Uhelná Příbram

Sborník, jaro 2014

Anička Doležalová
David Hruška
Peter „πtr“ Korcsok
Marta Kossaczká
Kuba Krásenský
Mirek Olšák
Tomáš „Šavlík“ Pavlík
Alexander „Olin“ Slávik
Pepa Svoboda
Helča Svobodová
Martin „E.T.“ Sýkora
Štěpán Šimsa
Rado Švarc
Martin Töpfer
Lukáš Zavřel

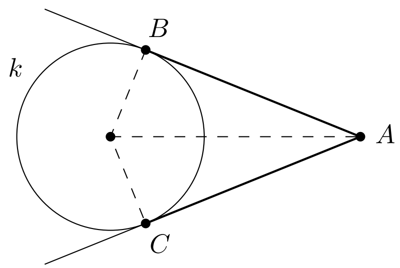
Autoři: Anička Doležalová, David Hruška, Peter „πtr“ Korcsok, Marta Kossaczká, Kuba Krásenský, Mirek Olšák, Tomáš „Šavlík“ Pavlík, Alexander „Olin“ Slávik, Pepa Svoboda, Helča Svobodová, Martin „E.T.“ Sýkora, Štěpán Šimsa, Rado Švarc, Martin Töpfer, Lukáš Zavřel
Editor: Alexander „Olin“ Slávik
vydání první, náklad 50 výtisků
květen 2014
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Překlápění tečen

Anička Doležalová

Na lehčích úlohách si ukážeme, jak využít „stejnost tečen", tedy fakt z následujícího tvrzení:

Tvrzení. *Mějme kružnici k a bod A ležící vně kružnice. Veďme bodem A tečny ke k, body dotyku s kružnicí označme B, C. Pak $|AB| = |AC|$.*



Tvrzení. *Přímky p a q jsou společnými vnějšími tečnami kružnic k_1 a k_2. Přímka p se kružnice k_1 dotýká v bodě A a kružnice k_2 v bodě B, přímka q se kružnic dotýká v bodech C a D. Ukažte, že*

(i) $|AB| = |CD|$,
(ii) *pokud se kružnice neprotínají a jejich vnitřní tečna r protíná přímky p a q v bodech X a Y, pak $|AB| = |CD| = |XY|$.*

Tvrzení. *Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA a AB po řadě v bodech D, E a F. Ukažte, že $|AE| = |AF| = \frac{-a+b+c}{2}$.*

Tvrzení. *V trojúhelníku ABC se kružnice připsaná straně BC dotýká přímek BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Ukažte, že*

(i) $|AE| = |AF| = \frac{a+b+c}{2}$,
(ii) $|BD| = |BF| = \frac{a+b-c}{2}$, $|CD| = |CE| = \frac{a-b+c}{2}$
(iii) *body dotyku s vepsanou a připsanou kružnicí jsou středově souměrné podle středu příslušné strany.*

Příklad 1. Mějme kružnici k se středem S o poloměru 1 a bod P takový, že $|PS| = 3$. Tímto bodem veďme tečny ke kružnici k, které se jí dotknou v bodech A, B. Dále si zvolme libovolný bod T kratšího oblouku AB kružnice k a jím veďme tečnu ke k. Tato tečna protne úsečky AP a BP v bodech X a Y. Určete obvod trojúhelníku PXY. (Náboj 2008)

Příklad 2. Je dán trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou k. Body X a Y leží na stranách AB a AC tak, že XY je tečna kružnice k. $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CA| = 8$. Určete obvod trojúhelníku AXY.

Příklad 3. Mějme trojúhelník ABC. Nakreslíme tři tečny k jeho vepsané kružnici tak, že každá odřízne jiný z vrcholů trojúhelníku. Obvody odříznutých trojúhelníků jsou 1, 2 a 3. Dokažte, že původní trojúhelník byl pravoúhlý. (MKS 32–6–3)

Příklad 4. Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $|AB| > |BC|$. Body K a M jsou body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD a ABC s úhlopříčkou AC. Body L a N jsou stejným způsobem body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD a ABD s BD. Dokažte, že $KLMN$ je obdélník. (MO 54–A–I–2)

Tvrzení. (O tečnovém čtyřúhelníku) *Je dán čtyřúhelník $ABCD$, který má vepsanou kružnici (dotýká se všech čtyř stran). Ukažte, že $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.*

Příklad 5. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ tak, že $|AB|+|CD| = |BC|+|AD|$. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC se úhlopříčky AC dotýkají v jednom bodě.

Příklad 6. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ tak, že $|AB|+|BC| = |CD|+|AD|$. Kružnice vepsané trojúhelníkům ABD a CBD se úhlopříčky BD dotýkají v bodech X a Y. Dokažte, že body X a Y jsou stejně vzdáleny od středu úsečky BD.

Příklad 7. Na přímce a, na níž leží strana BC trojúhelníku ABC, jsou dány body dotyku všech tří mu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané. (MO 63–B–I–3)

Příklad 8. Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D, E, F tak, aby se úsečky AD, BE, CF protťaly v jednom bodě, který označíme G. Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte. (MO 52–A–III–2)

Příklad 9. Na straně BC trojúhelníku ABC je dán bod D. Trojúhelníkům BDA a DCA vepíšeme kružnice. Jejich vnější společná tečna různá od BC protíná AD v bodě X. Určete množinu bodů X, probíhá-li bod D stranu BC.

Příklad 10. Mějme trojúhelník ABC s obvodem 4. Na polopřímkách AB a AC označme postupně body X, Y tak, že $|AX| = |AY| = 1$ a úsečky BC a XY se protínají v bodě M. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABM, ACM má obvod 2. (Rusko 2011)

Zdroje

Přednáška čerpá převážně ze staršího příspěvku Monči Pospíšilové, které bych tímto ráda poděkovala.

Čínská zbytková věta

David Hruška

Abstrakt. Na přednášce si dokážeme Čínskou zbytkovou větu a vyřešíme s ní několik těžších úloh vyskytujících se například v MO.

Pohádka na dobrou … vlastně na úvod

Jeden čínský generál pořádal vojenskou přehlídku, na kterou se měl dostavit sám velký císař. Aby se císaři přehlídka líbila, rozhodl se generál, že budou vojáci pochodovat v pravidelném (obdélníkovém) zástupu. Když je ale nechal seřadit do sedmistupu, jeden voják přebýval. Generálovi se zdálo škoda toho vojáka zastřelit, nechal tedy vojáky nastoupit do osmistupu. Bohužel to zase nevyšlo – dva vojáci zbyli. Pro devítistup zbylo vojáků šest. To už se generál rozzlobil a řekl si, že se raději podívá, kolika vojákům to vlastně velí. Nemohl si ale vzpomenout, kam si to číslo napsal, pouze si pamatoval, že jich bylo méně než 500. Poradíte mu?

Soustavy kongruencí

Úmluva. Číslem myslíme přirozené číslo, není-li řečeno jinak. Největší společný dělitel čísel a, b značíme (a, b). *Mocninou* myslíme číslo tvaru n^k pro $k > 1$.

Jistě jste odhalili, že generál z pohádky potřeboval vyřešit soustavu kongruencí

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 7, \\ x &\equiv 2 \pmod 8, \\ x &\equiv 6 \pmod 9. \end{aligned}$$

Občas se to může hodit i nám, proto se podíváme na to, kdy a jak je to možné.

Věta. (Čínská zbytková) *Nechť jsou celá čísla $n_1, \ldots, n_k$ po dvou nesoudělná a $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Z}$. Pak soustava kongruencí*

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \pmod{n_1}, \\ &\vdots \\ x &\equiv r_k \pmod{n_k} \end{aligned}$$

má právě jedno řešení x takové, že $0 \le x < n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Poznámka. (O soudělnosti modulů) Bez podmínky o nesoudělnosti je soustava řešitelná právě tehdy, když pro každá $1 \leq i, j \leq n$ platí $r_i \equiv r_j \pmod{(n_i, n_j)}$.

Cvičení. Předchozí věta nám zaručuje existenci nějakého řešení. Jak jej ale najít? Dořešte úlohu z pohádky.

Úlohy

Úloha 1. Je dáno přirozené číslo n. Ukažte, že existuje n po sobě jdoucích čísel takových, že každé z nich je dělitelné alespoň dvěma různými prvočísly.

Úloha 2. Rozhodněte, zda existuje nekonečná množina $K \subset \mathbb{N}$ taková, že kdykoliv p je prvočíslo a $k \in K$, pak $p^2 + k$ je složené.

Úloha 3. Jsou dána čísla $a_1, \ldots, a_n$. Dokažte, že existuje $M \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $1 \leq i \leq n$ je $M \cdot a_i$ mocnina.

Úloha 4. Dokažte, že existuje 2014 po sobě jdoucích čísel, z nichž žádné není mocninou.

Úloha 5. Dokažte, že existuje číslo n takové, že pro libovolné celé číslo k nemá číslo $k^2 + k + n$ žádného prvočíselného dělitele menšího než 2008. (ČPS 2008)

Úloha 6. Rozhodněte, zda existuje posloupnost obsahující každé přirozené číslo právě jednou taková, aby součet jejích prvních k členů byl dělitelný k, kdykoliv $k \in \mathbb{N}$. (Ruská MO 1995)

Úloha 7. Dokažte, že každý zbytek modulo liché $n \geq 3$ lze vyjádřit jako součet nebo rozdíl dvou zbytků modulo n nesoudělných s n.

Úloha 8. Ukažte, že existuje nekonečná rostoucí posloupnost přirozených čísel a_n taková, že kdykoliv $k \geq 0$, pak posloupnost $b_n = k + a_n$ obsahuje jen konečně mnoho prvočísel. (Česká MO 1997)

Úloha 9. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ jsou navzájem různá celá čísla z množiny $\{1, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i = 1, \ldots, k-1$ je číslo $a_i(a_{i+1} - 1)$ dělitelné n. Dokažte, že číslo $a_k(a_1 - 1)$ není dělitelné n. (IMO 2009)

Úloha 10. Mřížový bod v rovině nazveme *neviditelným*, pokud úsečka, která jej spojuje s počátkem, obsahuje nějaký další mřížový bod. Dokažte, že existuje čtverec se stranami rovnoběžnými s osami a rozměry 100×100 tak, že všechny jeho mřížové body jsou neviditelné.

Úloha 11. Najděte všechna přirozená n taková, že existují čísla $b_1, \ldots, b_n$, která nejsou všechna stejná, tak, že pro každé k je $(b_1 + k)(b_2 + k) \cdots (b_n + k)$ mocnina.

Úloha 12. Nechť $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Čísla $a_1, \ldots, a_n$ mají tu vlastnost, že pro každé $x \in \mathbb{N}$ je existuje $i \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že $a_i \mid P(x)$. Dokažte, že pak existuje $j \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{N}$ platí $a_j \mid P(x)$.

(St. Petersburg MO)

Úloha 13. Ukažte, že existuje přirozené číslo k takové, že $k \cdot 2^n + 1$ je složené pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Literatura a zdroje

[1] Michal „Kenny“ Rolínek: *Důkazové metody v teorii čísel.* Domaslav, 2010.
[2] Titu Andrescu, Dorin Andrica: *Number Theory.* Springer, 2009.
[3] *http://www.problems.ru*

Jensenova nerovnost

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek seznamuje s jednou z klasických algebraických nerovností a ukazuje její použití na dokazování nerovností olympiádního typu.

Konvexní kombinace

Definice. Nechť $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ a navíc $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Pak číslo $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ nazýváme *konvexní kombinací* čísel $x_1, \dots, x_n$.

Cvičení. Rozmyslete si, že pokud je x_1 nejmenší a x_n největší z čísel $x_1, \dots, x_n$, leží každá konvexní kombinace těchto čísel v intervalu $\langle x_1, x_n\rangle$.

Pro práci s Jensenovou nerovností je klíčové porozumět kovexním kombinacím (bodů) v rovině.

Definice. Nechť $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ jsou souřadnice n bodů v rovině, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ a $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Pak bod o souřadnicích

$$[\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n]$$

nazýváme *konvexní kombinací* bodů $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$.

Cvičení. Co je množinou všech konvexních kombinací dvou (tří, čtyř, atd.) bodů v rovině?

Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pokud pro každou dvojici $x, y \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

řekneme, že f je *konvexní* na I.

Duálně (s opačnou nerovností) definujeme *konkávní* funkci. Pokud platí ostrá varianta uvedené nerovnosti, mluvíme o *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) funkci.

Cvičení. Rozmyslete si, co nerovnost definující konvexitu (resp. konkavitu) znamená geometricky.

Cvičení. Zjistěte, které z elementárních funkcí jsou na nějakých intervalech konvexní (resp. konkávní).

Jensenova nerovnost

Konečně se dostáváme k jádru merita pudla věci.

Tvrzení. *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \ldots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ taková, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, platí*

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Cvičení. Interpretujte obě strany rovnosti geometricky pomocí konvexních kombinací bodů a uvědomte si, že tvrzení se tím stává téměř triviálním.

Cvičení. Rozmyslete si, kdy v Jensenově nerovnosti nastává rovnost.

Nyní si můžeme blahopřát, neboť jsme téměř zadarmo získali velmi obecně vyhlížející nerovnost, která se ukáže být silnou zbraní. Ke správnému použití Jensenovy nerovnosti je třeba umět rozhodnout, zda je daná funkce konvexní (resp. konkávní). K tomu se v praxi používá následující lemma.

Lemma. *Má-li funkce f na intervalu I nezápornou (resp. nekladnou) druhou derivaci, je f na I konvexní (resp. konkávní).*

Pokud jste o derivaci (natož nějaké druhé derivaci) neslyšeli, nezoufejte. U jednoduchých funkcí se dá konvexita/konkavita dobře odhadnout z grafu, případně lze použít vhodný matematický software. Přísně korektní zdůvodnění se v tomto případě nevyžaduje ani v MO, o jednoduchých funkcích se považuje za známé, zda jsou konvexní či konkávní.

Logaritmus

Občas se při používání Jensenovy nerovnosti setkáme s logaritmem. Užitečný pro nás bude, protože svým způsobem převádí násobení na sčítání a mocnění na násobení. Přesněji o tom hovoří následující poznámka.

Poznámka. Nechť $a > 1$. Funkce $f(x) = \log_a(x)$ definovaná na $\mathbb{R}^+$ jako inverzní funkce k $g(x) = a^x$ má následující vlastnosti:

(i) f je rostoucí ryze konkávní funkce na $\mathbb{R}^+$,
(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$,
(iii) $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$,
(iv) $f(x^y) = yf(x)$.

Motivační příklady

Konečně se dostáváme k úlohám. Začneme zlehka:

Příklad. Ukažte, že pro každé reálné $x > 1$ platí:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Řešení. Použijeme Jensenovu nerovnost pro funkci $f(x) = 1/x$, která je konvexní na $\mathbb{R}^+$, a konvexní kombinaci kladných čísel $x-1$, x, $x+1$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Dostáváme

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \geq \frac{1}{\frac{x-1}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x+1}{3}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Jistě by vám nedělalo problém tuto nerovnost dokázat zcela přímočaře roznásobením. Zkusíme tedy něco těžšího – zástupce typické skupiny úloh řešitelných Jensenovou nerovností:

Příklad. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Řešení. Jensenovu nerovnost aplikujeme na funkci $f(x) = \sin x$ konkávní na intervalu $(0, \pi)$. Platí $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, tedy

$$\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin\beta + \frac{1}{3}\sin\gamma \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U této nerovnosti bychom již přímočařejší přístup hledali těžko. Jensenova nerovnost je pro dokazování nerovností pro úhly v trojúhelníku často užitečná, neboť známe jejich součet (a tedy i tu nejjednodušší konvexní kombinaci).

Pořád je to moc snadné? Na přednášce si ukážeme poněkud magický, ale zato velmi elegantní důkaz tzv. AG-nerovnosti:

Tvrzení. *Pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí:*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Nyní už víme dost, abychom se mohli pustit do řešení skutečných úloh. Nezapomeňte, že Jensenova nerovnost platí pro každou konvexní (resp. konkávní) funkci, takže pokud kýžená nerovnost hned napoprvé nevyjde, není důvod házet Jensena do žita – prostě zkuste jinou funkci. Tak hurá do toho!

