pravdivý.“. Pak $C$ nazveme* konjunkcí *$A$ a $B$ a značíme $C = A \wedge B$.*

**Definice.** (Disjunkce) *Jsou dány výroky $A, B$. Výrok $C$ zní: „$A$ je pravdivý nebo $B$ je pravdivý.“. Pak $C$ nazveme* disjunkcí *$A$ a $B$ a značíme $C = A \vee B$.*

**Definice.** (Negace) *Nechť $V$ je výrok a výrok $W$ zní: „Neplatí výrok $V$.“, pak $W$ nazveme* negací *výroku $V$ a značíme $W = V'$.*

**Definice.** (Kvantifikátory) *Nechť $X$ je množina a $V$ výroková formule. Výrok „Pro každé $x \in X$ platí $V(x)$“ budeme symbolicky zapisovat jako $(\forall x \in X)\colon V(x)$. Výrok „Existuje $x \in X$ takové, že platí $V(x)$“ zapíšeme jako $(\exists x \in X)\colon V(x)$.*

**Příklady.**

(i) Výrok: Nebe je modré.
(ii) Výroková formule: $n \in \mathbb{N}$ je sudé číslo.
(iii) Konjunkce: Pepa je kluk a 7 je prvočíslo.
(iv) Disjunkce: T. A. Edison vymyslel žárovku nebo Eva s Vaškem vyhráli loni slavíka.
(v) Negace: Není pravda, že 12 je prvočíslo.
(vi) Všechnítko: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x \cdot 0 = 0$.
(vii) Existítko: Existuje aspoň jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n^2 = 1$.

**Příklad.** Znegujte následující výroky a zamyslete se, zda platí:

(i) Každé prvočíslo je liché.
(ii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\colon x^2 > y$.
(iii) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\colon n + m$ je sudé.

(iv) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\colon n + m$ je sudé.
(v) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(\exists c \in \mathbb{R})\colon a + b + c = 0$.
(vi) $(\exists p \in \mathbb{Z})(\forall q \in \mathbb{Z})(\forall r \in \mathbb{Z})\colon pqr = 0$.
(vii) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(\exists y \in \mathbb{R})\colon xy = 1$.

**Příklad.** Přepište následující výroky pomocí kvantifikátorů, znegujte je a rozhodněte, zda platí:

(i) Každé sudé číslo lze zapsat jako součet dvou lichých čísel.
(ii) Kdykoliv jsou $x$ a $y$ dvě různá reálná čísla, pak jedno z nich je větší než druhé.
(iii) Součtem dvou sudých čísel je sudé číslo (můžete použít značení $a \mid b$, které čteme „$a$ dělí $b$“).
(iv) Každé přirozené číslo lze zapsat jako součet čtyř druhých mocnin celých čísel.
(v) Přirozené číslo může mít libovolný počet dělitelů.

## Formální důkazy

**Příklad.** Dokažte tvrzení $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\colon x > y$.

*Řešení.* Zvolme $x \in \mathbb{R}$ libovolně. Položme $y := x - 1$. Pak platí $x > x - 1 = y$ a jsme tedy hotovi.

**Příklad.** Dokažte tvrzení $(\exists p \in \mathbb{Z})(\forall q \in \mathbb{Z})(\forall r \in \mathbb{Z})\colon pqr = 0$.

*Řešení.* Ukážeme, že nula má onu vlastnost. Buď tedy $p = 0 \in \mathbb{Z}$. Dále buď $q \in \mathbb{Z}$ libovolné a $r \in \mathbb{Z}$ libovolné. Pak platí $pqr = 0 \cdot qr = 0$ a důkaz je hotov!

**Příklad.** U následujících tvrzení rozhodněte, zda platí, a podle toho formálně dokažte buď výrok, nebo jeho negaci.

(i) $(\forall k \text{ sudé})(\exists m, n \text{ liché})\colon k = m + n$.
(ii) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\colon n + m$ je sudé.
(iii) $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R})\colon a + b + c = 0$.
(iv) $(\forall y \in \mathbb{R}, y \neq 0)(\exists x \in \mathbb{R})\colon xy \neq y^2$ .
(v) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\colon x^2 > 3y + x$.
(vi) $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y)(\exists z \in \mathbb{R})\colon (z - x)(z - y) < 0$.

