Staré Město

Sborník, jaro 2015

Tonda Češík
Anička Doležalová
Filip Hlásek
Martin Hora
David Hruška
Bára Kociánová
Peter „πtr“ Korcsok
Anh Dung „Tonda“ Le
Mirek Olšák
Kuba Svoboda
Martin „E.T.“ Sýkora
Štěpán Šimsa
Martina Vaváčková

AUTOŘI: Tonda Češík, Anička Doležalová, Filip Hlásek, Martin Hora, David Hruška, Bára Kociánová, Peter „πtr“ Korcsok, Anh Dung „Tonda“ Le, Mirek Olšák, Kuba Svoboda, Martin „E.T.“ Sýkora, Štěpán Šimsa, Martina Vaváčková
EDITOR: Tonda Češík
vydání první, náklad 45 výtisků
duben 2015
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Princip inkluze a exkluze

Tonda Češík

Abstrakt. Ukážeme si princip inkluze a exkluze a jeho aplikace při řešení některých kombinatorických úloh. Podíváme se i na tu asi nejznámější – problém zmatené šatnářky.

Pro přiblížení tématu přednášky začněme motivačním příkladem.

Příklad. Ve městě fungují 2 sportovní kluby. Fotbalový klub má 12 členů, tenisový klub 9. Přitom 3 fotbalisté hrají i tenis. Kolik osob celkem je členem nějakého klubu?

Řešení. Pokud sečteme počty členů v jednotlivých klubech, dostaneme číslo $12+9 = 21$. To ale není odpověď na naši otázku, neboť každého, kdo je členem obou klubů, jsme započítali dvakrát. Musíme tedy odečíst počet lidí, kteří jsou členy obou klubů zároveň. Hledaný počet tak je $21 - 3 = 18$.

Při řešení předchozího příkladu jsme si uvědomili, že pro velikost sjednocení dvou konečných množin A, B platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Zkusme vyřešit stejnou úlohu pro 3 kluby.

Příklad. Město z předchozího příkladu založilo ještě volejbalový klub. Přihlásilo se do něj 15 lidí, z toho 4 fotbalisté, 3 tenisti a jeden fotbalista–tenista.

Podobnou úvahou jako předtím lze dospět ke vzorci pro 3 množiny:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Takto lze pokračovat přidáváním dalších a dalších množin. Zobecnění vzorce pro n množin se nazývá *Princip inkluze a exkluze* (zkráceně PIE).

Tvrzení. (Princip inkluze a exkluze) *Buďte $A_1, \dots, A_n$ konečné množiny. Potom platí následující vztah:*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,\dots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Alternativně lze vztah zapsat takto:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Cvičení. Uvědomte si, že oba tvary zápisu PIE říkají totéž.

Pár příkladů

Příklad 1. Z čísel $1, 2, \dots, 1000$ vyškrtáme všechny násobky 3, 5, 7, 42. Kolik jich zůstane?

Příklad 2. Určete počet způsobů, jak lze obarvit políčka tabulky 3×3 červeně, žlutě a modře tak, že každá barva je použita právě třikrát a navíc žádný řádek ani sloupec není jednobarevný. (Obarvení lišící se pouze otočením považujeme za různá.) (MKS 27–S–4)

Příklad 3. Kolika způsoby lze seřadit písmena A, E, K, L, P, O, R, S, V tak, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov PRASE, PES, LAK?

Zapeklitější problém

Úloha. (Problém šatnářky) Na shromáždění přijde n pánů. Každý z nich si odloží svůj klobouk v šatně. Při odchodu šatnářka díky své nezměrné roztržitosti vydá každému z pánů jeden náhodně vybraný klobouk. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane zpět od šatnářky svůj vlastní klobouk?

K vyřešení úlohy je vhodné zavést si následující pojmy.

Definice. *Permutace* množiny $\{1, \dots, n\}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení

$$\pi \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}.$$

Definice. *Pevný bod* zobrazení π je takové x, že $\pi(x) = x$. (Neboli bod, který se zobrazí sám na sebe.)

Úloha. (Šatnářka očima matematika) Kolik permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ nemá pevný bod?

Další příklady

Příklad 4. V rovině je trojúhelník a dvě různé kružnice. Kolik maximálně bodů se může nacházet na průsečíku alespoň dvou útvarů?

Příklad 5. Jaká je pravděpodobnost, že 4 náhodně vytažené hrací karty obsahují eso?

Příklad 6. Najděte počet nezáporných celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

takových, že $x_1 \leq 4$ a $x_2 \leq 7$.

Příklad 7. Chceme postavit n manželských párů do řady tak, aby nikdo nestál vedle svého partnera. Kolik máme možností?

Literatura

[1] Matoušek, J. a Nešetřil, J.; *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Praha, 2002

Indukce

Anička Doležalová

Abstrakt. Příspěvek slouží jako úvod do matematické indukce pro úplné začátečníky a jako sbírka příkladů pro ty, kteří si v ní ještě zcela nevěří.

Matematická indukce je jedna ze základních důkazových metod, která se obvykle používá, chceme-li dokázat, že nějaké tvrzení či matematická věta platí pro všechna přirozená čísla.

Tvrzení. (Princip matematické indukce) *Buď $V(n)$ výrok závislý na přirozeném čísle n. Předpokládejme, že jsou splněny následující dvě podmínky:*

(i) *$V(1)$ je pravdivý výrok.*
(ii) *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.*

Pak výrok $V(n)$ je pravdivý pro každé n přirozené.

Poznámka. Řešení využívající matematickou indukci zpravidla sestává ze dvou kroků. Nejprve ověříme první podmínku (to většinou jde snadno), potom provedeme tzv. indukční krok, důkaz druhé podmínky. Ten obvykle vedeme tak, že předpokládáme platnost $V(k)$ a odvodíme $V(k+1)$.

Vzorový příklad

Příklad. Ukážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Řešení. První krok: $V(1)$ má podobu $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, což zřejmě platí. Druhý krok: Předpokládejme, že pro všechna přirozená čísla od 1 do k výrok V platí. Chceme ukázat, že platí i $V(k+1)$. K tomu můžeme využít tvrzení, které už známe, totiž $V(k)$:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

K oběma stranám rovnosti přičteme $k+1$ a upravíme:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1),$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Tedy $1+2+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, což je $V(k+1)$. Jsme hotovi.

Úlohy

Příklad 1. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Příklad 2. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+\cdots+n)^2.$$

Příklad 3. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Příklad 4. (Binomická věta) Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a a, b reálná platí

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Příklad 5. Mějme v rovině n kružnic, které dělí rovinu na několik oblastí. Ukaž, že je možné každou z těchto oblastí vybarvit jednou ze dvou barev tak, že žádné dvě oblasti se stejnou barvou spolu nesousedí.

Příklad 6. (Částečný součet geometrické posloupnosti) Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $q \neq 1$ reálné platí

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Příklad 7. Mějme n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokaž, že dělí rovinu na $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ částí.

Příklad 8. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1.$$

Příklad 9. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(n+1)(n+2)\cdots 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1).$$

Příklad 10. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ můžeme trojkostičkami tvaru L pokrýt šachovnici $2^n \times 2^n$, ze které jsme odstranili jedno políčko.

Příklad 11. Nechť funkce f pro každé $n \geq -1$ splňuje vztah

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n).$$

Dokaž, že pokud platí $f(0) = 1$ a zároveň $f(1) = 2$, pak $f(n) = n + 1$ pro všechna celá $n \geq -1$.

Příklad 12. Mějme $f(1) = f(2) = 1, f(n) = 3(f(n-1) + f(n-2)) + 1$ pro $n \geq 3$. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $(f(3n) + f(3n+1))$ dělitelné číslem 32.

Příklad 13. Dokaž, že všechna čísla ve tvaru $12008, 120308, 1203308, \ldots$ jsou dělitelná číslem 19.

Jak ne

Pro $n \geq 2$ přirozené „dokážeme“, že n různých přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, má jeden společný bod.

Další úlohy

Příklad 14. Mějme reálné číslo x takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokaž, že pak je i $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ celé číslo pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (MKS 26–4–3)

Příklad 15. Dokaž, že každé přirozené $n \geq 12$ jde zapsat jako součet několika čtyřek a pětek.

Příklad 16. Dokaž, že každé přirozené číslo $n \geq 2$ se dá zapsat jako součin několika prvočísel.

Příklad 17. Dokaž, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n-ciferné přirozené číslo dělitelné číslem 2^n, které má za cifry pouze jedničky a dvojky. (MKS 26–4–6)

Literatura a zdroje

Příspěvek čerpá hlavně ze starších přednášek Jardy Hančla a Háni Krulišové (Bendové), dále pak z knih

[1] Engel, *Problem Solving Strategies*, 1998.
[2] Matoušek, Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, 2009.

Složitost

Filip Hlásek

Abstrakt. Příspěvek popisuje dva základní koncepty teoretické informatiky, Turingovy stroje a složitost. Kromě definic důležitých pojmů uvádí také několik souvisejících tvrzení, vět a cvičení.

Uvažujme libovolný problém s jasně daným vstupem a očekávanou odpovědí. Budeme zkoumat, kolik operací počítačového programu je potřeba ke správnému výpočtu. Některé problémy lze řešit poměrně efektivně, jiné oproti tomu nelze řešit vůbec. Ke zcela přesnému popisu výpočtu zavedeme abstraktní stroj, pomocí něhož ukážeme některé vlastnosti reálných počítačů.

Problémem v našem smyslu budeme rozumět přesný popis toho, jak může vypadat *vstup* a jaký je očekávaný *výstup*. Vstupem bude typicky posloupnost číslic, případně písmen či jiných dalších znaků. Obecně budeme seznam všech použitých symbolů značit pojmem *abeceda*, což bude vždy konečná množina. Očekávaný výstup je taktéž posloupnost znaků abecedy.

Příkladem takového problému může být například sečtení dvou čísel zadaných v desítkové soustavě oddělených mezerou. Abeceda v tomto případě obsahuje deset cifer a jeden speciální znak mezeru. Dalším triviálním problémem je pro libovolný vstup odpovědět „Drbu vrbu". Příkladem náročnějšího problému může být hledání prvočíselného rozkladu přirozeného čísla či hledání nejdelší kružnice v grafu.

Program řešící daný problém je typicky posloupnost počítačových instrukcí, které pro každý povolený vstup vyprodukují požadovaný výstup. Zápis programu v libovolném rozumném programovacím jazyku, jako jsou C, Java či Pascal, popisuje jednotlivé kroky, které budou během výpočtu vykonány.

Turingovy stroje

Programy zapsané v běžných programovacích jazycích je obvykle velmi náročné analyzovat. Je složité porozumět tomu, co se děje v procesoru počítače či v jeho paměti a z teoretického pohledu téměř nemožné přesně odhadnout, jak dlouho výpočet potrvá, případně kolik přesně operací počítač vykoná. Proto se matematici rozhodli navrhnout abstraktní počítač, který bude dostatečně jednoduchý ke zkoumání. Je sice mnohem náročnější ho programovat a je méně výkonný, ale ukazuje se, že tento rozdíl není natolik podstatný a model nám poskytuje důležité nástroje ke zkoumání reálných počítačů.

Definice.

(1) *Abeceda* je libovolná konečná množina. Její prvky budeme nazývat *symboly* či *znaky*. Například $\{0, 1\}$ je binární abeceda, $\{a, b, \dots, z\}$ je abeceda malých anglických písmen a $\{7, X, \heartsuit, \natural\}$ jiná možná abeceda.

(2) *Slovem* nad abecedou Σ nazveme konečnou posloupnost jejích symbolů. Slovo u délky n (značíme $|u| = n$) zapíšeme jako $u = a_1 a_2 \dots a_n$.

(3) *Jazyk* nad abecedou Σ je množina slov nad abecedou Σ. Jazyk může být jak konečný, např. $\{00, 01, 10, 11\}$, tak nekonečný, např. $\{0, 01, 010, 0101, \dots\}$.

Dále zavedeme teoretický model počítače poprvé popsaný britským matematikem Alanem Turingem. Tento stroj sestává z potenciálně nekonečné pracovní pásky, což je posloupnost políček, z nichž na každém může být zapsaný právě jeden symbol dané abecedy. Výpočetní jednotka stroje je tvořena takzvanou *hlavou*, která je vždy nastavena na jedno z políček pásky a může z něj přečíst aktuální symbol či na něj symbol zapsat. Dále je výpočetní jednotka vždy v jednom ze *stavů* z předem známé množiny možných stavů. Na začátku výpočtu je stroj v nějakém stavu q_0, na pásce je zapsaný vstup a hlava ukazuje na první symbol vstupu.

Samotný výpočet se poté skládá z kroků, kde v každém kroku se pouze na základě aktuálního stavu jednotky a čteného symbolu na pásce stroj rozhodne, do kterého stavu se přesune, zda se pohne hlava a co se zapíše na pásku. Formálně se jedná o funkci dvou parametrů (aktuálního stavu a čteného symbolu), jejímž výstupem je trojice (q, a, m). Zde q vyjadřuje nový stav stroje, symbol a je zapsán na pásku na aktuální pozici hlavy a m popisuje, jak se pohne hlava po vykonání operace. Popsané funkci se říká *přechodová funkce*. Dostane-li se stroj do jednoho z *koncových stavů*, výpočet končí a vstup je přijat. Pokud v aktuálním stavu není definována přechodová funkce, případně pokud se stroj nikdy nezastaví, je vstup odmítnut.

Popsaný stroj nemá žádný výstup a pouze *rozhoduje*, zda zadaný vstup patří do zkoumaného jazyka, či nikoliv. Řešení takovýchto problémů je přesto dostatečně zajímavé a ukážeme si, že po vyřešení rozhodovací verze problému je již vypsání požadovaného výstupu většinou poměrně jednoduché.

Definice. *Deterministický Turingův stroj (DTS)* je pětice $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

(1) Q je konečná množina stavů.

(2) Σ je abeceda.

(3) $\delta\colon (Q \setminus F) \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\}$ je přechodová funkce (program) Turingova stroje. Zjednodušeně pro každý stav a symbol z abecedy říká, do jakého stavu se stroj přesune, co se zapíše na pásku a kterým směrem se pohne hlava.

(4) $q_0 \in Q$ je počáteční stav stroje.

(5) $F \subset Q$ je množina koncových strojů.

Definice. *Konfigurací Turingova stroje* $T = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme konečnou část pásky, na kterou byl zapsán nějaký symbol, společně se stavem stroje a pozicí jeho hlavy. Konfigurace určuje všechny potřebné informace pro pokračování výpočtu stroje.

Cvičení. Navrhněte DTS, který přijme zadaný vstup právě tehdy, když se skládá ze všech stejných symbolů.

Definice. *Deterministickým Turingovým strojem s výstupem* nazveme deterministický Turingův stroj, který má navíc jednu výstupní pásku s vlastní hlavou. Na výstupní pásku může pouze zapisovat a hlava se při každém zápisu pohne doprava. Výstup je tedy zapisován po znacích.

Cvičení. Uvažme graf a hledejme v něm nejdelší cestu, tj. neopakující se posloupnost vrcholů, kde každé dva po sobě jdoucí jsou spojené hranou. Uvažme DTS T, který pro zadanou délku k rozhodne, zda v grafu existuje cesta délky k. Navrhněte DTS s výstupem, který může využívat T a nalezne nejdelší cestu v zadaném grafu.

Definice. Od dříve popsaného stroje se *n-páskový deterministický Turingův stroj* liší tím, že má n pásek (konečně mnoho). Každá z pásek má vlastní hlavu a přechodová funkce se rozhoduje podle symbolů pod všemi těmito hlavami, zapisuje v každém kroku na všechny pásky a posouvá všemi hlavami. Navíc v tomto případě obvykle vymezujeme vstupní pásku, která obsahuje zadaný vstup a není na ni možné zapisovat, slouží pouze ke čtení vstupu. Ostatní pásky poté nazýváme pracovní pásky.

