Mentaurov

Sborník, jaro 2013

Anička Chejnovská
Peter „πtr“ Korcsok
Kuba Krásenský
Anh Dung „Tonda“ Le
Vít „Vejtek“ Musil
Mirek Olšák
Tomáš Pavlík
Alča Skálová
Alexander „Olin“ Slávik
Pepa Tkadlec
Martin Töpfer
Martina Vaváčková
Lukáš Zavřel

AUTOŘI: Anička Chejnovská, Peter „πtr“ Korcsok, Kuba Krásenský, Anh Dung „Tonda“ Le, Vít „Vejtek“ Musil, Mirek Olšák, Tomáš Pavlík, Alča Skálová, Alexander „Olin“ Slávik, Pepa Tkadlec, Martin Töpfer, Martina Vaváčková, Lukáš Zavřel
EDITOR: Alexander „Olin“ Slávik
vydání první, náklad 45 výtisků
březen 2013
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Burnsideovo lemma

Anička Chejnovská

Abstrakt. Burnsideovo lemma slouží k počítání kombinatorických objektů s ohledem na nějaký pohyb (například otočení).

Příklad. Kolika způsoby je možné obarvit políčka čtverce 2×2 dvěma barvami? Dvě obarvení přitom považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením čtverce.

Tento příklad lze samozřejmě řešit výčtem prvků jako na obrázku.

Pokud však bude čtverec větší nebo pokud se bude jednat o nějaký jiný objekt, výčet možností přestane připadat v úvahu. K počítání takových věcí nám slouží Burnsideovo lemma.

Permutační grupa

Vezměme si nějakou množinu a označme ji X. Permutace na množině X jsou všechna možná uspořádání prvků této množiny, formálně bijektivní zobrazení z X do X (každému vzoru je jednoznačně přiřazený jeho obraz a naopak).

Množinu všech permutací na množině X budeme značit $S(X)$. Na každé množině existuje identická permutace, která nechává prvky na místě. Permutace můžeme skládat a k dané permutaci můžeme najít inverzní (tj. složením permutace a jejího inverzu dostaneme identitu). Tyto vlastnosti nám stačí k tomu, abychom mohli nazývat $S(X)$ grupou. Poznamenejme jenom, že $g \circ h$ značí permutaci vzniklou provedením h a pak provedením g, a tedy obecně $g \circ h \neq h \circ g$.

Vezměme si jednu podmnožinu $S(X)$ a označme ji G. Pokud G obsahuje identitu, s každou permutací i její inverz a s každými dvěma permutacemi i jejich složení, pak G nazýváme podrupou grupy $S(X)$.

Působení permutací na množině

Působení permutací na množině je nějaké hýbání s jejími prvky, jak jsme už zmínili. Vezmeme si $x \in X$. Pokud budeme na X posílat všechny permutace z G, může se nám prvek x někam posunout. Bodům, na které se může x takhle dostat, říkáme orbita prvku x a značíme ji O_x. Množinu všech orbit, tj. orbity všech prvků množiny X, budeme značit $\mathcal{O}$.

Pozorování. *Pro všechna $x, y \in X$ platí buď $O_x = O_y$, nebo $O_x \cap O_y = \emptyset$.*

Důkaz. Vezmeme si $z \in O_x \cap O_y$ (jinak by byl průnik prázdný a pozorování by platilo) a dále $x' \in O_x$. Pak existují $g_1, g_2, g \in G$ takové, že $g_1(x) = z$, $g_2(y) = z$ a $x' = g(x)$. Platí $x' = g(x) = g(g_1^{-1}(z)) = g(g_1^{-1}(g_2(y)))$. Protože g, g_1^{-1}, g_2 jsou prvky G, je i jejich složení prvkem G, tedy $x' \in O_y$. Protože x' jsme zvolili libovolně, je $O_x \subseteq O_y$. Podobně ukážeme $O_y \subseteq O_x$. Tedy $O_x = O_y$.

Ještě si zadefinujeme dvě význačné podmnožiny X a G. Množinu bodů z X, které vybraná permutace g nechá na místě, nazveme množinou pevných bodů g, a značíme X_g. Podobně množinu permutací, které nechají na místě vybraný bod x nazveme množinou stabilizátorů x a označíme ji G_x. Formálně můžeme tyto množiny popsat následovně: $X_g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$, $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$.

Tvrzení. *Platí $|O_x| \cdot |G_x| = |G|$.*

Důkaz. Mějme $y \in O_x$. Definujme g_y jako prvek G splňující $g(x) = y$.

Abychom tvrzení dokázali, stačí nám dokázat, že počet prvků G je stejný jako počet dvojic (y, f), kde $y \in O_x$ a $f \in G_x$. Tedy chceme najít bijekci mezi prvky grupy a těmito dvojicemi.

Každé dvojici takto přiřadíme pomocí zobrazení F prvek $F(y, f) = g_y \circ f$. Protože $g_y, f \in G$, je i $(g_y \circ f) \in G$. Teď zbývá dokázat, že právě zadefinované zobrazení je bijekce, tzn. prosté a na.

Vezmeme si $(y_1, f_1) \neq (y_2, f_2)$. Nejprve uvažujme, že $y_1 \neq y_2$. Odtud máme $F(y_1, f_1)(x) = (g_{y_1} \circ f_1)(x) = y_1$ a $F(y_2, f_2)(x) = (g_{y_2} \circ f_2)(x) = y_2$, tedy $F(y_1, f_1) \neq F(y_2, f_2)$. Dále si vezmeme $y_1 = y_2$, odkud máme $f_1 \neq f_2$. Tedy existuje nějaké $z \in G$ takové, že $f_1(z) \neq f_2(z)$. Pak $(g_{y_1} \circ f_1)(z) \neq (g_{y_1} \circ f_2)(z) = (g_{y_2} \circ f_2)(z)$, tedy opět dostáváme $F(y_1, f_1) \neq F(y_2, f_2)$, takže F je prosté.

Teď chceme dokázat, že F je na. Hledáme $y \in O_x$ a $f \in G_x$ pro libovolné $l \in G$ tak, že $F(y, f) = l$. Vezmeme si $y = l(x)$ a $f = g_y^{-1} \circ l$ a ověříme, že to funguje: $F(y, f) = (g_y \circ f) = g_y \circ (g_y^{-1} \circ l) = l$.

Tvrzení. *Mějme $x, y \in X$ a $y \in O_x$. Pak $|G_x| = |G_y|$.*

Důkaz. Budeme opět postupovat tak, že najdeme nějakou bijekci $F\colon G_x \mapsto G_y$. Pak už zřejmě $|G_x| = |G_y|$. Opět si vezmeme $g \in G$ splňující $g(y) = x$, pro $h \in G$ položíme $F(h) = g \circ h \circ g^{-1}$. Tedy pro $h \in G_x$ je $F(h) \in G_y$. Jednoduše ověříme, že F je bijekce.

Věta. (Burnsideovo lemma) *Počet orbit je průměrný počet pevných bodů permutací z G, čili*

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Důkaz. Dokazovaný vzorec upravíme na $|\mathcal{O}| \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$. Dále si vezměme množinu všech dvojic (g, x), kde $g \in G$ a $x \in X_g$, a nazvěme ji A. Budeme postupovat počítáním dvěma způsoby.

Nejdříve budeme postupně brát všechny permutace a zjišťovat, s kolika $x \in X$ mohou vytvořit dvojici patřící do A. Dostaneme $|A| = \sum_{g \in G} |X_g|$.

Teď budeme naopak postupně brát všechny prvky množiny X a zjišťovat, s kolika $g \in G$ mohou vytvořit dvojici z A. Vezmeme si $O \in \mathcal{O}$ a $x_O \in O$. Za pomoci dříve dokázaných tvrzení máme $|A| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{O \in \mathcal{O}} |O_{x_O}| \cdot |G_{x_O}| = \sum_{O \in \mathcal{O}} |G| = |\mathcal{O}| \cdot |G|$. Teď už stačí pouze dát obě části dohromady a vyjde nám požadovaná rovnost.

Priklady

Příklad. Kolika různými způsoby, až na otočení, můžeme obarvit čtverec 3×3, když chceme, aby tři políčka byla modrá, tři červená a tři zelená?

Příklad. Kolika různými způsoby, až na otočení a převrácení, můžeme obarvit čtverec 3×3, když chceme, aby tři políčka byla modrá, tři červená a tři zelená?

Příklad. Kolika způsoby lze sestavit náhrdelník ze tří červených, tří zelených a tří modrých kuliček?

Příklad. Kolika způsoby lze přiřadit stěnám krychle čísla $1, \ldots, 6$?

Příklad. Kolik existuje hracích kostek (tj. kolika způsoby můžeme na krychli umístit 1–6 ok) takových, že součet ok na protilehlých stěnách je 7?

Příklad. Kolik existuje neizomorfních grafů na čtyřech vrcholech?

Příklad. Určete počet různých neizomorfních obarvení hran grafu $K_{3,3}$ pomocí n barev.

Zdroje

[1] Robert Šámal: příspěvek *Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati.*
[2] David Stanovský: *Základy algebry.*
[3] přednáška *Kombinatorika a grafy 2.*

Grafy pod vodou

Peter „πtr“ Korcsok

Abstrakt. V tejto prednáške sa budeme zaoberať tokmi: v prvej polovici to budú toky v sieťach, v druhej časti ich zobecníme na ľubovoľný graf. Naučíme sa, kedy vôbec hľadaný tok existuje a ako ho nájsť.

Keď ste ešte boli deťmi, určite ste sa radi hrávali na pieskovisku. Okrem stavania hradov a zahrabávania kamarátov sa v piesku dajú vytvárať kdejaké chodbičky, ktoré sa rôzne spájajú a krížia. Teraz sme už síce starší, ale skúsme sa trochu vrátiť v čase a poďme sa trochu pohrať s bludiskami z piesku.

Pustite vodu!

Už dávnejšie sme v garáži našli hadicu, ktorou otecko polieva záhradu, a keďže teraz nie je doma, prirodzene nás napadne vyskúšať, čo sa bude diať, keď do nášho bludiska pustíme trochu vody. Aby naša snaha nebola márna, predpokladajme, že voda potečie iba po vytvorených chodbách, teda nebude celú stavbu ničiť ani do nej vsakovať **:)**. Voľný koniec hadice teda položíme do niektorej chodbičky, na inom mieste vytvoríme otvor, aby voda mohla odtekať, a naplno otvoríme kohútik …

Definícia. *Orientovaný graf* G je dvojica (V, E), kde V je neprázdna množina *vrcholov* a $E \subseteq V \times V$ je množina *hrán*, teda usporiadaných dvojíc vrcholov.

Definícia. *Sieťou* budeme rozumieť štvoricu (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z, s \in V$ sú dva rôzne vrcholy (budeme ich označovať *zdroj* a *stok*) a $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkcia *kapacity* jednotlivých hrán.

Definícia. *Tok v sieti* je ľubovoľná funkcia $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, ktorá vyhovuje podmienkam

(1) pre každú hranu $e \in E$ platí $f(e) \leq c(e)$,
(2) pre každý vrchol $v \in V$ okrem zdroja a stoku platí

$$\sum_{(x,v)\in E} f(x, v) - \sum_{(v,x)\in E} f(v, x) = 0.$$

Nám bude stačiť, keď sa obmedzíme len na *celočíselné* siete a toky, teda $c\colon E \to \mathbb{N}_0$ a $f\colon E \to \mathbb{N}_0$.

Definícia. Nech f je nejaký tok v sieti $S = (G, z, s, c)$ a $R \subset V$, pričom $z \in R$ a $s \notin R$. Potom dvojicu $(R, \overline{R})$ (skrátene len R) nazveme *rezom* v sieti S a veľkosť toku, ktorý ním prechádza vyjadríme ako

$$f(R) = \sum_{\substack{(x,y)\in E\\ x\in R,\, y\notin R}} f(x,y) \;-\; \sum_{\substack{(y,x)\in E\\ x\in R,\, y\notin R}} f(y,x).$$

Kapacitu rezu $c(R)$ dostaneme analogicky.

Tvrdenie. *Majme sieť (G, z, s, c) a tok f. Potom hodnota $f(R)$ je nezávislá na reze R.*

Hodnotu $f(R)$ z tvrdenia budeme nazývať *veľkosť toku* f a značiť $|f|$.

Z druhej podmienky pre tok dostávame, že pre ľubovoľný rez R platí $|f| \le c(R)$. Nasledujúca veta nám určí, kedy nastáva rovnosť.

Veta. *Pre každú sieť je veľkosť maximálneho toku rovný kapacite minimálneho rezu, teda*

$$\max_{f \text{ tok}} |f| = \min_{R \text{ rez}} c(R).$$

Dôkaz tejto vety využíva algoritmus od pánov Forda a Fulkersona, ktorý vždy vezme nejaký tok a pokúsi sa ho po nejakej (neorientovanej) ceste zlepšiť. Aby sa to podarilo, musí táto cesta spĺňať tieto podmienky:

(1) pre každú hranu e orientovanú v smere od z k s platí $f(e) < c(e)$,
(2) pre každú hranu e orientovanú v smere od s k z platí $f(e) > 0$.

Ak takáto cesta existuje, môžeme sieťou poslať o niečo väčší tok, inak sme už našli tok maximálny.

Dôsledok. *Pre každú celočíselnú sieť vieme nájsť jej maximálny tok.*

A máme zaracha …

Kým sme si vychutnávali pohľad na bludisko plné vody, prišiel otecko a vodu nám vypol. Otvor sa nám podarilo zaplniť skôr, ako voda stihla vytiecť von, takže teraz stojí v chodbičkách. Určite by to bolo krajšie, keby aj naďalej prúdila. Ale ako to docieliť?