**Příklad.** (Opravdový! I.) Frso se prochází po slovenských lesích, ale bohužel ztratil mapu. Padl už večer a on by chtěl zakempovat někde na louce mimo les. Jenže bez mapy směr nenajde, ale ještě si pamatuje, že les měl plochu $S\text{km}^2$ a nemá díry. Dokažte, že Frsovi stačí ujít $2\sqrt{\pi S}$ km, aby se dostal z lesa.

**Příklad.** (Opravdový! II.) Máme zahradu $4 \times 4$ políčka a chceme si na ní vysadit několik stromků. Jenže tuto zahradu nám závidí vandalové a jakmile skončíme vysazování, tak přijdou a vykácí nám všechny stromy ve dvou řádcích a ve dvou sloupcích. Kolik nejméně stromků musíme vysázet, aby nám po nájezdu vandalů aspoň jeden zbyl?

## Je to vše?

Poslední, ale nedůležitější částí mého příspěvku je, jak vlastně poznat, že je váš důkaz správný. Časem si na to vyrobíte ten správný čich, ale pro začátek vám dám pár rad:

(1) Všechny objekty (proměnné, body, … ), které nejsou zavedeny v zadání, musíte řádně definovat!
(2) Pořádně si projít řešení a hledat, zda u každého výroku neexistuje boční řešení či cesta, kterou jste zapomněli odůvodnit!
(3) To samé platí u každé rovnice či každé proměnné!
(4) Bylo všechno ekvivalentní nebo přípustné pro každý objekt vašeho příkladu?
(5) Není ještě potřeba u něčeho zkouška?

## Literatura a zdroje

[1] Michal Rolínek, Josef Tkadlec: Seminář *Umění vidět v matematice*.

# Délky v trojúhelníku

*Martina Vaváčková*

Motto: *"I can calculate everything."*
Ivan Borsenco, zlatý medailista z IMO 2006

Na přednášce si ukážeme prostou, ale účinnou zbraň při řešení mnohých geometrických úloh. Přesvědčíme se, že s některými úlohami si umíme hravě poradit, ačkoliv jejich syntetické řešení je poměrně komplikované nebo trikové. Jak? Stačí si rozmyslet, že je umíme spočítat.

Odvodíme si některé užitečné vztahy, které nám umožní nahlédnout hlouběji, a řekneme si, v jakých situacích je výhodné je použít. Nakonec společně vyřešíme i pár obtížnějších úloh.

## Metrická kritéria

V důkazových úlohách se ve většině případů vyskytuje jen několik typů tvrzení (kolmost dvou přímek, 4 body na jedné kružnici, atd.). Metrická kritéria slouží k převedení těchto tvrzení na algebraické identity.

| **vlastnost** | **kritérium** |
|---|---|
| rovnost úhlů | podobnost trojúhelníků |
| kolmost | „$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$“ |
| 3 body na přímce | Menelaova věta |
| 4 body na kružnici | mocnost |
| 3 přímky jedním bodem | Cèvova věta |

## Značení

V celém následujícím textu budu pro prvky trojúhelníku $ABC$ používat jednotné značení:

(i) $a$, $b$, $c$ strany, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$
(ii) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vnitřní úhly při vrcholech $A$, $B$, $C$
(iii) $H$ ortocentrum, $G$ těžiště
(iv) $O$ střed kružnice opsané, $I$ střed kružnice vepsané
(v) $R$ poloměr kružnice opsané, $r$ poloměr kružnice vepsané
(vi) $I_a$, $I_b$, $I_c$ středy kružnic připsaných stranám $a$, $b$, $c$
(vii) $r_a$, $r_b$, $r_c$ poloměry kružnic připsaných stranám $a$, $b$, $c$
(viii) $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ polovina obvodu, $K$ obsah