Věta. *Každý problém řešitelný n-páskovým DTS je řešitelný také jednopáskovým DTS.*

Definice. *Nedeterministický Turingův stroj (NTS)* je stroj, který se od Turingova stroje liší přechodovou funkcí. Ta v tomto případě neudává přesný stav, symbol a posun hlavy, ale nabízí místo toho několik možností těchto trojic. V případě, že funkce nabízí pro každou konfiguraci stroje pouze jednu možnost, jedná se o deterministický stroj. Nedeterminismus se projeví, pokud je možností více, stroj si poté může vybrat libovolnou z nich (například náhodně). Vstup bude nedeterministickým strojem přijat, pokud existuje popsaná posloupnost rozhodnutí, při kterém by byl vstup přijat (jinými slovy – stroj si může vybírat možnosti takovým způsobem, aby nakonec vstup přijal).

Cvičení. Ukažte, že každý problém řešitelný pomocí NTS je také řešitelný pomocí DTS. Jinými slovy, že umíme nedeterminismus simulovat pomocí deterministického stroje.

Věta. (Gödelovo číslo) *Každý Turingův stroj T je možné zakódovat konečným binárním slovem. Takovému slovu budeme říkat Gödelovo číslo stroje T či kód stroje T a značit jej* $\text{Kód}(T)$.

Definice. *Univerzální Turingův stroj U* je DTS takový, který umí simulovat libovolný DTS T. To znamená, že pro libovolný vstup v stroje T, pokud předložíme stroji U jako vstup Kód(T) a v, dopadne výpočet stejně, jako by dopadl výpočet stroje T nad vstupem v.

Věta. *Existuje univerzální Turingův stroj.*

Definice. (Halting problém) Uvažme libovolný DTS T a jeho vstup v. Hledáme takový stroj, jehož vstupem bude Kód(T) a v, vždy se zastaví a přijme vstup právě tehdy, když se T zastaví nad vstupem v.

Věta. *Neexistuje DTS řešící Halting problem.*

Složitost problémů

Definice. Nechť T je DTS a označme $L(T)$ jazyk přijímaný strojem T. Řekneme, že T má *polynomiální časovou složitost*, pokud existuje polynom p takový, že pro každé $w \in L$ vykoná T nad vstupem w nejvýše $p(|w|)$ kroků. Stroj smí tedy vykonat nejvýše polynomiálně mnoho kroků vzhledem k velikosti vstupu.

Definice. Označme P množinu všech problémů řešitelných DTS s polynomiální časovou složitostí.

Definice. Řekneme, že NTS T má *polynomiální časovou složitost*, pokud pro každý přijímaný vstup nejkratší z přijímacích výpočtů vykoná nejvýše polynomiálně mnoho kroků vzhledem k délce vstupu.

Definice. Označme NP množinu všech problémů řešitelných NTS s polynomiální časovou složitostí.

Tvrzení. $P \neq NP$.

Definice. Řekneme, že problém A je *polynomiálně převoditelný* na problém B, pokud existuje DTS s výstupem s polynomiální časovou složitostí takový, že každý vstup problému A převede na vstup problému B (jako vstup má vstup problému A a na výstup dá vstup problému B) tak, aby problém B měl stejný výstup jako problém A. Značíme $A \propto B$.

Definice. (Hádací páska, orákulum) Turingův stroj můžeme také doplnit o tzv. *orákulum*, což je páska, ze které je možné pouze číst a na které se vyskytuje náhodná posloupnost nul a jedniček.

Definice. Turingův stroj s orákulem T může občas odpovědět chybně. Konkrétně jsou možné dva druhy chyb:

(1) A: stroj přijme vstup, který neměl přijmout,
(2) B: stroj nepřijme vstup, který měl přijmout.

Pravděpodobnosti jednotlivých chyb budeme značit $\Pr(A)$, resp. $\Pr(B)$. Řekneme, že T s polynomiální časovou složitostí náleží do třídy

(1) P, pokud $\Pr(A) = 0$ a $\Pr(B) = 0$,
(2) NP, pokud $\Pr(A) = 0$ a $\Pr(B) < 1$,
(3) RP, pokud $\Pr(A) = 0$ a $\Pr(B) \leq \frac{1}{2}$,
(4) BPP, pokud $\Pr(A) \leq \frac{1}{3}$ a $\Pr(B) \leq \frac{1}{3}$.

Catalanova čísla

Martin Hora

Abstrakt. Pod tímto názvem se ukrývá posloupnost přirozených čísel, která se uplatní při řešení řady kombinatorických úloh. Na přednášce si ukážeme, jak Catalanova čísla odvodit a co pomocí nich lze počítat.

Definice. *Obdélníkem* $m \times n$ rozumíme obdélník ve čtvercové mřížce, který je m políček vysoký a n políček široký. Cestou v obdélníku pak nazýváme trasu z levého dolního do pravého horního rohu, která vede po hranách mřížky, a to pouze doprava a nahoru.

Cvičení. Dokažte, že v obdélníku $m \times n$ existuje $\binom{m+n}{n}$ různých cest.

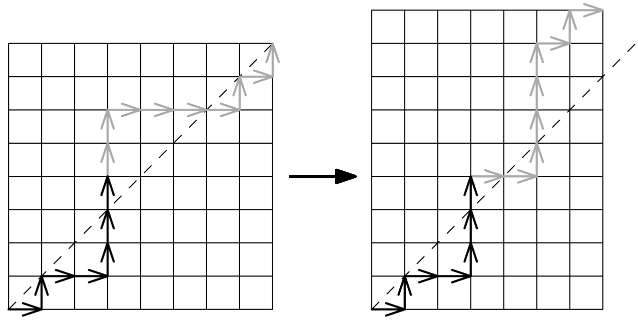
Definice. *Úhlopříčkou* ve čtverci $n \times n$ nazveme úsečku spojující levý dolní roh s pravým horním.

Definice. Počet různých cest ve čtverci $n \times n$, které se celé nacházejí pod úhlopříčkou (mohou se jí dotýkat), označíme C_n, nazýváme ho je *n-té Catalanovo číslo.*

Tvrzení.

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Návod. Budeme počítat cesty, které úhlopříčku překročí, a ty pak odečteme od celkového počtu cest ve čtverci $n \times n$.



U každé cesty, která překročí úhlopříčku, zbytek cesty převrátíme, jak naznačuje obrázek. (Místo nahoru půjdeme doprava a naopak.) Takto pozměněná cesta je cestou v obdélníku $(n+1)\times(n-1)$. Zároveň každou cestu v obdélníku $(n+1)\times(n-1)$ můžeme opět vhodným překlopením transformovat na cestu ve čtverci $n\times n$, která překračuje úhlopříčku.

Existuje tedy bijekce mezi cestami v obdélníku $(n+1)\times(n-1)$ a cestami ve čtverci $n\times n$ překračujícími úhlopříčku.

Cvičení. Kolik existuje různých cest v obdélníku $m\times n$, které jsou celé pod úhlopříčkou levého čtverce $m\times m$?

Rekurentní vzorec

Tvrzení. *Mějme posloupnost $(a_n)_{n\geq 0}$ splňující vztahy*

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}.$$

Pak $a_n = C_n$.

Příklady

Příklad 1. Kolik existuje korektních uzávorkování n párů závorek?

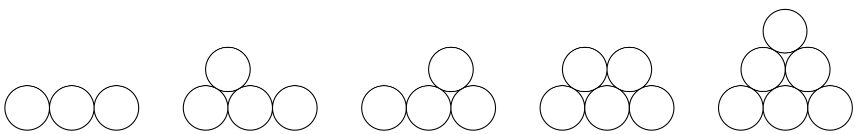
Příklad 2. Kolik existuje zakořeněných stromů s n vrcholy?

Příklad 3. Kolik existuje posloupností délky n splňujících $1\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ a navíc $a_i\leq i$?

Příklad 4. Kolika způsoby lze vyplnit tabulku $2\times n$ čísly 1 až $2n$ tak, aby čísla ve všech řádcích i ve všech sloupcích byla rostoucí?

Příklad 5. Nechť n je přirozené číslo. Kolik existuje cest v kartézské soustavě souřadnic, které vedou z bodu $(0,0)$ do bodu $(2n,0)$, takových, že z libovolného bodu (x,y) cesta pokračuje buď do bodu $(x+1,y+1)$ nebo do bodu $(x+1,y-1)$? Kolik z těchto cest nikdy neklesne pod osu x?

Příklad 6. Kolika způsoby je možné navršit mince na hromádku, je-li ve spodní řadě n mincí? Na obrázku jsou všechny možné hromádky pro $n=3$.

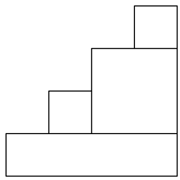


Příklad 7. Kolika způsoby si může $2n$ lidí podat ruce přes kulatý stůl tak, aby se žádné dva páry rukou nekřížily?

Příklad 8. Kolik existuje binárních stromů na n vrcholech? (Rozlišujeme „pravé“ a „levé“ syny.)

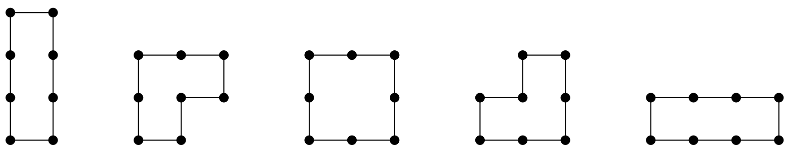
Příklad 9. Mějme konvexní n-úhelník. Kolika způsoby ho lze rozdělit na $n-2$ trojúhelníků takových, že jejich vrcholy jsou vrcholy původního n-úhelníka?

Příklad 10. Kolika způsoby je možno postavit schodiště o n schodech pomocí n obdélníků? Na obrázku je schodiště o 4 schodech postavené ze 4 obdélníků.

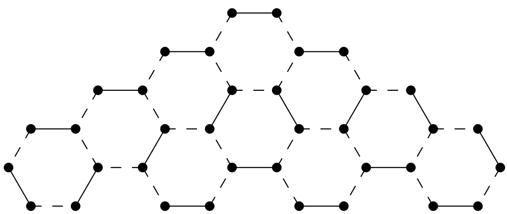


Příklad 11. Kolik je permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$, které neobsahují klesající podposloupnost délky větší než 2?
(Označíme-li permutaci p, pak neexistují $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ takové,že $i < j < k$ a zároveň $p(i) > p(j) > p(k)$.)

Příklad 12. Mějme čtvercovou mřížku s počátkem $(0, 0)$. Kolik v této mřížce existuje dvojic cest délky n takových, že začínají v $(0, 0)$, z bodu (x, y) pokračují buď do bodu $(x+1, y)$ nebo $(x, y+1)$, a navíc se tyto dvě cesty protínají pouze v počátku a na konci? Obrázek ukazuje příklad všech takových dvojic cest pro n rovno čtyřem.



Příklad 13. Kolik existuje úplných párování vrcholů na šestiúhelníkové pyramidě šířky n? Úplné párování na šestiúhelníkové pyramidě šířky 4 může vypadat například takto:



Literatura a zdroje

[1] Anča Chejnovská, *Catalanova čísla*, 2012 Domašov

[2] Math Images,
http://mathforum.org/mathimages/index.php/Catalan_Numbers

[3] Richard P. Stanley, *Exercises on Catalan and Related Numbers*,
http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catalan.pdf

[4] Tomislav Došlić, *Croatica Chemica Acta*

Nekonečno

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek představuje základní vlastnosti pojmu sloužícího ke srovnávání množin podle velikosti, tzv. mohutnosti. Dále obsahuje několik úloh a klasických tvrzení týkajících se (převážně spočetného) nekonečna.

Co je to nekonečno?

To je přece jasné, *nekonečno* je to, co nemá konec. Nebo že by to nebylo tak snadné? Intuitivně tento pojem používáme pro taková „množství“, která nejdou spočítat, jinými slovy kvantitativně vyjádřit nějakým přirozeným číslem. To už vypadá slibně. Znamená to, že si při počítání věcí vystačíme s přirozenými čísly a magickým symbolem ∞? Kolik je potom $\infty \cdot \infty$? A kolik z nekonečně mnoha jablek nám zbyde, když jich nekonečno snímе? Jistě cítíte, že budeme muset být při práci s nekonečnem opatrní. To samé cítili i matematici v devatenáctém století, kteří začali s matematicky korektním zkoumáním nekonečna. Výsledkem tohoto snažení je *teorie množin*, která se kromě práce s nekonečnem náhodou hodí i jako základní jazyk celé matematiky. Pro nás je ale ve své celé kráse poněkud složitá a formální, vezmeme si z ní tedy jen to nejnutnější.

Srovnávání velikostí množin

Když chtějí dva pastýři zjistit, čí stádo je větší, prostě je spočítají a porovnají získaná čísla. Tento způsob se pro obecné (tedy i nekonečné) množiny zjevně moc nehodí. Můžeme ale pastýřům navrhnout, aby svá stáda zkusili pěkně ovečku po ovečce popárovat. Pokud se jim to podaří, pak jsou jejich stáda stejně velká. Pokud jednomu nějaké ovečky přebydou, je jeho stádo větší.

Definice. Řekneme, že množiny A, B *mají stejnou mohutnost*, pokud mezi A a B existuje bijekce, tedy zobrazení, které je prosté a na (píšeme $A \approx B$). Řekneme, že množina A má *mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti* B, pokud existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B (zapisujeme $A \preccurlyeq B$). Řekneme, že množina A má *mohutnost menší než* B, pokud existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B a neexistuje prosté zobrazení množiny B do množiny A (zapisujeme $A \prec B$). Analogicky definujeme vztahy $A \succcurlyeq B$, $A \succ B$.

Konečně se dostáváme k definici nekonečnosti.

Definice. Množina A je *nekonečná*, pokud má neostře větší mohutnost než množina přirozených čísel, tedy pokud $\mathbb{N} \preccurlyeq A$. Množina A je *konečná*, pokud není nekonečná. Pokud $A \preccurlyeq \mathbb{N}$, pak říkáme, že A je *spočetná*. Laicky řečeno spočetné jsou ty množiny, které jdou očíslovat přirozenými čísly (ne nutně všemi).

Všimněme si, že konečné množiny srovnáváme stejně jako dřív, jen bez prostředníků v podobě přirozených čísel.

Příklad. (hotel U Ležaté osmy) Uvažme hotel, který má pokoje očíslované právě všemi přirozenými čísly. Všechny pokoje jsou obsazené a každý host vyžaduje celý pokoj pro sebe.

(i) Do hotelu přijel nový host. Dokážete jej ubytovat, aniž byste museli nějakého stávajícího hosta vyhodit?
(ii) Do hotelu přijelo spočetně mnoho nových hostů. Ubytujte je.
(iii) Každý ze spočetně mnoha autobusů přivezl spočetně mnoho nových hostů. Co teď?

Nyní již snadno vyřešíme následující cvičení.

Cvičení. Dokažte, že $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$.

Příklad. Dokažte, že $(0, 1) \approx \langle 0, 1 \rangle$.

Takové tvrzení by asi mělo platit, jak ale takovou bijekci najít? K tomu se nám hodí následující důležitá věta.

Věta. (Cantor–Bernstein) *Pokud $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq A$, pak už $A \approx B$.*

Zatím všechny množiny, se kterými jsme pracovali, byly spočetné. Nabízí se otázka, zda existuje nějaká nespočetná. To a mnohem víc říká následující věta:

Věta. (Cantor) *Množina všech podmnožin množiny A (tuto množinu značíme $\mathcal{P}(A)$) je ostře větší než A.*

Cvičení. S použitím předchozí věty dokažte, že neexistuje množina všech množin.

Tvrzení. *Platí $I \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, kde I je libovolný interval.*

Příklad. Kolik je všech posloupností reálných čísel?

Příklad. Najděte nespočetně mnoho podmnožin $\mathbb{N}$ uspořádaných inkluzí.