V tejto časti už budeme pracovať s *neorientovaným* grafom – z orientovaného ho dostaneme napríklad zabudnutím „smeru“ hrán a prípadne stotožnením hrán medzi rovnakými vrcholmi. Špeciálne vrcholy pre zdroj a stok už tiež nebudeme potrebovať a dokonca môžeme zabudnúť aj na kapacitu jednotlivých hrán.

Definícia. *Tok v grafe* $G = (V, E)$ je dvojica (D, f), kde D je orientácia[1] hrán grafu G a $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ spĺňajúca pre každý vrchol $v \in V$ podmienku

$$\sum_{(x,v)\in E_D} f(x,v) - \sum_{(v,x)\in E_D} f(v,x) = 0.$$

Rezom teraz budeme rozumieť dvojicu $(R, \overline{R})$ (skrátene len R) pre ľubovoľnú neprázdnu množinu $R \subset V$, veľkosť toku prechádzajúceho rezom zadefinujeme analogicky ako pri sieťach.

Tvrdenie. *Pre ľubovoľný tok* f *a ľubovoľný rez* R *platí* $f(R) = 0$.

Dôsledok. *Nech* f *je ľubovoľný tok a* $e \in E$ *je most. Potom* $f(e) = 0$.

Definícia.

(1) Tok f nazveme *nikdenulovým*, pokiaľ neexistuje hrana $e \in E$, že $f(e) = 0$.
(2) Celočíselný tok f nazveme *k-tokom*, ak každá hrana $e \in E$ spĺňa $|f(e)| < k$.

A na záver sa pozrime, kedy existujú práve definované toky.

Tvrdenie. *Každý graf bez mostov má nikdenulový tok.*

Tvrdenie.

(1) *Graf má 2-tok práve vtedy, keď všetky jeho vrcholy majú párny stupeň.*
(2) *Kubický graf má 3-tok práve vtedy, keď je bipartitný.*

Literatúra a zdroje

Pri písaní tohto príspevku som sa mierne inšpiroval príspevkom Víta Musila *Toky v sítích, Hallova věta.*

[1] Knižnica MKS, *http://mks.mff.cuni.cz/library*
[2] Diestel, Reinhard. *Graph Theory*. 4th el. ed. 2010. *http://diestel-graph-theory.com/index.html*
[3] Zhang, Cun-Quan. *Integer flows and cycle covers of graphs.* New York: Marcel Dekker, 1997.

[1] Za každú hranu $\{x, y\} \in E$ pridáme do E_D práve jednu z dvojíc (x, y) a (y, x).

Graf(it)y v metre

PETER „πTR“ KORCSOK

ABSTRAKT. V prednáške sa budeme zaoberať kreslením grafov na rôzne plochy, ako je napríklad sféra alebo torus. Predstavíme si spôsob, ako ľubovoľnú plochu reprezentovať v rovine a ako sa na ňu odvolávať. Prechádzku po týchto plochách zakončíme ich charakteristikami – eulerovský rod a orientovateľnosť – a ukážeme si metódu na vytvorenie (takmer) ľubovoľnej plochy.

Boli ste už v noci v pražskom metre? Nie? Tak to je skutočne škoda, pretože v noci tam nejazdia žiadne vlaky a na steny tunelov si môžete kresliť graf(it)y od výmyslu sveta **:)**.

Dnes sa uspokojíme s jednoduchšími graf(it)mi – budeme si kresliť body a tie sa budeme snažiť spájať rôznymi krivkami, ktoré sa ale navzájom nebudú pretínať. Viem, keby toto čítal nejaký grafiťák, hneď by protestoval, že to žiadne grafity nie sú – preto ich radšej budeme nazývať *grafmi* a spomínané body a krivky budú ich *vrcholy* a *hrany*. Nakoniec *stenou* nakresleného grafu budeme rozumieť každú súvislú časť pôvodného povrchu, ktorý nie je pokrytý naším grafom.

Prečo ale chodiť do metra? To nám nestačí kresliť grafy pri mesiačiku na Karlov most alebo Pražský hrad? Pretože metro nám umožňuje nakresliť (samozrejme bez kríženia) aj grafy, ktoré napr. na stenu hradu nenakreslíme.

Problém 1. (motivačný) Nakreslite graf s vrcholmi A, B, C, a, b, c a hranami spájajúcimi každý „veľký“ vrchol s každým „malým“ na

(a) povrch Karlovho mostu,
(b) steny vestibulu metra.[1]

Bežte, policajti na obzore ...

Aby nás nedajbože nechytili policajti a nedali do basy (to by sme prišli o zvyšok sústredenia, a to predsa nechceme **:)**), opustíme Prahu a metro pod jej povrchom si budeme len predstavovať. Ako ale najlepšie vyjadriť, kam naše grafy vlastne kreslíme?

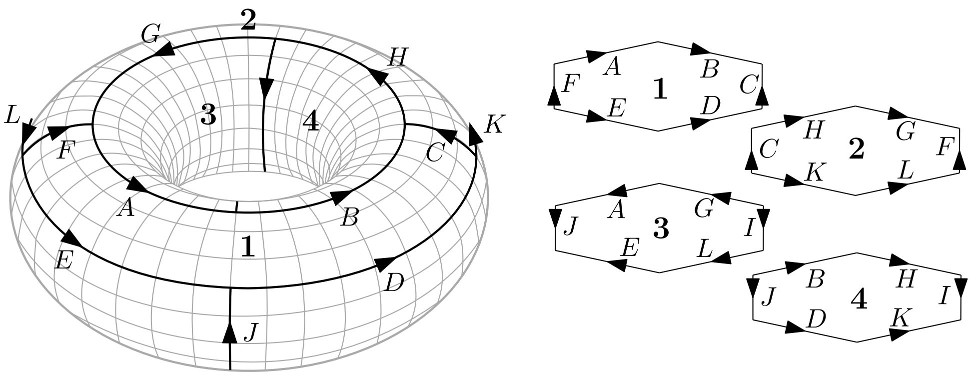
[1] Uvažujte ten najjednoduchší vestibul – uzavretá miestnosť, ktorá má v strede jeden stĺp; kresliť môžete na podlahu, strop aj povrch stĺpu.

Definícia. *Plochou* budeme rozumieť akýkoľvek objekt, na ktorý vieme kresliť graf, teda okolie každého bodu sa chová ako rovina. Plochy A a B budeme považovať za *rovnaké* (odborne *homeomorfné*), ak existuje spojitá bijekcia $f\colon A \to B$, ktorej inverzná funkcia f^{-1} je tiež spojitá.

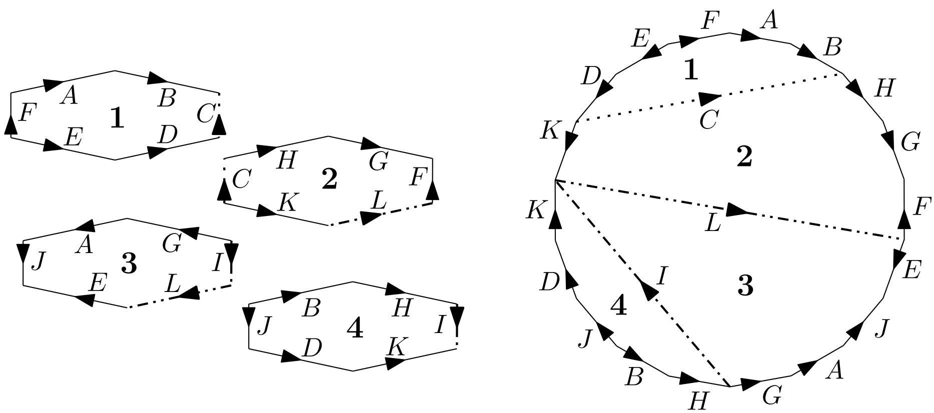
Funkcia f z definície potom zobrazuje jednoduchú krivku na jednoduchú krivku, teda ak sa nám podarí nakresliť nejaký graf na plochu A bez kríženia hrán, tak sa nebudú krížiť ani po zobrazení pomocou f na plochu B.

Takými funkciami f sú najčastejšie rôzne posunutia, otáčania, prípadne zmeny veľkosti a ich kombinácie. Dá sa ukázať, že kruh a štvorec sú vlastne rovnaké plochy, podobne sféra (povrch gule) bez jedného bodu a bežná rovina sú v skutočnosti rovnaké. Mierne horšie sa to ukazuje na zložitejších plochách, napr. torus, preto sa snažíme nájsť nejakú reprezentáciu ľubovoľnej plochy v rovine.

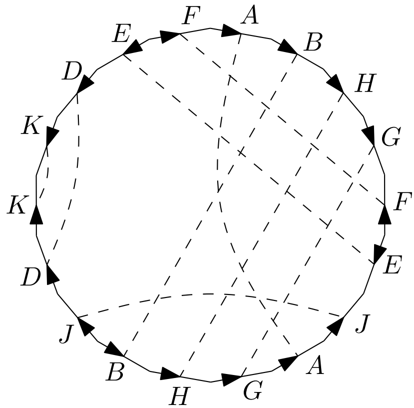
K tomu sa zvykne celá plocha rozdeliť na niekoľko rovinných útvarov. Príklad takéhoto rozdelenia pre torus nájdete na nasledujúcom obrázku. Šípky naznačujú spôsob, ako jednotlivé útvary navzájom susedia.



Následne sa tieto útvary znovu pozliepajú tak, aby vytvorili jeden mnohouholník. Opäť sa zlepujú odpovedajúce si hrany, pričom sa dohliada na ich orientáciu.



Definícia. (Mnohouholníková reprezentácia plochy) Každú plochu je možné reprezentovať pomocou mnohouholníka s orientovanými a spárovanými hranami.



Poradie a orientáciu hrán môžeme zapísať za sebou do riadku, pričom X predstavuje hranu v smere hodinových ručičiek a X^{-1} opačný smer. Reprezentáciu na obrázku by sme teda zapísali

$$ABHGF^{-1}EJ^{-1}A^{-1}G^{-1}H^{-1}B^{-1}JDKK^{-1}D^{-1}E^{-1}F.$$

Už sme si trochu popísali, ako jednotlivé plochy zapisovať, ale stále nevieme, ktoré zápisy vyjadrujú rovnaké plochy.

Problém 2. Ako vyzerajú plochy reprezentované

a) „dvojuholníkmi“ AA^{-1} a AA,
b) štvoruholníkmi $AA^{-1}**$, $ABAB$, $ABA^{-1}B^{-1}$, $ABA^{-1}B$ a $AABB$?

Ja to stále nechápem! Ako teda porovnám dve rôzne metrá?

Pomerne jednoducho – pre každú plochu existuje graf a jeho nakreslenie na tejto ploche, že každá jeho stena je homeomorfná kruhu. Takéto nakreslenie nazveme *bunkovým.*

Veta. *Pre každú plochu S existuje celé číslo $\chi(S)$, že pre ľubovoľný graf G, ktorý má nejaké bunkové nakreslenie na S, platí*[2]

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = \chi(S).$$

[2]Množinu všetkých stien tohto nakreslenia budeme značiť $F(G)$.

Poznámka. Hodnotu $\chi(S)$ nazývame *Eulerovou charakteristikou* plochy S. Pretože ale vo väčšine prípadov je táto hodnota záporná, často sa nahrádza *eulerovským rodom* plochy $\varepsilon(S) := 2 - \chi(S)$, ktorý je už nezáporný.

Problém 3. Pre každú plochu z problému 2 nájdite jej eulerovský rod.

Vidíme, že eulerovský rod nám plochy rozdelil do niekoľkých skupín. Existuje ale ešte nejaká ďalšia vlastnosť plochy, ktorá by nám pomohla rozlíšiť rôzne plochy?

Problém 4. Pokúste sa nájsť vlastnosť uzavretých jednoduchých kriviek, ktorá platí na ploche $ABA^{-1}B^{-1}$, ale na ploche $ABA^{-1}B$ neplatí.

Ak ste boli pri riešení predchádzajúceho problému úspešní, podarilo sa vám zadefinovať *orientovateľnosť* plochy. Ak použijeme mnohouholníkovou reprezentáciu, tak si vystačíme s nasledujúcou definíciou.

Definícia. Plocha je *orientovateľná*, ak jej mnohouholníková reprezentácia neobsahuje dvojicu odpovedajúcich si hrán, ktoré sú obe orientované rovnakým smerom. Špeciálne sa teda každá hrana X mnohouholníka vyskytuje v zápise plochy ako X aj ako X^{-1}.

Pomaly už nadišiel čas, aby sme odhalili tajomstvo, ku ktorému sme celý čas smerovali.

Veta.

(1) *Pokiaľ sa dve plochy zhodujú v eulerovskom rode aj orientovateľnosti, potom sú už rovnaké.*
(2) *Každá orientovateľná plocha má nezáporný párny eulerovský rod.*
(3) *Každá neorientovateľná plocha má kladný eulerovský rod.*

A na úplný záver si ešte predstavíme metódu, ako sa dá vytvoriť plocha s požadovanou orientovateľnosťou a eulerovským rodom.

Definícia.

(1) *Pridaním ucha* (v angličtine *handle*) k niektorej ploche S budeme rozumieť odstránenie dvoch disjunktných kruhov z povrchu S a prepojenie vzniknutých otvorov pomocou „tunelu“.
(2) *Pridaním krížitka* (v angličtine *crosscap*) do niektorej plochy S rozumieme nahradenie kruhu z povrchu S plochou typu AA.