## Sinová a kosinová věta, výšky

**Věta.** (Sinová, kosinová) *V trojúhelníku $ABC$ platí:*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,\qquad a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

**Tvrzení.** (Zřejmé) *V trojúhelníku $ABC$ označme $D$ patu výšky na stranu $a$. Pak platí $|AD|=c\sin\beta=b\sin\gamma$, $|BD|=c\cos\beta$ a $|CD|=b\cos\gamma$.*

**Cvičení.** S využitím poznatků o výškách ověřte platnost kosinové věty.

## Strany a úseky

**Tvrzení.** (Úseky) *Jsou-li $a,b,c$ strany trojúhelníka, pak existují reálná čísla $x,y,z>0$ taková, že*

$$a=y+z,\ b=x+z,\ c=x+y,$$

*neboli*

$$x=s-a,\ y=s-b,\ z=s-c.$$

*Tato čísla odpovídají délkám úseků stran vyťatých body dotyku kružnice vepsané.*

**Cvičení.** Najděte poměr, v němž dělí strany trojúhelníka body dotyku kružnic připsaných.

**Tvrzení.** (Obsah trojúhelníka) *Pro obsah trojúhelníka $ABC$ platí:*

$$K=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{abc}{4R},$$

$$K=sr=(s-a)r_a=xr_a,$$

$$K=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

**Cvičení 1.** Ukažte, že $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

**Cvičení 2.** Vyjádřete $R$ a $r$ pomocí úseků $x,y,z$. Dokažte, že platí $R\geq 2r$.

## Druhé mocniny

**Věta.** (Stewartova) *Nechť $ABC$ je trojúhelník a $M$ libovolný bod na straně $BC$. Položme $|AM|=d, |BM|=m, |CM|=n$ a strany trojúhelníka označme obvyklým způsobem. Potom platí*

$$a(d^2+mn)=b^2m+c^2n.$$

**Tvrzení.** (Délka těžnice a osy úhlu) *Je-li $l_a$ osa úhlu a $m_a$ těžnice na stranu $a$, pak pro jejich délky platí:*

$$l_a^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right), \qquad m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

**Cvičení.** Ukažte, že výše uvedené tvrzení vyplývá ze Stewartovy věty. Spočítejte délku spojnice bodu dotyku kružnice vepsané a připsané s protějším vrcholem.

**Tvrzení.** (Kritérium kolmosti) *Čtyřúhelník $ABCD$ má kolmé úhlopříčky právě tehdy, když platí $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.*

## Poslední krůček

Ačkoliv už umíme geometrickou úlohu převést na důkaz identity, nemáme ještě zcela vyhráno! Abychom se mohli dopracovat k cíli, potřebujeme vše vyjádřit jednotně pomocí základních prvků trojúhelníka, tedy stran nebo úhlů.

Jestliže se nám podaří dospět k vyjádření pomocí stran, je úloha prakticky vyřešená. Pokud se rozhodneme pro siny a kosiny úhlů, musíme mít při následné úpravě výrazů na paměti několik věcí:

(1) v argumentech je potřeba mít stejné násobky základních úhlů,
(2) existují goniometrické vzorce, nebojíme se je používat,
(3) pro součet úhlů v trojúhelníku platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

## Sbírka příkladů

**Příklad 1.** Buď $H$ ortocentrum a $D$ pata výšky na stranu $BC$ v trojúhelníku $ABC$. Dokažte, že $|AH| = 2R\cos\alpha$ a $|HD| = 2R\cos\beta\cos\gamma$.

**Příklad 2.** Pro libovolný trojúhelník $ABC$ platí, že obsah trojúhelníka s vrcholy v bodech dotyku kružnice vepsané je roven obsahu trojúhelníka s vrcholy v bodech dotyku kružnic připsaných. Dokažte.

**Příklad 3.** Mějme trojúhelník $ABC$. Ukažte, že obsah trojúhelníku s vrcholy v bodech dotyku kružnic připsaných je menší než čtvrtina obsahu $\triangle ABC$.