Pro zajímavost ještě jedno zajímavé tvrzení o mohutnostech množin, jehož důkaz již není tak snadný:

Tvrzení. *Je-li A nekonečná, pak $A \times A \approx A$.*

A pro odlehčení jeden nekonečně malý rozdíl:

Úloha. Kolik je $1 - 0{,}\overline{9}$?

Úlohy

Dosti bylo teorie, pojďme se podívat na nějaké úlohy a tvrzení související s nekonečnem. V této části budeme přívlastek „nekonečný“ používat ve významu „nekonečný spočetný“, protože se spočetnými množinami se dá ještě celkem přirozeně a přitom korektně pracovat. Jistě vás tedy nepřekvapí, že klíčovým pojmem bude *posloupnost.*

Úloha. Ve známé úloze postavil zlý čaroděj svoje zajatce do řady, nasadil každému černý nebo bílý klobouk a nechal je odzadu tipovat jeho barvu. Kdo uhodl, byl propuštěn a zajatci si mohli na začátku domluvit strategii. Otázkou je, kolik nejvýše zajatců se mohlo s jistotou zachránit. Co kdyby zajatců bylo nekonečno, barev klobouků libovolně a museli si tipnout všichni najednou? Mohlo by se zdát, že chudáci zajatci nemají šanci. Opak je pravdou (v jistém smyslu): dokažte, že se mohou zachránit všichni až na konečně mnoho.

Úloha. Do tipovací soutěže se přihlásilo sto soutěžících. Dostali spočetně mnoho krabic, v každé nějaké reálné číslo. Každý z nich nezávisle na ostatních otevře všechny krabice až na jednu a její obsah tipne. Vymyslete strategii, se kterou se co nejvíce soutěžících jistě strefí.

Tvrzení. *Z každé posloupnosti lze vybrat monotónní podposloupnost.*

Tvrzení. (nekonečná Ramseyovka) *Když je každá hrana úplného nekonečného grafu obarvena jednou z konečně mnoha barev, existuje nekonečný jednobarevný podgraf.*

Úloha. Kolik se do roviny vejde disjunktních

(i) kružnic,
(ii) kruhů,
(iii) osmiček?

Literatura a zdroje

Pokud vás nekonečno a množiny zajímají, doporučuji se podívat na starý PraSečí seriál *Nekonečno*, který lze najít na stránce *Minulé ročníky.* Pro seriózní studium je pak ideální kniha *Teorie množin* (Balcar, Štěpánek, Academia, 1986). Několik úloh jsem převzal z příspěvku *TeMno hrátky* od Mirka Olšáka z roku 2013.

Stejnolehlost

David Hruška

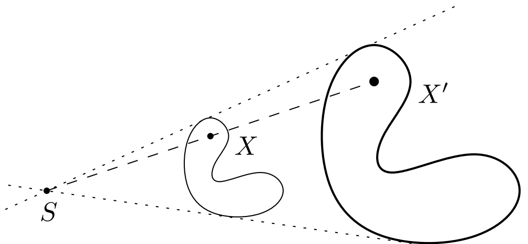
Abstrakt. Příspěvek ukazuje základní vlastnosti stejnolehlosti. Dále obsahuje přes dvacet různě obtížných úloh na procvičení.

Máte po ruce balónek? Nemáte-li, nevadí – představte si jej. Zkuste ho nafouknout a vyfouknout. Povšimněte si, že se při tom mění pouze velikost (nebo „měřítko“) balónku, nikoliv jeho tvar. A přesně totéž dělá stejnolehlost. Její velký přínos řešení geometrických úloh spočívá v tom, že se s její pomocí dobře pracuje s podobnými[1] objekty, což je způsobeno právě tím, že zachovává tvary objektů.

Definice. Je dán bod S a reálné číslo k, $k \neq 0$. *Stejnolehlost se středem S a koeficientem k* je zobrazení, které přiřazuje:

(i) každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí $|SX'| = |k| \cdot |SX|$ (přitom pro $k > 0$ leží bod X' na polopřímce SX a pro $k < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné),

(ii) bodu S bod $S' = S$.



Tvrzení. (Vybrané vlastnosti) *Stejnolehlost*

(i) *zobrazuje kružnice na kružnice,*

(ii) *zachovává poměry délek,*

(iii) *zobrazuje přímky na přímky s nimi rovnoběžné.*

(iv) *Pro dva podobné mnohoúhelníky s rovnoběžnými odpovídajícími si stranami existuje stejnolehlost (případně posunutí či identita), která zobrazuje jeden na druhý.*

[1] Přesnější by bylo říct s „rovnoběžně podobnými“, ale k tomu se dostaneme.

Příklady k procvičení

U příkladů na stejnolehlost jsou typické tyto znaky:

(i) dvě nebo více kružnic se dotýkají (dotyk je střed stejnolehlosti),

(ii) dvě kružnice se v úloze vyskytují se společnou tečnou (tečny obrazů kružnic v různých stejnolehlostech budou rovnoběžné),

(iii) dokazujeme, že tři body leží v přímce (jeden z nich bude středem stejnolehlosti zobrazující zbylé dva na sebe),

(iv) dokazujeme, že se tři přímky protínají v jednom bodě (hledaný bod bude střed stejnolehlosti).

Příklad 1. Kružnice k, l mají vnitřní dotyk v bodě T (k leží uvnitř l). Na l zvolíme body A, B tak, že AB se dotýká k v bodě S. Dokažte, že TS je osou úhlu ATB.

Příklad 2. Nechť $ABCD$ je lichoběžník s rovnoběžnými stranami AB a CD, jeho průsečík úhlopříček označme E. Najdeme body F a G tak, aby trojúhelníky ABF a CDG byly rovnostranné a zároveň byly vně $ABCD$. Dokažte, že E, F a G leží na jedné přímce.

Příklad 3. (Eulerova přímka) Je dán trojúhelník ABC. Body H, G a O jsou postupně ortocentrum, těžiště a opsiště. Dokažte, že tyto tři body leží na jedné přímce a zároveň platí $|GH| = 2 \cdot |GO|$.

Příklad 4. Je dán trojúhelník ABC. Body dotyků úsečky BC s kružnicí vepsanou a připsanou označme postupně D a E. Přímka AE protne kružnici vepsanou blíže bodu A v bodě F. Dokažte, že DF je kolmá na BC.

Příklad 5. Mějme přímku p a dvě kružnice k_1, k_2, které se dotýkají p ze stejné strany postupně v bodech T a U. Kružnice k neprotíná p a dotýká se zvnějšku k_1 a k_2 postupně v bodech K a L. Dokažte, že KT, LU a k mají společný bod.

Příklad 6. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T. Navíc se obě vnitřně dotýkají kružnice m postupně v bodech R, S. Druhý průsečík přímky RT s kružnicí m označme Q. Dokažte, že $|\sphericalangle TSQ| = 90^\circ$.

Příklad 7. Jsou dány dvě kružnice k_1 a k_2, které se zvenčí dotýkají v bodě T. Dokažte, že pro každé dva body A na k_1 a B na k_2 takové, že platí $|\sphericalangle ATB| = 90^\circ$, prochází přímka AB pevným bodem.

Příklad 8. Je dána pevná kružnice k se středem O a bod A mimo ni. Po k se hýbe bod X tak, že O, A a X nejsou v přímce. Nejděte množinu průsečíků AX s osou úhlu AOX.

Příklad 9. Nechť ABC je trojúhelník a nechť D je průsečík tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ABC v bodě A a přímky BC. Nechť E je průsečík kolmice na BC v B a osy strany BA. Analogicky nechť F je průsečík kolmice na BC v bodě C a osy strany CA. Dokažte, že D, E, F leží v přímce.

Příklad 10. V trojúhelníku ABC označme O střed kružnice vepsané, P střed kružnice připsané ke straně BC a D průsečík osy úhlu CAB se stranou BC. Dokažte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(MO 59–II–4)

Příklad 11. V trojúhelníku ABC protínají osy vnitřních úhlů kružnici opsanou postupně v bodech S_A, S_B, S_C. Kružnice vepsaná se dotýká stran a, b, c postupně v bodech K, L, M. Dokažte, že přímky S_AK, S_BL, S_CM procházejí jedním bodem.

Skládání stejnolehlostí

Silným a o něco obtížnějším nástrojem je skládání stejnolehlostí. Budeme používat následující velmi užitečné lemma.

Lemma 12. *Nechť* $\mathrm{H}_1(S_1, k_1)$ *a* $\mathrm{H}_2(S_2, k_2)$ *jsou stejnolehlosti takové, že* $S_1 \neq S_2$ *a* $k_1 \cdot k_2 \neq 1$. *Pak jejich složením je opět stejnolehlost, a to se středem na přímce* S_1S_2.

Příklad 13. V rovině jsou dány tři neprotínající se kružnice. Pro každé dvě sestrojme průsečík jejich vnějších společných tečen. Dokažte, že tyto tři průsečíky leží na přímce.

Příklad 14. V trojúhelníku ABC protínají osy vnitřních úhlů kružnici opsanou postupně v bodech S_A, S_B, S_C. Kružnice vepsaná se dotýká stran a, b, c postupně v bodech K, L, M. Dokažte, že přímky S_AK, S_BL, S_CM procházejí jedním bodem.

Příklad 15. V trojúhelníku ABC označme k kružnici jemu opsanou. Najdeme kružnici k_a, která se dotýká přímek AB a AC a navíc se vnitřně dotýká k v bodě A'. Obdobně najdeme k_b, k_c a body B' a C'. Dokažte, že AA', BB' a CC' procházejí jedním bodem.

Příklad 16. V trojúhelníku jsou dány tři kružnice k_a, k_b, k_c tak, že každé dvě mají vnější dotyk, k_a se dotýká stran AB, AC, k_b stran BC, BA a k_c stran CA, CB. Bod dotyku k_b s k_c označíme A_1, bod dotyku k_c s k_a označíme B_1. Dokažte, že přímky AB_1, BA_1 a osa úhlu u vrcholu C procházejí jedním bodem.

Příklad 17. V rovině jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l, přičemž k leží uvnitř l. Buď m kružnice, která má s k vnější dotyk v bodě K a s l vnitřní dotyk v bodě L. Dokažte, že KL prochází pevným bodem X nezávislým na volbě m.

Příklad 18. Jsou dány kružnice k_1, k_2 a k_3 takové, že žádná neleží uvnitř jiné. Kružnice l s nimi má vnitřní dotyk v bodech A_1, A_2 a A_3 a kružnice m s nimi má vnější dotyk v bodech B_1, B_2 a B_3. Dokažte, že přímky A_1B_1, A_2B_2 a A_3B_3 procházejí jedním bodem.

Příklad 19. Do kružnice k je vepsán rovnoramenný trojúhelník ABC, kde $|AB| = |AC|$. Dále vepíšeme kružnice k_b a k_c do úsečí kružnice k, které jsou určené tětivami AC a AB. Ty se dotknou kružnice k postupně v bodech B' a C'. Společná vnější tečna kružnic k_b a k_c protne AC v bodě P a AB v bodě Q. Dokažte, že se přímky $C'Q$ a $B'P$ protnou na ose úhlu BAC. (Polsko 2012)

Těžké úlohy

Příklad 20. Jsou dány dvě kružnice, jejich středy jsou vzdálené 10 jednotek a mají poloměry 1 jednotku a 3 jednotky. Najděte množinu středů úseček XY, kde X leží na jedné kružnici a Y na druhé. (Putnam 1996)

Příklad 21. Je dán trojúhelník DEF. Kružnice procházející body E, F protíná stranu DE v dalším bodě F' a stranu DF v dalším bodě E'. Buď H ortocentrum DEF a H' ortocentrum $DE'F'$. Ukažte, že se přímky EE', FF' a HH' protínají v jednom bodě. (IMO 1995 shortlist)

Příklad 22. Kružnice k a l mají vnější dotyk v bodě T. Navíc mají vnitřní dotyk s kružnicí m v bodech A a B. Společná tečna k a l v bodě T protne m v bodě P. AP protne k podruhé v bodě X, BP protne l podruhé v bodě Y. Dokažte, že XY je společná tečna kružnic k a l.

Příklad 23. Body A, B a C leží v přímce v tomto pořadí. Navíc platí $|AB| \neq |BC|$. Najděte množinu bodů X takových, že $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle BXC|$.

Příklad 24. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník a P bod na straně AB takový, že kružnice vepsaná trojúhelníku CPD mající střed v I se dotýká kružnic vepsaných trojúhelníkům APD, PBC postupně v bodech K, L. Označme $E = AC \cap BD$ a $F = AK \cap BL$. Dokažte, že body E, I, F leží v přímce.

Příklad 25. V trojúhelníku ABC platí $|AC| + |BC| = 3 \cdot |AB|$. Kružnice vepsaná se středem I se dotkne stran BC, AC postupně v bodech D, E. Nechť body K a L jsou obrazy bodů D a E ve středové symetrii se středem v I. Dokažte, že body A, B, K a L leží na jedné kružnici. (IMO 2005 shortlist)

Příklad 26. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, ve kterém $|BA| \neq |BC|$. Označme postupně k_1 a k_2 kružnice vepsané trojúhelníkům ABC, ADC. Předpokládejme, že existuje kružnice k, která se dotýká polopřímky BA za bodem A, polopřímky BC za bodem C a přímek AD, CD. Dokažte, že společné vnější tečny kružnic k_1 a k_2 se protnou na kružnici k. (IMO 2008)

Návody

1. Zobrazení bodu S na kružnici l se středem T. Stačí říci, ze tento obraz leží uprostřed oblouku AB.

2. Stejnolehlost podle bodu P taková, že AB přejde na DC.

3. Zobrazíme vrcholy podle bodu G s koeficientem $-\frac{1}{2}$. Pak výšky přejdou na osy stran.

4. Zobrazíme připsanou na vepsanou podle bodu A.

5. Dokreslíme bod X na k co nejdále od p a dokážeme, že K, T, X a L, U, X leží na přímkách.

6. Označme P bod, kde ST protne m. Stačí dokázat, že PQ je průměr m.

7. Dokážeme, že body jsou na stejném místě v rámci své kružnice.

8. Označme onen průsečík Y. Stačí použít známý fakt, že $\frac{|OX|}{|OA|} = \frac{|XY|}{|YA|}$.

9. Vedeme bodem B rovnoběžku s AC, Stačí dokázat, že E je střed kružnice opsané nově vzniklého trojúhelníku.

10. Najděte středy obou stejnolehlostí mezi vepsanou a připsanou kružnicí, zapište to poměry a vyjádřete jen pomocí délek AP, AD a AO.

11. Je to střed stejnolehlosti, v níž kružnice vepsaná přejde na kružnici opsanou.

13. Interpretujte dva průsečíky jako středy stejnolehlostí, tyto stejnolehlosti složte.

14. Je to střed stejnolehlosti, v níž kružnice vepsaná přejde na kružnici opsanou.

15. Je to střed (kladné) stejnolehlosti, v níž kružnice opsaná přejde na kružnici vepsanou.

16. Je to střed stejnolehlosti zobrazující k_a na kružnici vepsanou.

17. Je to střed stejnolehlosti mezi k a l.

18. Je to střed stejnolehlosti, kdy m přejde na l.

19. Dokreslíme kružnici vepsanou trojúhelníku APQ.

20. Nejdříve zafixujeme Y a zobrazíme X ve stejnolehlosti se středem Y a $k = \frac{1}{2}$. Pak sledujeme, jak se hýbe střed této kružnice, když se Y mění.

21. Tuším, že to nějak stejnolehlostí šlo :-)

22. Mocnost z bodu X.

23. Najdeme střed stejnolehlosti, kdy AB přejde na BC, a zobrazíme podle ní bod X.

24. Dokažte, že $CDPA$ a $CDBP$ jsou tečnové, a dokreslete kružnici, která se dotýká DA, AB a BC.

25. Dokažte, že $|AB| = |CD|$, a pak, že $ABKI$ je tětivový.

26. Dokažte, že body dotyků kružnic s AC jsou symetrické podle středu úsečky. Nakreslete si obrázek tak, že AC je vodorovně. Vzpomeňte si na minulé úlohy.