Úlohy na rozehřátí

Úloha 1. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b \in \langle -1, 1\rangle$ platí

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{4-(a+b)^2}.$$

Úloha 2. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b splňující $a + b = 1$ platí

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Úloha 3. Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12.$$

Úloha 4. Pro α, β, γ úhly v trojúhelníku dokažte nerovnosti

(i) $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$,
(ii) $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,
(iii) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$,
(iv) $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Varování: Část (iv) *je trochu zákeřná.*

Úloha 5. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sqrt[4]{27(a^7+b^7+c^7)} \geq \sqrt[4]{a^7} + \sqrt[4]{b^7} + \sqrt[4]{c^7}.$$

Úloha 6. Kladná reálná čísla x, y splňují $x + y = 1$. Dokažte

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \geq \frac{1}{1+2xy}.$$

Pořádné úlohy

Úloha 7. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Úloha 8. Pro $a, b \geq 0$ dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

(MO 63–III–6)

Úloha 9. Pro $a, b, c > 0$ dokažte

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

Úloha 10. Pro reálná $x_1, \ldots, x_n \geq 1$ dokažte

$$\frac{1}{x_1+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}+1}.$$

(IMO Shorltlist 1998)

Úloha 11. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Úloha 12. Pro $p \in (0, 3\rangle$ a kladná reálná a, b dokažte nerovnost

$$\sqrt{a^2+pb^2} + \sqrt{b^2+pa^2} \geq a + b + (p-1)\sqrt{ab}.$$

(MO 62–III–6)

Literatura a zdroje

[1] Michal „Kenny“ Rolínek, Pavel Šalom, *Seriál o nerovnostech*, MKS, 2010
[2] Miloš Přinosil, *Užití Jensenovy nerovnosti*, Prometheus, 2008

Štvorfarebný problém

Peter „πtr“ Korcsok

Abstrakt. Jedna z najslávnejších a najdlhšie otvorených hypotéz v teórii grafov je (teraz už) Veta o štyroch farbách. Na tejto prednáške si spomenieme niektoré z pokusov na jej dokázanie a pokúsime sa v nich nájsť chyby. Tiež si ukážeme niekoľko tipov, kam by sme sa mali vydať, ak vetu chceme skutočne dokázať. A v závere si ukážeme niečo málo z vyberavosti grafu, teda v určitom zmysle zobecnenia klasického ofarbovania.

Citát. „Domnienka o štyroch farbách bola jedným z najväčších nevyriešených problémov matematiky. Od roku 1852 až do dnešného dňa sa ju prakticky každý matematik, ktorý kedy žil, niekedy snažil vyriešiť.“ *Thomas Saaty a Paul Kainen, 1977*

Veta. (o štyroch farbách) *Každú mapu vieme ofarbiť pomocou štyroch farieb tak, aby žiadne dva susediace štáty nemali rovnakú farbu.*

História tejto vety siaha zhruba do roku 1852, keď si Francis Guthrie všimol, že na ofarbenie mapy anglických štátov mu stačia štyri farby. Obrátil sa preto na svojho brata Frederica so zvedavou otázkou, či to rovnako pôjde s ľubovoľnou mapou. Nakoľko obaja v tom čase študovali pod vedením Augusta de Morgana, Frederic túto otázku posunul priamo de Morganovi a celej matematickej spoločnosti.

Na svoj prvý „dôkaz“ ale čakala vyše 25 rokov, zato dostala rovno dva: v roku 1879 od sira Alfreda Braya Kempeho a v roku 1880 od Petra Guthrie Taita. Tešiť sa ale mohla „len“ 11 rokov: v roku 1890 Percy Heawood vyvrátil Kempeho dôkaz a v roku 1891 Julius Petersen našiel protipríklad k Taitovmu dôkazu. Oba neúspešné dôkazy ale priniesli aspoň čiastočné vyriešenie problému.

V priebehu nasledujúcich desaťročí sa o zdolanie Problému štyroch farieb snažili mnohí matematici, za zmienku stojí napríklad Hugo Hadwiger a jeho domnienka z roku 1943, ktorá zovšeobecňuje tento problém a stále nie je vyriešená.

Prvý dôkaz, ktorý doteraz nebol vyvrátený,[1] spáchali páni Kenneth Appel a Wolfgang Haken, s miernou pomocou Johna Kocha, v roku 1976, pričom jeho pomerne veľká časť je vyriešená na počítači. Na začiatku 80-tych rokov síce bolo hlásených niekoľko chýb v ich dôkaze, všetkým sa ale autori úspešne ubránili a v roku 1989 vydali knihu so všetkými detailami.

20 rokov po prvom dôkaze, v roku 1996, ponúkli Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour a Robin Thomas svetu nový dôkaz Vety o štyroch farbách, ktorý je

[1] Čiastočne aj preto, že je tak komplikovaný, že ho nikto nevydrží čítať dostatočne dlho ;).

výrazne jednoduchší a kratší,[2] aj keď stále využíva počítače. Tento dôkaz bol v roku 2005 overený (opäť na počítači) pomocou dokazovacieho jazyka Coq.

Na prednáške si ukážeme niektoré z neúspešných dôkazov a skúsime v nich nájsť chybu, alebo naopak, ukážeme si niečo, čo by sa dalo k úspešnému dôkazu použiť.

Poznámka. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že sa v žiadnom mieste nestretávajú územia 4 štátov.

Tvrdenie. *V každej mape nájdeme štát, ktorý má maximálne 5 susedov.*

Definícia. Na mape ofarbenej štyrmi farbami nazveme *AB-obtiahnutím* zjednotenie všetkých hraníc, ktoré majú na jednej strane niektorú z farieb A alebo B a na druhej jednu z farieb C a D.

Každé takéto obtiahnutie obsahuje všetky vrcholy a tvorí niekoľko disjunktných kružníc párnej dĺžky.

Tvrdenie. *Ak v mape existuje množina disjunktných kružníc párnej dĺžky, ktoré spolu prechádzajú všetkými vrcholmi, potom vieme mapu ofarbiť pomocou štyroch farieb.*

Cvičenie. Dá sa v každej mape nájsť jedna kružnica, ktorá prechádza všetkými vrcholmi?

Ak nám ešte zostane čas, pozrieme sa na mierne iné farbenie: každému vrcholu pridelíme zoznam „povolených“ farieb (každý vrchol môže mať povolené odlišné farby) a následne chceme vrcholy ofarbiť tak, aby žiadne dva susedné nemali rovnakú farbu a každý vrchol použil farbu zo svojho povoleného zoznamu.

Definícia. *Vyberavosťou* grafu nazveme najmenšie číslo k, že keď každému vrcholu povolíme ľubovoľnú k-ticu farieb, vždy nájdeme aj správne ofarbenie.

Cvičenie. Nájdite graf, ktorý má inú vyberavosť ako (bežnú) farebnosť.

Tvrdenie. *Každý rovinný graf má vyberavosť maximálne 5.*

Literatúra a zdroje

Pri písaní tohto príspevku som sa dosť inšpiroval príspevkom Filipa Hláska *Problém čtyř barev* zo sústredenia Hojsova Stráž 2011, za čo mu na tomto mieste ďakujem.

[1] Donald Hatch, Melinda Green: *„Proof“ of the 4-Color Map Theorem*, *http://www.superliminal.com/4color/4color.htm*
[2] Robin Thomas a kol.: *The Four Color Theorem*, *http://people.math.gatech.edu/ thomas/FC/fourcolor.html*

[2] Miesto 139 strán krátkej (r. 1976) alebo vyše 700 strán dlhej verzie (r. 1989) ich zaberá len 9.

Goniometrické substitúcie

Marta Kossaczká

S goniometrickými funkciami ste sa už určite stretli, pravdepodobne predovšetkým v geometrii. Ich použitie tam ale zďaleka nekončí.

Na začiatok si zhrňme, čo o nich vieme. Funkcie *sínus* a *kosínus* sa dajú definovať pomocou jednotkovej kružnice. Tá má stred v počiatku (bod $[0,0]$) a polomer 1. Uvažujme ľubovoľnú polpriamku p začínajúcu v počiatku, potom uhlu (orientujeme ho proti smeru hodinových ručičiek), ktorý zviera x-ová os s p, zodpovedá práve jeden priesečník p a jednotkovej kružnice. Hodnota y-novej súradnice tohoto bodu je sínus daného uhlu, kým x-súradnica udáva kosínus daného uhlu.

Tvrdenie. *Pre funkcie sínus a kosínus platí:*

(i) *Definičný obor oboch funkcií sú všetky reálne čísla.*
(ii) *Ich obor hodnôt je interval* $[-1,1]$.
(iii) *Obidve funkcie sú* 2π *periodické.*
(iv) *Sínus je na intervale* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *rastúci a na* $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ *klesajúci.*
(v) *Kosínus je na* $[-\pi,0]$ *rastúci a na* $[0,\pi]$ *klesajúci.*

Funkcia *tangens* je definovaná na svojom definičnom obore ako

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

a funkcia *kotangens* je definovaná na svojom definičnom obore ako

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

Tvrdenie. *Pre funkcie tangens a kotangens platí:*

(i) *Definičný obor tangensu je* $\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$ *a kotangesu* $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(ii) *Obor hodnôt oboch funkcií sú všetky reálne čísla.*
(iii) *Obidve funkcie sú* π *periodické.*
(iv) *Tangens je na intervale* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *rastúci.*
(v) *Kotangens je na intervale* $(0,\pi)$ *klesajúci.*

Pre goniometrické funkcie platí zopár užitočných, špeciálnych vzťahov, ktoré je dobré si zapamätať.

Tvrdenie. *Pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, pre ktoré má daný výraz zmysel (tj. nedelíme nulou) platí:*

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a, \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a,$$
$$\sin(-a) = -\sin a, \qquad \cos(-a) = \cos a,$$
$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a, \qquad \operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a,$$
$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b,$$
$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b},$$
$$\operatorname{cotg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b \mp 1}{\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b},$$
$$\sin a \pm \sin b = 2 \sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right),$$
$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a - b}{2}\right),$$
$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a - b}{2}\right).$$

Príklady

V nasledujúcich príkladoch stačí iba dobre uhádnuť vhodnú substitúciu pomocou vyššie uvedených vzťahov.

Príklad 1. Majme reálne čísla a, b také, že $a^2 + b^2 = 1$. Nájdite minimum a maximum výrazu ab.

Príklad 2. Dokážte, že zo štyroch ľubovoľných čísel z intervalu $(0, 1)$ vieme vybrať dve tak, aby platilo

$$0 < x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2} < \frac{1}{2}.$$

Príklad 3. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc:

$$2x + x^2 y = y,$$
$$2y + y^2 z = z,$$
$$2z + z^2 x = x.$$

Príklad 4. Rozhodnite, či existuje 100-prvková množina čísel S s vlastnosťou: ak x patrí do S, tak aj číslo $2x^2 - 1$ patrí do S.

Príklad 5. Pre ľubovoľné číslo $a \in \mathbb{R}$ definujme postupnosť vzťahmi $x_1 = a$ a $x_{n+1} = 1/(1 - x_n) - 1/(1 + x_n)$, až kým $x_n = \pm 1$, číslo n potom označuje dĺžku tejto postupnosti. Koľko existuje postupností s dĺžkou 8?

Príklad 6. Dokážte, že rekurentne zadaná postupnosť spĺňujúca vzťah

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}$$

je periodická

Príklad 7. Majme rekurentnú postupnosť zadanú vzťahom

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{1 - x_n}$$

a $x_0 = 2013$. Vypočítajte hodnotu x_{2014}.

Nerovnosti

Goniometrické funkcie majú veľké využitie aj medzi nerovnosťami. Pri takýchto úlohách ale dosadenie býva iba začiatkom, potom treba siahnuť po nejakých klasických zbraniach, ako AG alebo Jensenova nerovnosť, či iných známych nerovnostiach týkajúcich sa predovšetkým trojuholníka.

Nasledujúce tvrdenie vyplýva z Jensenovej nerovnosti a je často využívané po prevedení nerovnosti na goniometrický tvar.

Tvrdenie. *Majme trojuholník s vnútornými uhlami a, b, c, potom platí:*

$$\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Tvrdenie. *Majme ostrouhlý trojuholník s vnútornými uhlami a, b, c, potom platí:*

$$\cos a + \cos b + \cos c \leq \frac{3}{2}.$$

Poznámka. Tvrdenie platí aj pre všeobecný trojuholník.

V nerovnostiach sa občas stretávame s rôznymi podmienkami, ktoré nám sami od seba nič nehovoria. Ukážeme si, ako sa môžeme takýchto podmienok zbaviť pomocou špecifických goniometrických substitúcií.

Tvrdenie. *Nech sú čísla $a, b, c \in (0, \frac{\pi}{2})$, potom platí nasledujúca rovnosť práve vtedy, keď a, b, c sú uhly trojuholníka:*

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

Úloha. Majme kladné reálne čísla také, že platí $x + y + z = xyz$. Dokážte:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}.$$

(Korea 1998)

Riešenie. Vieme, že tangens na intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ dosahuje všetkých reálnych kladných čísel. Preto môžeme substituovať $x = \operatorname{tg} a$, $y = \operatorname{tg} b$, $z = \operatorname{tg} c$ pre nejaké $a, b, c \in (0, \frac{\pi}{2})$. Potom podľa podmienky platí $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$, a teda z predošlého tvrdenia vieme, že a, b, c sú uhly trojuholníka.

Dosadíme do našej nerovnosti a dostávame:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 b}} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 c}} \le \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 a}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 b}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 c}}} \le \frac{3}{2}.$$

Keďže kosínus je na intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ kladný, môžeme odmocniť a dostávame:

$$\cos a + \cos b + \cos c \le \frac{3}{2},$$

čo je presne predošlé tvrdenie, pretože a, b, c sú uhly trojuholníka.

Príklad 8. Majme kladné reálne čísla x, y, z také, že platí $x + y + z = xyz$. Dokážte:

$$xy + yz + xz \ge 3 + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2}.$$

Tvrdenie. *Majme čísla $a, b, c \in (0, \pi)$, potom platí nasledujúca rovnosť práve vtedy, keď a, b, c sú uhly trojuholníka:*

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2} = 1.$$

Príklad 9. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc:

$$3(x^2+1)yz = 4(y^2+1)xz = 5(z^2+1)xy,$$

kde plati $xy + yz + xz = 1$.

Tvrdenie. *Majme čísla $a, b, c \in (0, \pi)$, potom platí nasledujúca rovnosť práve vtedy, keď a, b, c sú uhly trojuholníka:*

$$\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} = 1.$$

Príklad 10. Majme čísla x, y, z väčšie ako 1 spĺňujúce $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokážte:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}.$$

(Iran 1997)

Ďalšie príklady

Príklad 11. Majme kladné reálne čísla x, y, z také, že platí $x + y + z = xyz$. Dokážte:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Príklad 12. Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla také, že platí:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} = 1.$$

Dokážte, že $abcd \geq 3$. (Lotyšsko 2002)

Príklad 13. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí:

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+x)(y+z)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

(Walther Janous, Crux Mathematicorum)

Gaussova prvočísla

Kuba Krásenský

Abstrakt. Stejně jako z reálných čísel jsou svým způsobem nejzajímavější čísla celá, i v komplexních číslech existuje pozoruhodná podmnožina. Jsou to Gaussova čísla – komplexní čísla, jejichž reálná i imaginární část jsou celé. Tato množina tvoří v Gaussově rovině čtvercovou mřížku. Ukazuje se, že i mezi těmito čísly jsou některá, která se nedají zapsat jako součin dvou jiných – Gaussova prvočísla. Na přednášce zjistíme, která to jsou, přičemž využijeme různé znalosti z teorie čísel. Na závěr nám nabyté znalosti pomohou vyřešit několik diofantických rovnic.

Komplexní čísla

V tomto odstavci shrnu základní informace o komplexních číslech. Bylo by dobré, kdyby je přibližně znal každý, kdo na přednášku půjde.

Imaginární jednotka i je „druhá odmocnina z mínus jedné“. Tím myslíme, že platí $i^2 = -1$. Imaginární jednotka není reálné číslo; je to jedno z čísel *komplexních*. Komplexní číslo je potom každé číslo tvaru $a + bi$. Koeficientům a, resp. b říkáme *reálná*, resp. *imaginární část* komplexního čísla. Můžeme je (jako každou dvojici bodů) vynášet do roviny. Na ose x budou ležet reálná čísla, na ose y čísla *ryze imaginární*. A třeba číslo $2 + 2i$ bude ležet na ose prvního kvadrantu.

Díky této geometrické představě definujeme *velikost* komplexního čísla z jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vidíme, že $|z|$ odpovídá velikosti úsečky spojující bod (a, b) s nulou (počátkem souřadnic). Známe-li tuto definici, můžeme každé komplexní číslo z vyjadřit také ve tvaru $|z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Zde φ označuje úhel, který svírá spojnice počátku a bodu (a, b) s reálnou osou.