Lema.

(1) *Pridanie ucha nezmení orientovateľnosť plochy a zvýši jej eulerovský rod o 2.*
(2) *Pridaním krížitka vznikne neorientovateľná plocha s eulerovským rodom o 1 väčším.*

Literatúra a zdroje

[1] zápisky z prednášky *Kombinatorika a grafy II* na MFF
[2] Diestel, Reinhard. *Graph Theory*. 4th el. ed. 2010.
http://diestel-graph-theory.com/index.html

Dirichletův princip

Kuba Krásenský

Abstrakt. V příspěvku je formulován Dirichletův princip a jeho dvě možná zobecnění. Čtenář má možnost si jeho použití vyzkoušet na velkém množství příkladů i při důkazu dvou tvrzení.

Dirichletův princip (v angličtině Pigeonhole Principle, tedy Holubníkový princip) je velmi jednoduché tvrzení, které lze využít v nejrůznějších oblastech matematiky. Použití tohoto nástroje někdy není zcela samozřejmé a může vést k zajímavým a překvapivým výsledkům.

Věta. (Dirichletův princip) *Pokud umístíme $n+1$ předmětů do n přihrádek, budou alespoň v jedné přihrádce alespoň dva předměty.*

Jak tuto větu využít? Předpokládáme-li, že žádný člověk nemá na hlavě více než milión vlasů, a vzpomeneme-li si na hodiny zeměpisu, zjistíme, že v Praze nutně musí žít dva lidé s přesně stejným počtem vlasů. Jestli totéž dokážeme i pro Brno, těžko říci. Průměrný počet vlasů na hlavě se pohybuje okolo sto čtyřiceti tisíc.

Podařilo se nám tedy bez práce dokázat, že existuje dvojice lidí s určitou vlastností. Ovšem Dirichletův princip nám nijak neporadí, jak tyto dva lidi najít. Ale tak už to v matematice chodí.

Položme si nyní otázku, kolik lidí se stejným počtem vlasů bychom určitě našli v celé České republice. Odpověď nám dá (opět při dostatečných znalostech reálií) následující zobecnění:

Věta. (Dirichletův princip, obecněji) *Pokud umístíme $kn+1$ předmětů do n přihrádek, bude alespoň v jedné přihrádce alespoň $k+1$ předmětů.*

Uveďme si ještě další možné zesílení našeho výchozího tvrzení. V úlohách ovšem většinou vystačíme s některou z předchozích verzí.

Věta. (Dirichletův princip, ještě obecněji) *Mějme přirozená čísla $n_1, n_2, \dots, n_t$, množinu X s alespoň $1+\sum_{i=1}^{t}(n_i-1)$ prvky a její rozklad na množiny $X_1, X_2, \dots, X_t$. Potom určitě existuje i takové, že X_i má alespoň n_i prvků.*

Nyní už se vrhneme na úlohy, kde budeme toto tvrzení využívat. Klíčové je vždy si rozmyslet, co v tomto případě bude přestavovat „přihrádky“ a co rozmísťované předměty.

Příklad 1. V zásuvce je celkem 10 černých, 12 modrých a 8 šedých ponožek. Kolik jich musíme vytáhnout, abychom určitě měli alespoň jeden pár stejné barvy?

Příklad 2. Dokažte, že mezi 82 různými přirozenými čísly vždy najdu dvojici a, b tak, že $81|(a-b)$.

Příklad 3. Ve čtverci 6×6 cm je náhodně rozmístěných 37 bodů. Dokažte, že vždy existuje čtverec 2×2 cm, ve kterém se nachází alespoň pět z nich.
(MKS, 14. ročník)

Příklad 4. Ve čtverci 10×10 cm je náhodně rozmístěných 101 bodů. Dokažte, že vždy dokážeme vybrat trojúhelník s obsahem 1 cm^2, který obsahuje alespoň dva z nich.

Příklad 5. Mějme skupinu n lidí, z nichž někteří se navzájem znají. Ukažte, že existují dva lidé, kteří znají přesně stejný počet lidí.

Příklad 6. Dokažte, že pro libovolná celá čísla a, b, c, d je výraz

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

dělitelný číslem 12.

Příklad 7. Na šachovnici 8×8 políček máme rozestavěných 33 věží. Najdeme mezi nimi pět takových, které se navzájem neohrožují? (MKS 20–3–1)

Příklad 8. Dokažte, že když vybereme 53 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, bude mezi nimi vždy dvojice čísel s rozdílem přesně 12.

Příklad 9. Vybereme-li v rovnostranném trojúhelníku o straně a libovolně 10 bodů, pak vzdálenost některých dvou vybraných bodů je nejvýše $\frac{a}{3}$. Dokažte.

Příklad 10. Ukažte, že z libovolné posloupnosti $n+1$ různých přirozených čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dokážeme vybrat skupinu za sebou jdoucích prvků tak, aby jejich součet byl násobkem n.

Příklad 11. Hrací plán hry „Člověče, nezlob se“ obsahuje 36 políček uspořádaných do kruhu. Kolik nejméně figurek musí být ve hře, abychom vždy mohli některou z nich vyřadit pomocí jiné nezávisle na jejich rozložení a výsledku hodu kostkou?
(MKS 20–3–2)

Příklad 12. Do políček tabulky 10×10 zapíšeme libovolná celá čísla tak, aby se žádná dvě čísla, která spolu sousedí ve stejném řádku nebo sloupci, nelišila o více než 5. Dokažte, že v tabulce se vždy najdou dvě stejná čísla.

Příklad 13. Dokažte, že z libovolné pětice vrcholů pravidelného devítiúhelníku umíme jeden odstranit tak, aby zbylé čtyři tvořily vrcholy lichoběžníku.

Příklad 14. Dokažte, že pro všechna nesoudělná čísla a a b je desetinný rozvoj $\frac{a}{b}$ konečný nebo má periodu maximálně $b-1$.

Než se dáme do těžších příkladů, dokážeme pomocí Dirichletova principu jedno zajímavé tvrzení:

Věta. (Erdős – Szekeres) *Z každé posloupnosti n^2+1 různých čísel dokážeme vybrat rostoucí nebo klesající podposloupnost délky alespoň $n+1$.*

Příklad 15. Po stole 1×1 m leze 51 much. Ukažte, že s pomocí kruhového hrnce s poloměrem $\frac{1}{7}$ m (a trochou šikovnosti **:)**) můžeme chytit alespoň 3 mouchy jednou ranou.

Příklad 16. New York je kromě jiného známý i pravidelností svých ulic – má 151 severojižních a 151 východozápadních ulic, které se vždy po 100 metrech kříží. Ve městě je rozmístěno celkem 11401 telefonních automatů. Dokážeme tam najít dva automaty, které jsou od sebe vzdálené maximálně 200 metrů chůze po chodníku? (MKS 20–3–3)

Příklad 17. Dokažte, že mezi libovolnými osmi složenými přirozenými čísly menšími než 360 existují vždy dvě čísla, která mají společného dělitele. (MKS, 14. ročník)

Příklad 18. Pro libovolná daná reálná čísla $x_1, x_2, ..., x_n$ existuje reálné číslo x tak, že všech n součtů $x+x_1, x+x_2, ..., x+x_n$ jsou iracionální čísla. Dokažte.

Příklad 19. Dokažte, že z každé $(n+1)$-prvkové podmnožiny $\{1,2,\ldots,2n\}$ lze vybrat dvě nesoudělná čísla.

Příklad 20. Dokažte, že z každé $(n+1)$-prvkové podmnožiny $\{1,2,\ldots,2n\}$ lze vybrat dvě různá čísla tak, že jedno dělí druhé. (MKS 20–3–7)

Příklad 21. Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost s diferencí 60, jejíž všechny prvky jsou prvočísla. (MKS 18–1–1)

Příklad 22. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n existuje jeho přirozený násobek složený jen z cifer 0 a 1. Dokážete toto tvrzení nějak zesílit?

A zase jedno tvrzení, vyplývající z naší oblíbené věty:

Věta. (Dirichletova o aproximaci) *Pro každé reálné číslo a a kladné číslo n existují celá čísla p, q tak, že $1\le q\le n$ a $|aq-p|\le\frac{1}{1+n}$.*

Příklad 23. Dokažte, že z libovolného šestnácticiferného čísla umíme vybrat neprázdnou skupinu za sebou jdoucích cifer, jejíž ciferný součin je druhou mocninou celého čísla. (MKS 28–5–7)

Příklad 24. Šachista má 11 týdnů na to, aby se připravil na turnaj. Rozhodne se hrát alespoň jednu tréninkovou partii denně. Aby se ale příliš nevyčerpal, stanoví si, že během žádného kalendářního týdne neodehraje více než 12 partií. Ukažte, že existuje několik po sobě jdoucích dní, během kterých šachista sehraje dohromady právě 21 her.

Příklad 25. V rovině je rozmístěno $2n + 1$ bodů tak, že žádné z nich netvoří trojúhelník se všemi stranami většími než 1. Dokažte, že nalezneme $n + 1$ bodů, které je možno uzavřít do jednotkové kružnice.

Příklad 26. Na přímce p leží postupně 6 úseků $u_1, u_2, \dots, u_6$ s délkami po řadě $d_1, d_2, \dots, d_6$, které jsou po dvou disjunktní. V jedné polorovině určené přímkou p sestrojíme body $S_1, S_2, \dots, S_6$ tak, že vrchol S_i tvoří spolu s úsečkou u_i rovnostranný trojúhelník ($i = 1, 2, \dots, 6$). Nakonec vytvoříme kruhy se středy v bodech $S_1, S_2, \dots, S_6$ a poloměry $d_1, d_2, \dots, d_6$. Dokažte, že neexistuje bod, který by ležel ve všech šesti kruzích. (MKS 28–5–6)

Příklad 27. Mějme v rovině n bodů $x_1, \dots, x_n$ v obecné poloze[1], přičemž některé z těchto bodů jsou spojené úsečkami. *Stupněm* bodu x_k budeme nazývat počet spojnic, které z něho vedou. Dokažte, že pokud žádné dva body stejného stupně nemají společného „souseda“ a navíc je alespoň jedna dvojice bodů spojená úsečkou, pak nutně existuje bod, jehož stupeň je 1. (MKS, 14. ročník)

Příklad 28. Ukažte, že existuje přirozené číslo N tak, že každé přirozené číslo $a > N$ dokážeme „osekat“ z krajů na přirozený násobek čísla 2011. (Kanadská MO 2011)

Příklad 29. Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupince aspoň jednoho kamaráda. (Celostátní kolo MO 2011/2012)

Příklad 30. Ukažte, že je možné obarvit prvky množiny $\{1, 2, \dots, 1987\}$ čtyřmi barvami tak, aby nešlo najít jednobarevnou desetiprvkovou aritmetickou posloupnost. (IMO Shortlist 1987)

Příklad 31. Pravidelnému 432-úhelníku bylo 108 vrcholů obarveno červeně, 108 zeleně, 108 modře a zbylých 108 žlutě. Dokažte, že je možné najít 4 shodné trojúhelníky takové, že vrcholy jednoho jsou všechny červené, druhého žluté, třetího modré a čtvrtého zelené. (USAMO 2012)

Příklad 32. Mějme v prostoru n bodů ($n \geq 3$), přičemž jejich spojnice jsou různě dlouhé a r z těchto úseček je obarvených. Dokažte, že potom z těchto obarvených spojnic umíme vytvořit tah[2] délky alespoň $\lceil \frac{2r}{n} \rceil$, ve kterém délka úseček narůstá.[3] (MKS 17–2–5)

[1] Množina bodů je v *obecné poloze*, pokud žádné tři z nich neleží na přímce.
[2] *Tah* je posloupnost na sebe navazujících hran, které se neopakují.
[3] Symbol $\lceil x \rceil$ označuje *horní celou část* čísla x, tedy nejbližší celé číslo y, takové že $x \leq y$.

Literatura a zdroje

[1] Knihovna PraSátka, *http://mks.mff.cuni.cz/library/*
[2] Archiv PraSátka, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/*
[3] Internetové fórum Mathlinks, *http://www.mathlinks.ro*
[4] Server Cut The Knot *http://www.cut-the-knot.org/*

Při psaní příspěvku jsem hojně využíval příspěvek Petra πtra Korcsoka *O hranici neporiadku*, za což mu tímto chci poděkovat.

Bertrandův postulát

Anh Dung „Tonda“ Le

Abstrakt. Příspěvek nastiňuje elementární důkaz Bertrandova postulátu. Tento důkaz podal Paul Erdős v roce 1932. V olympiádní matematice se Bertrandův postulát používá spíše málo, ale může se vám hodit.

Úmluva. Všechny proměnné v dalším textu jsou z oboru celých čísel, nebude-li řečeno jinak.

Tvrzení. (Bertrandův postulát) *Pro každé přirozené $n > 1$ existuje prvočíslo p takové, že $n < p < 2n$.*

Uveďme si prostředky, které budeme při důkazu používat.

Definice. Dolní celou částí reálného čísla x nazveme největší celé číslo n, pro nějž platí $n \leq x$. Značíme ho $\lfloor x \rfloor$.