Literatura

Příspěvek je s malými úpravami převzat od Tomáše „Šavlíka“ Pavlíka, kterému tímto děkuji.

[1] Pepa Tkadlec, *Stejnolehlost a kružnice*, Sborník MKS, Staré Město, 2009.
[2] Andreescu, Rolínek, Tkadlec, *107 Geometry Problems*, XYZ Press, 2013.

Dirichletův princip

Bára Kociánová

Abstrakt. V příspěvku jsou uvedeny dvě základní verze Dirichletova principu. Dále čtenářům představuje příklady jím řešitelné od těch nejjednodušších po složitější. Jedná se hlavně o úlohy z teorie čísel, druhá část se věnuje problémům souvisejícím s geometrií.

Tvrzení s mnoha jmény

Tvrzení, které se za chvíli naučíme využívat, poprvé publikoval německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Už dříve ho pravděpodobně znali jiní, koneckonců toto pravidlo vypadá jednoduše a je velmi intuitivní. Přesto však v matematice nachází široké využití. Sám Dirichlet jej publikoval v rámci své práce o teorii čísel.

Tvrzení. (Dirichletův princip) *Máme-li $n+1$ objektů, které umístíme do n přihrádek, alespoň v jedné přihrádce musí být alespoň dva objekty.*

Poznámka. Toto pravidlo neříká vůbec nic o konkrétních počtech objektů v přihrádkách. Klidně můžeme všechny umístit do jedné přihrádky, nebo do každé jeden a do jedné dva. Stejně tak nám tvrzení nepomůže při hledání přihrádky, ve které je více objektů. Je to prostě jen libovolná jedna z n.

Kromě Dirichletova se princip často nazývá přihrádkový, zásuvkový či holubníkový. V posledním případě se pak uvádí verze s $n+1$ holuby a n místy v holubníku. Možná i proto Dirichletův princip vypadá jako zábavné a nevážné tvrzení.

Ještě si uvedeme obecnější verzi, která mluví o skupinách holubů, a rovnou si ji dokážeme:

Tvrzení. (Zobecněný Dirichletův princip) *Máme-li $kn+1$ objektů a n přihrádek, pak alespoň v jedné přihrádce musí být alespoň $k+1$ objektů.*

Důkaz. Dokážeme sporem. Představme si, že je v každé přihrádce nanejvýš k objektů. Snadno můžeme postupně sečíst počty objektů v jednotlivých přihrádkách. Sčítáme tedy n čísel menších nebo rovných k. Tento součet bude menší nebo roven kn, což je ve sporu s tvrzením, že máme $kn+1$ objektů.

Intuitivní použití

Na Dirichletově principu je zajímavé, že ho lidé používají naprosto samozřejmě. Nevědí sice, jak se jmenuje, ale $n+1$ hostů ke stolu s n židlemi nikdo nebude chtít usadit. Jedna ze známých úloh se například ptá: *V prádelníku máme rozházené černé a bílé ponožky. Kolik ponožek musíme vytáhnout, abychom i poslepu měli určitě dvě ponožky stejné barvy?*

Můžeme si představit, že vytažené ponožky rozdělujeme na dvě hromádky podle barev. To budou naše přihrádky. Samotné ponožky jsou hledané objekty. A chceme-li, abychom měli s jistotou dvě ponožky stejné barvy, tedy v některé přihrádce dvě ponožky, bude naše $n = 2$. Musíme tedy vytáhnout $n + 1 = 3$ ponožky, což nám nejspíš bylo jasné už od začátku.

Hledání přihrádek

V běžných situacích je sice přihrádkový princip intuitivní, jeho síla ale spočívá v problémech, které už neumíme rychle vyřešit. Potom se opravdu hodí mít toto tvrzení zformulované. Nejtěžší bývá uvědomit si, které objekty vystupují jako přihrádky a které jako objekty. Zkusíme si jejich hledání u pár jednoduchých příkladů, abychom to měli snazší v těch komplikovanějších.

Vysvětlete následující:

(1) Je-li v místnosti třináct lidí, alespoň dva se narodili ve stejném měsíci.

(2) Pokud na soustředění přijelo 25 účastníků ze čtyř různých měst, pak alespoň sedm z nich bydlí ve stejném městě.

(3) Jestliže se chce patnáct lidí svézt čtyřmi auty, pak v jednom autě musí jet alespoň čtyři lidé.

(4) Na večírek jsou pozvaní hosté, z nichž se někteří nově (vzájemně) seznámí. Vždy se takto aspoň dva hosté seznámili se stejným počtem lidí.

Odpovězte:

(1) Kolik lidí musíme uvažovat, aby určitě aspoň tři z nich měli narozeniny ve stejný den?

(2) Na přednášku jsou přihlášeni čtyři studenti. Pokaždé na ni přijde nějaká skupinka z nich, vždy aspoň jeden. Kolik musí být aspoň přednášek, aby se dvakrát potkalo stejné složení lidí?

(3) Házeme třemi šipkami na terč. Je rozdělený na pět pásem, postupně od středu za pět, čtyři, tři, dva a jeden bod. Pokud se netrefíme, nedostaneme bod žádný. Kolikrát musíme hodit, abychom dvakrát získali stejný počet bodů?

Úlohy s čísly

Příklad 1. Máme 49 přirozených čísel. Ukažte, že mezi nimi najdeme dvě, jejichž rozdíl je dělitelný 48.

Příklad 2. Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost s diferencí 60, jejímiž členy jsou samá prvočísla. (MKS 18–1–1)

Příklad 3. Ukažte, že ke každému přirozenému číslu n existuje takové číslo v desítkové soustavě zapsané pomocí nul a jedniček: $111\ldots1000\ldots0$, že je dělitelné n.

Příklad 4. Je-li n nesoudělné s 10, pak dokonce existuje jeho násobek zapsaný v desítkové soustavě jen pomocí jedniček: $111\ldots1$. Dokažte.

Příklad 5. Dokažte, že zápis některé mocniny čísla 37 končí sekvencí 00001.

Příklad 6. Máme n přirozených čísel. Dokažte, že z nich můžeme vybrat podmnožinu tak, že součet vybraných čísel je dělitelný n.

Příklad 7. (Erdős a Szekeres) Máme-li přirozená čísla od 1 do 101 napsaná v libovolném pořadí, pak je možné vyškrtat 90 z nich tak, že zbyde monotónní posloupnost. Dokažte.

Příklad 8. (Erdős a Szekeres podruhé – obecnější verze) Z každé posloupnosti délky aspoň $(m-1)(n-1)+1$ můžeme vybrat klesající podposloupnost délky m nebo rostoucí podposloupnost délky n.

Příklad 9. Dokažte, že z 52 přirozených čísel lze vybrat dvojici, jejíž součet nebo rozdíl bude dělitelný 100. Je to možné i pro 51 přirozených čísel?

Příklady s trochou geometrie

Příklad 10. Máme-li pět bodů s celočíselnými souřadnicemi, pak střed úsečky spojující některé dva body bude opět bod s celočíselnými souřadnicemi. Dokažte.

Příklad 11. Tentokrát máme devět bodů s celočíselnými souřadnicemi v prostoru. Platí pak totéž?

Příklad 12. V každém $2n$-úhelníku existuje úhlopříčka, která není rovnoběžná s žádnou stranou.

Příklad 13. Máme zahradu o rozměrech 20×15 metrů. Chceme do ní nasadit stromy tak, aby mezi každými dvěma byla vzdálenost aspoň pět metrů. Kolik nejvíce se do zahrady vejde stromů?

Příklad 14. Po stole o straně jeden metr leze 51 much. Ukažte, že pokud na stůl položíme dnem vzhůru hrnec o poloměru $1/7$, chytíme vždy aspoň tři mouchy.

Příklad 15. Umístíme-li pět bodů do rovnostranného trojúhelníku, určitě budou dva od sebe vzdálené nanejvýš o délku poloviny strany.

Příklad 16. Kolem kulatého stolu je rozestaveno patnáct židlí. U každého místa je cedulka se jménem hosta, který má na dané židli sedět. Poté, co se hosté usadí, se zjistí, že žádný z nich nesedí na svém místě. Dokažte, že je možné pootočit stůl tak, aby aspoň dva hosté zároveň seděli na správných místech.

Literatura a zdroje

[1] David Stanovský, *Dirichletův princip*,
http://mks.mff.cuni.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf
[2] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998
[3] Bukovský, Kluvánek, *Dirichletov princíp*, Mladá Fronta, 1970

Generujúce funkcie

PETER „πTR" KORCSOK

ABSTRAKT. Generujúce funkcie sú silný nástroj, ktorý nám pomáha pri práci s postupnosťami – miesto s nekonečne veľa čísel totiž pracujeme len s jednou funkciou. Obsahom tejto prednášky je predstaviť základné operácie, ktoré môžeme s generujúcimi funkciami vykonávať. Tiež si ukážeme niektoré z aplikácií generujúcich funkcií, ako napríklad overovanie rôznych identít alebo hľadanie explicitných vzorcov pre rekurentné postupnosti.

Citát. Generujúca funkcia je šnúra, na ktorú povesíme postupnosť čísel.
(Herbert Saul Wilf, *Generatingfunctionology*)

Predstavme si, že sme na ulici našli úlohu, ktorej výsledkom má byť postupnosť čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Trápime sa s ňou pomerne dlho, ale nakoniec z tohto boja vyjdeme ako víťazi. Ako ale vyzerá výsledok?

V ideálnom prípade dostaneme priamo predpis pre n-tý člen, napr. $a_n = n^3 + 5$, ktorý platí pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$ Toto je ale častokrát len naše prianie a skutočný svet býva oveľa krutejší. Ako jeden príklad za všetky stačí postupnosť všetkých prvočísel.

Vtedy nám môžu výrazne pomôcť generujúce funkcie – stačí, ak nájdeme „nekonečný" polynóm, ktorého koeficienty tvoria práve hľadanú postupnosť.

Ale skutočne stačí nejaká takáto funkcia? Ako z nej potom získame jednotlivé čísla? A hlavne: ako sa k tej správnej funkcii dopracujeme? To bude práve obsahom tejto prednášky.

Tri... Dva... Jedna... Začíname

Pozrime sa na túto našu zbraň trochu formálnejšie:

Definícia. Majme danú postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ reálnych čísel. Potom funkciu definovanú predpisom

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

kde x je reálna premenná[1], budeme nazývať *generujúcou funkciou*[2] tejto postupnosti.

Nesmieme ale zabudnúť na to, že nás zaujímajú jednotlivé členy postupnosti, preto pod označením $[x^n]A(x)$ budeme rozumieť koeficient pri x^n v „polynóme“ $A(x)$, teda číslo a_n.

Poznámka. V niektorých prípadoch sa nám bude viac hodiť používať *exponenciálnu generujúcu funkciu*

$$A_e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i x^i}{i!}.$$

Ako si ale tieto nekonečné sumy predstavovať? Pokiaľ si sa už stretol(a) s limitami, môžem rovno prezradiť, že

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Voľne preložené, hľadáme číslo, ku ktorému sa konečné súčty „blížia“. Asi Ťa už napadlo, že takéto číslo nemusí vždy existovať. Našťastie platí nasledujúce tvrdenie, na jeho dôkaz ale potrebujeme znalosti z matematickej analýzy, preto ho radšej vynecháme. Rovnako sa uspokojíme s tým, že predpoklady platia a nebudeme ich formálne overovať.

Tvrdenie. *Nech $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je postupnosť reálnych čísel a nech existuje číslo K, že pre každé $n \geq 1$ platí $|a_n| \leq K^n$. Potom pre každé $x \in \left(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$ rad*

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

konverguje. Navyše, funkcia $A(x)$ má v bode 0 všetky derivácie a pre každé $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$[x^n]A(x) = a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!},$$

kde $a^{(n)}(0)$ označuje n-tú deriváciu funkcie $A(x)$ v bode 0.

[1] Úplne správne by sme mali používať komplexnú premennú, vo väčšine príkladov si ale vystačíme s reálnou.

[2] V niektorých, najmä českých, zdrojoch sa používa označenie *vytvorujúca funkcia*.

Naša prvá generujúca funkcia

Na hodine matematiky si sa už asi stretol(a) s geometrickým radom

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n,$$

a teda už možno vieš, že pre $x \neq 1$ sa tento súčet rovná

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Dokázať sa to dá napríklad roznásobením výrazu $(1 - x)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)$. Teraz by sme radi našli podobný vzorec aj pre nekonečný súčet.

Príklad 1. Ako vyzerá generujúca funkcia pre postupnosť $(1, 1, 1, \dots)$? Podarí sa Ti nájsť aj exponenciálnu generujúcu funkciu tejto postupnosti?

Operácie s funkciami

Keď už máme aspoň jednu generujúcu funkciu, pozrime sa, aké operácie máme povolené na vytváranie ďalších funkcií. Vždy budeme predpokladať, že $A(x)$ generuje postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ a $B(x)$ postupnosť $(b_0, b_1, b_2, \dots)$.

(1) Súčet funkcií $A(x) + B(x)$ potom generuje postupnosť

$$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots).$$

(2) Nech α je ľubovoľné reálne číslo. Potom funkcia $\alpha A(x)$ generuje postupnosť

$$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots).$$

(3) Pre ľubovoľné prirodzené číslo n generuje funkcia $x^n A(x)$ postupnosť

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{n\times}, a_0, a_1, a_2, \dots),$$

teda postupnosť posunutú o n miest doprava.

(4) Podobne vieme posúvať aj doľava, len nesmieme zabudnúť na počiatočné členy: generujúcu funkciu pre $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$ dostaneme vzťahom

$$\frac{A(x) - \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}\right)}{x^n}.$$

(5) Pokiaľ $b_0 = 0$, môžeme si dovoliť dosadiť $B(x)$ miesto x do $A(x)$:

$$A(B(x)) = a_0 + a_1 B(x) + a_2 B(x) B(x) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i B^i(x).$$

Najčastejšie ale aj tak budeme dosadzovať polynómy $B(x) = \alpha x$ pre postupnosť $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots)$ alebo $B(x) = x^n$ pre vloženie $n-1$ núl medzi každé po sebe idúce členy postupnosti.

(6) Pomerne často sa používajú dve operácie z matematickej analýzy – derivácia a integrál. Deriváciou funkcie $A(x)$ dostaneme funkciu $A'(x)$, ktorá generuje postupnosť $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$.

Naopak zintegrovaním funkcie $A(x)$ dostaneme funkciu $\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t$ generujúcu postupnosť $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \dots)$.
Pokiaľ si sa ešte s deriváciami a integrálmi nestretol(a), nezúfaj. Základy potrebné k týmto príkladom sa naučíme na prednáške a zložitejším použitiam sa vyhneme veľkým oblúkom.

(7) Asi najzložitejšou operáciou je násobenie funkcií:

$$\begin{aligned} A(x)B(x) = {} & a_0 b_0 \\ & + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x \\ & + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 \\ & \vdots \\ & + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)\, x^n \\ & \vdots \end{aligned}$$

Dostávame teda funkciu $C(x) = A(x)B(x)$ a jej odpovedajúcu postupnosť $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ – túto postupnosť často odborne nazývame *konvolúcia* postupností $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ a $(b_0, b_1, b_2, \dots)$.

Trochu oddychu od teórie

Využitie týchto operácií si teraz trochu vyskúšame.

Príklad 2. Nájdi generujúcu funkciu pre nasledujúce postupnosti.

(i) $(2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots)$

(ii) $(1, 0, 3, 0, 9, 0, 27, \dots)$

(iii) $(2015, 34, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

(iv) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

(v) $(1, 1, -2, 2, 4, 4, -8, 8, 16, 16, -32, 32, \dots)$

(vi) $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots)$

Príklad 3. Aké postupnosti generujú nasledujúce funkcie?

(i) $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$

(ii) $\dfrac{1}{1+2x}$

(iii) $\dfrac{1}{1-x^2}$

(iv) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

(v) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$

No dobre, ale čo s tým?