Díky tomu, že víme, kolik je i^2, už umíme násobit dvě komplexní čísla. A sčítat je, to je samozřejmě ještě snazší:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i,\\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Na přednášce budeme také potřebovat pojem *komplexně sdruženého* čísla $\overline{a + bi} = a - bi$.

Tvrzení. *Pro libovolná komplexní čísla z_1, z_2, z platí:*

(i) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
(ii) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,
(iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Střípky z teorie čísel

Abychom dokázali některá tvrzení o Gaussových číslech, musíme ovládat určité postupy z teorie čísel. Tady budeme mít potřebné znalosti pěkně pohromadě.

Definice. Říkáme, že celá čísla a a b jsou kongruentní modulo d, pokud dávají stejný zbytek po dělení d. To znamená $d \mid (a - b)$. Kongruenci zapisujeme $a \equiv b \pmod{d}$.

Poznámka. S kongruencemi se stejným modulem lze počítat prakticky stejně jako s rovnicemi.

Tvrzení. *Pro každé celé číslo a platí $a^2 \equiv 0$ nebo $a^2 \equiv 1 \pmod 4$.*

Předchozí tvrzení se často formuluje slovy „nula a jednička jsou *kvadratické zbytky* modulo čtyři“. Je jednoduché jej dokázat – stačí postupně umocnit na druhou výrazy $4k$, $4k+1$, $4k+2$ a $4k+3$.

Věta. (Wilsonova) *Jestliže je p prvočíslo, pak platí*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Důkaz rád předvedu na konzultaci nebo v jakékoliv volné chvíli. Na přednášce na něj nebude čas.

Gaussova čísla

Definice. Komplexní číslo, jehož reálná i imaginární část jsou celá čísla, nazveme *Gaussovým celým číslem.*

Definice. *Normou* Gaussova čísla nazveme druhou mocninu jeho velikosti. Značíme $N(a+bi) = |a+bi|^2 = (a+bi) \cdot (\overline{a+bi}) = a^2 + b^2$.

Norma má tu příjemnou vlastnost, že je to vždy přirozené číslo (nebo nula). To se využívá například při důkazech matematickou indukcí. Navíc platí klíčová vlastnost, kterou si snadno dokážete:

Tvrzení. *Pro každá Gaussova čísla a, b platí*

$$N(ab) = N(a) \cdot N(b).$$

Je důležité si rozmyslet, že Gaussova čísla jsou *uzavřená na sčítání a násobení* – součet i součin dvou Gaussových čísel je Gaussovo číslo. Podobné tvrzení platí pro celá čísla. Ani jedna z těchto množin ale není uzavřená na dělení. 5/2 není celé číslo a není to ani Gaussovo číslo. Stejně jako v obyčejných celých číslech proto definujeme dělitelnost.

Definice. Říkáme, že *a je dělitelné b*, pokud existuje k takové, že $a = b \cdot k$. Také čteme „b dělí a“ a značíme $b \mid a$.

Cvičení. Dokažte, že pokud $a \mid b$, pak i $N(a) \mid N(b)$.

Cvičení. Jak poznáme, že je reálné celé číslo a dělitelné $1+i$? Jak poznáme, že je tímto číslem dělitelné $a+bi$?

Definice. *Jednotkami* nazveme Gaussova čísla normy jedna, tedy $\pm 1, \pm i$.

Úloha. (Na dlouhé zimní večery)

(i) Rozmyslete si, jak by se v Gaussových číslech dalo definovat dělení se zbytkem, a zkuste si ujasnit, proč dělení se zbytkem bude fungovat. Nápověda: Použijte normu zbytku po dělení. Pro důkaz využijte názorné geometrické představy.
(ii) Přeformulujte Eukleidův algoritmus pro Gaussova čísla a dokažte, že funguje.
(iii) Dokažte Bézoutovu větu.
(iv) Použijte předchozí výsledky k dokázání *klíčového tvrzení* z následující kapitoly.
(v) A pak už si snadno dorozmyslete, jak dokázat jednoznačnost rozkladu na prvočísla.

Prvočísla

Definice. Číslo p nazveme *Gaussovým prvočíslem*, pokud platí: Kdykoliv $p = a \cdot b$, pak buď a, nebo b je jednotka.

Tato definice sice zní trochu krkolomně, ale říká totéž jako běžná definice prvočísla. Existuje ale ještě druhý způsob, jak prvočíslo definovat:

Tvrzení. (Klíčové) *Číslo p je prvočíslo právě tehdy, když platí: Kdykoliv $p \mid ab$, pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$.*

Cvičení. Zkuste rozložit čísla 2, $2+2i$, 3, $3+i$ a 5 na Gaussova prvočísla.

Chtěli bychom umět rozhodnout, zda je dané číslo Gaussovým prvočíslem. K tomu nám poslouží následující série tvrzení:

Tvrzení. *Každé Gaussovo prvočíslo má reálný násobek.*

Tvrzení. *Číslo z je Gaussovo prvočíslo právě tehdy, když $\overline{z}$ je Gaussovo prvočíslo.*

Tvrzení. *Reálné prvočíslo se v Gaussově oboru rozkládá právě tehdy, lze-li jej zapsat jako součet dvou čtverců.*

Věta. (Fermatova) *Existují (až na přenásobení jednotkou) právě tato Gaussova prvočísla:*

(i) *Čísla tvaru $a+bi$, kde $N(a+bi)$ je dvojka nebo reálné prvočíslo tvaru $4k+1$.*
(ii) *Reálná prvočísla tvaru $4k+3$.*

Na přednášce větu dokážeme pomocí znalostí, které jsme postupně nasbírali. Pro zájemce přidávám jiný, trikový důkaz prvního bodu:

Definice. Mějme množinu S s konečným počtem prvků. *Involuce* je taková funkce $f\colon S \to S$, která je inverzní sama k sobě.

Lemma. *Počet pevných bodů každé involuce na dané množině má stejnou paritu.*

Důkaz. (Fermatovy věty) Sestrojme množinu S uspořádaných trojic (x, y, z) takových, že $p = x^2 + 4yz$. Ta má zřejmě involuci $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$. Jiná méně zřejmá involuce je

$$(x,\ y,\ z) \longmapsto \begin{cases} (x+2z,\ z,\ y-x-z) & \text{pro } x < y-z, \\ (2y-x,\ y,\ x-y+z) & \text{pro } y-z < x < 2y, \\ (x-2y,\ x-y+z,\ y) & \text{pro } x > 2y. \end{cases}$$

Ta má jen jeden pevný bod $(1, 1, k)$. Jelikož počet pevných bodů obou involucí musí mít stejnou paritu, první involuce musí mít nějaký pevný bod. Tudíž se p dá zapsat jako $x^2 + 4y^2$.

Využití

Občas se teorie kolem Gaussových čísel dá využít i v příkladech olympiádního typu.

Úloha. Řešte v celých číslech rovnici $x^2 + y^2 = 2009$. (MKS 30. ročník, seriál)

Úloha. Vyřešte diofantickou rovnici $x^2 + y^2 = 2005(x - y)$.

Úloha. (Těžká) Vyřešte obecnou diofantickou rovnici tvaru

$$\alpha x^2 + \beta x + \alpha y^2 + \gamma y + \delta = 0.$$

Tvrzení. *Jsou-li a, b nesoudělná čísla splňující $ab = y^k$, pak a i b jsou k-té mocniny (až na přenásobení jednotkou).*

Úloha. Které dvojice celých čísel splňují rovnici $x^2 + 1 = y^3$?

Úloha. Nalezněte všechny pythagorejské trojice, tj. vyřešte diofantickou rovnici

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Kdopak by se IMO šestky bál?

Mirek Olšák

Abstrakt. Příspěvek obsahuje vybrané, převážně kombinatorické, úlohy z mezinárodní matematické olympiády. Na konci příspěvku jsou k jednotlivým úlohám návody.

The best way to have good ideas is to have lots of them. *(Linus Pauling)*

Úloha 1. Na sportovním klání bylo m medailí udělováno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$). První den byla udělena jedna medaile a $1/7$ všech zbývajících $m-1$ medailí. Další den dvě medaile a $1/7$ z v tu chvíli zbývajících medailí; a tak dále. V n-tém posledním dni bylo uděleno zbylých n medailí. Kolik dní mělo klání a kolik medailí bylo celkem uděleno? (IMO 1967–6)

Úloha 2. Pro každé přirozené číslo určete hodnotu sumy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \cdots$$

(Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí nejvyšší celé číslo nepřevyšující x.) (IMO 1968–6)

Úloha 3. Mějme čtvercovou tabulku $n \times n$ nezáporných celých čísel. Předpokládejme, že kdykoli má nějaké políčko P nulovou hodnotu, pak součet hodnot na všech políčkách, která mají s P jednu společnou souřadnici, je vyšší nebo roven n. Dokažte, že součet hodnot na všech políčkách je roven alespoň $n^2/2$. (IMO 1971–6)

Úloha 4. Nechť S je čtverec se stranami délky 100 a L je lomená čára uvnitř S, která se neprotíná (ani nedotýká). Předpokládejme, že pro každý bod na hranici S je možné nalézt bod na L, který není od P dál než $1/2$. Dokažte, že je možné na L najít dva body X, Y takové, že $|XY| \le 1$, ale délka L mezi X a Y je alespoň 198. (IMO 1982–6)

Úloha 5. Říkáme, že permutace $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ má vlastnost P, pokud pro alespoň jedno $i \in \{1, 2, \ldots 2n-1\}$ platí $|x_i - x_{i+1}| = n$. Ukažte, že pro každé n existuje více permutací s vlastností P než bez ní. (IMO 1989–6)

Úloha 6. Ukažte, že existuje konvexní 1990-úhelník splňující následující vlastnosti:

(i) všechny úhly jsou stejné,
(ii) délky stran jsou v nějakém pořadí $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 1990^2$.

(IMO 1990–6)

Úloha 7. Ukažte, že existuje množina A kladných celých čísel s následující vlastností: Pro každou nekonečnou podmnožinu S prvočísel najdeme dvě kladná celá čísla $m \in A$, $n \notin A$ taková, že obě jsou součinem k různých prvků S pro nějaké $k \geq 2$.

(IMO 1994–6)

Úloha 8. Nechť p je liché prvočíslo. Kolik existuje p-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, 2p\}$ se součtem dělitelným p? (IMO 1995–6)

Úloha 9. Jsou dána tři kladná celá čísla p, q, n splňující $p+q < n$. Nechť $(n+1)$-tice $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ splňuje následující podmínky:

(i) $x_0 = x_n = 0$,
(ii) pro každé i splňující $1 \leq i \leq n$ buď $x_i - x_{i-1} = p$, nebo $x_i - x_{i-1} = -q$.

Ukažte, že existují indexy $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$ takové, že $x_i = x_j$. (IMO 1996–6)

Úloha 10. Na matematické soutěži, kde každý soutěžící řešil 6 úloh, byla každá dvojice těchto úloh vyřešena více než dvěma pětinami všech soutěžících. Navíc žádný soutěžící nevyřešil všechny úlohy. Ukažte, že existují alespoň dva soutěžící, kteří vyřešili přesně 5 úloh. (IMO 2005–6)

Úloha 11. Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven dvojnásobku obsahu mnohoúhelníku P. (IMO 2006–6)

Úloha 12. Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou navzájem různá kladná celá čísla a M je množina $n-1$ kladných celých čísel neobsahující číslo $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Luční kobylka skáče podél číselné osy, přičemž začíná v bodě 0 a provede doprava n skoků o délkách $a_1, a_2, \dots a_n$ v určitém pořadí. Dokažte, že pořadí skoků lze zvolit tak, že se kobylka neoctne na žádném čísle z množiny M. (IMO 2009–6)

Úloha 13. Je dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ kladných reálných čísel. Nechť s je celé kladné takové, že pro všechna $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dokažte, že pak existují kladná celá N a l $(l \leq s)$ taková, že $a_n = a_l + a_{n-l}$ pro všechna $n \geq N$. (IMO 2010–6)

Úloha 14. Mějme celé číslo $n \geq 3$ a $n+1$ bodů rovnoměrně rozložených na kružnici. Uvažujme taková označkování těchto bodů číselnými znaky $0, 1, \dots n$, ve kterých je použit každý z těchto znaků právě jednou. Dvě označkování považujeme za stejná, jestliže jedno přejde na druhé nějakou rotací kružnice. Označkování nazveme *krásným*, jestliže pro libovolné čtyři znaky $a < b < c < d$ takové, že $a + d = b + c$, tětiva spojující body označené znaky a a d neprotíná tětivu spojující body označené znaky b a c.

Nechť M značí počet krásných označkování a N počet uspořádaných dvojic (x, y) kladných celých čísel takových, že $x + y \leq n$ a $\mathrm{NSD}(x, y) = 1$. Dokažte rovnost

$$M = N + 1.$$

(IMO 2013–6)

Návody

(1) Ukažte, že před k-tým dnem od konce je množství medailí vyjádřitelné jako

$$(k+1)n + \left(\frac{n}{6} - 1\right) P_k\left(\frac{1}{6}\right),$$

kde P_k je monický polynom stupně $k-1$. Jediná možnost vyjde $n = 6$, $m = 36$.

(2) Uvažte cifru v binárním zápisu čísla n na k-té pozici (tedy udávající počet 2^k). Uvědomte si, že tato cifra bude v nekonečné sumě započtena jako

$$2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 + 1 = 2^k.$$

Výsledkem je tedy samotné číslo n.

(3) Uvažte sloupec/řádek s nejmenším součtem. BÚNO se jedná o řádek a součet jeho čísel je k. Pak umíte součty $n - k$ sloupců (z nul v daném řádku) zdola odhadnout jako $n - k$ a součet zbylých k sloupců (z minimality) pomocí k.

(4) Představte si postupné kreslení této čáry. Po dokončení (uspokojení všech bodů) jedné strany čtverce budou dvě protější strany načaté, ale nedokončené. Z toho musí existovat cesta k jedné straně a zpátky, která bude dlouhá 198.

(5) V permutaci bez vlastnosti P dejte první prvek k jeho „kamarádovi“. Tím získáte prosté zobrazení z permutací bez P do permutací s P.

(6) Na protější strany dáme vždy po sobě jdoucí čísla. Tím převedeme úlohu na hledání rovnoúhlého $5 \cdot 199$-úhelníku, kterému dáváme délky stran $1, 5, 9, \ldots, 2 \cdot 1990 - 1$. Tyto délky rozdáme tak, že jedné skupině stran, jejichž směry tvoří pravidelný pětiúhelník, dáme délky $1, 5, 9, 13, 17$, další (o 1 kousek pootočené) $21, 25, 29, 33, 37$, atd.

(7) Zvolte A jako množinu všech čísel, která mají vyšší počet prvočíselných dělitelů, než je hodnota toho nejmenšího prvočíselného dělitele.

(8) Zvolte libovolnou p-prvkovou podmnožinu, která má nějaký prvek $\leq p$ a nějaký prvek $> p$. Rozmyslete si, že existuje právě jedno „protočení“ prvků větších než p, aby součet celé množiny byl dělitelný p.

(9) Platí $p \equiv q \pmod{p+q}$, proto je modulo $p+q$ posloupnost tvaru $0, p, 2p, \dots$, a tedy je (při tomto modulo) $(p+q)$-periodická. BÚNO $x_{p+q} > 0$. Pak je možné ukázat, že za předpokladu neexistence hledaných indexů stále platí $x_{i+(p+q)} > x_i$, což dá spor s $x_n = 0$.

(10) Jednoho takového soutěžícího dostanete snadno z dvojího počítání dvojic: (soutěžící, vyřešená dvojice úloh). Dále předpokládejte, že každý soutěžící vyřešil alespoň 4 úlohy. (Jinak mu je beztrestně dodáte.) Pokud již máte jednoho soutěžícího s pěti úlohami, dívejte se na úlohy jako na vrcholy grafu, na dvojice úloh jako na spojnice mezi nimi. Soutěžící odpovídají 4-klikám a 5-klikám v tomto grafu. Po položení 5-kliky je třeba pokládáním zbylých 4-klik zastoupení hran v položených klikách co nejvíce vyvážit (z dvojího počítání vyjde, že až na jednu o 1 víc zastoupenou hranu musí být všechny zastoupeny stejně). Avšak to není možné z důvodu, že v rámci 4-kliky má každý vrchol stupeň 3, a proto výsledné stupně budou dávat zbytky po dělení třemi pouze na základě 5-kliky.