Tvrzení. *Pro každé x reálné platí $2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor \leq 2\lfloor x \rfloor + 1$.*

Tvrzení. *Nechť n je přirozené číslo a p prvočíslo. Potom největší exponent s takový, že $p^s \mid n!$, je roven $s = \sum\limits_{j \geq 1} \left\lfloor \frac{n!}{p^j} \right\rfloor$.*

Definice. Funkci, která přirozenému číslu přiřadí součin $1 \cdot 2 \cdots n$, nazveme *faktoriál*. Značíme $n!$. Kombinačním číslem $\binom{n}{k}$ budeme rozumět podíl $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tvrzení. *Nechť n je přirozené číslo, p prvočíslo a s je největší exponent takový, že $p^s \mid \binom{2n}{n}$. Potom:*

(i) *$p^s \leq 2n$.*
(ii) *Pokud $\sqrt{2n} < p$, potom $s \leq 1$.*
(iii) *Pokud $2n/3 < p \leq n$, pak $s = 0$.*

Tvrzení. *Mějme přirozené $n \geq 2$. Potom součin prvočísel menších nebo rovných n je menší než 4^n, tedy*

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prvočíslo}}} p < 4^n.$$

Úmluva. Nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b budeme značit $[a, b]$.

Příklad 1. Dokažte, že $n!$ není druhou mocninou přirozeného čísla pro $n > 1$.

Příklad 2. Dokažte, že každé přirozené číslo se dá napsat jako součet navzájem různých prvočísel nebo 1.

Příklad 3. Nechť P_n značí n-té prvočíslo. Předpokládejme, že pro n platí

$$P_n \leq P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} - 1.$$

Dokažte, že

$$P_{n+1} \leq P_1 + P_2 + \cdots + P_n + 1.$$

(Japonsko)

Příklad 4. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která se počet kladných dělitelů čísla $[1, 2, \ldots, n]$ rovná 2^k pro nějaké přirozené k. (Estonsko TST 2004)

Příklad 5. Která přirozená n jsou dělitelná všemi prvočísly menšími nebo rovnými $\sqrt{n}$?

Příklad 6. Nalezněte všechny dvojice a, b přirozených čísel takové, že číslo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a+b}$$

je rovněž přirozené. (MKS 30–2–7)

Příklad 7. Mějme přirozené číslo n. Najděte nejmenší číslo k takové, že

$$1^2, 2^2, \ldots, n^2$$

jsou navzájem nekongruentní modulo k. (AMM 1985)

Literatura a zdroje

Celý tento text je převzat ze staršího příspěvku *Bertrandův postulát* Jiřího „Dina“ Kouly, proto děkuji autorovi. Úlohy můžete nalézt na *http://www.mathlinks.ro*.

Funkcionální rovnice na celých číslech

Vít „Vejtek“ Musil

Funkcionální rovnice na celých číslech (či na podmnožinách) lze řešit standardními metodami funkcionálních rovnic, jako je substituce, úvahy o vlastnostech funkcí (prostota, nabývání hodnot, monotonie), symetrické výrazy, soustavy rovnic atd. Většina úloh však těží z konkrétních vlastností celých či přirozených čísel. Jmenujme některé: obě tyto množiny jsou diskrétní a spočetné, jsou oaritmetizované, lze hovořit o dělitelnosti. Množina přirozených čísel je navíc dobře uspořádaná (každá podmnožina má nejmenší prvek) a platí pro ni princip matematické indukce. Odtud se odvíjejí i metody řešení. Jmenujme opět některé z nich.

- *Konstruktivní přístup.* Některé rovnice vybízejí k postupnému konstruování funkce, často za pomoci indukce. K tomu většinou stačí dát do souvislosti hodnotu $f(n)$ s hodnotou $f(n+1)$ a znát chování na začátku (nebo si jej zvolit). Konstruují se i nejrůznější bijekce, například pro rovnice typu $f\bigl(f(n)\bigr) = g(n)$.
- *Indukce.* Rovnice Cauchyova typu a stanovené hypotézy dokazujeme indukcí. Na celých číslech musíme provádět indukci dvakrát, tj. na obě strany.
- *Extremální princip.* Využíváme dobrého uspořádání přirozených čísel, kdy z množiny čísel majících jistou vlastnost zvolíme nejmenší. Toho se často využívá v důkazech sporem, někdy se tento princip zove nekonečný sestup.
- *Báze dvojková i jiné.* Náš desítkový pohled na věc umí značně zkreslovat.
- *Kouknu a vidím.* Některé rovnice nám mohou připomenout známý algoritmus, řešení je pak nasnadě.
- *Pevné body.* Vyplatí se je hledat.
- *Nerovnosti.* Speciálně se hodí vědět, kdy nastává rovnost.
- *Nezapomenout na zkoušku!*

Domluvíme se, že symbol $\mathbb{N}$ označuje množinu všech kladných celých čísel, $\mathbb{N}_0$ je značkou pro nezáporná celá čísla.

Příklad 1. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{N}$

$$f\bigl(m + f(n)\bigr) = n + f(m).$$

Příklad 2. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{N}$

$$f\bigl(f(m) + f(n)\bigr) = n + m.$$

Příklad 3. Buď k sudé přirozené číslo. Najděte počet všech funkcí $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ splňujících pro každé $n \in \mathbb{N}_0$

$$f\bigl(f(n)\bigr) = n + k.$$

(variace na IMO 1987)

Příklad 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$f\bigl(m + f(n)\bigr) = f\bigl(f(m)\bigr) + f(n).$$

(IMO 1996)

Příklad 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$f\Bigl(f\bigl(f(n)\bigr)\Bigr) + f\bigl(f(n)\bigr) + f(n) = 3n.$$

Příklad 6. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, pro které platí $f(0) = 0$ a

$$f(2n+1) = f(2n) + 1 = f(n) + 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n) + 2.$$

Příklad 8. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f(1) = 1$, $f(2n) < 6f(n)$ a

$$3f(n)f(2n+1) = f(2n)\bigl(3f(n) + 1\bigr)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 9. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{N}$

(i) $f(n,n) = n$,
(ii) $f(m,n) = f(n,m)$,
(iii) $\frac{f(m,m+n)}{f(m,n)} = \frac{m+n}{n}$.

Příklad 10. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pro které platí $f(1) \neq 0$ a

$$f^2(1) + f^2(2) + \cdots + f^2(n) = f(n)f(n+1)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 11. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{Z}$

$$6f(n+3) - 3f(n+2) - 2f(n+1) - f(n) = 0.$$

Příklad 12. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$2n + 2001 \leq f\bigl(f(n)\bigr) + f(n) \leq 2n + 2002.$$

(BMO 2002)

Příklad 13. Buď $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkce splňující $f(n+1) > f\bigl(f(n)\bigr)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že f je identita na $\mathbb{N}$. (IMO 1977)

Literatura

[1] T. Andreescu, I. Boreico, *Functional Equations*, electronic edition, 2007.

Cyklické soustavy rovnic

VÍT „VEJTEK“ MUSIL

ABSTRAKT. Příspěvek se věnuje vybraným partiím ze soustav nelineárních rovnic – cyklickým soustavám a metodám jejich řešení. Součástí příspěvku je sada cvičení s návody.

Běžné středoškolské postupy při řešení soustav často selhávají pro soustavy rovnic nelineárních. Přesto existuje několik metod, které fungují na celou řadu cyklických soustav. Připomeňme si, že soustavu rovnic v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazveme *cyklickou*, pokud při tzv. cyklické záměně $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, \ldots, x_n \to x_1$ dostaneme tutéž soustavu.

Pro cyklickou soustavu tedy triviálně platí, že pokud je $[t_1, \ldots, t_n]$ jejím řešením, pak každá cyklická záměna je rovněž řešením.

Začněme příkladem, na kterém si ukážeme hned několik metod.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x = \frac{4y^2}{1+4y^2}.$$

Poznámka. Pro úsporu většinou nebudeme psát všechny rovnice, stačí nám znát první a počet proměnných. Všechny ostatní získáme cyklickou záměnou proměnných, které doplňujeme buď podle abecedy nebo s rostoucími indexy.

Řešení. (Sečti a učtvercuj) Všimněme si, že zlomky na pravé straně nabývají pouze hodnot z intervalu $\langle 0, 1)$, řešení tedy hledáme právě v tomto oboru. Sečtením všech tří rovnic dostáváme

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} + \frac{4y^2}{1+4y^2} + \frac{4z^2}{1+4z^2} = x + y + z.$$

Převedením na jednu stranu a úpravou dostáváme

$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2} + \frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2} + \frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2} = 0.$$

Na levé straně máme součet tří nezáporných čísel a vpravo nulu. Rovnost nastává tehdy a jen tehdy, jsou-li všechny sčítance nulové. Pro x máme dvě možnosti, buď

$x = 0$, nebo $x = 1/2$. Dosazením do třetí rovnice spočítáme hodnotu y a následně z druhé dostaneme z. Celkem máme právě dvě řešení $[x, y, z] = [0, 0, 0]$ a $[x, y, z] = [1/2, 1/2, 1/2]$.

Řešení. (Uspořádej – poprvé) Označme si $f(x) = 4x^2/(1 + 4x^2)$. Pak f lze upravit do tvaru

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4x^2}},$$

odkud je snadno vidět, že f je na intervalu $\langle 0, 1)$ rostoucí. Máme dvě možnosti:

(1) $x \geq y$. Potom $f(x) \geq f(y)$, což je totéž jako $z \geq x$. Opět aplikujeme f a máme $f(z) \geq f(x)$, neboli $y \geq z$. Celkem $x \geq y \geq z \geq x$.
(2) $x \leq y$. Postupujeme stejně a dokážeme $x \leq y \leq z \leq x$.

Musí tedy platit $x = y = z$, což redukuje soustavu na jednu kvadratickou rovnici, kterou snadno vyřešíme.

Řešení. (Uspořádej – podruhé) Buď f jako výše. Snadno se ukáže, že $f(x) \leq x$. Potom aplikací této nerovnosti na všechny neznámé obdržíme

$$x \geq f(x) = z \geq f(z) = y \geq f(y) = x$$

a nutně $x = y = z$. Dopočet je nasnadě.

Řešení. (Substituce) Nahraďme $x = \tan(\alpha)/2$, $y = \tan(\beta)/2$ a $y = \tan(\gamma)/2$ pro $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi/2)$. Dosadíme do zadaných rovnic a všechny vynásobíme. Pomocí goniometrických vzorců upravíme do tvaru

$$\tan\alpha \tan\beta \tan\gamma \big(1 - \sin(2\alpha)\sin(2\beta)\sin(2\gamma)\big) = 0,$$

odkud buď některé z čísel α, β nebo γ je rovno nule (tomu odpovídá řešení $x = y = z = 0$), nebo jsou všechna rovna $\pi/4$ (čemuž odpovídá řešení $x = y = z = 1/2$).

Vyřešme si ještě další příklad, kde místo součtů budeme sledovat rozdíl.

Příklad. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y^2 &= y^3, \\ y + x^2 &= x^3. \end{aligned}$$

(MO 57–A–III–1)

Řešení. (Odečti a rozlož) Odečtěme od sebe obě rovnice

$$\begin{aligned} (x^3 - y^3) - (x^2 - y^2) + (x - y) &= 0, \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Druhou závorku můžeme dále upravit

$$x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2.$$

Všechny čtverce nemohou být současně nulové, a proto je druhá závorka kladná. Musí tedy být $x = y$ a soustava degeneruje na jednu rovnici, kterou snadno vyřešíme.

Řešení. (Vyjádři a umlať) Z druhé rovnice vyjádříme $y = x^3 - x^2$ a dosadíme do první. Dostaneme rovnici devátého stupně

$$x^9 - 3x^8 + 3x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - x = 0.$$

Položíme-li $x = y$, přejde původní soustava v jedinou rovnici $x^3 - x^3 - x = 0$, a proto polynom na levé straně musí být dělitelný polynomem $x^3 - x^2 - x$. Vydělením přejdeme k rovnici

$$\left(x^3 - x^2 - x\right)\left(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1\right) = 0,$$

jejíž druhá závorka je vždy kladná, neboť ji lze napsat ve tvaru

$$\left(x^3 - x^2\right)^2 + \left(x^2 - x\right)^2 + \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}.$$

K dokončení tedy stačí dopočíst příslušné kořeny rovnice $x^3 - x^2 - x = 0$.

Řešení. (Uspořádej) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x > y$. Definujme $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Pak f lze psát jako $f(x) = x(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1 je záporný kořen a x_2 kladný (kreslete si). Máme

$$x > y = x^3 - x^2, \quad \text{tj.} \quad 0 > f(x)$$

a stejně

$$y < x = y^3 - y^2, \quad \text{tj.} \quad 0 < f(y).$$

Musí tedy být $x \in (-\infty, x_1) \cup (0, x_2)$ a $y \in (x_1, 0) \cup (x_2, \infty)$, což se vzhledem k předpokladu $x > y$ redukuje na

$$x \in (0, x_2), \quad y \in (x_1, 0).$$

To však není možné, neboť pro toto záporné y je i $x = y^3 - y^2$ záporné.

Pozastavme se nyní u jednotlivých metod trochu podrobněji.

„Sečti a učtvercuj“

Nadpis jasně říká, co chceme s úlohou dělat. Základem je naučit se vidět, ze kterých členů půjdou vyrobit čtverce. Znát vzorečky pro druhou mocninu dvojčlenu a trojčlenu je nutností. Ne vždy máme hned po sečtení ve hře všechny potřebné členy, občas je potřeba si chytře nějaké přidat.

Tato metoda se hodí většinou na rovnice, ve kterých se vyskytují sudé mocniny a „sudé“ součiny (např. Nxy).