Už sme si ukázali, čo sú to generujúce funkcie a ako ich vieme rôzne kombinovať. Stále ale nevieme, kde a ako by sme ich vedeli použiť.

Skutočne sa to rovná?

Opäť je dosť pravdepodobné, že nasledujúcu vetu už poznáš zo školy.

Veta. (Binomická) *Pre každé prirodzené číslo n a reálne číslo x platí*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Inými slovami sa dá povedať, že funkcia $(1+x)^n$ generuje postupnosť

$$\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots\right),$$

kde $\binom{n}{k} = 0$ pre každé $k > n$.

Skúsme si dokázať dve rovnosti, kde nám táto veta príde vhod.

Príklad 4. Ukáž, že nasledujúce rovnosti platia.

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$

Kombinačné číslo a aj celú binomickú vetu ale vieme zovšeobecniť aj pre reálne hodnoty.

Veta. (Zovšeobecnená binomická) *Pre ľubovoľné reálne číslo r a nezáporné celé číslo k definujeme kombinačné číslo $\binom{r}{k}$ predpisom*

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!},$$

špeciálne $\binom{r}{0} = 1$. Potom funkcia $(1+x)^r$ generuje postupnosť

$$\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right).$$

Opäť si to rovno skúsime aplikovať.

Príklad 5. Urči nasledujúce koeficienty.

(i) $[x^{15}]\left(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\right)^4$
(ii) $[x^{14}]\left(x^3 + x^5 + x^7 + \cdots\right)^2$
(iii) $[x^4]\,(2+3x)^5\sqrt{1-x}$
(iv) $[x^3]\left(1 - x + 2x^2\right)^9$

Hľadáme presný vzorec pre rekurenciu

Druhou veľkou skupinou aplikácií je práve hľadanie presného vzorca pre n-tý člen postupnosti. Základná myšlienka tohto výpočtu je pomerne jednoduchá, v mnohých prípadoch nám ale zaberie trochu viac času, prípadne bude vyžadovať zručnosti z matematickej analýzy.

Čo teda robiť s rekurentne zadanou postupnosťou? V prvom rade musíme mať vzorec, ktorý platí pre každé n – pre tieto účely predpokladáme, že $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$. Občas si musíme pomôcť výrazmi typu $[n = k]$, ktorý nám „dosadí“ hodnotu 1 práve vtedy, keď je daná podmienka splnená, a 0 vo všetkých ostatných prípadoch.

Následne môžeme obe strany rekurencie vynásobiť x^n a rovno tieto rovnosti pre všetky možné hodnoty n posčítame. Po prípadných kozmetických úpravách dostaneme priamo rovnicu s generujúcou funkciou $A(x)$ v roli „neznámej“, ktorú vyriešime. Tento krok nám občas môže spôsobiť problémy a niekedy dokonca vedie na riešenie diferenciálnych rovníc.

Posledným krokom je už len zistiť hodnotu koeficientu $[x^n]A(x)$ – pre malé hodnoty n môžeme využiť tvrdenie zo začiatku, ale väčšinou sa chceme vyhnúť mnohonásobnému derivovaniu. Využijeme teda rozklad na takzvané *parciálne zlomky*, ktoré nám už dajú priamo hľadaný predpis.

Pokiaľ si predchádzajúcich pár riadkov nepochopil(a), nemusíš sa báť, na prednáške to prejdeme celé na príklade a zistíš, že to nie je až tak strašné.

Príklad 6. Fibonacciho postupnosť je definovaná predpisom $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pre $n \geq 2$ a začiatkom $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Nájdi explicitný vzorec pre číslo f_n.

Pozor... Záplava príkladov!

Príklad 7. Koľkými spôsobmi sa dá pomocou jedno-, dvoj- a päťkorunových mincí zaplatiť presne 23 korún? Uváž možnosti:

(i) Máme len 7 jednokorunových, 6 dvojkorunových a 4 päťkorunové mince.

(ii) Počty mincí nie sú obmedzené.

Príklad 8. V cukrárni predávajú 3 druhy zmrzliny – citrónovú, čokoládovú a vanilkovú. Koľkými spôsobmi je možné nakúpiť 12 zmrzlín, pokiaľ z každého druhu chceme aspoň dve, ale z čokoládovej sú k dispozícii posledné tri porcie?

Príklad 9. V krabici máme 30 červených, 40 modrých a 50 bielych loptičiek, pričom loptičky rovnakej farby sú od seba nerozoznateľné. Koľkými spôsobmi vieme vybrať práve 70 loptičiek?

Príklad 10. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode 12 klasickými kockami padne súčet 30?

Príklad 11. Majme všetky nezáporné celé čísla rozdelené v konečne mnoho (aspoň dvoch) aritmetických postupnostiach, tak, že každé číslo v práve jednej z nich. Dokáž, že potom vždy nájdeme nejaké dve, ktoré majú rovnakú diferenciu.

Príklad 12. Koľko existuje korektných uzátvorkovaní využívajúcich práve n párov zátvoriek?

Príklad 13. Koľkými spôsobmi môžeme vyjsť schodisko s n schodmi, pokiaľ pri každom kroku prejdeme jeden alebo dva schody?

Príklad 14. Koľkými spôsobmi vieme rozmiestniť čísla $1, \ldots, 2n$ do obdĺžnika $2\times n$ tak, aby čísla rástli zľava doprava a zhora nadol?

1	2	4	5	8
3	6	7	9	10

Príklad 15. Koľko existuje rôznych triangulácií pravidelného n-uholníka?

Príklad 16. Lístok do divadla stojí presne 50 korún. Jedného večera prišlo $2n$ divákov, pričom n z nich malo päťdesiatkorunu a zvyšných n stokorunu. Pretože pokladňu tesne pred otvorením vykradli, nie sú v nej na začiatku žiadne peniaze. Aká je pravdepodobnosť, že keď sa návštevníci zoradia pred pokladňou náhodne, tak pokladníčka bude môcť každému z nich vydať?

Príklad 17. Majme nekonečné náhodné slovo využívajúce 26-znakovú abecedu. Spočítaj „priemernú vzdialenosť“ prvého výskytu podslov $BABA$ a $JAGA$ od začiatku slova. Ktoré z nich má väčšiu pravdepodobnosť na skorší výskyt?

Príklad 18. Pre dané prirodzené číslo n označme a_n počet spôsobov, ktorým ho vieme zapísať ako súčet nepárnych čísel (môžu sa aj opakovať), a b_n počet spôsobov, ktorým ho vieme zapísať ako súčet navzájom rôznych celých čísel. Dokáž, že $a_n = b_n$.

Príklad 19. Koľko existuje postupností písmen A, B, C a D dĺžky n, v ktorých A a B nikdy nesusedia?

Literatúra a zdroje

[1] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, 2009.
[2] Herbert Saul Wilf: *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.
[3] Ronald Lewis Graham, Donald Ervin Knuth, Oren Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.
[4] László Lovász: *Combinatorial Problems and Exercises*, AMS Chelsea, 2007.
[5] Martin Tancer: *Kombinatorika*, seriál 27. ročníka MKS.
[6] Knižnica MKS, *https://mks.mff.cuni.cz/library/*.

Funkcionální rovnice

Anh Dung „Tonda“ Le

Úvod

Funkcionální rovnicí míníme takovou rovnici, ve které nevystupují jako hledané neznámé čísla, ale funkce. Na této přednášce si osvojíme práci s funkcionálními rovnicemi a naučíme se některé základní metody jejich řešení.

Substituční metoda

Substituční metoda je základní metodou řešení funkcionálních rovnic a spočívá v následujícím postupu:

Předpokládáme, že už máme řešení funkcionální rovnice, a vhodným dosazením za proměnné se snažíme zjistit, co toto řešení splňuje. Někdy zjistíme, že má nějakou užitečnou vlastnost, kterou můžeme dále využít, jindy dostaneme přímo tvar, jak musí vypadat. Pokud zjistíme, že řešení musí mít nějaký konkrétní tvar, je nutné jej dosadit do zadané rovnice a zkouškou ověřit, zda je skutečně řešením.

Využití vlastností funkce

Definice. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je

(i) *sudá*, resp. *lichá*, jestliže $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(-x)$, resp. $f(x) = -f(-x)$,

(ii) *rostoucí*, resp. *klesající*, jestliže $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí:
pokud $x < y$, pak $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$,

(iii) *nezáporná* (nebo *kladná*), jestliže $f(x) \geq 0$ (nebo $f(x) > 0$) pro všechna $x \in \mathbb{R}$,

(iv) *prostá*, jestliže $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (nebo ekvivalentně $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$),

(v) *na*, jestliže $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\colon f(x) = y$,

(vi) *bijekce*, jestliže je prostá a na.

Využití

(1) Sudost nebo lichost ulehčuje práci na polovinu, pokud je potřeba řešit rovnici zvlášť pro kladná a záporná čísla.
(2) Je-li funkce f prostá a platí $f(A) = f(B)$, pak dostáváme $A = B$, přičemž A, B mohou být i složitější výrazy.
(3) Je-li funkce f rostoucí, pak je také prostá.
(4) Je-li funkce f na a $x \in \mathbb{R}$, můžeme pracovat s $c \in \mathbb{R}$ takovým, že $f(c) = x$.

Symetrie

Je-li výraz na jedné straně funkcionální rovnice symetrický (tj. nezmění se, pokud vzájemně zaměníme proměnné), pak z toho můžeme usoudit, že ani výraz na pravé straně se vzájemnou záměnou proměnných nezmění. Neobsahuje-li rovnice symetrický výraz rovnou, lze jej často získat vhodným dosazením.

Jednoduché úlohy

V následujících úlohách musíme najít všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující zadanou rovnici.

Úloha 1. $f(x + y) = f(x) + y$

Úloha 2. $f(xy + 1) + f(x + y) = (f(x) + 1)(y + 1)$

Úloha 3. $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

Úloha 4. $f(x + y) - f(x - y) = xy$

Úloha 5. $f(f(x) + f(y)) = f(x) + y$

Úloha 6. $yf(x) + xf(y) = f(x + y)$ (MKS 18–6–1)

Úloha 7. $f(2x + y) = f(2y + x)f(x + y)$ (MKS 18–6–2)

Těžší úlohy

Úloha 8. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x + f(y)) = f(x) + f^2(y) + 2xf(y).$$

Úloha 9. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x různá od 0, 1 podmínku

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = x.$$

Úloha 10. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna reálná x, y rovnost

$$(1 + yf(x))(1 - yf(x + y)) = 1.$$

Úloha 11. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna racionální x, y vztah

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Úloha 12. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna racionální x, y rovnost

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Úloha 13. Najděte příklady reálných funkcí f a g takových, že $g \circ f$ je rostoucí a $f \circ g$ je klesající.

Úloha 14. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x

$$f(5x) = f(\pi^x) + x.$$

(MKS 18–6–3)

Úloha 15. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Úloha 16. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

(ISL 2001–A1)

Úloha 17. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor.$$

(IMO 2010–1)

Úloha 18. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x) \cdot f(yf(x)) = f(x + y).$$

Úloha 19. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna kladná reálná x, y rovnici

$$f\left(x + f\left(y\right)\right) = f\left(x + y\right) + f\left(y\right).$$

Literatura

[1] Vít „Vejtek“ Musil , *Funkcionální rovnice*, 2012 Oldřichov.
[2] Háňa Bendová, *Funkcionální rovnice*, 2010 Dobrá Voda.

Vieta Jumping

ANH DUNG „TONDA“ LE

ABSTRAKT. Příspěvek se zabývá metodou řešení Diofantických rovnic využívající nekonečný sestup v kombinaci s Viètovými vztahy.

Viètovy vztahy

Kvadratickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Jsou-li x_1 a x_2 řešení výše uvedené rovnice, pak můžeme rovnici vyjádřit následujícím způsobem:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Po roznásobení dostaneme vztahy mezi koeficienty a, b, c a kořeny x_1, x_2, které nazýváme Viètovy vztahy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Příklady

Příklad 1. Pro přirozená čísla a, b platí, že $a^2 + b^2$ je dělitelné $ab + 1$. Dokaž, že

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

je čtverec. (IMO 1988–6)

Příklad 2. Přirozená čísla x, y, z splňují

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = z.$$

Dokaž, že $z = 3$.

Příklad 3. Buďte a, b přirozená čísla. Ukaž, že pokud $(4a^2-1)^2$ je dělitelné $4ab-1$, pak $a = b$. (IMO 2007–5)

Příklad 4. Najdi všechny dvojice přirozených čísel m, n splňující

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \in \mathbb{N}.$$

Příklad 5. Ukaž, že ke každému přirozenému číslu m lze najít nekonečně mnoho dvojic celých čísel (x, y) takových, že

(i) x, y jsou nesoudělná,
(ii) $x \mid y^2 + m$,
(iii) $y \mid x^2 + m$. (IMO shortlist 1992)

Příklad 6. Buďte a, b přirozená čísla splňující $2ab + 1 \mid a^2 + b^2 + 1$. Dokaž, že $xy = 0$ nebo $x = y$.

Příklad 7. Přirozená čísla a, b, c splňují

$$0 < a^2 + b^2 - abc \leq c.$$

Dokaž, že $a^2 + b^2 - abc$ je čtverec. (CRUX)

Příklad 8. Zjisti, pro která $n \in \mathbb{N}$ má rovnice

$$w + x + y + z = n\sqrt{wxyz}$$

celočíselné řešení. (Vietnam 2002)

Příklad 9. Zjisti, pro která $n \in \mathbb{N}$ má rovnice

$$x^2 + y^2 + x + y = kxy$$

celočíselné řešení. (Vietnam 2002)

Literatura a zdroje

[1] Yimin Ge: *The Method of Vieta-Jumping*, *www.yimin-ge.com/doc/VietaJumping.pdf*
[2] *www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=2192633#p2192633*
[3] Alča Skálová, *Vieta jumping*, 2011 Hojsova Stráž.

Relace, operace a splnitelnost podmínek

Mirek Olšák

Abstrakt. V informatice lidi často zajímá, zda je možné najít řešení nějaké úlohy inteligentněji než tupým zkoušením všech možností (přesněji zda existuje polynomiální algoritmus). Zde se budeme obecně věnovat úlohám typu „dají se zvolit za $x_1, \dots, x_n$ čísla z dané konečné množiny tak, aby byly splněny všechny předepsané podmínky?“ Přitom pro studium jednoduchosti podmínek (relací) se ukáže praktické studovat operace, které jsou s nimi „kompatibilní“.

Mějme danou konečnou nosnou množinu A.

Definice. Pojmem n-ární relace ($n \geq 1$) rozumíme podmnožinu kartézského součinu A^n. Pro relaci R značením $R(x_1, \dots, x_n)$ rozumíme $(x_1, \dots, x_n) \in R$.

Definice. Pojmem k-ární operace ($k \geq 1$) rozumíme zobrazení $f\colon A^k \to A$.

Definice. Říkáme, že n-ární relace R a k-ární operace f jsou kompatibilní, právě když pro libovolný systém $\{x_{i,j}\}, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots n$ splňující pro každé i $R(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})$ platí už nutně

$$R\big(f(x_{1,1}, \dots, x_{k,1}), f(x_{1,2}, \dots, x_{k,2}), \dots, f(x_{1,n}, \dots, x_{k,n})\big).$$

Pro množinu relací $\mathcal{R}$ značíme $\mathrm{Pol}(\mathcal{R})$ množinu všech operací kompatibilních současně se všemi relacemi z $\mathcal{R}$. Takovým operacím říkáme polymorfismy.

Definice. Pro danou (ne nutně konečnou) množinu relací $\mathcal{R}$ definujeme $CSP(\mathcal{R})$[1] jako algoritmický problém, v němž algoritmus dostane na vstupu výrok tvaru

$$\exists x_1, \dots, x_k \in A : R_1(x_{i_{1,1}}, x_{i_{1,2}}, \dots) \wedge R_2(x_{i_{2,1}}, x_{i_{2,2}}, \dots) \wedge \dots \wedge R_n(x_{i_{n,1}}, x_{i_{n,2}}, \dots),$$

kde $R_1, \dots R_n \in \mathcal{R}$, a jeho úkolem je rozhodnout, zda tento výrok platí.