(11) Uvědomte si, že úloze je ekvivalentní slabší tvrzení: V $2n$-úhelníku s obsahem S vždy najdete jeden trojúhelník s obsahem alespoň S/n. Kdykoli byste totiž měli protipříklad na původní úlohu, dokážete vhodným porozdělováním hran vyrobit protipříklad k tomuto tvrzení. Toto slabší tvrzení dokážete nakreslením hlavních úhlopříček a pokrytím $2n$-úhelníku pomocí „motýlů" ze sousedních hlavních úhlopříček (je třeba si rozmyslet, že těmito motýly se n-úhelník skutečně pokryje). Z motýla o obsahu alespoň S/n pak vznikne samotný trojúhelník o obsahu alespoň S/n.

(12) Dokazujte indukcí podle počtu skoků. Skákejte první skok nejdelším skokem a rozeberte na tři případy. Případ, kdy prvním skokem přeskočíte několik „min" a na jednu spadnete, vyřešte posunutím všech přeskočených min o délku tohoto skoku a po použití indukčního předpokladu prohozením prvních dvou skoků.

(13) Každé číslo a_n můžeme rozepsat jako součet

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s, \tag{1}$$

přičemž platí

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + s\alpha_s = n. \tag{2}$$

Způsobů, jak a_n takto rozepsat, může být více, nikdy se však nemůže stát, že by pro nějakou volbu $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ splňující (2) vyšla hodnota v (1) vyšší. Z toho odvoďte, že kdykoli je α_i nenulové, musí $a_n = a_{n-i} + a_i$. Hledané l zvolte libovolné takové, aby byla hodnota a_l/l nejvyšší možná. Pak kdykoli máte rozepsané a_n a hodnota některého $\alpha_i \geq l$, je možné při nesnížení hodnoty (1) a zachování vztahu (2) snížit α_i o l a zvýšit α_l o i, čímž dosáhnete rozepsání s nenulovým α_l.

(14) Indukcí dokažte, že všechna krásná označkování vzniknou zvolením reálného čísla $r \in (0, 2\pi)$ a následným skákáním po jednotkové kružnici o r a postupným psaním čísel $1, 2, \dots n$. Množinu N dvojic bijektivně zobrazte na takové skoky r, pro které se některé body překryjí. Zbytek nahlédněte.

Pravděpodobnostní paradoxy

Mirek Olšák

Abstrakt. Příspěvek obsahuje překvapivé úlohy z pravděpodobnosti.

Paradox 1. David každý víkend jezdí z Plzeňského nádraží buď za manželkou do Dobřan, nebo za milenkou do Rokycan. Rozhoduje se náhodně – vždy nastoupí do prvního vlaku, který jede. Ačkoli vlaky do Rokycan jezdí stejně často jako vlaky do Dobřan, po nějakém čase David shledal, že byl u milenky dvakrát častěji než u manželky. Jak je to možné?

Paradox 2. Kenny, Franta a Jarda se rozhodli, že si zahrají tenis. Kenny se s nimi vsadil o kilo čokolády, že vyhraje dvakrát po sobě. Může si vybrat ze dvou možností: buď bude hrát nejprve s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou, nebo nejprve s Jardou, pak s Frantou a nakonec s Jardou. Kterou z možností si má zvolit, jestliže ví, že Jarda hraje podstatně lépe než Franta, aby zvýšil svoji šanci na výhru?

Paradox 3. Do stomístného letadla nastupuje 100 lidí, každý má místenku na jedno sedadlo. První nastupující ale ztratil svou místenku, a tak si sedne náhodně. Každý další si sedne na svoje sedadlo, je-li volné, a v opačném případě si sedne na náhodné volné sedadlo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední příchozí si sedne na svoje sedadlo?

Paradox 4. (Monty Hall) Ve finále televizní soutěže je za dvěma dveřmi koza a za třetími auto, přičemž soutěžící chce auto. Postaví se tedy k jedněm dveřím, načež moderátor otevře jedny dveře, za kterými je koza – jiné než ty, ke kterým se soutěžící postavil – a pak dá soutěžícímu možnost ještě svou volbu dveří změnit. Vyplatí se soutěžícímu volbu změnit?

Paradox 5. Pravděpodobnost, že se narodí děvče, je stejná jako pravděpodobnost, že se narodí chlapec.

(i) Uvažme náhodnou rodinu s dvěma dětmi, v níž je první narozené dítě děvče. Jaká je pravděpodobnost, že druhé narozené dítě je také děvče?
(ii) Uvažme náhodnou rodinu s dvěma dětmi, z nichž je alespoň jedno děvče. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je také děvče?
(iii) Uvažme náhodnou rodinu s dvěma dětmi, z nichž je alespoň jedno děvče se jménem Xénie. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je opět děvče?

Paradox 6. Přišli jsme na test jisté vzácné choroby vyskytující se u setiny populace. Měřil nás přístroj, který v 90 % případů odpoví správně (ve zbylých chybně), a nahlásil, že onou chorobou trpíme. Jaká je pravděpodobnost, že tomu tak skutečně je?

Paradox 7. (Simsonův) Lukáš a Pepa mají oba svůj žlutý a modrý sáček a v nich černé a bílé kuličky. Pokud Lukáš sáhne do svého žlutého sáčku, má vyšší pravděpodobnost vytažení bílé kuličky, než kdyby sáhnul do modrého. Totéž platí pro Pepu. Přesto se může stát, že smícháme-li kuličky ve žlutých a v modrých sáčcích, bude vyšší šance na vytáhnutí bílé kuličky u modrého sáčku.

Paradox 8. V $n-1$ vrcholech pravidelného n-úhelníku stojí ovce, ve zbylém vrcholu stojí vlk. V každém kroku se vlk přesune na náhodný (jeden ze dvou) sousední vrchol a pokud v něm stojí ovce, tak ji sežere. Vlk se nasytí až v okamžiku, kdy sežere $n-2$ ovcí, tedy právě jedna ovce přežije. Jaká ovce má nejvyšší šanci na přežití?

Paradox 9. Mirek je velký gurmán a vlastní pytel, ve kterém je 123 karamelek a 321 hašlerek. Aby si své bonbóny pořádně vychutnal, rozhodl se, že je bude konzumovat specifickým způsobem. Když se ráno probudí, začne z pytle náhodně vytahovat jeden bonbón za druhým. První bonbón vytáhne a sní – každý další bonbón vždy vytáhne, a pokud je tento stejného typu jako všechny předchozí, rovněž jej sní. Je-li jiného typu, vrátí jej zpět do pytle, aby si pro tento den nezkazil chuť. Tím Mirkův ranní rituál končí. Uvedeným způsobem konzumuje Mirek bonbóny každý den až do chvíle, kdy už v pytli žádný nezbyde. Jaká je pravděpodobnost, že posledním snězeným bonbónem bude karamelka? (MKS 32–7–6)

Paradox 10. Deseti zvoleným ministrům byly náhodně rozdány ministerské resorty (těch je také 10). Každý ministr zajde za králem, který posty rozdal, a musí si tipnout, který post má – konverzace probíhá stylem:
Ministr: „Zemědělství.“
Král: „Ne, zemědělství má Jánošík.“
Ministr: „Tak administrativní záležitosti.“
Král: „Ne, administrativní záležitosti má Jim Hacker.“
...
Ministři se mohou domlouvat pouze před zkouškou a jako celek uspějí jen, když každý tipne svůj resort nejhůře na sedmý pokus. Přesto se dokáží dohodnout tak, aby měli nadpoloviční šanci uspět. (Projev před ÚKMO 2014)

Paradox 11. Je nám nabídnuta následující hra: Zaplatíme 1000 Kč, pak házíme mincí tak dlouho, dokud nám padá panna, a následně vyhrajeme 2^{n-1} Kč, kde n je počet námi provedených hodů. Vyplatí se nám tuto hru podstoupit?

Náhoda je prevít, nedá se ošálit

Paradox 12. V zaškrtávácím testu můžeme na každou z pěti otázek odpovědět jedním z písmen A, B, C, D, E. Za test dostaneme tolik bodů, na kolik otázek odpovíme správně. Doslechneme-li se, že každé písmeno je použito právě jednou, vyplatí se nám dávat takové tipy, kde je každé písmeno právě jednou?

Paradox 13. Hrajeme jistou hazardní hru. Začínáme s 1000 Kč, vždy vsadíme nějakou částku (nejvýše tolik, kolik právě máme) a následně ji s pravděpodobností 1/2 vyhrajeme a v opačném případě prohrajeme. K takové hře je možné přistupovat s rozličnými strategiemi:

(i) V každém kroku vsadíme 200 Kč.
(ii) V každém kroku vsadíme polovinu částky, kterou máme.
(iii) (Martingale) Po každé prohře vsadíme dvojnásobek minulé sázky. V opačném případě, nebo pokud to není možné, vsadíme jednu korunu.

Při které z nabízených strategií máme nejvyšší šanci dosáhnout částky 3000 Kč?

Paradox 14. Jirka a Marek hrají svou verzi tenisu. Když podává Marek, má šanci 0,5 vyhrát míček, a když podává Jirka, má pravděpodobnost 0,6 vyhrát míček. Hraje se do 21 vítězných bodů (bez prodlužování). Marek, který je slabší, podává jako první, a navíc si může vybrat způsob, jak se budou střídat podání, z následujících možností:

(i) Podání se střídá pravidelně.
(ii) Podává vždy ten, kdo naposled vyhrál míček.
(iii) Podává vždy ten, kdo naposled prohrál míček.

Která volba je pro Marka nejvýhodnější?

Občas je to prostě podvod

Paradox 15. V jedné obálce je 100 Kč a v druhé 200 Kč. Vybereme si náhodnou, zatím neotvíráme. Neznámé množství peněz v ní označíme x. V druhé obálce je tak náhodně buď $2x$ nebo $0{,}5x$. Průměrně je proto v druhé obálce $1{,}25x$, a proto se nám vyplatí volbu obálky změnit.

Paradox 16. (Bertrandův) Pravděpodobnost, že náhodná tětiva kružnice opsané danému rovnostrannému trojúhelníku je delší než jeho strana, je rovna 1/2, 1/3 a také 1/4.

Paradox 17. Za předpokladu hypotézy kontinua je možné uspořádat všechna reálná čísla tak, že pod každým reálným číslem je v tomto obskurním uspořádání U pouze spočetně dalších čísel. Uvažme nyní hru dvou hráčů, kdy oba hráči zvolí náhodné číslo z intervalu $\langle 0,1\rangle$ a vítězí ten, který zvolí vyšší číslo v uspořádání U. Pak kdykoli jeden hráč zvolí své číslo, druhý hráč zvolí vyšší s pravděpodobností 1.

Spirální podobnost

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

Úvod

Spirální podobnost je nejobecnější přímé podobné zobrazení roviny, které řeší některé jinak velmi složité úlohy. Cílem tohoto příspěvku je shrnutí poznatků o spirální podobnosti a ukázat použití na lehkých až středních příkladech.

Definice. *Spirální podobnost* je složení otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určena středem spirální podobnosti O, orientovaným úhlem otočení $\overrightarrow{\omega}$ a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.

Motivační příklady

Příklad 1. V rovině jsou dány různě velké stejně orientované podobné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Středy úseček AA', BB', CC' označme po řadě A'', B'', C''. Ukažte, že i trojúhelník $A''B''C''$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

Příklad 2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a CD označme Q a průsečík přímek AD a BC označme R. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BCQ, ADQ, ABR, CDR procházejí jedním bodem.

Vlastnosti spirální podobnosti

Tvrzení 1. (Základní vlastnosti) *Pro spirální podobnost platí:*

(i) *Je to podobné zobrazení, obrazem přímky je přímka, obrazem čtverce je čtverec, obrazem středu úsečky je střed obrazu úsečky, obecně obrazem útvaru je jemu podobný útvar.*
(ii) *Úhel mezi přímkou a jejím obrazem je úhel otočení.*
(iii) *Poměr délky úsečky a jejího obrazu je roven koeficientu stejnolehlosti.*

Tvrzení 2. (Speciální případy) *Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ se při speciálních hodnotách $\overrightarrow{\omega}$, k redukuje následovně.*

(i) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 0$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem k.*
(ii) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 180^\circ$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem $-k$.*
(iii) *Pro $k = 1$ dostáváme otočení kolem O o úhel $\overrightarrow{\omega}$.*
(iv) *Pro $k = 1$ a $\overrightarrow{\omega} = 180^\circ$ dostáváme středovou souměrnost se středem O.*
(v) *Žádná kombinace O, $\overrightarrow{\omega}$, k nám nedá posunutí nebo* nepřímé *zobrazení.*

Tvrzení 3. (Spirální podobnosti chodí po dvou) *Nechť spirální podobnost se středem O převádí $A \to C$ a $B \to D$. Pak jednoznačně určená spirální podobnost, která převádí $A \to B$ a $C \to D$, má též střed v O. Úhel otočení a koeficient se může lišit.*

Tvrzení 4. (Existence a jednoznačnost) *V rovině jsou dány body A, B, C, D takové, že $ABDC$ (v tomto pořadí!) není rovnoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí $A \to C$, $B \to D$.*

Lemma 5. (S. p. jednoznačně určena trojúhelníkem OAA') *Buď $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ spirální podobnost zobrazující bod A na A'. Potom platí následující.*

(i) *Pro různé body A jsou všechny trojúhelníky OAA' podobné.*
(ii) *Libovolný trojúhelník OAA' zpětně jednoznačně určuje spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.*

Tvrzení 6. (Konstrukce středu; existence) *Buď $ABBA'$ čtyřúhelník takový, že se přímky AB a $A'B'$ protínají v bodě Q. Potom druhý průsečík O kružnic opsaných trojúhelníkům QAA' a QBB' je střed spirální podobnosti*

$$\mathcal{S}\left(O, \overrightarrow{\sphericalangle AOA'}, \tfrac{|AB|}{|A'B'|}\right),$$

která zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$.

Tvrzení 7. (Průsečík čtyř kružnic) *Buď $ABB'A'$ čtyřúhelník s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a $A'B'$ označme Q, průsečík přímek AA' a BB' označme R. Potom střed spirální podobnosti O, která zobrazuje $A \to A'$ a $B \to B'$, je průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'Q$, $BB'Q$, ABR a $A'B'R$.*

Cvičení

Cvičení 1. Na stěně visí dvoje hodiny, jedny jdou o čtvrthodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček?

Cvičení 2. Kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Bodem A se otáčí přímka, která protíná kružnici k podruhé v bodě K a l podruhé v L. Jakou množinu vykresluje střed úsečky KL?

Cvičení 3. Po třech různoběžných přímkách se rovnoměrně pohybují body A, B, C. Ukažte, že pokud jsou ve dvou časech t_1, t_2 trojúhelníky ABC podobné, tak už jsou podobné v každém okamžiku.

Příklady

Příklad 3. (Simpsonova přímka) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že paty kolmic z D postupně na přímky AB, AC, BC leží na jedné přímce.

Příklad 4. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a nechť E, F jsou body postupně na stranách AD, BC takové, že dělí strany ve stejném poměru $|AE| : |ED| = |BF| : |FC|$. Přímka EF protíná přímky BA a CD postupně v bodech S a T. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE, SBF, TCF a TDE mají společný bod.

(USAMO 2006)

Příklad 5. ABC je ostroúhlý trojúhelník s výškou AD. Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že X, D, Y leží na jedné přímce a body X, D, Y, B jsou po dvou různé. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY. Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé.

(MKS 27–3–8)

Příklad 6. Stranám AB a BC trojúhelníka ABC připíšeme zvenčí podobné pravoúhelníky $BKLC$ a $MNBA$. Ukažte, že přímky NC, ML a AK procházejí jedním bodem.

Příklad. Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, který není lichoběžník. Na stranách AB a CD jsou body E a F, které dělí své strany ve stejném poměru $|AE| : |EB| = |CF| : |FD|$. Průsečíky úhlopříček a přímky EF označme P, Q, R. Potom pro různé polohy bodu E procházejí kružnice opsané trojúhelníku PQR ještě jedním pevným bodem (různým od průsečíku úhlopříček P). (Zobecnění IMO 2005)

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je podmnožinou příspěvku *Spirální podobnost* (Domaslav 2010) od Franty Konopeckého, jemuž tímto děkuji.

Angel Problem

Alexander „Olin“ Slávik

Pravidla hry

Hra *Anděl a ďábel*, o které tato přednáška pojednává, probíhá na nekonečné šachovnici, a jak už její název napovídá, hrají v ní proti sobě anděl a ďábel. Ve svých tazích se střídají.

Anděl (přesněji *anděl síly* p, kde $p \in \mathbb{N}$ je předem daná konstanta) je figurka, která může ve svém tahu skočit na kterékoliv políčko, na které se může dostat šachový král pomocí p svých tahů, pokud mu nic nestojí v cestě.[1]

Ďábel, který přímo na šachovnici přítomen není, v každém svém tahu sežere jedno políčko šachovnice – na takové políčko už anděl nemůže nikdy skočit.