Příklad. Řešte cyklickou soustavu ve třech reálných proměnných

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz.$$

Návod. Než budeme sčítat, upravme rovnice do tvaru

$$(x^4 - 4x^2 + 4) + 4x^2 + y^2 = 5yz.$$

Po sečtení všech rovnic dostáváme

$$\sum_{\text{cycl.}} (x^2 - 2)^2 + \frac{5}{2} \sum_{\text{cycl.}} (x - y)^2 = 0.$$

Druhá suma čtverců říká, že $x = y = z$, první pak, že jejich hodnota je $\pm\sqrt{2}$.

„Odečti a rozlož"

Odečítat budeme dvojice rovnic tak, abychom se některých proměnných zbavili. Typicky odečítáme rovnici od jí následující a dostáváme rovnici pro pouze dvě neznámé. Vše převedeme na jednu stranu a hledáme výhodný rozklad na součin. Převážně vytýkáme rozdíly $x - y$ apod. Následně diskutujeme několik možností.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu ve třech reálných proměnných

$$x^2 + 2yz = x.$$

Návod. Sečtením všech rovnic dostáváme

$$(x + y + z)^2 = x + y + z,$$

odkud součet $x + y + z$ je roven nule nebo jedné. Odečtením druhé rovnice od první získáme

$$(x - y)(x + y - 2z - 1) = 0.$$

Nyní již stačí probrat několik možností.

„Uspořádej“

Uspořádání proměnných jde použít pro soustavy rovnic o dvou proměnných nebo soustavy nejvýše tří rovnic pro tři neznámé. Na větší soustavy obecně použít nejde, neboť pro větší množství proměnných existuje velmi mnoho možných uspořádání.

Tento princip se hodí převážně pro soustavy, pro jejichž řešení platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Že každá cyklická soustava takové řešení mít nemusí, je vidět z příkladu 26 ve cvičení.

Většinu „uspořádatelných“ soustav porazíme pomocí jednoho z následujících dvou lemmat.

Lemma 1. *Buďte $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funkce rostoucí na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Potom pro řešení soustavy*

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \qquad\vdots \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Lemma 2. *Buďte $I \subseteq \mathbb{R}$ interval a h funkce neklesající na intervalu I. Nechť funkce $F\colon I \times I \to \mathbb{R}$ splňuje pro každé $z \in I$*

$$x \le y \to F(x, z) \le F(y, z),$$
$$x \le y \to F(z, x) \le F(z, y).$$

Potom pro řešení soustavy

$$\begin{cases} F(x, y) = h(z) \\ F(y, z) = h(x) \\ F(z, x) = h(y) \end{cases}$$

platí $h(x) = h(y) = h(z)$. Je-li navíc h rostoucí, je $x = y = z$.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu v reálných proměnných a až z

$$a^5 = b + b^5.$$

Návod. Položme $f(a) = a^5$ a $g(b) = b + b^5$ a použijeme Lemma 1.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu ve třech reálných proměnných

$$(x + y)^3 = z.$$

Návod. Položme $F(x, y) = (x+y)^3$ a $h(z) = z$. Aplikací Lemmatu 2 dostáváme, že $x = y = z$, a zbytek dopočítáme snadno.

Další tipy

- Mezi další metody patří v úvodu naznačená substituce. Nahrazujeme proměnné či výrazy takovými funkcemi, pro které se situace výrazně zjednoduší. Pro goniometrické funkce platí mnoho identit, které lze s výhodou používat a někdy mohou být dobrým vodítkem pro volbu substituce.
- Kromě sčítání a odečítání rovnic může být účelné i jejich znásobení. Předtím je však dobré si rozmyslet, který člen dát na kterou stranu rovnice.
- Dalším trikem je použití nerovností. Může se nám podařit ukázat, že rovnice platí, právě když nastává rovnost v nerovnosti.
- Při počítání se snažíme zachytit okamžik, kdy již lze všechno vypočítat, tj. vyjádřit a dosadit.
- Uhodnout řešení. Podle řešení jde často poznat metoda řešení.
- Nikdy nezapomínejme na zkoušku.

Cvičení

Nebude-li řečeno jinak, řešíme cyklickou soustavu ve třech reálných proměnných.

Příklad 1. $x^2 = xy$.

Příklad 2. $x + 6 = y^3$.

Příklad 3. $x^2 + 1 = 2y$.

Příklad 4. $x = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Příklad 5. $x^3 + 1 = 2y$.

Příklad 6. $x + 2y = \sqrt{6z - 1}$.

Příklad 7. $x(x + 1) = y(z + 1)$.

Příklad 8. $(x + y)^4 = z$.

Příklad 9. $x^2 - 3y + 4 = z$.

Příklad 10. $x^2 - 1 = y + z$.

Příklad 11. $x^3 = 2y^3 + y - 2$.

Příklad 12. $x\sqrt{y} - z = x$.

Příklad 13. $x^4 + 1 = 2yz$.

Příklad 14. $x^3 = y - x + 8$.

Příklad 15. $\sqrt{x^2 - y} = z - 1$.

Příklad 16. $x^5 = 5y^3 - 4z$.

Příklad 17. $x^2 + y + z = 2$.

Příklad 18. $e^x - e^{x-y} = z$, (x, y, z nezáporná).

Příklad 19. Řešte cyklickou soustavu v nezáporných reálných proměnných x_1 až x_{2013}

$$x_1 + \sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[4]{x_1} + \cdots + \sqrt[2013]{x_1} = x_2.$$

Příklad 20. $x^2 + y^2 + z = 2$.

Příklad 21. $z + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = y$.

Příklad 22. $2x^2 + 2xy + 1 = 4z$.

Příklad 23. $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2}$.

Příklad 24. $x + \arctan(x + 2y) = z - \frac{\pi}{3}$.

Příklad 25. $x^2 + x - 1 = y$.

Příklad 26. Ověřte, že cyklická soustava ve třech proměnných

$$\tfrac{1}{1-x} = y$$

má řešení $[x, y, z] = [2, -1, \frac{1}{2}]$. Ukažte dále, že tato soustava nemá řešení, pro které by platilo $x = y = z$.

Příklad 27. Řešte cyklickou soustavu v pěti reálných proměnných $x_1^2 = x_2 + x_3$.

Příklad 28. Dokažte první lemma.

Příklad 29. Dokažte druhé lemma.

Návody

1. Sečtěte, upravte na $\sum(x-y)^2 = 0$, řešení $[t, t, t]$, $t \in \mathbb{R}$. **2.** Lemma 1, řešení $x = y = z = 2$. **3.** Sečtěte, upravte na $\sum(x-1)^2 = 0$, řešení $x = y = z = 1$. **4.** Odečtěte a rozložte na $(x-y)(1-\frac{1}{xy}) = 0$, diskutujte možnosti. Řešení $x = y = z = \pm\sqrt{2}$. **5.** Lemma 1, tři řešení. **6.** Lemma 2, řešení $x = y = z = \frac{1}{3}$. **7.** Sečtěte, upravte na $\sum(x-y)^2 = 0$, řešení $[t, t, t]$, $t \in \mathbb{R}$. **8.** $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$, Lemma 2 na $F(x,y) = (x+y)^4$, řešení $x = y = z = 0$ nebo $16^{-1/3}$. **9.** Sečtěte, upravte na $\sum(x-2)^2 = 0$, řešení $x = y = z = 2$. **10.** Odečtěte a rozložte na $(x-y)(x+y+1) = 0$, diskutujte možnosti. Řešení $x = y = z = 1 \pm 2$, nebo $[0, 0, -1]$ a cykl. záměny. **11.** Lemma 1, řešení $x = y = z = 1$. **12.** Lemma 2 pro $F(x,y) = x(\sqrt{y}-1)$, řešení $x = y = z = 0$ nebo 4. **13.** Sečtěte a upravte na $\sum(x^2-1)^2 + \sum(x-y)^2 = 0$, řešení $x = y = z = \pm 1$. **14.** Lemma 1 pro $f(x) = x^3 + x$, řešení $x = y = z = 2$. **15.** $x, y, z \in \langle 1, \infty)$, Lemma

2 pro $F(x, y) = x + (y-1)^2$, $h(z) = z^2$. Řešení $x = y = z = 1$. **16.** Lemma 2, řešení $[t, t, t]$ pro $t \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. **17.** Odečtěte a rozložte na $(x-y)(x+y-1) = 0$, diskutujte možnosti. Řešení $x = y = z = -1 \pm \sqrt{3}$, nebo $[1, 1, 0]$, $[-1, -1, 2]$ a cykl. záměny. **18.** Lemma 2 pro $F(x, y) = e^x(1 - e^{-y})$, řešení $x = y = z = 0$. **19.** Lemma 1, řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2013} = 0$. **20.** Odečtěte a rozložte na $(x-z)(x+z-1) = 0$, diskutujte možnosti. Řešení $x = y = z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$, nebo $[1, 1, 0]$, $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ a cykl. záměny. **21.** Lemma 2, řešení $x = y = z = 0$. **22.** Sečtěte a upravte na $\sum(x+y-1)^2 = 0$, řešení $x = y = z = \frac{1}{2}$. **23.** $2 \leq z + \frac{1}{z} = \frac{2}{x^2}$, a proto $x, y, z \in (0, 1\rangle$. Použijte Lemma 1 na tomto intervalu, řešení $x = y = z = 1$. **24.** Lemma 2 pro $F(x, y) = x + \arctan(x + 2y) - \frac{\pi}{3}$. Řešení $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **25.** Sečtení dává $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, znásobení ve tvaru $x(x+1) = y+1$ dává $(xyz-1)(x+1)(y+1)(z+1) = 0$. Diskutujte možnosti a využijte AG nerovnost. Řešení $x = y = z = \pm 1$. **27.** Ukažte, že $x_1 = x_2 = \cdots = x_5$. Pro spor BÚNO předpokládejte, že x_1^2 je maximální z levých stran, odtud ukažte, že x_1 musí být záporné a $x_5^2 < 0$. Řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_5 = 0$ nebo 2. **28.** Předpokládejte, že $x_1 \geq x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$, což jest $g(x_2) \geq g(x_3)$ a $x_2 \geq x_3$. Po n krocích máme $x_n \geq x_1$. Stejně pro $x_1 \leq x_2$. **29.** BÚNO x je maximální. Probereme dvě možná uspořádání. Buďte $x \geq y \geq z$. Máme $F(x, y) = h(z) \leq h(x) = F(y, z) \leq F(x, z) \leq F(x, y)$ a $h(x) = h(y) = h(z)$. V případě $x \geq z \geq y$ postupujeme obdobně a zbytek snadno.

Literatura a zdroje

[1] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh I*, MU, Brno, 2001.

[2] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Seminář *Umění vidět v matematice.*

[3] Vít Musil, Soustavy rovnic, Sborník Blansko–Obůrka, jaro 2011.

Komplexní čísla geometricky

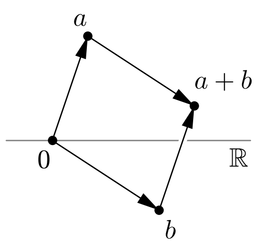
Mirek Olšák

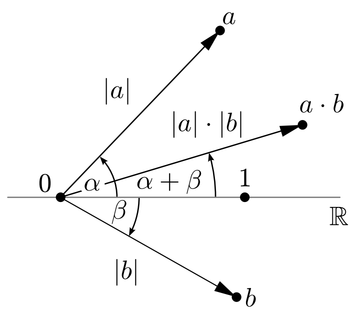
Abstrakt. Příspěvek zavádí komplexní čísla jakožto vektory v rovině a na základě této definice objevuje jejich vlastnosti. Dále ukazuje souvislosti se spirální podobností.

Zavedení komplexních čísel

Definice. Mějme rovinu a v ní danou osu reálných čísel. Této rovině budeme říkat *komplexní rovina*, její body budeme nazývat *komplexní čísla*. Bodu 0 na reálné ose říkáme *počátek* a komplexní čísla ztotožňujeme s vektory spojujícími počátek a příslušné komplexní číslo jakožto bod v rovině.

Definice. Součet komplexních čísel definujeme jako součet příslušných vektorů. Dále definujeme součin komplexních čísel jako takový vektor, který má délku rovnu součinu délek jednotlivých činitelů a svírá s kladnou reálnou polopřímkou úhel rovný součtu orientovaných úhlů jednotlivých činitelů.





Pozorování. *Operace na komplexních číslech splňují očekávané vlastnosti.*

(i) *Na reálné ose fungují jako běžné sčítání a násobení.*
(ii) *Při sčítání nezáleží na pořadí sčítanců.*
(iii) *Při násobení nezáleží na pořadí činitelů.*
(iv) *Funguje roznásobování, tedy $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*

Jak to je s imaginární jednotkou?

Pozorování. *Existují právě 2 komplexní čísla, jejichž druhá mocnina je rovna* -1.

Definice. Tomu číslu z předchozího pozorování, které leží nad reálnou osou[1], budeme říkat *imaginární jednotka*. Značíme ji i.

Pozorování. *Každé komplexní číslo se dá jednoznačně napsat ve tvaru* $x+iy$, *kde* $x, y \in \mathbb{R}$.

Důsledek. (Pythagorova věta) *Pro pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek* a, b *a přeponou délky* c *platí* $a^2 + b^2 = c^2$.

Návod. Spočtěte dvěma způsoby $(a + ib)(a - ib)$.

Důsledek. (součtové vzorce) *Pro úhly* α, β *platí vztahy mezi goniometrickými funkcemi*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).$$

Návod. Spočtěte dvěma způsoby $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Průměrování

Pozorování. *Vážený aritmetický průměr lineárních funkcí je lineární funkce.*

Toto pozorování můžeme geometricky přeformulovat.