Definice. Říkáme, že problém A je polynomiálně převoditelný na problém B, pokud existuje algoritmus, který řeší problém A v polynomiálním čase a používá černou skříňku, která umí řešit problém B v konstantním čase.

[1] Constraint satisfaction problem

Věta. *Mějme množinu relací $\mathcal{R}$. Označme $\mathcal{R}'$ množinu všech relací kompatibilních se všemi operacemi z* $\mathrm{Pol}(\mathcal{R})$. *Pak je $CSP(\mathcal{R}')$ polynomiálně převoditelný $CSP(\mathcal{R})$.*

Předchozí věta vlastně říká, že pro obtížnost $CSP(\mathcal{R})$ je rozhodující, se kterými operacemi jsou všechny relace z $\mathcal{R}$ kompatibilní.

Pozorování. Množina $\mathrm{Pol}(\mathcal{R})$ obsahuje všechny projekce[2] a je uzavřená na skládání operací a slučování proměnných.

CSP na dvouprvkové množině

V dalším textu předpokládáme $A = \{0, 1\}$.

Tvrzení. *Je-li konstantní operace polymorfismus $\mathcal{R}$, pak je $CSP(\mathcal{R})$ řešitelný v lineárním čase.*

Definice. Označme n-ární relaci unární relace $C_0 = \{0\}, C_1 = \{1\}$ a n-ární

$$H_n = A^n \setminus \{(1, 1, \dots, 1, 0)\}.$$

Tvrzení. *$CSP(C_0, C_1, H_2, H_3, H_4, \dots)$ je řešitelné v polynomiálním čase.*

Tvrzení. *Je-li polymorfismem $\mathcal{R}$ binární operace $\wedge = \min$, je $CSP(\mathcal{R})$ polynomiálně převoditelný na $CSP(C_0, C_1, H_2, H_3, H_4, \dots)$.*

Tvrzení. *Soustava lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_2$ je řešitelná v polynomiálním čase.*

Tvrzení. *Je-li polymorfismem $\mathcal{R}$ ternární operace f splňující*

$$f(x, y, y) = f(y, x, y) = f(y, y, x) = x \quad \text{(říkáme jí minoritní)},$$

je $CSP(\mathcal{R})$ polynomiálně převoditelný na soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_2$.

Tvrzení. *Označme $\mathcal{R}_2$ množinu všech binárních a unárních relací. Pak $CSP(\mathcal{R}_2)$ je řešitelné v polynomiálním čase.*

Tvrzení. *Je-li polymorfismem $\mathcal{R}$ ternární operace f splňující*

$$f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x \quad \textit{(říkáme jí majoritní)},$$

je $CSP(\mathcal{R})$ polynomiálně převoditelný na $CSP(\mathcal{R}_2)$ z předchozího tvrzení.

Tvrzení. *Je-li $\mathcal{R}$ množina všech relací, $CSP(\mathcal{R})$ je NP-úplný.*

Tvrzení. *Nechť $\mathcal{R}_{\mathrm{all}}$ je množina všech relací a $\mathcal{R}_{\mathrm{sym}}$ je množina všech relací kompatibilních s unární operací negace $f(x) = 1 - x$. Pak je $CSP(\mathcal{R}_{\mathrm{all}})$ polynomiálně převoditelný na $CSP(\mathcal{R}_{\mathrm{sym}})$.*

[2] Projekce je operace, které vrací hodnotu na své dané i-té souřadnici

Tvrzení. *Buď $\mathcal{O}$ množina operací obsahující všechny projekce, uzavřená na skládání a slučování proměnných. Pak buď $\mathcal{O}$ obsahuje nějakou operaci z možností: konstantní,* $\wedge = \min$, $\vee = \max$, *majoritní, minoritní, nebo je každá operace z $\mathcal{O}$ zapsatelná jako složení projekcí a negací.*

Důsledek. Každé CSP na dvouprvkové množině je polynomiálně řešitelné nebo NP úplné.

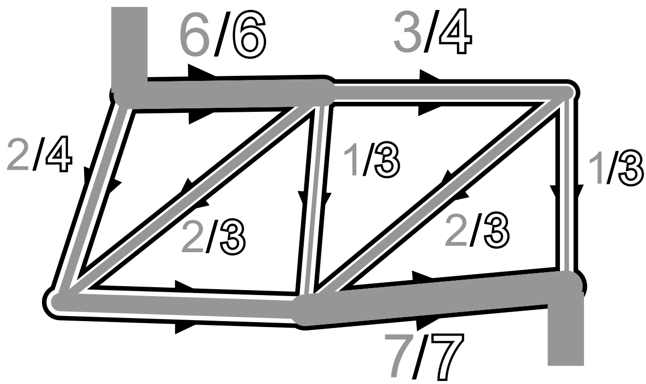
Toky v sítích

Mirek Olšák

Abstrakt. Zavedeme pojem toku v síti, dokážeme základní větu o tocích a ukážeme její aplikace na úlohy.

Intuitivní pohled na toky v síti

Síť je (orientované) potrubí s různými kapacitami trubek, které má přívod (říkáme mu zdroj) a odvod (říkáme mu stok). Tok pak je situace, když tímto potrubím někudy pustíme vodu od zdroje do stoku a velikost toku říká, kolik vody tímto tokem protéká. Například velikost následujícího toku je 8.



Grafový pohled na toky v síti

Síť je orientovaný graf s hranami ohodnocenými kladnými celými (resp. reálnými) čísly se dvěma speciálně označenými vrcholy jako zdroj a stok.

Tok je podgraf sítě, opět spolu s ohodnocením hran takovým, že každá hrana má nejvýše takovou hodnotu, jakou má příslušná hrana v síti. Navíc v toku musí platit, že pro každý vrchol různý od zdroje a stoku je součet hodnot hran vedoucí do tohoto vrcholu stejný jako součet hodnot hran vedoucích z něj. Pro zdroj musí být vyšší součet hodnot hran vedoucích ze zdroje než do zdroje a jejich rozdíl nazýváme velikost toku.

Řez je množina hran, po jejímž odebrání neexistuje cesta ze zdroje do stoku a velikostí řezu myslíme součet kapacit odebraných hran.

Intervalový pohled na toky v síti

Síť je množina vrcholů, přičemž dva jsou vyznačené (zdroj a stok). Dále pro každou uspořádanou dvojici vrcholů x, y máme uzavřený interval kapacit $\langle a_{xy}, b_{xy}\rangle$, přičemž v každém takovém intervalu leží nula a $\langle a_{xy}, b_{xy}\rangle = \langle -b_{yx}, -a_{yx}\rangle$.

Tok je sada c_{xy} celých (reálných) čísel taková, že pro každou uspořádanou dvojici x, y vrcholů platí:

(i) $c_{xy} \in \langle a_{xy}, b_{xy}\rangle$,

(ii) $c_{xy} = -c_{yx}$,

(iii) Pro x různé od zdroje i stoku je součet hodnot přes všechny vrcholy $y \neq x$ hodnot c_{xy} roven nule,

(iv) Součet hodnot c_{zy}, kde z je zdroj a y probíhá všechny vrcholy je kladný a nazýváme jej velikostí toku.

Řez je rozdělení množiny vrcholů na dvě podmnožiny X, Y takové, že zdroj leží v X a stok leží v Y. Velikostí řezu rozumíme součet všech b_{xy}, kde $x \in X$, $y \in Y$.

Věta. (základní o tocích) *V každé síti je největší možná velikost toku rovna nejmenší možné velikosti řezu. Navíc, má-li síť celočíselné kapacity, pak existuje tok maximální možné velikosti, který má opět všechny hodnoty celočíselné.*

Úlohy

Úloha 1. Je dána obdélníková tabulka reálných čísel taková, že součet každého řádku i sloupce je celočíselný. Dokažte, že je možné každé číslo v tabulce nahradit jeho dolní nebo horní celou částí tak, aby hodnoty čísel zůstaly nezměněny.

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 2. V tabulce $n \times n$ jsou v políčkách nezáporná celá čísla a v každém řádku i sloupci je stejný kladný součet. Dokažte, že je možné postavit n šachových věží na nenulová políčka, aby se vzájemně neohrožovaly.

Úloha 3. (Hallova věta) Máme takový systém množin, že kdykoli sjednotíme několik z nich, bude sjednocení vždy obsahovat alespoň tolik prvků, kolik množin jsme sjednotili. Dokažte, že je možné v každé množině zakroužkovat jeden prvek tak, aby zakroužkované prvky byly navzájem různé.

Úloha 4. Řekneme, že graf je hranově k-souvislý, když je souvislý a zůstane souvislý i po odebrání libovolných $k-1$ nebo méně hran. Dokažte, že je graf hranově k-souvislý právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy vede alespoň k hranově disjunktních cest.

Úloha 5. Řekneme, že graf je vrcholově k-souvislý, když má alespoň $k+1$ vrcholů, je souvislý a zůstane souvislý i po odebrání libovolných $k-1$ nebo méně vrcholů. Dokažte, že je graf vrcholově k-souvislý právě tehdy, když mezi každýma dvěma vrcholy vede alespoň k cest vrcholově disjunktních až na počáteční a koncový vrchol.

Návody

1. BÚNO jsou v tabulce čísla mezi 0 a 1. Postavte síť s celočíselnými kapacitami tak, aby vyplnění tabulky byl jeho maximální tok a využijte skutečnosti, že je možné najít stejně velký celočíselný tok.

2. Přitéká kapacita 1 zleva na každém řádku, protéká tabulkou a odtéká kapacita 1 dolem v každém sloupci. Řezat políčka tabulky se nevyplatí – řežeme řádky a sloupce. Každým odříznutím se zbavíme nejvýše s políček v součtu, ale celkem má tabulka součet ns.

3. Kapacita 1 přitéká do jednotlivých množin, z každé množiny pak do jejích prvků a z každého prvku pak kapacita 1 do stoku.

4. Každá hrana má kapacitu 1, přímá aplikace základní věty o tocích.

5. Zdvojte graf a po každém protečení hranou donuťte vodu protéct vrcholem (všechny kapacity 1).

Tabulky a matice

KUBA SVOBODA

ABSTRAKT. Příspěvek seznamuje se základními maticovými operacemi a latinskými čtverci. Dále obsahuje úlohy k oběma tématům.

Podíváme se společně na dva typy příkladů. V jednom budou figurovat matice a v druhém tabulky čísel. V podstatě jde o stejné objekty, ale k maticím se tradičně váže bohatá a významná teorie, jejíž některé základní prvky si ukážeme.

Definice. *Maticí* A typu $n \times m$ budeme rozumět tabulku o n řádcích a m sloupcích vyplněnou čísly (často z nějaké dané množiny).

Definice. (Sčítání matic) Nechť obě matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou typu $n \times m$. *Součet* těchto matic je matice $A + B = C = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro každé i a j.

Definice. (Násobení matic) Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $p \times r$ a $B = (b_{ij})$ je typu $r \times s$. *Součinem* matic rozumíme matici C typu $p \times s$, kde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} b_{jk}$.

Definice. (Transponování matic) *Transponovanou matici* matice A budeme značit A^T. Je to matice A převrácená podle diagonály. Pokud tedy A je typu $n \times m$ s prvkem a_{ij} na pozici ij, potom je A^T typu $m \times n$ s prvkem a_{ij} na pozici ji.

Definice. (Permutační matice) Matice $n \times n$, která má v každém řádku a sloupci přesně jednu jedničku, se nazývá *permutační matice*.

Latinské čtverce

Definice. *Latinský čtverec* řádu n je matice $n \times n$ s prvky z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a pro každý řádek a sloupec platí, že se tam každé číslo z této množiny vyskytuje právě jednou.

Definice. *Obyčejný čtverec* řádu n je matice $n \times n$ s prvky z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Pro obyčejné i latinské čtverce definujeme ortogonalitu.

Definice. O dvou čtvercích řekneme, že jsou *ortogonální*, jestliže

$$(a_{ij}, b_{ij}) = (a_{kl}, b_{kl}) \Rightarrow (i, j) = (k, l).$$

Úlohy na matice

Úloha 1. Mějme matici $n \times m$ s racionálními prvky. Předpokládejme, že alespoň $m + n$ z nich jsou v absolutní hodnotě různá prvočísla. Dokažte, že hodnost matice je alespoň dva, tedy že existují dva řádky matice, kde jeden není násobek druhého. (Putnam 2015)

Úloha 2. Co se stane, pokud permutační maticí vynásobíme jinou matici? Co když vynásobíme $P_1 P_2 A$, kde P_1 a P_2 jsou permutační matice a A je libovolná matice?

Úloha 3. Mějme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak vypadá n-tá mocnina této matice?

Úloha 4. Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky *EU* musí mít každý klub lichý počet členů, zatímco pro každou dvojici klubů musí být počet lidí, kteří navštěvují oba kluby, sudý. Dokažte, že $m \leq n$.

Úloha 5. Pro jaké $n \in \mathbb{N}$ existuje matice $n \times n$ taková, že AA^T má na diagonále sudá čísla a všude jinde lichá? (Putnam 2011)

Úloha 6. Nechť $||x|| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ pro $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nechť A je reálná matice $n \times n$ splňující $||Ax|| = ||x||$ pro všechny $x \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že A^m je I_n pro nějaké kladné m.

Úloha 7. Kombinační číslo pro $k > n$ dodefinujeme jako $\binom{n}{k} = 0$, jinak půjde o známé kombinační číslo. Co když vynásobíme matici A, kde $a_{ij} = \binom{i}{j}$, s maticí B, kde $b_{ij} = \binom{j}{i}$?

Úloha 8. A a B hrají hru, vyplňují matici 2015×2015 různými reálnými čísly. Hráč A začíná a vyhraje, pokud je matice invertovatelná, jinak vyhraje B. Co se stane, pokud ji musejí vyplňovat celými čísly? Co když začíná B? (Putnam 2008)

Úlohy na čtverce

Úloha 9. Mějme čtvercovou tabulku 4×4 vyplněnou reálnými čísly. Součet všech řádků, sloupců a hlavních diagonál je S. Dokažte, že potom i součet čtyř rohových čísel je S. (MKS 28–1–5)

Úloha 10. Dokažte, že existuje množina t navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu n právě tehdy, když existuje množina $t+2$ navzájem ortogonálních obyčejných čtverců řádu n.

Úloha 11. V každém políčku tabulky 111×111 je liché číslo. Označme A součin řádkových součtů a B součin sloupcových součtů. Dokažte, že $A + B \neq 0$.
(MKS 31–5–7)

Úloha 12. Nechť p je prvočíslo a $\mathbb{Z}_p$ je těleso celých čísel modulo p. Definujeme matice $T^1, T^2, \ldots, T^{p-1}$ (horní číslo je index) předpisem $T^a_{i,j} = ai + j$, kde $i, j \in \mathbb{Z}_p$ a sčítání a násobení jsou operace v tělese. Dokažte, že $T^1, \ldots, T^{p-1}$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce řádu p.

Úloha 13. Najděte dva ortogonální latinské čtverce řádu 6.

Úloha 14. Tabulka $n \times n$ je vyplněna čísly 1 až n^2. Dokažte, že existují dvě hranou sousedící políčka taková, že rozdíl čísel v nich napsaných je alespoň n.
(MKS 28–1–8)

Zbytky a mocnění

Kuba Svoboda

Abstrakt. Příspěvek obsahuje návod na řešení olympiádní teorie čísel pomocí kongruencí a také uvádí základní věty z teorie čísel, malou Fermatovu větu, Wilsonovu větu a Eulerovu větu. Je zde také spousta příkladů na procvičení.

Úmluva. Není-li řečeno jinak, pracujeme s celými čísly.