Anděl prohraje, pokud nemá kam skočit, a vyhraje, pokud může utíkat donekonečna.

Trocha historie

Hru vymyslel ve 40. letech 20. století David Silverman, do širšího povědomí se dostala v 70. letech. V roce 1982 nastolil John H. Conway otázku označovanou jako *Angel Problem*: existuje takové p, že anděl síly p hru vyhraje? Později (pro větší motivaci) nabídl \$100 za kladnou odpověď, a dokonce \$1000 za důkaz ďáblova jistého vítězství.

Má anděl šanci?

Ďábel je proti andělovi zdánlivě úplný chudák – umí za tah sežrat pouhé jedno políčko, zatímco anděl může skákat až do vzdálenosti p daleko.[2] Hlubší průzkum ovšem ukazuje, že situace je pro síly dobra poněkud komplikovanější.

Tvrzení. *Anděl síly* 1 *prohraje.*

Úmluva. V následujících tvrzeních budeme označovat anděla síly p pouze anděl a uvedené výroky budou platit pro všechna $p \in \mathbb{N}$.

[1] Tedy na kterékoliv políčko ve čtverci o straně $2p+1$, v jehož středu je anděl; ještě jinak řečeno, kterékoliv políčko ve vzdálenosti nejvýše p v metrice ϱ_∞.

[2] Pokud vám to nepřijde jako dostatečný nepoměr, dosaďte si třeba $p = 1000$ ...

Tvrzení. *Pokud na anděla klademe (pro pevně zvolené $L \in \mathbb{N}$) některou z následujících dodatečných podmínek, prohraje:*

(i) *pokud se někdy dostane na pole s y-ovou souřadnicí Y, už nikdy nesmí skočit na pole s y-ovou souřadnicí menší než $Y - L$,*

(ii) *pokud se někdy dostane na pole vzdálené R od počátku, už nikdy nesmí skočit na pole vzdálené méně než $R - L$ od počátku.*

Speciálně tedy prohraje např. anděl, který musí v každém tahu zvyšovat svou y-ovou souřadnici (tzv. blbec).

Tvrzení. *Existuje ďáblova strategie s následujícími důsledky pro anděla: pro každé pole P herního plánu a pro každou vzdálenost D budou existovat dva okamžiky, přičemž v tom druhém bude anděl k P alespoň o D blíže než v tom prvním.*

Tvrzení. *Anděl si nijak nepohorší tím, když mu uložíme následující dodatečnou podmínku: nesmí skočit na žádné pole, na které mohl skočit v některém ze svých předchozích tahů.*

Svět je zachráněn!

V roce 2006 se objevily čtyři nezávislé důkazy, že dostatečně silný anděl přece jen vyhraje. Nejsilnější z těchto výsledků je:

Věta. *Anděl síly* 2 *vyhraje.*

Důsledek. *Anděl síly* 1 *vyhraje na trojrozměrné šachovnici.*

Později se uvedené tvrzení podařilo ještě více zesílit:

Věta. *Figurka, která umí skočit na kterékoliv pole obdélníka 5×3, uprostřed něhož se nachází, vyhraje.*

Literatura a zdroje

[1] John H. Conway: *The Angel Problem*, *http://library.msri.org/books/Book29/files/conway.pdf*

[2] András Mathé: *The Angel of power 2 wins*, *http://amathe.dyn.elte.hu/letolt.php?angel-mathe.pdf*

[3] Johan Wästlund: *A weaker winning angel* *http://www.math.chalmers.se/~wastlund/weakerAngel.pdf*

[4] Martin Kutz: *The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots* *http://www.mpi-inf.mpg.de/~mkutz/diss/kutzdiss.pdf*

[5] Stijn Vermeeren: *Can the Angel fly into infinity, or does the Devil eat its squares?* *http://stijnvermeeren.be/download/mathematics/angel_slides.pdf*

Konečná tělesa

Alexander „Olin“ Slávik

Abstrakt. Konečná tělesa jsou pozoruhodným zákoutím abstraktní algebry hned ze dvou důvodů – kromě toho, že pro ně platí zajímavé věci, mají i mnohá uplatnění v dalších matematických oborech i praktických aplikacích. Příspěvek přibližuje konstrukci konečných těles a uvádí jejich základní vlastnosti.

Algebraická příprava

Definice. Množinu $\mathbb{F}$ spolu s binárními operacemi $+$ a $\cdot$ a „význačnými“ prvky 0 a 1 nazveme *(komutativním) tělesem*, pokud pro všechna $x, y, z \in \mathbb{F}$ platí následující vztahy:

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
(ii) $x + y = y + x$,
(iii) $x + 0 = x$,
(iv) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
(v) $x \cdot y = y \cdot x$,
(vi) $x \cdot 1 = x$,
(vii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
(viii) existuje prvek $-x \in \mathbb{F}$ takový, že $x + -x = 0$,
(ix) je-li $x \neq 0$, pak existuje prvek $x^{-1} \in \mathbb{F}$ takový, že $x \cdot x^{-1} = 1$.

Řečeno neformálně, prvky z $\mathbb{F}$ lze sčítat, odčítat, násobit a dělit.

„Každodenními“ příklady těles jsou např. racionální, reálná nebo komplexní čísla. Jiným příkladem jsou tělesa $\mathbb{Z}_p$ pro p prvočíslo, kde se vše počítá modulo p. Jak uvidíme, posledně zmíněné struktury budou výchozím bodem pro konstrukci všech konečných těles.

Definice. *Polynomem* nad tělesem $\mathbb{F}$ (stupně $n \in \mathbb{N}$) nazveme formální výraz $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$. Množinu všech polynomů nad $\mathbb{F}$ značíme $\mathbb{F}[x]$.

Pozor: polynom pro nás *a priori* nepředstavuje funkci $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$, jak jsme typicky zvyklí. Např. v tělese $\mathbb{Z}_2$ se polynomy x a x^2 jakožto funkce shodují, chápeme je však jako různé polynomy.

Polynomy přirozeně umíme sčítat, odčítat, násobit, dělit se zbytkem a hledat jejich největší společné dělitele (pomocí Euklidova algoritmu). Analogicky k celým číslům tedy pro ně můžeme zavést užitečný pojem kongruence.

Definice. Nechť f, r, s jsou polynomy nad tělesem $\mathbb{F}$. Řekneme, že r a s jsou *kongruentní* modulo f, pokud f dělí jejich rozdíl; tuto skutečnost zapisujeme

$$r \equiv s. \pmod f$$

Snadno vypozorujeme, že kongruence polynomů má analogické vlastnosti jako kongruence celých čísel. Připomeňme, že u celých čísel měly význačné postavení kongruence modulo prvočíslo, protože se v nich „dalo dělit“. Přirozený protějšek prvočísel ve světě polynomů představuje následující definice.

Definice. Polynom $f \in \mathbb{F}[x]$ nazveme *ireducibilní*, pokud jej nelze zapsat jako součin dvou polynomů stupně alespoň jedna.

Poznámka. Ireducibilitu polynomu vždy chápeme vůči konkrétnímu tělesu. Např. polynom $x^2 + 1$ je v tělese reálných čísel ireducibilní, v komplexních číslech již však nikoli.

Konstrukce nových těles

Argumenty podobnými případu celých čísel dojdeme k závěru, že v kongruencích modulo ireducibilní polynom lze vskutku dělit (nenásobkem onoho polynomu). Vezmeme-li tedy libovolné těleso a ireducibilní polynom f nad ním, získáme nové těleso jednoduše tak, že budeme počítat s polynomy modulo f (postup je analogický k sestrojení těles $\mathbb{Z}_p$).

Pro přehlednost budeme proměnnou „skutečných“ polynomů značit x, zatímco proměnnou polynomů chápaných jako prvky tělesa α.

Příklad. Polynom x^2+x+1 je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_2$ (jak se snadno ověří). Jak bude fungovat těleso sestrojené dle výše naznačeného postupu?

Předně si uvědomme, že stejně jako nám v případě $\mathbb{Z}_p$ stačí počítat s čísly $0, \ldots, p-1$ (zbytky modulo p), bude nám v tomto případě stačit s polynomy stupně nejvýše jedna. V souladu s výše uvedenou konvencí tedy půjde o prvky 0, 1, α a $\alpha + 1$.

Pro názornost vynásobme dva prvky – např. α a $\alpha + 1$. Máme

$$\alpha \cdot (\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = (\alpha^2 + \alpha + 1) + 1 \equiv 1. \pmod{\alpha^2 + \alpha + 1}$$

Takto vytvořené těleso budeme značit $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$.

Vlastnosti konečných těles

Podívejme se blíže, jaké speciální vlastnosti konečná tělesa mají.

Věta. (Weddenburn) *Všechna konečná tělesa jsou automaticky komutativní, t. j. lze pro ně vynechat bod (v) z definice tělesa.*

Poznámka. Příkladem nekonečného nekomutativního tělesa je např. „těleso“ kvaternionů.

Věta. *Konečné těleso velikosti (počtu prvků) t existuje právě tehdy, když $t = p^n$ pro nějaké prvočíslo p a přirozené číslo n. Navíc jsou všechna konečná tělesa o téže velikosti isomorfní;*[1] *„to jediné“ těleso o velikosti t značíme $\mathrm{GF}(t)$. Každé takové těleso lze navíc sestrojit jako $\mathbb{Z}_p[\alpha]/(f)$, kde $f \in \mathbb{Z}_p[\alpha]$ je libovolný ireducibilní polynom stupně n.*

Věta. *Pro každé konečné těleso existuje* primitivní prvek, *tedy takový prvek, jehož mocněním získáme všechny nenulové prvky tělesa.*

Příklad. Primitivním prvkem ve výše zmiňovaném tělese $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$ je např. α, protože $\alpha^2 \equiv \alpha + 1$ a $\alpha^3 \equiv \alpha^2 + \alpha \equiv 1$.

Věta. *Každé těleso $\mathrm{GF}(p^n)$ má jako podtělesa všechna $\mathrm{GF}(p^m)$ pro $m \mid n$.*

[1] Dvě tělesa jsou *isomorfní*, pokud mezi nimi existuje bijekce φ, která splňuje $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$ a $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. Jinak řečeno, jsou „z algebraického pohledu stejná“.

Kategorie

Pepa Svoboda

Abstrakt. Přednáška je úvodem do teorie kategorií – abstraktní matematické teorie, která hraje klíčovou roli v moderní matematice.

Od množin ke kategorii

Základními matematickými objekty našeho světa jsou množiny. Samy o sobě však jsou poněkud chudé – zajímavé začnou být, až když se začneme zabývat zobrazeními mezi nimi. Bez zobrazení například nedokážeme měřit velikosti množin.

Tvrzení. (vlastnosti zobrazení) *Zobrazení mezi množinami můžeme skládat a toto skládání je asociativní (tj. nezáleží na uzávorkování). Každá množina A má své identické zobrazení id_A – pokud toto zobrazení složíme s jiným zobrazením f (z nebo do množiny A), obdržíme opět f.*

Pokud tyto fundamentální vlastnosti (skládání, asociativitu a existenci identit) extrahujeme a zapomeneme na množiny, dostaneme pojem kategorie:

Definice. *Kategorie* je soubor skládájící se z:

(i) třídy *objektů*,
(ii) třídy *šipek*.

Přitom jsou splněna následující pravidla: Každá šipka f má jednoznačně daný svůj počáteční objekt A a koncový objekt B (píšeme $f\colon A \to B$. Pro každou dvojici šipek $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ existuje šipka $gf\colon A \to C$ – *složení* šipek f a g. Skládání je asociativní, neboli pro $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ a $h\colon C \to D$ platí $(hg)f = h(gf)$. Konečně každý objekt A má *identickou* šipku $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ tak, že pro každou šipku $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to A$ platí $f\,\mathrm{id}_A = f$ a $\mathrm{id}_A\, f = f$.

Příklad. Dokaž z definice kategorie, že šipka id_A je jednoznačná.

Příklad. Množiny (jako objekty) a zobrazení (jako šipky) tvoří kategorii.

Speciální šipky

Definice. Zobrazení $f\colon A \to B$ je *prosté*, pokud z $f(x) = f(y)$ plyne $x = y$. Zobrazení f je *na*, pokud obraz f je celá množina B. Pokud je f prosté i na, říkáme, že jde o *bijekci.*

Tvrzení. *Zobrazeni $f\colon A \to B$ je prosté, pokud platí jedna z následujících podmínek:*

(1) *Existuje zobrazení $g\colon B \to A$ tak, že $gf = \mathrm{id}_A$. Této vlastnosti také říkáme, že f má pravý inverz.*
(2) *Zobrazení f můžeme „krátit zleva“, tj. pro každou množinu X a dvě zobrazení $g, h\colon X \to A$, pro které platí $fg = fh$ platí také $g = h$. Této vlastnosti říkáme, že f je monomorfismus.*

Obdobné tvrzení platí pro zobrazení na, stačí jen vyměnit slova jako „pravý“ za „levý“. Jenže důkaz není tak jasný, jako v případě prostého zobrazení.

Cvičení. Uvědom si, že ekvivalence trvzení „f je na“ a „f se dá krátit zprava“ je ekvivalentní s axiomem výběru.

Tvrzení. *Zobrazení $f\colon A \to B$ je bijekce právě tehdy, když existuje (tzv. inverzní zobrazení) $g\colon B \to A$ tak, že $gf = \mathrm{id}_A$ a $fg = \mathrm{id}_B$. Této vlastnosti říkáme, že f je izomorfismus.*

Pravé inverzy, monomorfismy či izomorfismy můžeme definovat v libovolné kategorii, protože jsme v jejich definici používali pouze objekty, šipky, skládání a identity. Naopak prosté zobrazení je pojem, který je definován pomocí prvků množiny, ale mnoho kategorií má objekty, kde nemá o prvcích smysl mluvit (viz další příklad). To, že v kategorii množin tyto tři pojmy souhlasí, je šťastná náhoda, která není pravidlem.

Příklad. Za objekty zvolme všechna reálná čísla. Pokud pro reálná a a b platí, $a \geq b$, řekneme, že z a do b vede právě jedna šipka (a nezáleží na tom, jak ji pojmenujeme). V opačném případě mezi a a b žádná šipka nevede. Je jasné, jak se mají šipky skládat, a jednoduché ověřit, že takto obdržíme kategorii. Značíme ji $(\mathbb{R}, \geq)$. Analogicky můžeme definovat například kategorii přirozených čísel $(\mathbb{N}, \geq)$ nebo racionálních čísel $(\mathbb{Q}, \geq)$.

Eukleidovské prostory

Definice. *Eukleidovský prostor* (*E-prostor*) dimenze n je množina všech n-tic reálných čísel spolu s operací „sčítání“: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ a operací „násobení prvku prostoru reálným číslem r“: $r \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)$.

Definice. Zobrazení mezi E-prostory $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ nazýváme *lineární*, pokud pro každé dva body a, b prostoru $\mathbb{R}^m$ a reálné číslo r splňuje

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,
(2) $f(ra) = rf(a)$.

Příklad. Identické zobrazení je lineární. Složení dvou lineárních zobrazení je lineární.

Duo E-prostory + lineární zobrazení vyhovuje naší definici kategorie.

Příklad. Lineárnímu zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ můžeme přirozeně přiřadit matici $m \times n$. Skládání zobrazení pak odpovídá obvyklé násobení matic.

Příklad. Pokud za objekty vezmeme přirozená čísla, šipky z m do n budou všechny matice a skládání bude násobení matic, dostaneme kategorii.

Součin a součet

Definice. *Součin* objektů A a B je objekt C spolu s šipkami $a\colon C \to A$ a $b\colon C \to B$, který splňuje „univerzální vlastnost“: Pokud vezmeme nějaký jiný objekt X spolu s šipkami $u\colon X \to A$ a $v\colon X \to B$, existuje právě jedna šipka x z $X \to C$ tak, že $ax = u$ a $bx = v$.

$$
\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B \\
& X \arrow[ul, "u"] \arrow[u, "x"] \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}
$$

Příklad. Najdi nějaký součin v kategorii množin.

Příklad. Co je součin v kategorii $(\mathbb{R}, \geq)$?

Příklad. Co je součin E-prostorů?

Tvrzení. *Součin není definován jednoznačně, ale každé dva součiny jsou izomorfní.*

Ke každému kategoriálnímu pojmu máme pojem duální, který dostaneme tak, že v definici obrátíme všechny šipky. Pokud to provedeme se součinem, dostaneme součet alias koprodukt. Každá kategorie C má duální kategorii C^{op}, která má stejné objekty, ale šipky jsou obrácené.