Důsledek. *Máme-li v rovině přímo podobné objekty, pak jejich aritmetickým průměrem bude opět objekt podobný původním.*

Jako konkrétní příklad uvedeme:

Příklad. V rovině jsou čtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$, oba značené po směru hodinových ručiček. Pak středy úseček AA', BB', CC', DD' tvoří čtverec.

V úlohách ovšem může být toto pozorování poněkud schované. :-)

Úloha. (van Aubelova věta) Stranám AB, BC, CD, DA čtyřúhelníka $ABCD$ z vnějšku připíšeme čtverce a jejich středy označíme postupně U, V, X, Y. Ukažte, že úsečky UX a VY jsou na sebe kolmé a jsou stejně dlouhé.

Úloha. (Napoleonova věta) Stranám AB, BC, CA z vnějšku připíšeme rovnostranné trojúhelníky. Ukažte, že 3 těžiště těchto trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.

---

[1] Ono je popravdě jedno, které i-čko bereme, ale to nad osou je standardní.

Úloha. Mějme v rovině body A a B a uvažme jednu ze dvou polorovin s hraniční přímkou AB. Pro každý bod C ze zvolené poloroviny sestrojme vně trojúhelníku ABC čtverce ACD_CE_C a CBF_CG_C. Dokažte, že se všechny přímky E_CF_C (hýbeme-li s bodem C) protínají v jednom bodě. (MKS 29–4–5)

Úloha. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protnou v P. Dále označme Q, R kolmé projekce bodu P postupně na strany AB, CD a ještě K, L postupně středy úseček BC, DA. Dokažte, že čtyřúhelník $QKRL$ je drak (tedy $|KQ| = |KR|$ a $|LQ| = |LR|$).

Úloha. Je dán konvexní čtyřúhelník $PIVO$. Osy stran PI a VO se protínají v bodě Y. Pro bod X uvnitř $PIVO$ platí $|\sphericalangle XVI| = |\sphericalangle XOP| < 90°$ a $|\sphericalangle XIV| = |\sphericalangle XPO| < 90°$. Ukažte, že $|\sphericalangle VYO| = 2\,|\sphericalangle XIV|$. (MKS 26–6–8, IMO Shortlist 2000)

TeMno-Hrátky

Mirek Olšák

Abstrakt. Teorie množin (slangově označovaná zkratkou TeMno) zkoumá, co vše je možné logicky odvodit, pokud připustíme existenci nekonečných matematických objektů. Nabízí témata, která nevyžadují takřka žádné znalostní zázemí, přesto nad nimi zůstává rozum stát. Ptejte se, nač je libo.

Nekonečná Ramseyovka

Neexistuje nekonečně velký chaos. Přesněji řečeno, v každém nekonečně velkém chaosu je nekonečně velký pořádek. Snadno aplikovatelné na nejtěžší úlohu předloňského myšmaše či na problém, jak z nekonečné posloupnosti vybrat monotónní podposloupnost.

Problém prasátek a klobouků

Skoro všechna prasátka (až na konečně mnoho) v nekonečné řadě si tipnou správný klobouk, ačkoli nemají jiné informace než barvy klobouků před sebou. Jak to provedli? A jak to, že větší množství barev není překážkou?

Spočetno a nespočetno

Jak se dají porovnávat nekonečné množiny? Proč je racionálních čísel (zlomků) stejně jako přirozených, ale méně než reálných?

Russelův paradox a jak jej obejít

Pokud by existovala množina všech množin, máme v matematice spor. Jaký? A jak jsou postavené základy, aby tento problém nenastal?

Hyperčísla

Nekonečně velké přirozené číslo není zas takový nesmysl. Ale co to tedy vlastně je?

Neúplnost

Kdyby se vám náhodou povedlo dokázat, že logickými matematickými úvahami se nedá dostat do sporu, tak máte to štěstí jen díky tomu, že tam ten spor ve skutečnosti je.

Banach-Tarského paradox

Jak rozdělit jednu kouli na konečně částí a přeskládat ji na dvě stejně velké jako ta původní? Ano, objem se opravdu kouzelně zdvojnásobí.

Ordinály

Jak napočítat do nekonečna? A k tomu třeba třikrát? Jak může želva dohonit nekonečně-krát rychlejšího zajíce? Aneb, nakolik šíleně mohou vypadat množiny, na kterých ještě funguje matematická indukce?

Omega 1

Mix předchozích dvou témat. Jak sestrojit množinu, která má následující vlastnosti?

(i) Je nespočetná, a to nejmenší nespočetná.
(ii) Každý její prvek ji rozdělí na spočetně menších prvků a nespočetně větších.
(iii) Neexistuje v ní nekonečná klesající posloupnost.
(iv) Seberychleji rostoucí posloupnost v ní je možné shora omezit.

Úloha. (Pressing Down Lemma) Kdykoli vhodí gambler minci do hracího automatu, automat mu vrátí nekonečně mincí. Dokažte, že automat gamblera nakonec obere o všechny mince, ať hraje gambler jakkoli.

Princip dobrého uspořádání

Tohle již není legrácka. Je to silný nástroj založený na některých předchozích myšlenkách. Umožňuje dokázat například:

(i) Je možné rozdělit prostor na přímky tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné.
(ii) Existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která pro libovolná dvě reálná čísla x, y splňuje $f(x) + f(y) = f(x + y)$, ale přesto není lineární.
(iii) Existuje nekonečná hra, kde oba hráči mají úplnou informaci, leč ani jeden nemá neprohrávající strategii.
(iv) Existuje rozdělení množin na dobré a špatné, potřebné pro sestrojení hyperčísel.

Levely a Menelaova věta

Tomáš Pavlík

Metoda řešení

Nejdříve si určíme vhodnou přímku, tu si nakreslíme vodorovně. *Level* bodu vůči této přímce definujeme jako vzdálenost od přímky a budeme ho značit malým písmenem. K řešení většiny úloh nám bude stačit toto jednoduché lemma.

Lemma. *Nechť p je přímka vodorovně a jsou dány body A, B, C a D tak, že A a C leží na přímce p a zároveň AB a CD svírají s p stejný úhel. Pak platí $b : d = |AB| : |CD|$.*

Důkaz plyne hned z podobnosti trojúhelníků. Vyzkoušejme si toto lemma na následujících příkladech.

Příklad 1. Je dán trojúhelník ABC. Označme A' obraz bodu A podle strany BC a M střed strany AB. Buď P průsečík MA' a BC. Určete $|PA'|$, pokud $|MP| = 3$.

Příklad 2. Úsečku AB, která se dotýká kružnice k v bodě A, otočíme podle středu kružnice k na úsečku $A'B'$. Ukažte, že přímka AA' prochází středem úsečky BB' . (Turnaj měst 2007)

Příklad 3. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník s $|AB| = |AC|$. Zvolme body K a L postupně na stranách AB a AC tak, že $|KL| = |BK| + |CL|$. Přímka rovnoběžná s AC vedená středem úsečky KL protne BC v N. Určete velikost úhlu KNL. (Turnaj měst 2003)

Příklad 4. Je dán trojúhelník ABC. Na stranách AB a AC postupně zvolme body M a N tak, že $|BM| : |AB| = 2 \cdot |CN| : |AC|$. Kolmice na MN vedená bodem N protne BC v bodě P. Dokažte, že $|\sphericalangle MPN| = |\sphericalangle NPC|$. (Rumunsko 2006)

Příklad 5. Střed strany BC trojúhelníka ABC označme M. Na AM zvolme bod K tak, že $|CK| = |AB|$. Označme L průsečík přímek CK a AB. Dokažte, že trojúhelník AKL je rovnoramenný.

Příklad 6. Je dán trojúhelník ABC. Na stranách AB a AC najdeme postupně body K a L tak, že $|AK| : |AB| = 1 : 3$ a $|AL| : |AC| = 1 : 4$. Buď M střed úsečky KL. Dále AM protne BC v bodě N. Určete poměr $|AM| : |AN|$.

Příklad 7. Nechť ABC je trojúhelník. Dokažte, že přímka rovnoběžná s osou úhlu u vrcholu A vedená středem strany BC rozdělí obvod trojúhelníka na poloviny.

Věta 8. (Menelaova) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z leží po řadě na přímkách BC, AC a AB tak, že buď jeden z nich, nebo všechny tři leží vně $\triangle ABC$. Pak body X, Y a Z leží v přímce právě tehdy, když platí*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Dále následují příklady na procvičení Menelaovy věty. Pro lepší pochopení této věty můžete zkusit vyřešit předchozí příklady.

Příklad 9. Přímka procházející těžištěm trojúhelníka ABC protne strany AB a AC postupně v bodech M a N. Dokažte, že

$$\frac{|CN|}{|NA|} + \frac{|BM|}{|MA|} = 1.$$

Příklad 10. V trojúhelníku ABC zvolme body E a F tak, že $E \in AB$, $F \in AC$ a zároveň $|AE| = |AF|$. Dále bod M je střed strany BC a $EF \cap AM = Q$. Dokažte, že

$$\frac{|QE|}{|QF|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Příklad 11. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník s $|AC| = |BC|$. Kružnice vepsaná se dotýká stran AB a AC postupně v bodech D a E. Bodem B vedeme přímku různou od BE, která protne kružnici vepsanou v bodech F a G. Nechť AB protíná přímky EF a EG postupně v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$.

(MEMO 2008)

Kuželosečky

Alča Skálová

„Klasické“ definice

Elipsa je množina všech bodů v rovině, majících od dvou pevně daných různých bodů E, F (ohnisek) konstantní součet vzdáleností $2a$, kde $2a > |EF| = 2e$.

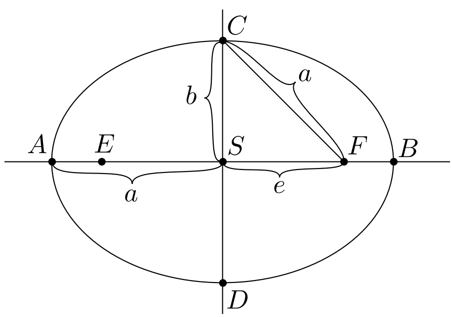
Parabola je množina všech bodů v rovině, majících od pevně dané řídicí přímky d a ohniska F ($F \notin d$) stejnou vzdálenost. Vzdálenost $p = |Fd|$ se nazývá *parametr*.

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, majících od dvou pevně daných různých bodů E, F (ohnisek) konstantní rozdíl vzdáleností $2a$, kde $2a > |EF| = 2e$.

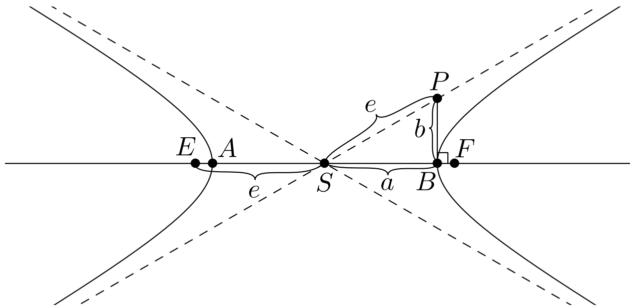
Kružnici lze považovat za speciální případ elipsy – pokud ohniska E, F splynou do jednoho bodu.

Základní vlastnosti

V případě elipsy nazýváme *délkou hlavní poloosy* vzdálenost $a = |AS|$, *délkou vedlejší poloosy* vzdálenost $b = |CS|$, *excentricitou* vzdálenost $e = |FS|$. Platí $a^2 = b^2 + e^2$.



V případě hyperboly nazýváme *délkou hlavní poloosy* vzdálenost $a = |BS|$, *excentricitou* vzdálenost $e = |ES|$. Kolmice z hlavního vrcholu B protne asymptotu v bodě P (viz obrázek). Označíme-li $b = |PB|$, platí jednak $e = |SP|$, jednak $e^2 = a^2 + b^2$.



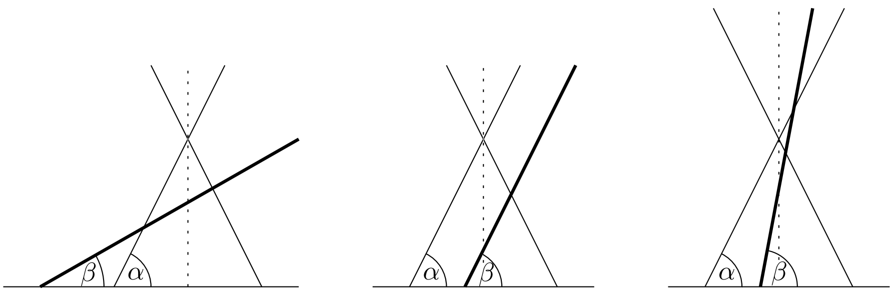
Osová afinita

Pravoúhlá osová afinita v rovině je zobrazení určené přímkou o (osou) a poměrem $k > 0$. Obrazem bodu $X \notin o$ je bod X' v polorovině oX, pro který je $|X'o| = k|Xo|$. Body osy o jsou samodružné.[1]

Obrazem kružnice v pravoúhlé osové afinitě je elipsa.

Kuželosečky jako řezy na kuželové ploše

Při řezu rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy, obdržíme vždy elipsu, parabolu nebo hyperbolu. Typ kuželosečky závisí na úhlu, pod kterým rovina kuželovou plochu protíná. Označme α úhel, který svírají površky (povrchové přímky) s rovinou kolmou na osu kuželové plochy, a β úhel řezné roviny a roviny kolmé na osu kuželové plochy (viz obrázek).