Definice. Skutečnost, že $a = b \cdot k$, tedy a je násobek b, můžeme vyjádřit jako $b \mid a$ a říkáme b dělí a.

Definice. Skutečnost, že $p \mid a-b$, značíme $a \equiv b \pmod p$ a říkáme a je kongruentní s b modulo p.

Definice. Množinu čísel nazýváme úplnou sadou zbytků modulo n, pokud každý zbytek modulo n je kongruentní s alespoň jedním prvkem z množiny.

Tvrzení. $\{0, 1, \ldots, p-1\} = \{a \cdot 0, a \cdot 1, \ldots, a \cdot (p-1)\}$, *pro* $a \not\equiv 0 \pmod p$

Věta. (Malá Fermatova) *Buď p prvočíslo a a číslo s ním nesoudělné, potom*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Věta. (Wilsonova) *Buď p prvočíslo, potom*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Věta. (Eulerova) *Buď a nesoudělné s n a $\varphi(n)$ počet čísel menších než n nesoudělných s n. Potom*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

Úlohy

Úloha 1. Najděte pro $n > 1$ a celočíselné x všechna řešení $(n-1)! \equiv x \pmod n$.

Úloha 2. Vyšetřete, jak se chová $\binom{p-1}{a}$ modulo p pro všechna možná a.

Úloha 3. Nechť $P(x) = 5x^{13} + 13x^5 + 9ax$. Najdi nejmenší a takové, že $P(x)$ je dělitelné 65 pro každé x. (Irsko 2000)

Úloha 4. Najdi všechna kladná n, pro která je $n! + 5$ čtverec.

Úloha 5. Nechť $p > 5$ je prvočíslo a číslo n je tvořeno $p - 1$ jedničkami v soustavě o základu $p + 6$. Dokažte, že $p \mid a$.

Úloha 6. Najdi všechna prvočísla p a q taková, že $p + q = (p - q)^3$.
(Rusko 2001)

Úloha 7. Dokažte, že existují právě tři nejvýše n-ciferná přirozená čísla a taková, že

$$a^2 \equiv a \pmod{10^n}.$$

(MKS 24–5–5)

Úloha 8. Ukaž, že pro různá prvočísla p a q platí

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

Úloha 9. Zjisti, pro která přirozená n platí, že $n \mid 3^{n!} - 2^{n!}$. (MKS 17–7–4)

Úloha 10. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ definovanou vztahem $a_n = 6^n + 3^n + 2^n - 1$. Určete všechna přirozená čísla, která jsou nesoudělná s každým členem této posloupnosti. (IMO 2005)

Úloha 11. Dokaž, že pro každé x a každé y, z, w liché platí $17 \mid x^{y^{z^w}} - x^{y^z}$.
(Irsko 2005)

Úloha 12. Pro liché prvočíslo p dokažte

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \frac{2 - 2^p}{p} \pmod{p}.$$

(iKS 2012–N3)

Úloha 13. Dokaž, že pro každé sudé přirozené n platí, že $n^2 - 1$ dělí $2^{n!} - 1$.

Úloha 14. Dokažte, že pokud je $4^n + 2^n + 1$ prvočíslo, potom je n mocnina trojky.

Úloha 15. Určete hodnotu výrazu $1 \cdot 2^{-1} + 2 \cdot 3^{-1} + \cdots + (p-2) \cdot (p-1)^{-1} \pmod{p}$ pro libovolné p. (MKS 24–5–7)

Úloha 16. Můžeme najít přirozené číslo n dělitelné právě 2015 prvočíselnými děliteli takové, že $n \mid 2^n + 1$? (IMO 2000)

Úloha 17.

(Irsko 2005)

Úloha 18. Definujme $a_1 = 2$, $a_n = 2^{a_{n-1}}$. Dokažte, že pro všechna $n > 1$ platí $n \mid a_n - a_{n-1}$. (iKS 2012–N5)

Úloha 19. Nechť je a liché přirozené číslo. Dokaž, že $a^{2^n} + 2^{2^n}$ a $a^{2^m} + 2^{2^m}$ jsou pro všechna přirozená $n \neq m$ nesoudělná.

AG nerovnost

Martin „E.T.“ Sýkora

AG nerovnost patří mezi základní nerovnosti, které se při řešení MO i jiných soutěží mohou velmi hodit. Na přednášce si dokážeme její platnost a napočítáme několik příkladů, abychom se ji naučili používat.

Tvrzení. (AG nerovnost) *Pro libovolná kladná čísla* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Poznámka. Rovnost navíc nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

V některých příkladech se nám bude hodit používat tzv. cyklických sum, které zjednodušují zápis, v nichž se jednotlivé výrazy cyklicky zaměňují. Místo složitých definic si ukážeme dva příklady, které by měly objasnit použití těchto sum.

(1) Pro výraz v proměnných a, b, c,d platí $\sum\limits_{cyc} a = a + b + c + d$.

(2) Pro výraz v proměnných a, b, c platí $\sum\limits_{cyc} a^2c = a^2c + b^2a + c^2b$.

A nyní už se můžeme pustit do jednoduchých příkladů.

Příklad 1. Pro a, b, c kladná dokažte

(1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$,

(2) $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$.

Cvičení 2. Pro x, y, z kladná dokažte

(1) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$,

(2) $2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$,

(3) $x^2 + \dfrac{2}{x} \geq 3$,

(4) $\dfrac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$,

(5) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} \geq 3$,

(6) $2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \geq x^3+y^3+z^3+15xyz$,
(7) $x^3(x+2y)+y^3(y+2x) \geq 6x^2y^2$.

Sčítání AG nerovností

Mnohdy se setkáme s nerovností, která přímo pomocí AG nerovnosti řešit nelze, ale lze vyjádřit jako součet několika platných nerovností, které pomocí AG snadno dokážeme. Například nerovnost

$$x^3+y^3+z^3 \geq x^2y+y^2z+z^2x$$

platí pro všechna kladná x, y, z. Je totiž součtem nerovnosti $\frac{1}{3}(2x^3+y^3) \geq x^2y$ a jejích cyklických záměn, o kterých už víme, že platí, viz předchozí příklad.[1]

Cvičení 3. Pro kladná x, y, z dokažte

(1) $x^3y+y^3z+z^3x \geq x^2yz+y^2zx+z^2xy$,
(2) $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$,
(3) $x^4+y^4+z^4 \geq x^3y+y^3z+y^3x$,
(4) $x^4y+y^4z+z^4x \geq x^2y^2z+y^2z^2x+z^2x^2y$,
(5) $(x+y+z)^2 \geq 3(x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy})$,
(6) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{z} \geq x+y+z$,
(7) $\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{z^2}+\dfrac{z^3}{z^2} \geq x+y+z$,
(8) $\dfrac{x^3}{y}+\dfrac{y^3}{z}+\dfrac{z^3}{z} \geq xy+yz+zx$,

Příklad 4. Nechť kladná čísla a, b, c splňují podmínku $abc=1$. Dokažte, že pak

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq a+b+c.$$

(MO 52–A–III-6)

Příklad 5. Pro kladné x dokažte vztah

$$8x^3+x^2-8x+3 \geq 0.$$

Příklad 6. Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c platí

$$a^3+b^3+c^3+6 \geq 3(a+b+c).$$

[1] Podrobnější popis sčítání AG nerovností najdeš v seriálu „Nerovnosti“ od Michala Rolínka a Pavla Šaloma.

Příklad 7. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Pak dokažte

$$\frac{2}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1.$$

Příklad 8. Dokažte, že pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ platí

$$a^5b + b^5c + c^5a \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Příklad 9. Ukažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c splňující $abc = 1$ platí

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq 1.$$

Příklad 10. Ověřte, že pro každá $a, b, c > 0$ platí

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{a+b+c}{4}.$$

Příklad 11. Pro a, b, c kladná dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{b(2c+a)} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Příklad 12. Ukažte, že pro kladná a, b, c platí nerovnost

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{b+2c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Návody

9. Použijte odhad $a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a+b)$.

Literatura a zdroje

Při tvorbě příspěvku jsem vycházel z příspěvku *AG Nerovnost*[2] a seriálu na téma Nerovnosti z 29. ročníku od Michala Rolínka a Pavla Šaloma. Všem výše zmíněným děkuji.

[2] Lukáš Zavřel, Mentaurov 2013

Největší společný dělitel

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Největší společný dělitel je základní pojem elementární teorie čísel. Tento pojem, zvláště ve spojení s Euklidovým algoritmem, má přes svou jednoduchost nejedno praktické využití. V olympiádní matematice nám usnadní řešení spousty příkladů nebo aspoň jejich částí a tento příspěvek má právě za úkol procvičit techniky, jak největší společný dělitel vypočítat a jak ho využít při řešení úloh.

Není-li řečeno jinak, číslem budeme myslet celé číslo.

Definice. Řekneme, že číslo $a \neq 0$ dělí číslo b (píšeme $a \mid b$), pokud existuje číslo c takové, že $ac = b$.

Tvrzení. *Pokud $a \mid b$, tak buď $b = 0$, nebo $|a| \leq |b|$. Pokud navíc $|a| \neq |b|$, tak $|a| \leq 2|b|$ atd.*

Úloha 1. Určete všechna celá kladná čísla m, n taková, že n dělí $2m - 1$ a zároveň m dělí $2n - 1$. (MO 59–A–II–3)

Definice. Mějme čísla a, b. Pak jejich největší společný dělitel (NSD) je největší přirozené číslo d takové, že $d \mid a$, $d \mid b$. Značíme ho (a, b). Podobně nejmenší společný násobek je nejmenší přirozené číslo d takové, že $a \mid d$, $b \mid d$, a značíme jej $[a, b]$.

Cvičení. Spočítejte $(-15, 24)$.

Tvrzení. *Platí:*

(i) $(a, a) = (a, 0) = (-a, 0) = [a, a] = [a, 0] = |a|$.
(ii) $(a, b) = (b, a) = (a - b, b) = (b - a, b) = (a - b, a) = (a + b, a)$.
(iii) $(a, b) = |a|$, *právě když* $a \mid b$, *a také právě když* $[a, b] = |b|$.
(iv) $(ab, ac) = a(b, c)$.
(v) $(a, b)[a, b] = ab$.
(vi) *Pokud* $d \mid a, d \mid b$, *tak i* $d \mid (a, b)$.
(vii) $(b, c) \mid (ab, c) \mid (a, c)(b, c) \mid a(b, c)$.

Tvrzení. (Euklidův algoritmus) *Díky druhé vlastnosti můžeme spočítat (a, b) tak, že odečteme menší číslo od většího, dostaneme novou dvojici čísel (se stejným NSD) a postup budeme opakovat, dokud nebude jedno z čísel nula.*

Úloha 2. Určete, kolik (uspořádaných) dvojic přirozených čísel a, b splňuje rovnici $[a, 70] + [b, 70] = 210$.

Definice. O číslech a, b řekneme, že jsou *nesoudělná*, pokud $(a, b) = 1$.

Tvrzení. *Platí:*

(i) *Pokud* $(b, c) = 1$, *pak* $(ab, c) = (a, c)$.
(ii) *Pokud* $(b, c) = 1$, *pak* $(a, bc) = (a, b)(a, c)$.

Úloha 3. Určete, pro která čísla a, b, c platí $[a, c] + [b, c] = (a + b)c$.

Úloha 4. Určete možné hodnoty výrazů pro nesoudělná čísla a, b:

(i) $(a + b, ab)$,
(ii) $(a^2 + b^2, ab)$,
(iii) $(a + b, a - b)$,
(iv) $(a^3, (a + 1)^5)$.

Úloha 5. Ukažte, že zlomek

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

je v základním tvaru pro každé přirozené číslo n. (IMO 1959)

Úloha 6. Dokažte, že pro každá přirozená m, n platí

$$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1.$$

Úloha 7. Pro která celá čísla n je výraz

$$\frac{n^3 - 3}{n - 3}$$

celočíselný? (Náboj 2007)

Úloha 8. S využitím vztahu $F_n = F_k \cdot F_{n-k-1} + F_{k-1} \cdot F_{n-k}$ ukažte, že pro Fibonacciho posloupnost platí

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

Úloha 9. Zjistěte, pro která přirozená čísla a, b je hodnota podílu

$$\frac{b^2 + ab + a + b - 1}{a^2 + ab + 1}$$

rovna celému číslu. (MO 57–A–III–3)

Rozklad na *du*, *dv*

Často se v úlohách vyplatí rozepsat čísla a, b jako $a = du$, $b = dv$, kde $d = (a, b)$.

Úloha 10. Určete, pro která čísla a, b platí $(a, b) + [a, b] = a + b$.

Úloha 11. Rozhodněte, zda součet některých dvou přirozených čísel je dělitelem jejich nejmenšího společného násobku.

Úloha 12. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x + y}$$

je prvočíslo. (MO 58–A–I–3)

Úloha 13. Nechť n, k jsou přirozená čísla a k je navíc bezčtvercové[1]. Předpokládejme, že

$$\frac{n^3 + 2n^2 + k}{n^2 + k}$$

je celé číslo. Dokažte, že pak už platí $n = k$. (MKS 33–9–1)

Úloha 14. Pro dané prvočíslo p najděte všechny trojice přirozených čísel (a, b, c) splňující

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c.$$

(MO 59–A–I–6)

Úloha 15. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, c platí

$$\frac{[a, b, c]^2}{[a, b] \cdot [b, c] \cdot [c, a]} = \frac{(a, b, c)^2}{(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)}.$$

(USAMO 1972)

Úloha 16. Nechť $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ jsou přirozená čísla, která splňují $(a_i, b_i) = 1$ pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dále buď $m = [b_1, \ldots, b_k]$. Ukažte, že platí

$$\left(\frac{a_1 m}{b_1}, \ldots, \frac{a_k m}{b_k}\right) = (a_1, \ldots, a_k).$$

(IMO shortlist 1974)

Úloha 17. Ukažte, že pokud je p takové liché prvočíslo, že i $2p + 1$ je prvočíslo, pak existují právě čtyři přirozená čísla k taková, že

$$2p + k \mid 2p + k^2.$$

(Variace na MO 58–A–III–4)

[1]Bezčtvercové číslo je takové, které pro $a > 1$ není dělitelné číslem a^2

Tvrzení. *$(a,b)=d$ je nejmenší kladné číslo z čísel tvaru $ka+lb$ a čísla tohoto tvaru jsou právě násobky čísla d.*

Tvrzení. (Bézoutova věta) *Pro čísla a, b existují taková čísla k, l, že $ka+lb=(a,b)$.*

Návody

1. Rozeberte možnosti $n=2m-1$ (resp. $m=2n-1$) a pak využijte první tvrzení.

2. Jedno z čísel musí být dělitel 70 a druhé násobek 4 a dělitel 140.

3. Zřejmě $[a,c] \mid ac$ a musí nastat rovnost.

4. (i), (ii) použijte $(a,bc)=(a,b)(a,c)$ pro nesoudělná b,c, (iii) použijte $(2a,b) \mid 2(a,b)$, (iv) co znamená nesoudělnost pro prvočíselné rozklady?

5. Euklidův algoritmus.

6. Pro $m \geq n$ rozepište $2^m=(2^n-1)2^{m-n}+2^{m-n}$.

7. Výraz je celočíselný, právě když $|n-3|=(n^3-3,n-3)$. Nyní můžeme aplikovat Euklidův algoritmus.

8. Nejprve dokažte, že po sobě jdoucí členy jsou nesoudělné.

9. Jmenovatel musí dělit i součet čitatele s jmenovatelem. Tento součet rozložte na součin a ukažte, že jeden člen je s jmenovatelem nesoudělný.

10. Po substituci $a=du$, $b=dv$ a úpravě výrazu rozložte na součin.

11. Po substituci $a=du$, $b=dv$ a podělení obou stran dělitelnosti d ukažte, že obě strany dělitelnosti jsou nyní nesoudělné.