Příklad. Najdi součet v dosud zmíněných kategoriích.

Tvrzení. (Princip duality) *Pokud nahradíme všechny pojmy v platném tvrzení jejich duálními pojmy, dostaneme opět platné tvrzení. Jinými slovy, v teorii kategorií je vždy automaticky půl hotovo.*

Cvičení. Každé dva součty jsou izomorfní.

Jako nás z kategoriálního pohledu příliš nezajímají samotné množiny, ale spíš zobrazení mezi nimi, podobně je to i s kategoriemi. Proto zavádíme tzv. funktory, což jsou šipky mezi kategoriemi. Dá se říct, že funktory zprostředkovávájí komunikaci mezi různými matematickými světy.

Definice. *Funktor* F mezi kategoriemi C a D je proces,[1] který přiřazuje objektu A z C objekt FA z D a šipce $f\colon A \to B$ šipku $Ff\colon FA \to FB$, přičemž zachovává skládání šipek (nezáleží, zda šipky nejprve složíme a pak pošleme funktorem, nebo naopak) a identity.

Příklad. Maticová reprezentace je funktor z kategorie E-prostorů do kategorie matic, který prostoru $\mathbb{R}^n$ přiřazuje jeho dimenzi n a lineárnímu zobrazení přiřazuje odpovídající matici.

Pointa maticové reprezentace je, že se z geometrického světa prostorů a lineárních zobrazení dostaneme do suchého světa matic, kde se ale snadno řeší problémy. Tím, že je náš vztah funktor (tj. zachovává skládání a identity), dokázaná tvrzení se snadno přenesou zpět do světa geometrie.

Kategorii teorií můžeme aplikovat na sebe samu. Pokud totiž za objekty zvolíme kategorie[2] a za šipky funktory (je jasné, jak se budou skládat), čímž dostaneme kategorii. Takto například dostaneme definici součinu nebo součtu kategorií.

Příklad. Co je součin a součet kategorií?

Příklad. Součin je funktor z kategorie $C \times C$ do kategorie C.

Úloha. Představ si E-prostor $\mathbb{R}^n$ jako kategorii, která má jeden objekt $*$, šipky jsou prvky $\mathbb{R}^n$ a skládání je sčítání. Co jsou potom funktory z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$? Musí být nutně lineární?

Bisoučin a Ab-kategorie

Definice. *Ab-kategorie* je taková kategorie, že pro libovolné objekty A, B a dvě šipky $f, g\colon A \to B$ existuje součet šipek $f+g$ tak, že jsou splněna následující pravidla:

(i) Sčítání je asociativní a komutativní, existuje šipka „0“ tak, že $f + 0 = f$, a ke každé šipce f existuje šipka „$-f$“ tak, že $f + (-f) = 0$.[3]
(ii) Sčítání a skládání jsou distributivní, tedy pokud máme šipku $h\colon B \to C$, pak platí $h(f + g) = hf + hg$ a obdobně pro šipky do objektu A.

---

[1] Čtenáři je jasné, že formálně jde o dvojici funkcí (na objektech a šipkách).

[2] Pokud bychom vzali všechny kategorie, dostali bychom množinový paradox podobně jako s množinou všech množin. Můžeme ale vzít například všechny kategorie, které jsou nějak omezené velikostí.

[3] Množinu šipek jsme tak nahradili strukturou, které se říká Abelovská (tj. komutativní) grupa – odtud název.

Definice. *Bisoučin* objektů A a B je objekt C spolu s šipkami $p_a\colon C \to A$, $p_b\colon C \to B$, $i_a\colon A \to C$ a $p_b\colon B \to C$, které splňují následující podmínky:

(i) $p_a i_a = \mathrm{id}_A$, $p_b i_b = \mathrm{id}_B$.
(ii) $p_b i_a = 0$, $p_a i_b = 0$.
(iii) $i_a p_a + i_b p_b = \mathrm{id}_C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "i_a"] & C \arrow[l, shift left, "p_a"] \arrow[r, shift right, "p_b"'] & B \arrow[l, shift right, "i_b"'] \end{tikzcd}$$

Tvrzení. *Nechť A a B jsou objekty v Ab-kategorii. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) *C je bisoučin A a B.*
(ii) *C je součin A a B.*
(iii) *C je součet A a B.*

Matice 2×2

Helča Svobodová

Abstrakt. Přednáška má za cíl seznámení s operacemi a základními vlastnostmi reálných matic 2×2. Dále pojednává o lineárních zobrazeních a v závěru o souvislosti matic s komplexními čísly.

Matice a maticové operace

Číselnou maticí rozumíme tabulku čísel, kterým se říká *prvky matice*. Na přednášce se budeme věnovat *reálným čtvercovým maticím řádu* 2, tedy maticím o dvou sloupcích a dvou řádcích, jejichž prvky jsou reálná čísla. Příležitostně budeme matice označovat velkými tiskacími písmeny $A, B, \ldots$

Pro dvě matice platí

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

právě tehdy, když platí zároveň $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ a $d_1 = d_2$.

Matice sčítáme přirozeným způsobem:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix},$$

odčítání funguje analogicky. Odečtením dvou stejných matic dostaneme *nulovou matici*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici lze násobit libovolným reálným číslem α:

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}.$$

Takto je definováno násobení matice a vektoru:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Součin dvou matic je definován následovně:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Příklad 1. Nalezněte *identickou matici* I – takovou, která přenásobením nezmění původní matici. Liší se identická matice při násobení zleva a zprava?

Příklad 2. Je maticové násobení obecně komutativní? (Tedy platí pro každé dvě matice A, B, že $AB = BA$?)

Tvrzení. *Maticové násobení je asociativní. (Tedy pro každé tři matice A, B, C platí $A(BC) = (AB)C$.)*

Příklad 3. Dokážete najít dvě nenulové matice takové, že jejich součinem je matice nulová?

Příklad 4. Nalezněte tvar *inverzní matice* k obecné matici A, tedy matici A^{-1} takovou, že $AA^{-1} = I$. Existuje inverzní matice ke každé matici?

Definice. Číslo $ad - bc$ nazýváme *determinantem* matice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Značíme ho $\det A$.

Příklad 5. Jak vypadá determinant matice inverzní k $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$? Jaký je součin determinantů původní a inverzní matice?

Příklad 6. Dokažte, že pro libovolné dvě matice A, B platí $\det(AB) = \det A \det B$.

Lineární zobrazení v rovině

Jak vypadají lineární zobrazení, si ukážeme na přednášce.

Tvrzení. *Pro každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existuje matice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ taková, že pro každý vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ platí*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Příklad 7. Nalezněte matice těchto lineárních zobrazení: identické zobrazení, osová souměrnost, středová souměrnost, stejnolehlost. Na co se při nich zobrazí čtverec s vrcholy $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$?

Příklad 8. Nalezněte matici lineárního zobrazení, které promítá vektor na osu x.

Příklad 9. Nalezněte geometrický význam lineárního zobrazení určeného maticí

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Tvrzení. *Obraz libovolného útvaru v rovině s obsahem S při zobrazení daném maticí $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ má obsah $|ad - bc|\, S$.*

Zdroje

[1] *http://www.wikipedia.org*

Turnaje

MARTIN „E.T.“ SÝKORA

ABSTRAKT. Kdo by neměl rád puntíky a čárky? A právě jimi se v příspěvku budeme zabývat. Navíc si ukážeme, že ač to tak na první pohled nevypadá, jejich studium nám může být i k něčemu dobré.

Většina matematických oborů je poměrně rozsáhlá a jejich studium se nedá stihnout ani za pár let, natož na jedné přednášce. Proto si situaci ulehčíme a při studiu „puntíků a čárek“, kterým se odborně říká *grafy*, se zaměříme jen na poměrně úzkou skupinu objektů, tzv. *turnaje*. Že nevíte, o čem to mluvím a jak souvisí puntíky a čárky s turnaji? Na přednášce si ukážeme nejen, že spojitost tam skutečně je, ale dozvíme se o turnajích i spoustu zajímavých věcí, na které bychom bez matematického aparátu nikdy nepřišli.

Abychom si rozuměli

Definice. Konečný orientovaný graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je libovolná neprázdná konečná množina a E libovolná množina uspořádaných dvouprvkových podmnožin množiny V. Prvkům množiny V říkáme *vrcholy* a prvkům množiny E *(orientované) hrany* nebo také *šipky*.

Graf G si můžeme představovat jako množinu puntíků a množinu šipek mezi nimi, přičemž šipku z vrcholu u do v kreslíme právě tehdy, když $(u, v) \in E$.

Poznámka. Definice orientovaného grafu nezakazuje, aby pro nějaká $u, v \in V$ vedla šipka oběma směry. Dokonce může šipka spojovat jeden vrchol se sebou samým (a tak tvořit tzv. *smyčku*). My ale budeme předpokládat, že tyto situace nenastanou.

Představme si, že si v grafu G vybereme vrchol v. Pak mezi zbylými vrcholy existují dvě skupiny, které jsou vzhledem k v „zajímavé“. Zaprvé je to množina vrcholů, do kterých z v vedou hrany. Těmto vrcholům budeme říkat *potomci vrcholu* v a jejich množinu budeme značit $A(v)$. Analogicky budeme množinu všech vrcholů, ze kterých jdou hrany do v, značit symbolem $B(v)$ a budeme jí říkat *rodiče vrcholu* v.

Dále můžeme definovat vstupní stupeň $\mathrm{in}(v)$ vrcholu v jako počet rodičů vrcholu v, tedy $\mathrm{in}(v) = |B(v)|$. Obdobně definujeme výstupní stupeň $\mathrm{out}(v)$ vrcholu v jako počet jeho potomků. Tedy $\mathrm{out}(v) = |A(v)|$.

Definice. *Cesta délky* n v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost n po dvou různých vrcholů $v_1, v_2, \dots, v_n$ a hran (v_i, v_{i+1}), $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Definice. *Cyklus délky* n, nebo také n-cyklus v grafu $G = (V, E)$, je cesta délky n v grafu G sjednocená s hranou (v_n, v_1).

Definice. Řekneme, že graf G je *turnaj*, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vede šipka. Formálněji řečeno, graf G je turnaj, pokud pro všechny $u, v \in V, u \neq v$, platí, že buď $(u, v) \in E$, nebo $(v, u) \in E$.

Definice. O vrcholu v v turnaji V řekneme, že je *hrubák*, pokud $\mathrm{in}(v) = 0$. Dále o vrcholu $v \in V$ řekneme, že je *šupák*, pokud $\mathrm{out}(v) = 0$. Nakonec o vrcholu řekneme, že je *polohrubák*, pokud $v \cup A(v) \cup \left(\bigcup_{u \in A(v)} A(u)\right) = V$. Hrubákem je tedy vrchol, ze kterého vedou hrany do všech ostatních vrcholů, a tak se z něj dá dostat do všech vrcholů grafu po nejvýše jedné hraně. Do šupáka naopak všechny hrany vedou. Polohrubák je pak vrchol, z nějž se dá dostat do všech vrcholů po nejvýše dvou hranách.

Na zahřátí

Příklad 1. *Neorientovaný graf* definujeme stejně jako graf orientovaný, jen jeho hrany nejsou dvojice uspořádané, ale neuspořádané. Uspořádejte následující množiny podle velikosti: množina všech neorientovaných grafů na daných n vrcholech, množina všech orientovaných grafů na daných n vrcholech, množina všech turnajů na daných n vrcholech.

Příklad 2. Ukažte, že v každém turnaji na $2k$ vrcholech, kde k je nějaké přirozené číslo, je dvojice vrcholů u, v taková, že $\mathrm{in}(u) > \mathrm{in}(v)$.

Příklad 3. Ukažte, že v turnajích (a orientovaných grafech obecně) platí

$$\sum_{v \in V} \mathrm{in}(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{out}(v).$$

Příklad 4. Na planetě DL-27H je nenulový sudý počet portálů, přičemž mezi každými dvěma portály vede teleport právě jedním směrem. Lze se teleportovat tak, že každým teleportem „proletíme“ právě jednou a skončíme u portálu, kde jsme začali?

Příklad 5. Ukažte, že v každém turnaji existuje cesta přes všechny vrcholy.

Příklad 6. Ukažte, že pokud v turnaji není hrubák, pak v něm existuje trojcyklus.

Příklad 7. Ukažte, že pokud v turnaji není hrubák, pak jsou v něm alespoň dva polohrubáci. Musí nutně existovat tři?

Příklad 8. V mezigalaktické lize v páce soutěžilo osm siláků. Každý soutěžil s každým právě jednou a žádný zápas neskončil remízou. Ukažte, že z nich lze vybrat čtyři siláky A, B, C a D takové, že A porazil B, C i D, B porazil C i D a C porazil D. (AoPS)

Pro chytré hlavičky

Definice 9. Řekneme, že orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud pro každé dva jeho vrcholy u, v existuje cesta z u do v i z v do u.

Definice 10. Řekneme, že orientovaný graf je *rozložitelný*, pokud lze jeho vrcholy rozdělit do dvou neprázdných podmnožin A a B takových, že pro všechna $u \in A$ a pro všechna $v \in B$ platí, že $(u, v) \in E$.

Příklad 11. Hvězdná říše se sestává z 1001 planet. Každé dvě planety jsou spojeny jednosměrnými červími děrami, a navíc platí, že z každé planety vychází 500 červích děr a 500 jich v ní končí. 668 planet přitom tvoří autonomní republiku. Ukažte, že se z každé planety republiky dá dostat na každou, aniž by bylo nutné republiku opustit. (ARO 2004 10.6)

Příklad 12. Ukažte, že v turnajích platí

$$\sum_{v \in V} (\mathrm{in}(v))^2 = \sum_{v \in V} (\mathrm{out}(v))^2 .$$

Pozor, v orientovaných grafech toto tvrzení obecně neplatí. (Putnam 1965)

Příklad 13. Ukažte, že pro libovolný turnaj G jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) G je silně souvislý.
(ii) G není rozložitelný.
(iii) V G existuje cyklus přes všechny jeho vrcholy.

(Variace na KMS 11 2008)

Příklad 14. Mějme turnaj G, který obsahuje n-cyklus. Dokažte, že v G existuje $(n-1)$-cyklus. Řešte pro případ $n = 2^{2k+1} - 1$, kde k je nějaké přirozené číslo.

Příklad 15. Mějme turnaj G, který obsahuje n-cyklus. Dokažte, že pro každý vrchol v daného n-cyklu a pro každé $m = 3, 4, \ldots, n$ existuje v G m-cyklus, který obsahuje vrchol v.

Příklad 16. Dokažte, že každý rozložitelný turnaj se dá změnou orientace jedné hrany změnit na graf, který není rozložitelný.
(variace na A Beginner's Guide to Graph Theory 10.2.3)

Příklad 17. Turnaj nazveme *tranzitivní*, pokud pro všechna $u, v, w \in V$ taková, že $(u, v) \in E$ a $(v, w) \in E$, platí $(u, w) \in E$. Dokažte, že turnaj je tranzitivní právě tehdy, když neobsahuje žádný cyklus.

(A Beginner's Guide to Graph Theory 10.2.4)

Příklad 18. Řešte příklad 4 pro případ, že na planetě je lichý počet portálů a z každého portálu vede stejný počet teleportů, jako do něj vchází. Jak lze úloha zobecnit pro obecné orientované grafy?

Příklad 19. PraSátko dostalo jako dárek $n \geq 3$ očíslovaných bodů $1, 2, \ldots, n$ a samým nadšením se jalo mezi body kreslit šipky dvou barev. Přitom výsledek jeho snahy splňoval tato pravidla:

(i) Z každého bodu vedla šipka do každého bodu s větším číslem.

(ii) Pokud z bodu A vedla cesta do B po šipkách jedné barvy, pak mezi stejnými vrcholy nevedla cesta druhé barvy. Kolika způsoby mohlo PraSátko přikreslit všechny šipky?

(ARO 2005 11.3)

Příklad 20. Mějme $n \geq m \geq 3$ a turnaj na n vrcholech, ve kterém není m-cyklus. Dokažte, že lze jeho vrcholy ohodnotit čísly $1, 2, \ldots, n$ tak, že kdykoliv $a \geq b+m-2$, pak vede hrana z vrcholu ohodnoceného číslem a do vrcholu ohodnoceného číslem b.