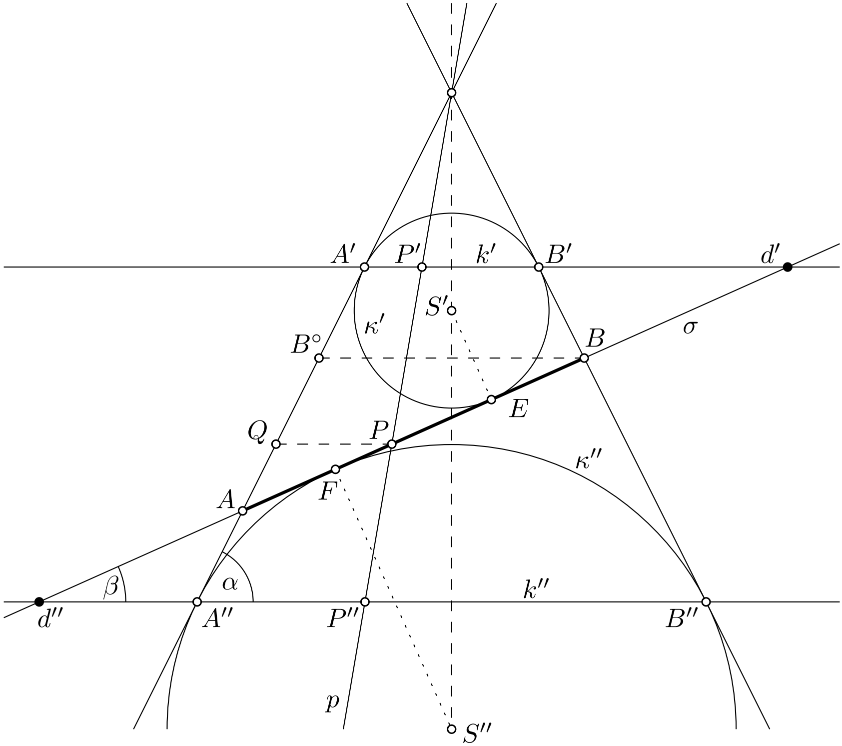
V případě

(i) $\alpha > \beta$ je řezem *elipsa*,
(ii) $\alpha = \beta$ je řezem *parabola*,
(iii) $\alpha < \beta$ je řezem *hyperbola*.

[1] Samodružný bod je takový, který se zobrazí sám na sebe.

Ohniska E a F, popřípadě ohnisko F paraboly, jsou body dotyku kulových ploch κ' a κ'' vepsaných kuželové ploše, které se zároveň dotýkají řezné roviny σ.

Předchozím tvrzením se souhrnně říká Quételetova-Dandelinova věta. Pro její důkaz (část o elipse) na přednášce nám bude nápomocen následující obrázek.



Řídicí přímka kuželosečky

V „klasické“ definici kuželoseček je určitá nejednotnost – v případě elipsy a hyperboly zkoumáme vzdálenost od dvou bodů, kdežto v případě paraboly nás zajímá vzdálenost od bodu a přímky. Pokusme se tuto nejednotnost odstranit a definovat všechny tři kuželosečky stejným způsobem, a to pomocí vzdálenosti od dané *řídicí přímky* d a *ohniska* F ($F \notin d$). Nutno podotknout, že kružnici tímto způsobem definovat nelze.

Množina všech bodů X v rovině, které mají stejný poměr vzdálenosti k ($k > 0$) od řídicí přímky d a od bodu F (tedy $k|Xd| = |XF|$), je

(i) elipsa, pro $k < 1$ (z řeckého *élleipsis* = vynechání, proto je také v lingvistice elipsou míněna výpustka),

(ii) parabola, pro $k = 1$ (přirovnání),
(iii) hyperbola, pro $k > 1$ (nadsázka).

Vlastnosti tečen a ohniskové vlastnosti

Průvodiče bodu M (což jsou spojnice M a ohnisek) elipsy/hyperboly dělí rovinu na dvě dvojice vrcholových úhlů. V případě elipsy nazýváme *vnějšími úhly průvodičů* dvojici úhlů **ne**obsahující její střed, zatímco v případě hyperboly naopak dvojici obsahující její střed.

V případě paraboly nazýváme průvodiči jejího bodu M dvojici přímek, z nichž jedna je spojnice M a ohniska F a druhá je kolmá na řídicí přímku d a prochází M. Vnějšími úhly průvodičů bodu M paraboly nazýváme ty dva vrcholové úhly, z nichž jeden obsahuje vrchol paraboly.

Věta 1. *Tečna elipsy/paraboly/hyperboly půlí vnější úhly průvodičů bodu dotyku.*

Věta 2. *Množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$.*

Věta 3. *Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice se středem ve středu elipsy o poloměru a.*

Věta 4. *Množina bodů souměrných s jedním ohniskem hyperboly podle všech tečen leží na kružnici se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$.*

Věta 5. *Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny leží na kružnici se středem ve středu hyperboly o poloměru a.*

Věta 6. *Úsek tečny omezený asymptotami hyperboly je půlen bodem dotyku.*

Věta 7. *Tečna hyperboly spolu s asymptotami určuje trojúhelník, který má konstantní obsah.*

Věta 8. *Množina bodů souměrných s ohniskem paraboly podle všech tečen je řídicí přímka d.*

Věta 9. *Množina pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny je vrcholová tečna v.*

Příklady

Je-li v příkladech dána elipsa, hyperbola či parabola bez bližšího upřesnění, myslí se tím, že známe její hlavní vrcholy a ohniska, resp. ohnisko a vrchol. Jedinou výjimkou je příklad 14, ve kterém je dána „pouze“ množina bodů z definice elipsy (tedy speciálně neznáme ani hlavní ani vedlejší vrcholy).

Příklad 1. Dokaž, že uvedené definice kuželoseček jsou vskutku ekvivalentní.

Příklad 2. Dokaž, že řezem rotační válcové plochy a roviny, která není rovnoběžná s osou oné válcové plochy, je elipsa.

Příklad 3. Je dána kružnice k a vně pevný bod M. Urči množinu středů všech kružnic, které se dotýkají k a procházejí M.

Příklad 4. Urči množinu bodů, které mají od přímky q a bodu M stálý součet vzdáleností.

Příklad 5. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k a l tak, že l je uvnitř k. Urči množinu středů všech kružnic, které mají vnitřní dotyk s k a vnější dotyk s l.

Příklad 6. Je dána kružnice k a přímka p, která ji neprotíná. Urči množinu středů všech kružnic, které se dotýkají k a p (přičemž s k mají vnější dotyk).

Elipsa

Příklad 7. Zkonstruuj tečny k elipse daným bodem.

Příklad 8. Sestroj elipsu, je-li dáno:

(i) hlavní vrchol A, vedlejší vrchol C, délka hlavní poloosy a,
(ii) hlavní vrcholy A a B, bod elipsy M,
(iii) hlavní vrcholy A, B a tečna t.

Příklad 9. Do trojúhelníku PQR vepiš elipsu tak, aby daný bod F byl jejím ohniskem.

Příklad 10. Jsou dány dvě elipsy sdílející ohnisko. Dokaž, že v takovém případě mají nejvýše dva společné body.

Příklad 11. Sestroj průsečíky přímky p a elipsy zadané hlavními vrcholy A, B a vedlejším vrcholem C.

Příklad 12. Zkonstruuj tečny k elipse daným směrem.

Příklad 13. Dokaž, že součin vzdáleností ohnisek elipsy od tečny je konstantní (pro každou tečnu).

Příklad 14. Zkonstruuj ohniska elipsy pomocí pravítka a kružítka.

Hyperbola

Příklad 15. Z daného bodu veď tečny k hyperbole.

Příklad 16. Sestroj hyperbolu, je-li dáno:

(i) ohnisko F, asymptota m, směr s druhé asymptoty,
(ii) ohniska E, F, tečna t,
(iii) ohnisko F, tečna t_1 s bodem dotyku T a další tečna t_2,
(iv) ohnisko F, asymptota m, délka hlavní poloosy a.

Příklad 17. Sestroj rovnoosou[2] hyperbolu, je-li dán střed S, tečna t, délka hlavní poloosy a.

Parabola

Příklad 18. Daným bodem veď tečny k parabole.

Příklad 19. Sestroj parabolu, je-li dáno:

(i) osa o, bod paraboly M a parametr p,
(ii) osa o, ohnisko F a tečna t,
(iii) ohnisko F, tečny t_1, t_2.

Příklad 20. Z bodu P na řídicí přímce d veď tečny k parabole. Dokaž, že tečny jsou vzájemně kolmé.

Literatura a zdroje

Čerpala jsem převážně ze skript Pavla Pecha *Kuželosečky*, ve kterých naleznete důkazy ke všem zmíněným větám a řešení některých cvičení. Skripta jsou dostupná na stránkách JČU: *https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Kuzelosecky.pdf*.

[2]Rovnoosá hyperbola je taková, pro kterou je délka hlavní poloosy rovna délce vedlejší poloosy.

Lineární algebra v kombinatorice

Alexander „Olin“ Slávik

Abstrakt. Lineární algebra je bezesporu jedním ze základních kamenů vysokoškolské matematiky. Velmi dobře ji však můžeme uplatnit i v některých elementárních kombinatorických úlohách. Příspěvek stručně seznamuje se základními lineárně-algebraickými fakty a ukazuje typické úlohy, u kterých je možné tato pozorování s výhodou aplikovat.

Stručný úvod do lineární algebry

Ze střední školy známe definici vektorů jakožto uspořádaných dvojic či trojic reálných čísel. Lineární algebra tento koncept zobecňuje dvěma směry: jednak jako vektory chápeme prvky libovolného *vektorového prostoru*, jednak může na místě reálných čísel vystupovat libovolné *těleso*. Obě tyto algebraické struktury jsou přirozenými zobecněními – požadavky na ně kladené jsou takové, aby se „chovaly“ podobně jako zmíněný středoškolský příklad. Pro úplnost uvedeme formální definice.

Definice. Množinu $\mathbb{F}$ spolu s binárními operacemi $+$ a $\cdot$ a „význačnými“ prvky 0 a 1 nazveme *(komutativním) tělesem*, pokud pro všechna $x, y, z \in \mathbb{F}$ platí následující vztahy:

(i) $x + y = y + x$,
(ii) $x + 0 = x$,
(iii) $x \cdot y = y \cdot x$,
(iv) $x \cdot 1 = x$,
(v) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
(vi) existuje prvek $-x \in \mathbb{F}$ takový, že $x + -x = 0$,
(vii) je-li $x \neq 0$, pak existuje prvek $x^{-1} \in \mathbb{F}$ takový, že $x \cdot x^{-1} = 1$.

Běžnými tělesy jsou například racionální, reálná či komplexní čísla (se standardními operacemi); jiným příkladem jsou tělesa $\mathbb{Z}_p$ pro p prvočíslo, kde se sčítá a násobí modulo p.

Definice. Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, V libovolná množina, $+\colon V \times V \to V$ a $\cdot\colon \mathbb{F} \times V \to V$ binární operace takové, že pro všechna $a, b \in \mathbb{F}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí

(i) existuje prvek $\mathbf{o} \in V$ takový, že pro všechna $\mathbf{v} \in V$ je $\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}$,
(ii) existuje $\mathbf{w} \in V$ takový, že $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$, značíme $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$,
(iii) je $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,
(iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$,
(v) $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v}$,
(vi) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$,
(vii) $a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$,
(viii) $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

Pak čtveřici $(V, +, \cdot, \mathbf{o})$ nazveme *vektorovým* (či *lineárním*) *prostorem nad* $\mathbb{F}$. Prvky tělesa $\mathbb{F}$ se někdy nazývají *skaláry*.

Pro každé těleso $\mathbb{F}$ a $n \in \mathbb{N}$ můžeme „vybavit“ množinu $\mathbb{F}^n$ strukturou vektorového prostoru tak, že sčítání vektorů a násobení skaláry definujeme po složkách, dostaneme tak tzv. *aritmetický vektorový prostor*. Jinými příklady jsou např. prostor všech posloupností prvků $\mathbb{F}$ či obecněji prostor všech funkcí z nějaké množiny M do $\mathbb{F}$.[1]

V následujícím bude vždy V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$.

Definice. Je-li W podmnožinou V, pak nazveme W *podprostorem* V, pokud pro libovolná $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a $a, b \in \mathbb{F}$ platí $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \in W$.

Pro kombinatorické úvahy (a nejen pro ty) budou kruciální pojmy lineární (ne)závislosti, generování a dimenze. Ponořme se tedy opět do světa definic.

Definice. Nechť M je podmnožinou V. *Lineárním obalem* M rozumíme množinu

$$\langle M \rangle = \{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{F}, \mathbf{v}_i \in M \text{ pro } i \leq k\}.$$

Snadno nahlédneme, že $\langle M \rangle$ je podprostor V; je to nejmenší podprostor V, který obsahuje množinu M. Je-li $\langle M \rangle = V$, pak řekneme, že M *generuje* V.

Definice. Řekneme, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ jsou *lineárně nezávislé*, pokud je splněna následující podmínka: kdykoliv skaláry $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$ splňují $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = 0$, pak již $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. V opačném případě jsou vektory *lineárně závislé*. Množinu $M \subseteq V$ nazveme lineárně nezávislou, pokud je každá (konečná) sada vektorů z této množiny lineárně nezávislá.

Definice. Množinu $M \subseteq V$, která je současně lineárně nezávislá a generuje V, nazveme *bazí* V.

Pozorování. *Množina $B \subseteq V$ je bazí V právě tehdy, když každý vektor z V lze jednoznačně zapsat ve tvaru $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, kde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in B$ a $a_1, a_2 \ldots, a_k \in \mathbb{F}$.*

[1] Pokud chápeme uspořádané n-tice jako funkce z množiny $\{1, \ldots, n\}$, pak do tohoto konceptu zapadá i aritmetický vektorový prostor.