**Příklad 4.** Nechť $ABC$ je trojúhelník a $h_a$, $h_b$ výšky z vrcholů $A$ a $B$. Ukažte, že pokud $a \geq b$, pak

$$a + h_a \geq b + h_b.$$

**Příklad 5.** Nechť $a$, $b$, $c$ jsou strany trojúhelníka. Dokažte, že

$$2\sqrt{s(s-a)} \leq 2m_a \leq b + c,$$

kde $m_a$ je těžnice z vrcholu $A$.

**Příklad 6.** (Steiner-Lehmus theorem) Dokažte, že pokud jsou dvě osy úhlů stejně dlouhé, pak už je trojúhelník nutně rovnoramenný.

**Příklad 7.** Mějme trojúhelník $ABC$ se středem kružnice vepsané $I$. Označme $A_1$ průsečík osy úhlu $CAB$ se stranou $BC$ a dále $D$ bod středově souměrný s $I$ podle středu $A_1$. Dokažte, že body $A$, $B$, $C$ a $D$ leží na jedné kružnici, právě když $b + c = 2a$.

**Příklad 8.** V ostroúhlém trojúhelníku $ABC$ se středem $I$ kružnice vepsané označme $P$ patu výšky na stranu $BC$ a $M$ střed strany $BC$. Přímka $MI$ protne výšku $AP$ v bodě $F$. Ukažte, že $|AF| = r$.

**Příklad 9.** Je dán trojúhelník $ABC$ se středem $I$ kružnice vepsané. Označme $D$ průsečík osy úhlu $\sphericalangle BAC$ se stranou $BC$ a $I_a$ střed kružnice připsané straně $BC$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{|AI|} + \frac{1}{|II_a|} = \frac{2}{|AD|}.$$

(MO A-59-II)

**Příklad 10.** Je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$ se středem $I$ kružnice vepsané. Ukažte, že alespoň jedna z úseček $AB$, $AI$, $BI$, $CI$ má neceločíselnou délku.
(USAMO 2010)

**Příklad 11.** V trojúhelníku $ABC$, jehož vnitřní úhly splňují $\alpha > \gamma$, označme $I$ střed kružnice vepsané, $M$ střed strany $AC$ a $N$ střed oblouku AC kružnice opsané (toho, jenž obsahuje B). Dokažte, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$. (KMS, gama)

**Příklad 12.** V trojúhelníku $ABC$ je $M$ střed strany $BC$. Kružnice vepsaná se středem $I$ se dotýká strany $BC$ v bodě $D$, střed úsečky $AD$ označme $S$. Dokažte, že body $S$, $I$, $M$ leží na jedné přímce.

**Příklad 13.** V trojúhelníku $ABC$ je $O$ střed kružnice opsané, $AD$ její průměr. Tečna ke kružnici opsané vedená bodem $D$ protne přímky $AB$, $AC$ po řadě v bodech $M$, $N$ a $AD$ protne $BC$ v bodě $P$. Dokažte, že je-li $|AP| = 2|BP|$, leží body $O$, $B$, $C$, $M$ a $N$ na jedné kružnici.

**Příklad 14.** Nechť $ABC$ je trojúhelník a $I_a$ střed kružnice připsané straně $BC$. Označme po řadě $E$ a $F$ průsečíky os úhlů $ABC$ a $BCA$ se stranami $AC$ a $AB$. Dokažte, že $EF \perp OI_a$.

**Příklad 15.** Mějme ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Paty výšek na strany $AC$ a $AB$ označme po řadě $B_1$, $C_1$. Dále označme $P$, $Q$ průsečíky kolmic vedených z bodů $C_1$, $B_1$ na stranu $BC$. Dokažte, že průsečík přímek $PB_1$ a $QC_1$ leží na výšce na stranu $BC$. (China TST 1996)

## Poděkování a zdroje

Na závěr bych chtěla poděkovat Michalu Rolínkovi za spolupráci a poskytnutí materiálů. Zdroj: *http://www.mathlinks.ro/*.

# Obsah