(USA TST 2009)

Zdroje

Ze zdrojů, které nejsou uvedeny výše u konkrétních úloh, bych rád zmínil příspěvek Pepy Tkadlece s názvem *Turnaje a Orientované grafy.* Z něho jsem výrazně čerpal a jeho autorovi bych tímto rád poděkoval. Zbylé příklady jsou variace na známé věty, tvrzení a problémy, které naleznete v každé druhé publikaci zabývající se teorií grafů.

Symediány

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Symediány patří k velice zajímavým oblastem moderní geometrie trojúhelníka. Jedná se o pokročilejší, ale pro olympiádní matematiku velice důležité téma, protože rozmanitých vlastností symedián se dá v úlohách často využít. Příspěvek obsahuje nejprve několik nejdůležitějších tvrzení a poté sbírku úloh. Na konci příspěvku najdete nápovědy ke zmíněným tvrzením i úlohám.

Než začneme se symediánami, připomeneme si některé související pojmy.

Definice. Mějme daný úhel XVY a jeho osu o. Přímky p a q nazveme *antirovnoběžné*, pokud osový obraz přímky p podle o je rovnoběžný s přímkou q. Pokud navíc $V \in p$ a $V \in q$, říkáme, že p a q jsou izogonální.

Jedna ze základních vlastností antirovnoběžek je, že jejich průsečíky s přímkami VX a VY leží na jedné kružnici.

Nyní si můžeme definovat, co jsou to symediány.

Definice. Symediány trojúhelníka jsou přímky izogonální s jeho těžnicemi.

Tvrzení 1. *Symediány se protínají v jednom bodě, který nazveme Lemoinovým bodem a budeme ho značit K.*

Ještě než začneme s důležitými tvrzeními a příklady, dohodneme se na značení. Symediánu skrz vrchol A nazveme A-symediána. Průsečíky symedián se stranami BC, CA, AB značíme postupně S_a, S_b, S_c.

Tvrzení 2. *Symediána je množina středů antirovnoběžek s protější stranou.*

To samé se dá říct ještě jiným způsobem. Protíná-li antirovnoběžka ke straně BC přímky AB, AC v bodech B', C', tak symediána v trojúhelníku ABC je těžnice v trojúhelníku $AB'C'$ a naopak těžnice v ABC je symediána v $AB'C'$.

Z následujícího tvrzení se dá snadno dokázat, že se symediány protínají v jednom bodě.

Tvrzení 3. *Symediána z vrcholu A je množina vnitřních bodů X úhlu BAC, pro něž je*

$$\frac{d(X, AB)}{d(X, AC)} = \frac{c}{b}.$$

Tvrzení 4. *A-symediána prochází průsečíkem tečen ke kružnici opsané v bodech B a C.*

Další vlastnosti symedián

Tvrzení 5. *S_a dělí stranu BC v poměru*

$$\frac{BS_a}{S_aC} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Tvrzení 6. *Mějme bod X na symediáně a veďme jím antirovnoběžky ke stranám AC, AB. Ty protnou přímky AB, AC v bodech T, U. Pak platí $|XT| = |XU|$.*

Tvrzení 7. *Udělejme tečny ke kružnici opsané v bodech A, B, C. Ty ohraničují takzvaný Gergonnův trojúhelník $E_aE_bE_c$ (E_a je průsečík tečen z vrcholů B, C). Pak Lemoinův bod trojúhelníku ABC je Gergonnův bod trojúhelníku $E_aE_bE_c$ (to je průsečík přímek AD, BE, CF).*

Tvrzení 8. *Nechť X je bod na kružnici opsané různý od A, pro který platí*

$$\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{c}{b}.$$

Pak AX je A-symediána. Navíc BC, XA, CB jsou symediány v trojúhelnících BXA, XBC, BAX.

Obtížnější tvrzení

Tvrzení 9. (Kosinová kružnice) *Bodem K vedeme antirovnoběžky se stranami. Ty na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed této kružnice je K.*

Tvrzení 10. (Lemoinova kružnice) *Bodem K vedeme rovnoběžky se stranami. Ty na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed kružnice, na níž leží, je střed úsečky OK.*

Tvrzení 11. *Nechť M je střed strany BC a X střed A-výšky. Pak na MX leží Lemoinův bod.*

Tvrzení 12. (Tuckerovy kružnice) *Strany trojúhelníka „přistejnolehlíme" ke K s koeficientem menším než jedna. Obrazy na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed kružnice je na úsečce OK.*

Tvrzení 13. (Lemoine Theorem) *Lemoinův bod je jediný bod, který je těžištěm svého pedal triangle, tedy trojúhelníku, jehož vrcholy jsou projekce K na strany.*

Příklady

Příklad 14. Symediána leží vždy mezi osou úhlu a výškou.

Příklad 15. Nechť D, E, F jsou body dotyku kružnice vepsané postupně se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že ABC je rovnostranný, právě když je těžiště trojúhelníku ABC Lemoinovým bodem trojúhelníku DEF.

Příklad 16. Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AC| = 2|AB|$. Ke kružnici k jemu opsané sestrojme tečny v bodech A a C a jejich průsečík označme P. Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici k. (ČR TST 2013)

Příklad 17. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC. Bod P leží uvnitř trojúhelníku tak, že $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ACP|$. Označme M střed strany BC. Ukažte, že $|\sphericalangle BPM| + |\sphericalangle CPA| = 180°$. (Poland 2000)

Příklad 18. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ pro střed M úsečky AC platí $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle CMD| = |\sphericalangle BAD|$. Dokažte, že $ABCD$ je tětivový. (Poland 2005)

Příklad 19. Nechť MN je přímka rovnoběžná s BC, kde M, N leží na stranách AB, AC. Přímky BN a CM se protínají v bodě P. Kružnice opsané trojúhelníkům BMP a CNP se protínají ve dvou různých bodech P a Q. Dokažte $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAP|$. (Balkan MO 2009)

Příklad 20. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Osa úhlu u vrcholu A protne stranu BC v bodě D a kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě E (různém od A). Kružnice s průměrem DE protne podruhé kružnici opsanou v bodě F. Dokažte, že AF je symediána v trojúhelníku ABC. (ARO 2009)

Příklad 21. Trojúhelník ABC je vepsaný do kružnice ω. Tečny k ω v bodech B a C se protínají v T. Bod S leží na polopřímce BC tak, že $AS \perp AT$. Body B_1 a C_1 leží na polopřímce ST (s C_1 mezi B_1 a S) tak, že $|B_1T| = |BT| = |C_1T|$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a AB_1C_1 jsou podobné. (USA TST 2007)

Literatura a zdroje

[1] Sborník *i*KS 1, příspěvek Michala Rolínka, *http://iksko.org/sous.php*
[2] PraSečí archiv, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php*
[3] Cut The Knot, *http://cut-the-knot.org*
[4] Mathematical Reflections 4, 2013, *https://www.awesomemath.org/assets/PDFs/MR4_Symmedians.pdf*
[5] 107 Geometry Problems

Dolní celá a zlomková část čísla

Rado Švarc

Abstrakt. Příspěvek popisuje základní vlastnosti funkcí celá a zlomková část čísla. Krom definice a popisu základních vlastností příspěvek obsahuje také mnoho příkladů na základní typy úloh souvisejících s těmito funkcemi.

Definice. Jako funkci $\lfloor x \rfloor$ definujeme (zjevně jednoznačně dané) celé číslo, pro které platí $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Toto číslo pak nazýváme *dolní celou částí* x (slovíčko dolní se občas vynechává).

Definice. *Zlomková* (někdy též *necelá* nebo *desetinná*) *část čísla* x se definuje jako $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Tedy například $\lfloor 1{,}17 \rfloor = 1$, $\{1{,}17\} = 0{,}17$, $\lfloor -3{,}7 \rfloor = -4$, $\{-3{,}7\} = 0{,}3$. Důležité je, že funkce celá část není zaokrouhlování. Zaokrouhlování je ve skutečnosti funkce $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Dolní celá a zlomková část mají mnoho vlastností, které jsou sice obvykle více či méně zřejmé, ale rozhodně se hodí mít je na paměti.

Tvrzení. *Pokud x a y jsou reálná čísla a n celé číslo, pak platí následující tvrzení.*

(i) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
(ii) $\{x + n\} = \{x\}$.
(iii) *Dolní celá část je neklesající funkce, tj. pokud $x \leq y$, pak $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.*
(iv) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
(v) $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$.
(vi) *Pokud jsou x a y nezáporná čísla, pak $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$.*
(vii) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.
(viii) *Číslo $\lfloor x \rfloor$ je vždy celé.*
(ix) $0 \leq \{x\} < 1$.

Doporučuji čtenáři se nad všemi tvrzeními alespoň na chvíli zamyslet a uvědomit si, že platí.

Skákání a intervaly

Jednou ze základních vlastností celé části je, že je „zblízka konstantní“, tj. mění svou hodnotu jen při přechodu přes celé číslo, což se nestává příliš často. Toho se dá využít pro důkaz mnohých vztahů, a to hned dvěma způsoby. Prvním je „skákání“. To spočívá v důkazu indukcí, ve kterém využíváme tvrzení typu „tento člen se nemění/mění konstantně, s výjimkou případu, kdy …“ Druhý způsob spočívá v rozdělení čísel do skupin (dle zlomkové části či velikosti) tak, aby výraz, se kterým pracujeme, byl v celém intervalu konstantní. Poté buď projdeme všechny možnosti, nebo to prostě vyřešíme algebraicky v obecném intervalu.

Příklad 1. Jako a_n si označme n-té nejmenší přirozené číslo, které není čtverec. Ukažte, že

$$a_n = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Příklad 2. Pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ dokažte rovnost

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \cdots + \lfloor \log_n n \rfloor.$$

(iKS 2013/2014)

Příklad 3. Pro všechna reálná čísla x a přirozená čísla n dokažte rovnost

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

(Hermite)

Příklad 4. Pro všechna reálná x ukažte rovnost

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3}{6} \right\rfloor.$$

Příklad 5. Pro všechna přirozená n ukažte rovnosti

(i) $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$, (Kanada 1987)

(ii) $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n+8} \rfloor$. (Írán 1996)

Rovnice a odhady

Pravděpodobně nejrozšířenějším druhem úloh zabývajících se celými a zlomkovými částmi jsou rovnice. Obvykle platí, že pokud se v rovnici vyskytnou všechny tři čísla x, $\lfloor x \rfloor$ a $\{x\}$, chcete se jednoho z nich zbavit použitím nějakého tvaru rovnice $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Obvykle se snažíte zbavovat členu, který je „nejjednodušší“ (má nejnižší stupeň, roznásobení dá nejméně práce atp.). Pokud jsou na tom všechny přibližně stejně, bývá obvykle nejlepší zbavovat se členu x. Důvod je ten, že o $\{x\}$ víte, že leží na intervalu $[0, 1]$, o $\lfloor x \rfloor$ víte, že je to celé číslo, ale o x nevíte skoro nic. Pokud máte rovnici s členy $\lfloor x \rfloor$ a $\{x\}$, obvykle je správná cesta celý výraz odhadnout shora a zdola pomocí $0 \leq \{x\} < 1$, získat interval, ve kterém leží $\lfloor x \rfloor$ a protože je to celé číslo, stačí vyzkoušet všechny možnosti. Občas existuje i rychlejší řešení, ale většinou bývá dosti trikové.

Nakonec, pokud pracujeme s rovnicí bez zlomkových částí, dá se občas použít (dosti mlhavé) „tvrzení“ $\lfloor x \rfloor \approx x$. To nám občas poradí s tím co máme s rovnicí dělat. Při skutečném dokazování se poté využije konkrétnější tvar $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

Příklad 6. Nalezněte všechna reálná čísla x taková, že $\lfloor x\rfloor^2 + 4\{x\}^2 = 4x - 5$.

Příklad 7. Nalezněte všechna reálná čísla x taková, že

$$\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{\lfloor x\rfloor}.$$

Příklad 8. Nalezněte všechny trojice reálných čísel (x, y, z) takové, že

$$\begin{aligned} x + \lfloor y\rfloor + \{z\} &= 1{,}1,\\ \lfloor x\rfloor + \{y\} + z &= 2{,}2,\\ \{x\} + y + \lfloor z\rfloor &= 3{,}3. \end{aligned}$$

(Rumunsko 1979, Austrálie 1999)

Příklad 9. Nalezněte všechna reálná čísla x taková, že $\lfloor x^2 + 2x\rfloor = \lfloor x\rfloor^2 + 2\lfloor x\rfloor$.
(Indie 2009)

Příklad 10. Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) takových, že

$$\left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^2+b^2}{ab} \right\rfloor + ab.$$

(IMO shortlist 1996)

Příklad 11. Nechť x je reálné číslo. Ukažte, že x je celé číslo právě tehdy, když pro všechna přirozená čísla n platí

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 3x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor = \frac{n(\lfloor x\rfloor + \lfloor nx\rfloor)}{2}.$$

Sudost a dělení

Další z oblíbených typů úloh s celou a zlomkovou částí se zabývá dělením/dělitelností celými čísly. Pokud jde o dělitelnost, zajímá nás většinou dělitelnost dvojkou. Užitečný trik v tomto případě je binární zápis. V tu chvíli je totiž celá část čísla před desetinou čárkou a zlomková za desetinnou čárkou. Sudost/lichost v tu chvíli určuje poslední cifra před desetinnou čárkou. Často ovšem ani tento trik nepomůže a je třeba mít jednoduše vhled do toho, jak celá část čísla funguje. Pokud jde o práci s celými/zlomkovými částmi zlomku, užitečným trikem je fakt, že $b \cdot \{a/b\}$ je zbytek po dělení čísla a číslem b, zatímco $\lfloor a/b\rfloor$ je počet násobků b menších nebo rovných a.

Příklad 12. Ukažte, že následující posloupnosti obsahují nekonečně mnoho sudých a lichých čísel:

(i) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \left\lfloor \frac{3}{2} a_n \right\rfloor$,
(ii) $a_n = \lfloor 2^n\sqrt{2}\rfloor + \lfloor 2^n\sqrt{3}\rfloor$. (Čína pro holky, 2008)

Příklad 13. Je číslo $\lfloor (1+\sqrt{2})^{2010!} \rfloor$ sudé, nebo liché? (MKS 30–1–7)

Příklad 14. Pro dvojici nenulových reálných čísel a, b platí, že pro libovolné přirozené n je číslo $\lfloor an+b \rfloor$ sudé. Ukažte, že a je sudé celé číslo.

Příklad 15. Ukažte, že pro dvojici nesoudělných přirozených čísel p, q platí

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

(Gauss)

Příklad 16. Nechť p je prvočíslo a s je přirozené číslo menší než p. Dokažte, že $s \mid p-1$ právě tehdy, když neexistují přirozená čísla m, n taková, že $m < n < p$ a

$$\left\{ \frac{sm}{p} \right\} < \left\{ \frac{sn}{p} \right\} < \frac{s}{p}.$$

(USA 2006)

Myšmaš

Přestože se v olympiádách a na soutěžích některé druhy úloh objevují častěji než jiné, každou chvíli je zadána absolutně **originální** úloha. A co pak s tím? V tu chvíli jediný způsob, kterým se dá připravit, je mít dobrý vhled do daného oboru. A ten se získá jen počítáním dalších originálních příkladů. Dolní celá a zlomková část jsou naneštěstí (nebo naštěstí?) tak jednoduché funkce, že se na ně dají vymyslet mraky originálních, neobvyklých a šťavňatých úloh.

Příklad 17. Nalezněte polynom $P(x,y)$, který není identicky rovný nule, ale zároveň pro libovolné x platí $P(\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor) = 0$.

Příklad 18. Ukažte, že pro každé přirozené n platí

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \cdots + \{\sqrt{n^2-1}\} + \{\sqrt{n^2}\} \le \frac{n^2-1}{2}.$$

(Rusko 1999)

Příklad 19. Nechť α a β jsou kladná iracionální čísla taková, že $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Nechť $a_i = \lfloor i\alpha \rfloor$ a $b_i = \lfloor i\beta \rfloor$. Ukažte, že každé přirozené číslo leží v právě jedné z těchto posloupností, a to právě jednou. (Beatty)

Příklad 20. Nechť x_1 je racionální číslo větší než jedna. Nechť

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\lfloor x_n \rfloor}.$$

Ukažte, že tato posloupnost obsahuje přirozené číslo. (Rusko 2007)

Příklad 21. Nalezněte všechny funkce na reálných číslech takové, že pro libovolnou dvojici reálných čísel x, y platí

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor.$$

(IMO 2010)

Příklad 22. Vyčíslete součet

$$\left\lfloor \frac{2^0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor.$$

(Rusko 2000)

Příklad 23. Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reálných čísel splňuje vztah

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \{a_i\}.$$

Ukažte, že existuje N takové, že pokud $n \geq N$, pak $a_{n+2} = a_n$.
(IMO shortlist 2006)

Příklad 24. Nechť a_0 je přirozené číslo. Pokud $5 \mid a_n$, pak $a_{n+1} = a_n/5$, jinak $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{5} a_n \rfloor$. Ukažte, že existuje N takové, že pokud $n \geq N$, pak $a_{n+1} > a_n$.
(Rusko 2003)

Příklad 25. Nechť

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \right),$$

kde n je přirozené číslo. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho n takových, že

(i) $a_{n+1} > a_n$,
(ii) $a_{n+1} < a_n$.