12. Po substituci $x=du$, $y=dv$ ukažte, že $u+v \mid d^2$ a uv^2 dělí celý zlomek. Rozeberte dva případy, $u=1$ a $u>1$. V druhém případě rozložte d^2-1 na součin.

13. Po substituci $n=du$, $k=dv$ si uvědomte, že $(d,v)=1$.

14. Využijte $[a,c]=\frac{ac}{(a,c)}=\frac{a}{(a,c)}c$.

15. Pro $d=(a,b,c)$ rozepište $a=d(\frac{a}{d},\frac{b}{d})(\frac{a}{d},\frac{c}{d})u$. Uvědomte si, že to jde díky tomu, co musí být s čím nesoudělné. Poté trpělivě upravujte.

16. Dokazujte pro jedno prvočíslo. Pokud $p \mid m$, tak si vyberte takové i, že b_i má maximální mocninu p.

17. Rozeberte čtyři možnosti podle toho, čemu se rovná $(2p,k)$.

Literatura a zdroje

[1] Michal Rolínek, *Důkazové metody v teorii čísel*, *http://mks.mff.cuni.cz/library/*.

[2] Josef Svoboda, Štěpán Šimsa: *Seriál Teorie čísel*, *mks.mff.cuni.cz/archive/*.

Švrčkův bod

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní vlastnosti středu oblouku kružnice, tzv. Švrčkova bodu. Tento bod figuruje v mnoha geometrických úlohách, a jeho dobrá znalost je tedy pro úspěch při řešení velmi užitečná. To vše ilustruje řada příkladů.

Ještě než stočíme pozornost ke Švrčkovu bodu, připomeneme si několik základních vlastností os úhlu, středu kružnice vepsané a středů kružnic připsaných. Poté zformulujeme a dokážeme pár užitečných tvrzení o Švrčkově bodu a využijeme je při řešení úloh.

Definice a značení

Definice. Nechť je trojúhelník ABC vepsaný do kružnice ω. Střed oblouku BC, který neobsahuje A, označme $\check{S}_a$ a říkejme mu *Švrčkův bod* trojúhelníka ABC vzhledem k A. Body $\check{S}_b$, $\check{S}_c$ definujme analogicky.

Značení. V trojúhelníku ABC označme ω kružnici opsanou, I střed kružnice vepsané, $\check{S}_a$, $\check{S}_b$, $\check{S}_c$ odpovídající Švrčkovy body, E_a, E_b, E_c odpovídající středy kružnic připsaných s poloměry r_a, r_b, r_c a konečně AD, BE, CF osy úhlů v $\triangle ABC$, kde $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$.

Osy úhlu, středy kružnice vepsané a kružnic připsaných

Tvrzení. *Kolem středů kružnice vepsané a kružnic připsaných jsou úhly*

(i) $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ a $\sphericalangle BIF = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$,

(ii) $\sphericalangle AE_aB = \dfrac{\gamma}{2}$ a $\sphericalangle BE_aC = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

Tvrzení. (Angle bisector theorem)

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Základní vlastnosti Švrčkova bodu

Tvrzení 1. *V trojúhelníku ABC se osa úhlu BAC a osa strany BC protínají na kružnici ω. Jejich průsečíkem je $\check{S}_a$.*

Tvrzení 2. *Body B, C, I, E_a leží na jedné kružnici se středem $\check{S}_a$. Platí tedy $|\check{S}_aI| = |\check{S}_aB| = |\check{S}_aC| = |\check{S}_aE_a|$.*

Tvrzení 3. *Bodem $\check{S}_a$ veďme polopřímky p a q, které protnou stranu BC postupně v bodech X a Y a kružnici ω protnou podruhé postupně v Z a W. Pak body X, Y, Z, W leží na jedné kružnici.*

Tvrzení 4. *V trojúhelníku ABC platí $|\check{S}_aD| \cdot |\check{S}_aA| = |\check{S}_aI|^2 = |\check{S}_aC|^2 = |\check{S}_aB|^2$.*

Tvrzení 5. *Je dán trojúhelník ABC a kružnice ω_1, která má vnitřní dotyk s kružnicí ω v bodě A a se stranou BC v bodě D'. Pak $D = D'$.*

Příklady

Příklad 1. Je dán trojúhelník ABC. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku BCI. Dokažte, že $\sphericalangle OKB = \sphericalangle OLC$, kde K, L jsou body dotyku kružnice vepsané ABC po řadě se stranami AB, AC. (China girls 2012/5)

Příklad 2. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice ω. Středy sousedních oblouků AB, BC, CD, DA označme postupně $\check{S}_a$, $\check{S}_b$, $\check{S}_c$, $\check{S}_d$. Dokažte, že přímky $\check{S}_a\check{S}_c$ a $\check{S}_b\check{S}_d$ jsou na sebe kolmé.

Příklad 3. V trojúhelníku ABC s běžným značením ukažte, že I je ortocentrem trojúhelníka $\check{S}_a\check{S}_b\check{S}_c$.

Příklad 4. Označme $\check{S}'_a$ průsečík osy vnějšího úhlu u vrcholu A a osy protější strany. Ukažte, že tento „Antišvrk“

(i) leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC,

(ii) leží ve středu E_bE_c,

(iii) jeho vzdálenost od přímky BC je $\frac{r_b+r_c}{2}$.

Příklad 5. Je dán trojúhelník ABC se středem kružnice vepsané I a vnitřním bodem P. Platí

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Ukažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastává, právě když $P = I$. (IMO 2006)

Příklad 6. Nechť jsou AL a BK osy úhlů nerovnoramenného trojúhelníka ABC (L leží na straně BC, K leží na straně AC). Osa úsečky BK protne přímku AL v bodě M. Bod N leží na přímce BK a platí, že LN je rovnoběžná s MK. Dokažte, že $|LN| = |NA|$. (Junior Balkan 2010)

Příklad 7. Kružnice ω_1 a ω_2 mají vnější dotyk v bodě T a obě se vnitřně dotýkají kružnice ω postupně v bodech R a S. Buď Q druhý průsečík RT a ω. Ukažte, že $\sphericalangle QST = 90°$. (KMS)

Příklad 8. Nechť BC je průměr kružnice k se středem O. Dále buď A bod na k takový, že $\sphericalangle AOB < 120°$, a D buď střed toho oblouku AB, který neobsahuje C. Rovnoběžka s DA vedená bodem O protne AC v bodě I. Osa úsečky OA protne k v bodech E a F. Ukažte, že I je středem kružnice vepsané trojúhelníku CEF. (IMO 2002)

Příklad 9. V trojúhelníku ABC dokažte při zavedeném značení následující metrické vztahy:

(i) $|A\check{S}_a| \cdot |AD| = |AI| \cdot |AE_a| = |AB| \cdot |AC|$,

(ii) $|IA| \cdot |E_aD| = |E_aA| \cdot |ID|$.

Příklad 10. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník ($|AB| \neq |AC|$). Kružnice nad průměrem BC protne strany AB a AC postupně v bodech M a N. Označme O střed strany BC a R průsečík os úhlů BAC a MON. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR se protínají na straně BC. (IMO 2004)

Příklad 11. Trojúhelník ABC splňuje vztah $|AC|+|BC| = 3|AB|$. Kružnice jemu vepsaná se středem I se dotýká stran BC a CA postupně v bodech D a E. Nechť K, L jsou obrazy bodů D, E ve středové souměrnosti podle I. Ukažte, že body A, B, K a L leží na jedné kružnici. (IMO shortlist 2005)

Příklad 12. Je dán trojúhelník ABC se středem I kružnice vepsané a kružnicí opsanou Γ. Přímka AI protne kružnici Γ podruhé v bodě D. Buď E bod na oblouku BDC a F bod na úsečce BC takový, že $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Dále buď G střed úsečky IF. Dokažte, že přímky EI a DG se protínají na kružnici Γ. (IMO 2010)

Příklad 13. Přímka ℓ protíná kružnici Γ v bodech A, B. Kružnice Γ_1 a Γ_2 jsou vepsané do stejné úseče určené přímkou ℓ a mají vnější dotyk. Dokažte, že jejich vnitřní společná tečna prochází pevným bodem, pohybují-li se Γ_1, Γ_2 ve vymezené úseči. (Prasolov)

Příklad 14. Je dán trojúhelník ABC, jeho kružnice opsaná ω a bod D na straně BC. Buď ω_1 kružnice dotýkající se úsečky AD v bodě F, strany BC bodě E a kružnice ω v bodě K. Dokažte, že střed I kružnice vepsané $\triangle ABC$ leží na přímce EF. (Sawayama-Thebault theorem, PraSe 29–myšmaš)

Návody

1. Všimněte si, že na poloze bodů B, C příliš nezáleží, úloha je symetrická podle osy úhlu.

2. Úhel mezi $\check{S}_a\check{S}_c$ a $\check{S}_b\check{S}_d$ je součet velikostí oblouků nad $\check{S}_a\check{S}_b$ a nad $\check{S}_c\check{S}_d$. Jakou část kružnice tyto oblouky dohromady zabírají?

3. Úhel mezi $\check{S}_b\check{S}_c$ a $A\check{S}_a$ je součet velikostí oblouků nad $A\check{S}_c$ a nad $\check{S}_a\check{S}_b$. Jakou část kružnice tyto oblouky dohromady zabírají?

4. (ii) Použijte střední příčky v trojúhelníku $E_aE_bE_c$ (případně kružnici devíti bodů).

5. Dokažte, že P leží na kružnici opsané trojúhelníku BIC, a využijte trojúhelníkovou nerovnost.

6. Ukažte, že M je Švrčkův bod nějakého trojúhelníku, a pak to ukažte i o N.

7. Protněte společnou tečnu ω_1, ω_2 s kružnicí ω a dokažte, že Q je Švrčkův bod nějakého trojúhelníku.

8. Bod A je Švrčkův bod v trojúhelníku CEF, takže stačí dokázat, že I leží na kružnici se středem v I procházející body E, F. Dokažte, že $|AF|$ i $|AI|$ je poloměr kružnice k.

9. Hledejte podobnosti trojúhelníků.

10. Ukažte, že R je Švrčkův bod trojúhelníku AMN.

11. Tipněte si, kde leží střed kružnice, a převeďte úlohu na počítání vzdáleností.

12. Dokreslete E_a, abyste se zbavili bodu G.

13. Použijte tvrzení 5, tvrzení 3 a mocnost bodu ke kružnici.

14. Protněte osu úhlu u vrcholu A s EF (dokreslete i Švrčkův bod) a využijte tvrzení 4. Po využití mocnosti bodu ke kružnici a tvrzení 5 už stačí jen úhlit.

Literatura a zdroje

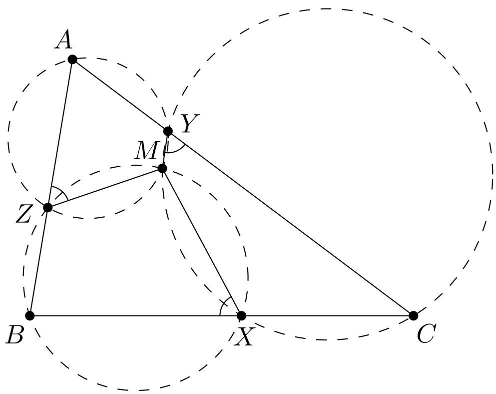
Tento příspěvek je z větší části převzatý z příspěvku *Švrčkův bod* (Blansko-Obůrka 2011) od Martiny Vaváčkové, jíž tímto děkuji.

[1] Martina Vaváčková, *Švrčkův bod*, http://mks.mff.cuni.cz/library/,
[2] Michal Rolínek, Josef Tkadlec: *The Š point*, www.onlinemathcircle.com.

Miquelův bod

Martina Vaváčková

Mějme trojúhelník ABC. Na přímkách BC, CA a AB zvolme postupně body X, Y a Z. Kružnice opsané trojúhelníkům AYZ, BZX a CXY (tzv. *Miquelovy kružnice*) se protínají v jednom bodě, který nazveme *Miquelovým bodem* a označíme jej M. Trojúhelník XYZ se nazývá *Miquelův trojúhelník.*



Tvrzení 1. *Přímky MX, MY a MZ svírají s příslušnými stranami trojúhelníka ABC stejné úhly.*

Pokud jsou tyto úhly rovny 90°, říkáme, že XYZ je pedální trojúhelník.

Tvrzení 2. *Platí následující rovnosti:*

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ZXY|,$$
$$|\sphericalangle CMA| = |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle XYZ|,$$
$$|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle YZX|.$$

Všimněme si, že jsou-li pevně dány trojúhelník ABC a bod M, pak existuje nekonečně mnoho jim příslušících Miquelových trojúhelníků. Všechny tyto trojúhelníky jsou navzájem podobné.

Věta. *Body X, Y, Z leží na jedné přímce, právě když bod M leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.*

Tato věta zobecňuje tvrzení o Simsonově přímce, které říká, že paty kolmic z daného bodu na strany trojúhelníka leží na jedné přímce, právě když se tento bod nachází na kružnici opsané.

Úlohy

Úloha 1. Pro jaké polohy bodu M platí $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$?

Úloha 2. (Miquelův bod čtyřúhelníka) Mějme čtyři navzájem různoběžné přímky. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům tvořeným vždy třemi z těchto přímek se protínají v jednom bodě.

Úloha 3. (Miquelova věta o pětiúhelníku) Mějme konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Trojici bodů A, B, $EA \cap BC$ (pokud průnik existuje) opíšeme kružnici – totéž učiníme cyklicky pro další čtyři trojice bodů. Ukažte, že druhé průsečíky „sousedních“ kružnic (různé od A, B, C, D, E) leží na jedné kružnici.

Úloha 4. Nechť XYZ je Miquelův trojúhelník příslušící trojúhelníku ABC a M je jeho Miquelův bod.

(i) Zvolme libovolně bod P. Přímky AP, BP a CP protínají příslušné Miquelovy kružnice postupně v bodech A_1, B_1 a C_1. Ukažte, že A_1, B_1, C_1, P a M leží na jedné kružnici.

(ii) Body A, B a C veďme tři rovnoběžné přímky, které protnou příslušné Miquelovy kružnice postupně v bodech A_2, B_2 a C_2. Ukažte, že A_2, B_2, C_2 a M leží na jedné přímce.

Úloha 5. Buď D bod na straně BC trojúhelníka ABC. Přímka vedená bodem D protíná stranu AB v bodě X a polopřímku AC v bodě Y. Kružnice opsaná trojúhelníku BXD protíná kružnici ω opsanou trojúhelníku ABC v bodě Z ($Z \neq B$). Přímka ZD, resp. ZY protíná ω podruhé v bodě V, resp. W. Ukažte, že $|AB| = |VW|$. (APMO 2015)

Úloha 6. Na stranách BC, CA a AB trojúhelníka ABC zvolme postupně body A_1, B_1 a C_1. Kružnice opsané trojúhelníkům AB_1C_1, BC_1A_1 a CA_1B_1 protnou kružnici opsanou $\triangle ABC$ podruhé v bodech A_2, B_2 a C_2. Obrazy bodů A_1, B_1 a C_1 ve středové souměrnosti podle středu strany, na níž leží, nazveme postupně A_3, B_3 a C_3. Dokažte, že trojúhelníky $A_2B_2C_2$ a $A_3B_3C_3$ jsou podobné. (AIMO 2007)

Úloha 7. Kružnice se středem O prochází vrcholy A a C trojúhelníka ABC a protíná úsečky AB a BC podruhé v bodech K a N. Kružnice opsané trojúhelníkům ABC a KBN se protínají ve dvou různých bodech B a M. Dokažte, že $|\sphericalangle OMB| = 90°$. (IMO 1985)

Literatura a zdroje

[1] Johnson, R. A.; *Advanced Euclidian Geometry*, Dover Publications, NY, 2007
[2] Ostermann, A. a Wanner, G.; *Geometry by Its History*, Springer, UK, 2012
[3] Zhao, Y.; *Cyclic quadrilatelars*, *http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf*
[4] *http://artofproblemsolving.com/*

Obsah