(IMO shortlist 2006)

Příklad 26. Konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$ celých čísel nazveme *cool*, pokud existuje x takové, že $a_k = \lfloor kx \rfloor$ pro všechna k mezi 1 a n. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ je cool posloupnost. Potom člen a_k (kde $1 \leq k \leq 1000$) nazveme *nutný* právě tehdy, když posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b$ je cool právě tehdy, když $b = a_k$. Kolik nejvíce nutných členů může obsahovat tato posloupnost? (USA TST 2013)

Literatura a zdroje

[1] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng, *104 Number Theory Problems from USA IMO Training*, Birkhäuser, Boston, 2007.
[2] Titu Andreescu, *105 Algebra Problems from the AwesomeMath Summer Program*, XYZ Press, LLC, 2013.
[3] *http://www.mathlinks.ro*

Geometrie trojúhelníka

Martin Töpfer

Abstrakt. Přehled známých vlastností trojúhelníka ilustrovaný na mnoha úlohách, které pochází hlavně z matematických olympiád posledních let.

Cílem této přednášky je důkladné seznámení se známými vlastnostmi trojúhelníka. Sami uvidíte, že dobrá orientace v trojúhelníku je klíčem k vyřešení mnoha úloh nejen z české MO. Též si ukážeme, jak se dá rovnou ze zadání geometrické úlohy poznat, které postupy bude třeba použít. To vše samozřejmě na nepřeberném množství příkladů. Směle do toho!

Výšky

Vůbec nejvíce zajímavých vlastností v trojúhelníku mají výšky. Obecně se dá říci, že výšky jsou pěkné díky tomu, že vytvářejí mnoho tětivových čtyřúhelníků (těch pravých úhlů!) a snadno se tak dá vyjádřit téměř kterýkoliv úhel jimi určený. Pomocí výšek se též dá pracovat se středy různých úseček, jak dále uvidíme. Úlohy s výškami jsou těmi nejpříjemnějšími.

Tvrzení. *Výšky se protínají v jednom bodě. Budeme ho nazývat ortocentrum a značit H. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AHB| = 180^\circ - \gamma$. Ortocentrum leží uvnitř trojúhelníka, právě když je trojúhelník ostroúhlý.*

Tvrzení. *Zobrazíme-li ortocentrum osově dle kteréhokoliv strany nebo středově dle kteréhokoliv středu strany, obraz padne na kružnici opsanou.*

Tvrzení. *Středy stran, paty výšek a středy úseček spojujících vrcholy s ortocentrem leží na jedné kružnici. Ta se jmenuje kružnice devíti bodů nebo též Feuerbachova kružnice. Tato kružnice má poloviční poloměr než kružnice opsaná.*

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice ortocenter $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$ je rovnoběžná s CD. (MO 58–A–I–2)

Příklad. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

Příklad. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, H průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OH. (MO 60–A–III–5)

Příklad. Z paty výšky vedené z vrcholu A trojúhelníka ABC veďme postupně kolmice na zbylé dvě výšky a na strany b a c. Ukažte, že paty těchto kolmic leží v přímce.

Příklad. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AX, BY, CZ a ortocentrem H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček BC a AH. Dokažte $MN \perp YZ$.
(Francouzská MO)

Osy úhlů a Švrčkův bod

I osy úhlů nám dovolí pěkně počítat vzniklé úhly. Nicméně pro ně platí i zajímavý metrický vztah a nemůžeme si být úplně jisti, z které strany se na úlohu vrhnout. Počítání úhlů je ovšem častější, a je-li ve hře i kružnice opsaná, není o čem přemýšlet (Švrčkův bod).

Tvrzení. *Osy úhlů se protínají v jednom bodě. Jejich průsečíkem je střed kružnice vepsané a jeho standardní označení je I. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AIB| = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.*

Tvrzení. *Buď ABC trojúhelník a nechť $D \in BC$ leží na ose úhlu α. Pak platí*

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tvrzení. *Osa strany, osa protějšího úhlu a kružnice opsaná se protínají v jednom bodě. Budeme ho nazývat Švrčkův bod a značit $\check{S}$.*

Tvrzení. *Pro Švrčkův bod $\check{S}$ příslušející straně AB platí*

$$|\check{S}A| = |\check{S}B| = |\check{S}I|,$$

kde I je střed kružnice vepsané.

Příklad. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa strany AB protne kružnici k v bodě K, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC. Osy stran AC a BC protnou přímku CK po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné. (MO 58–B–I–5)

Příklad. Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kolmice na přímku CI vedená bodem I protne přímku AB v bodě M. Dokažte, že kružnice trojúhelníku ABC opsaná protne úsečku CM ve vnitřním bodě N a že přímky NI a MC jsou navzájem kolmé. (MO 63–A–I–3)

Příklad. V rovině je dán úhel XSY a kružnice k o středu S. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k, jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách SX a SY. Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků ABC.
(MO 57–A–S–3)

Příklad. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.
(IMO 2006)

Příklad. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. (MO 56-A–III–2)

Příklad. $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označme paty kolmic z bodu D na strany AB, BC, CA po řadě P, Q, R. Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle CDA$ se protínají na přímce AC, právě když $|RP| = |RQ|$. (IMO 2003)

Kružnice opsaná

Kružnice opsaná samozřejmě též vytváří tětivové čtyřúhelníky, a proto bude i zde počítání úhlů naší hlavní zbraní. Občas si ovšem práci s počítáním úhlů můžeme usnadnit tím, že použijeme nějaké známé tvrzení, například to o Simsonově přímce.

Tvrzení. *Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Je jím střed kružnice opsané a značit ho budeme O. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$. Bod O leží uvnitř trojúhelníka, právě když je trojúhelník ostroúhlý.*

Tvrzení. *Střed kružnice opsané leží na jedné přímce s těžištěm a ortocentrem trojúhelníka, přičemž platí poměr $2|OT| = |TH|$. Tato přímka se nazývá Eulerova přímka.*

Tvrzení. *Buď ABC trojúhelník a D bod na jeho kružnici opsané. Pak paty kolmic z bodu D na strany trojúhelníka leží v přímce. Tato přímka se nazývá Simsonovou přímkou bodu D.*

Příklad. Ukažte, že střed Feuerbachovy kružnice leží na Eulerově přímce.

Příklad. Označme S střed kružnice vepsané, T težiště a V průsečík výšek daného rovnoramenného trojúhelníku, který není rovnostranný.

(a) Dokažte, že bod S je vnitřním bodem úsečky TV.
(b) Určete poměr délek stran daného trojúhelníku, je-li bod S středem úsečky TV.

(MO 61–A–I–3)

Příklad. Na kratším oblouku CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec. (MO 58–A–III–2)

Příklad. Uvažme body A, B, C, D a E takové, že $ABCD$ je rovnoběžník a $BCED$ je tětivový čtyřúhelník. Bodem A veďme přímku ℓ. Ta protne úsečku DC v bodě F a přímku BC v bodě G. Pokud platí $|EF| = |EG| = |EC|$, ukažte, že ℓ je osa úhlu DAB. (IMO 2007)

Těžnice

Ze všech dosud zmíněných bodů a čar v trojúhelníku je s těžnicemi největší potíž. Nejsou-li ony středy úseček zároveň středy nějakých kružnic, je počítání úhlů téměř neúčinné. Je třeba nějak využít onu shodnost. Nejčastějším postupem je dokreslování například středních příček. Je možné též užít obsahy nebo třeba stejnolehlost.

Tvrzení. *Těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě, jímž je těžiště T. Zapamatujeme si, že úhel ATB nelze jednoduše spočítat. Těžnice se dělí v poměru $2 : 1$.*

Tvrzení. (ne úplně známé, ale užitečné) *Je dán trojúhelník ABC. Množina bodů X, pro něž mají trojúhelníky ABX a ACX stejný obsah, je právě těžnice na stranu a (rozuměj celá přímka).*

Příklad. Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \leq 2$, $t_b \leq 3$, $t_c \leq 4$. (MO 61–A–III–2)

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme S jeho průsečík úhlopříček a paty kolmic z bodu S na přímky AB a CD označme E a F. Dokažte, že osa úsečky EF prochází středy stran BC a DA.

Příklad. Je dána kružnice k se středem S a její tečna p s bodem dotyku A. Na přímce p leží též bod B. Úsečku AB zobrazíme v nějakém otočení kolem bodu S na úsečku $A'B'$. Dokažte, že přímka AA' půlí úsečku BB'. (Turnaj měst)

Příklad. V $\triangle ABC$ je I střed kružnice vepsané, M střed strany AC a N střed oblouku AC kružnice opsané (toho, který obsahuje B). Dokažte $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$. (KMS, gama)

Příklad. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník se shodnými stranami AB a CD, které nejsou rovnoběžné. Označme E, F středy úhlopříček AC a BD. Přímka EF protíná úsečky AB a CD po řadě v bodech G a H. Ukažte, že $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle DHG|$. (MEMO 2009)

Kružnice vepsaná a připsané

Krom zjevného faktu, že můžeme kupříkladu počítat úhly či provádět různé stejnolehlosti, je velmi užitečné též počítání délek různých úseček. U těchto kružnic tedy též většinou váháme, který přístup použít.

Tvrzení. *Buďte X, Y a Z body, v nichž se kružnice vepsaná trojúhelníka ABC dotýká postupně stran a, b a c. Pak platí*

$$|BX| = \frac{a+c-b}{2}.$$

Obdobné vztahy platí i pro délky ostatních úseků.

Tvrzení. *Podobně se dají vyjádřit délky úseků pro body dotyku s kružnicí připsanou.*

Tvrzení. *Nechť ρ je poloměr kružnice vepsané, S obsah trojúhelníka a s polovina jeho obvodu. Pak platí*

$$S = \rho s.$$

Příklad. Na straně AB trojúhelníka ABC označme X bod dotyku s kružnicí vepsanou a Y bod dotyku s příslušnou kružnicí vepsanou. Ukažte, že střed úsečky XY je též středem úsečky AB.

Příklad. $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Ukažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a CDA mají vnější dotyk.

Příklad. Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.

Další zajímavá tvrzení

Tvrzení. (Feuerbach) *Feuerbachova kružnice se dotýká kružnice vepsané i všech kružnic připsaných.*

Tvrzení. (Ceva) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí*

$$\frac{|AZ| \cdot |BX| \cdot |CY|}{|BZ| \cdot |CX| \cdot |AY|} = 1.$$

Tvrzení. (Menelaus) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě body na přímkách BC, AC a AB (jeden z nich je vně ABC). Body X, Y a Z leží v přímce, právě když platí ten samý poměr*

$$\frac{|AZ| \cdot |BX| \cdot |CY|}{|BZ| \cdot |CX| \cdot |AY|} = 1.$$

Tvrzení. (Morley) *Buď ABC trojúhelník. Bodem A a vnitřkem $\triangle ABC$ veďme polopřímku AX_1 takovou, že $|\sphericalangle BAX_1| = \alpha/3$, a naopak bodem B veďme polopřímku BX_2 (opět procházející vnitřkem ABC) takovou, že $|\sphericalangle ABX_2| = \beta/3$. Průsečík těchto dvou polopřímek označme C'. Obdobně sestrojíme body A' a B'. Pak je trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.*

Tvrzení. (Napoleon) *Jestliže nad stranami daného trojúhelníka ABC jsou vně, resp. zevnitř sestrojeny rovnostranné trojúhelníky, pak jejich středy tvoří rovnostranný trojúhelník.*

Poslední várka příkladů

Příklad. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek H a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici. (MO 55–A–III–4)

Příklad. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme D patu výšky z bodu C. Nechť X je bod uvnitř úsečky CD. Označme K ten bod na úsečce AX, pro který $|BK| = |BC|$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX, pro který $|AL| = |AC|$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK. Ukažte, že $|MK| = |ML|$. (IMO 2012)

Příklad. Ukažte, že uvnitř $\triangle ABC$ existuje právě jeden bod P takový, že

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |AB|^2 = |PB|^2 + |PC|^2 + |BC|^2 = |PC|^2 + |PA|^2 + |CA|^2.$$

(IMO shortlist)

Příklad. V trojúhelníku ABC, jehož strany vyhovují rovnosti $|AB| + |BC| = 3|AC|$, označme I střed jeho vepsané kružnice a D a E body, v nichž se vepsaná kružnice postupně dotýká stran AB, BC. Jsou-li K a L obrazy bodů D a E ve středové souměrnosti se středem I, je čtyřúhelník $ACKL$ tětivový. Dokažte. (IMO shortlist 2005)

Příklad. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník takový, že $|AB| \neq |AC|$. Kružnice o průměru BC protíná strany AB a BC postupně v bodech M a N. Označme O střed strany BC. Osy úhlů BAC a MON se protínají v bodě R. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR se protínají na straně BC. (IMO shortlist 2004)

Zdroje

Tento příspěvek vychází ze stejnojmenné přednášky Michala Rolínka. Doplnil jsem ji hlavně o úlohy z olympiád z posledních pěti let.

Finanční gramotnost

Lukáš Zavřel

Motivace

Asi každý z nás se někdy setkal v životě s nabídkami typu „Peníze rychle na ruku“, „Nebankovní půjčka – půjčte si rychle v klidu vašeho domova“ či „SMS půjčka – půjčíme až 10 000 bez ručitele“. Jak moc je pro nás výhodné si takovou půjčku vzít? Spočítáme si následující jednoduchý příklad:

Příklad 1. Půjčte si právě u nás! Nabízíme vám půjčku ve výši 5 000 Kč na 21 dní. Celkově zaplatíte 6 200, jednorázový poplatek tak činí pouze 1 200 Kč. Snadno tak překonáte díru, kterou máte mezi dvěma výplatami a poté půjčku snadno splatíte. Půjčte si ještě dnes. Kolik bude činit RPSN neboli roční procentní sazba nákladů?

Dále bychom se mohli podívat na rozdíl mezi jednoduchým a složeným úrokováním.

Příklad 2. Paní Zavřelová se v roce 1992 při narození svého synáčka rozhodla uložit do banky 1 000 Kč. V roce 2014 se však bojí, že banka zkrachuje, a tak si chce své uložené peníze vybrat a něco svému synáčkovi za ně pořídit. (Pro jednoduchost se výběr uskuteční ve stejný den, jako se uskutečnil před 22 lety vklad). Vklad se úročil složeně s roční nominální úrokovou mírou 4 % jednou za rok. Jak hodnotný dárek bude moci svému synovi pořídit? O kolik by dárek musel být levnější, kdyby se vklady úročily jednoduše?

Finanční toky

1 000 korun dnes není to samé co 1 000 korun za dva roky, protože dochází ke znehodnocování peněz v čase. Podíváme se nyní na příklady, které vyžadují výpočet budoucí hodnoty.

Příklad 3. Pan Szabados chce založit rodinu, a tak bude za 5 let potřebovat 150 000 Kč na převod buňky koleje do osobního vlastnictví. Nyní má možnost vložit své úspory na vklad úročený čtvrtletně složeně s roční nominální úrokovou mírou 4,4 %. Kolik musí do banky vložit, aby měl za 5 let dostatek peněz?

Příklad 4. Paní Hrušková si plánuje vzít úvěr na 2 roky v hodnotě 150 000 Kč. Splátky žádá pololetní. Banka jí poskytne roční nominální úrokovou míru 6,9 %. Paní Hrušková má nyní na účtu 145 000 Kč. Tato částka se jí úročí složeně měsíčně s roční nominální úrokovou mírou 2,5 %. Každý půlrok si navíc uloží na účet 3 300 Kč, které ušetří ze mzdy. Bude mít na účtu vždy dostatek peněz na splácení úvěru?

Dále si popovídáme o současných možnostech zhodnocení peněz, spočítáme si, kolik nás bude stát hypotéka na náš vysněný barák s bazénem a také jak vysokou rentu dostaneme, pokud si nyní začneme spořit na důchod. Na závěr se pobavíme o tom, jak funguje pojištění a jak vypadá současný provizní systém při sjednávání pojištění.

Obsah