Věta. *Každý vektorový prostor má nějakou bázi; přesněji, každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit na bázi. Všechny báze daného vektorového prostoru mají stejnou velikost (mohutnost) – toto číslo nazveme dimenzí prostoru a budeme značit* $\dim V$.

Dále už omezíme své úvahy pouze na aritmetické vektorové prostory.

Definice. *Skalární součin* vektorů $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{F}^n$ definujeme předpisem

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

V kombinatorických aplikacích budeme konfrontováni zpravidla s vektorovými prostory konečné dimenze (tedy s konečnou bazí). V těchto situacích bude ústředním nástrojem následující pozorování:

Pozorování. *Kdykoliv máme sadu více jak n vektorů z $\mathbb{F}^n$, pak jsou již nutně lineárně závislé. Na druhou stranu, kdykoliv máme sadu méně jak n vektorů z $\mathbb{F}^n$, pak již nutně existuje vektor na tyto všechny kolmý.*

Úlohy

Úloha 1. V obdélníkovém sále s r řadami po s sedadlech $(r > s)$ na některá místa zasedli lidé. Dokažte, že můžeme vybrat některé řady (nejméně jednu) tak, aby v každém sloupci sedadel byl počet lidí sedících v těchto vybraných řadách sudý.

Úloha 2. V tabulce 5×5 jsou zapsána celá čísla. Je dovoleno vybrat libovolný čtverec 3×3 nebo 2×2 a zvětšit v něm všechna čísla o 1. Je vždy možné postupným prováděním těchto operací dostat tabulku, v níž jsou všechna čísla dělitelná 2011?

Úloha 3. V řadě je N žárovek očíslovaných postupně 1 až N. *Krokem* rozumíme přepnutí tří žárovek, jejichž čísla a, b, c splňují $a + c = 2b$. Určete všechna N, pro něž lze konečnou posloupností kroků všechny žárovky zhasnout nezávisle na jejich počátečním stavu. (iKS)

Úloha 4. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_5$, $b_1, b_2, \ldots, b_5$ jsou ne nutně různá čísla z množiny $\{1, \ldots, 10\}$ taková, že $a_i \geq b_i$ pro $i \leq 5$. Dokažte, že potom existují celá čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ ne všechna nulová taková, že

$$\binom{a_1}{b_1}^{\alpha_1} \binom{a_2}{b_2}^{\alpha_2} \binom{a_3}{b_3}^{\alpha_3} \binom{a_4}{b_4}^{\alpha_4} \binom{a_5}{b_5}^{\alpha_5} = 1.$$

Úloha 5. (Lindströmova věta, „baby“ verze) Jsou-li $A_1, \ldots, A_m$ podmnožiny množiny $\{1, \ldots, n\}$ a $m > n$, pak existují dvě disjunktní množiny $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, m\}$ (z nichž je alespoň jedna neprázdná) takové, že

$$\bigcup_{i \in I_1} A_i = \bigcup_{i \in I_2} A_i.$$

Úloha 6. (Lindströmova věta) Je-li navíc v předchozí úloze $m > n+1$, pak můžeme navíc požadovat, aby platilo

$$\bigcap_{i \in I_1} A_i = \bigcap_{i \in I_2} A_i.$$

Úloha 7. Nechť přirozená čísla k, n splňují $k < n$ a označme $S = \{1, \ldots, n\}$. Nechť $A_1, \ldots, A_k$ jsou neprázdné podmnožiny S. Dokažte, že je možné obarvit některé prvky S dvěma barvami, červenou a modrou, tak, aby byly splněny následující podmínky:

(i) každý prvek S je buď neobarvený, nebo je obarvený červeně, nebo je obarvený modře,
(ii) alespoň jeden prvek S je obarvený,
(iii) každá z množin A_i $(i \leq k)$ je buď celá neobarvená, nebo se v ní vyskytuje alespoň jeden prvek od obou barev. (VJIMC 2009)

Úloha 8. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé a $A_1, \ldots, A_n \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mají všechny sudý počet prvků. Dokažte, že existují dvě různá čísla $i, j \leq n$ taková, že $A_i \cup A_j$ má také sudý počet prvků.

Úloha 9. V PraSestánu žije $n \in \mathbb{N}$ obyvatel. Kolik nejvíce občanských sdružení mohou založit, pokud je legislativa v PraSestánu následující:

(i) každé sdružení musí mít lichý počet členů,
(ii) každá dvě sdružení musejí mít sudý počet společných členů?

Úloha 10. Kvůli příliš striktním zákonům proběhl v PraSestánu krvavý převrat. Aby se nový diktátor zalíbil lidu, vyhlásil pro občanská sdružení tato nová pravidla:

(i) každé sdružení musí mít nově sudý počet členů,
(ii) každá dvě sdružení musejí mít stále sudý počet společných členů,
(iii) žádná dvě sdružení nemohou mít tutéž členskou základnu.

Jaký je největší možný počet občanských sdružení v tomto případě?

Úloha 11. Souvislý graf má 100 vrcholů a 1000 hran. Kolika způsoby můžeme nějaké hrany vyhodit tak, aby každý vrchol výsledného grafu měl sudý stupeň?

Zdroje

(1) Lászlo Babai, Péter Frankl: *Linear algebra methods in combinatorics*, Dept. Comput. Sc., University of Chicago, 1992, Preliminary version 2

Počítání modulo p

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek uvádí Malou Fermatovu větu, Wilsonovu větu a několik úloh, v nichž lze s výhodou uplatnit to, že na množině zbytkových tříd po dělení prvočíslem lze nejen sčítat, odčítat a násobit, ale i dělit.

Úmluva. Nebude-li řečeno jinak, jsou všechny níže uvedené proměnné z oboru celých čísel.

Teorie

Definice. (Dělitelnost) Řekneme, že číslo a *je dělitelem* čísla b, jestliže existuje číslo c takové, že $a \cdot c = b$. Píšeme $a \mid b$.

Definice. (Kongruence) Řekneme, že čísla a, b jsou *kongruentní modulo* d, jestliže dávají stejný zbytek po dělení číslem d (tj. jestliže $d \mid a - b$). Píšeme $a \equiv b \pmod{d}$.

Definice. ($\mathbb{Z}_p$) Buď p prvočíslo. Množinu $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ nazýváme *úplnou sadou zbytků* modulo p.

Tvrzení. *Prvky množiny $\mathbb{Z}_p$ lze přirozeně sčítat, odčítat a násobit.*

Tvrzení. (Stěžejní) *Buď p prvočíslo. Nenulovým násobkem $\mathbb{Z}_p$ je opět $\mathbb{Z}_p$. Jinými slovy je-li p prvočíslo, pak pro každé $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$ platí*

$$\{a \cdot 0, a \cdot 1, a \cdot 2, \ldots, a \cdot (p-1)\} = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}.$$

Důsledek. („Zbytky lze dělit“) Buď p prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$. Pak existuje právě jedno $b \in \mathbb{Z}_p$ takové, že $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

Věta. (Malá Fermatova) *Buď p prvočíslo a a číslo s ním nesoudělné. Pak*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Věta. (Wilsonova) *Buď p prvočíslo. Pak* $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Příklady

Příklad 1. Buď p prvočíslo a $0 < k < p$.

(i) Ukažte, že kombinační číslo $\binom{p}{k}$ je násobkem p.

(ii) Jaký zbytek dává $\binom{p}{k}$ po dělení číslem p^2?

Příklad 2. Určete všechna kladná celá čísla, která jsou nesoudělná s každým členem posloupnosti

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(IMO 2005)

Příklad 3. Buď $p \geq 3$ prvočíslo. Dokažte, že je-li

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n},$$

pak m je násobkem p.

Příklad 4. Dokažte, že jsou-li p, q přirozená čísla taková, že

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319},$$

pak p je dělitelné číslem 1979. (IMO 1979)

Příklad 5. Najděte všechna prvočísla p, pro která je číslo

$$\binom{p}{1}^2 + \binom{p}{2}^2 + \dots + \binom{p}{p-1}^2$$

dělitelné číslem p^3. (CPS 2008)

Příklad 6. Pro liché prvočíslo p dokažte

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \frac{2 - 2^p}{p} \pmod{p}.$$

(iKS 2012, N3)

Příklad 7. (Wolstenholmova věta) Buď $p \geq 5$ prvočíslo. Dokažte, že je-li

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n},$$

pak m je dokonce násobkem p^2.

Poloměnky

Martin Töpfer

Abstrakt. Ukázka využití poloměnek (tj. monovariantů) na příkladu mnoha úloh. Složitost úloh od triviální až po starší IMO.

Úlohy, ve kterých se objevují invarianty (neboli česky neměnky) jsou celkem časté. Občas se ale stane, že žádný takový invariant neexistuje (nebo ho alespoň neumíme najít). V takových případech může pomoci právě monovariant (neboli poloměnka). Jde o veličinu, která se sice mění, ale pouze jedním směrem - tj. buď jen klesá nebo jen stoupá.

Je to vidět!

V některých úlohách nám zdravý rozum může říkat, že tvrzení úlohy je zřejmé. Exaktní sepsání takových úloh ale nebývá úplně snadné a monovarianty v něm mohou velmi pomoct.

Příklad 1. V řadě vedle sebe je 100 mincí. V jednom tahu můžeme otočit kolik chceme sousedních mincí, pokud na té nejlevější z nich byl orel. Ukažte, že po konečném počtu kroků se dostaneme do stavu, kdy budou na všech mincích panny.

Příklad 2. 2013 lidí je rozmístěno ve 100 pokojích. Každou minutu někdo přejde z jednoho pokoje do pokoje, kde je alespoň tolik lidí jako v původním pokoji. Ukažte, že po konečně mnoha krocích budou všichni v jedné místnosti.

Příklad 3. V každém políčku tabulky $m \times n$ je napsáno reálné číslo. V jednom kroku můžeme změnit znaménka u všech čísel v jednom řádku nebo v jednom sloupci. Ukažte, že lze dosáhnout stavu, kdy bude součet v každém řádku i v každém sloupci nezáporný.

Příklad 4. Na několika políčkách nekonečného pásku je dohromady konečné množství žetonů. V jednom tahu můžeme vzít dva žetony z téhož políčka, jeden posunout o 1 směrem doprava a druhý o 1 směrem doleva. Můžeme se po konečně mnoha krocích vrátit do původního stavu?

Přeskupování

Pokud máme ukázat, že lze vytvořit nějaký stav (např. rozdělení lidí), občas jde postupovat tak, že vyjdeme z obecného stavu a popíšeme takovou operaci (přeskupení lidí), že se při něm nějaká veličina (poloměnka) vždy sníží. Pak se už jednoduše ukáže, že až operace nepůjde provést, budeme v požadovaném stavu.

Příklad 5. Na zájezdu má každý turista nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem.

Příklad 6. V rovině je dáno n modrých a n červených bodů tak, že žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že lze nakreslit n úseček tak, aby každý z $2n$ bodů byl spojený s právě jedním bodem jiné barvy a žádné dvě úsečky se nekřížily.

Příklad 7. Mějme n lidí, kteří jsou navzájem vždy buď přátelé, nebo nepřátelé. Ukažte, že je můžeme rozdělit do dvou skupin tak, aby každý byl ve skupině alespoň s tolika přáteli, kolik je tam jeho nepřátel.

Ukončení procesu

V úlohách, které se nás ptají, zda nějaký proces skončí, můžeme hledat klesající poloměnku přirozených čísel a poté využít triviálního tvrzení:

Věta 8. *Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.*

Příklad 9. Vrcholy n-úhelníka jsou očíslované reálnými čísly. Buďte a, b, c, d čtyři sousední čísla. Je-li $(a-d)(b-c) < 0$, můžeme vyměnit b a c. Může být tato operace prováděna nekonečně dlouho?

Příklad 10. Na několika políčkách pásku délky 1000 je dohromady konečně mnoho žetonů. V jednom tahu můžeme vzít dva žetony z téhož políčka, jeden posunout o 1 směrem doprava a druhý o 1 směrem doleva. Ukažte, že po konečně mnoha krocích už nebudeme moci žádným žetonem pohnout.

Příklad 11. Na tabuli je několik přirozených čísel. V jednom kroku můžeme dvě čísla nahradit jejich největším společným dělitelem a nejmenším společným násobkem. Ukažte, že nastane situace, kdy na tabuli zůstanou po provedení popsaného kroku všechna čísla stejná. (St. Petersburg, 1996)

Příklad 12. Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x, y a z (v tomto poradí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x + y$, $-y$, $y + z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (IMO 1986–3)

Příklad 13. Ve 123 místnostech je rozmístěno 1000 mužů a 1000 žen. Pro pohyb mezi místnostmi platí, že buď muž jde z místnosti s více muži než ženami do místnosti s více ženami než muži (počítáno před jeho pohybem), nebo naopak žena jde z místnosti s více ženami než muži do místnosti s více s více muži než ženami (počítáno před jejím pohybem). Ukažte, že nastane situace, kdy se nebude moci nikdo pohnout.

Příklad 14. Mějme k přepínačů v řadě. Každý přepínač ukazuje nahoru, doprava, dolů nebo doleva. Pokud tři sousední přepínače ukazují různými směry, jsou všechny přepnuty do čtvrtého směru. Ukažte, že se proces zastaví. (BAMO 2006–5)

Literatura a zdroje

Z anglické literatury jsem čerpal z

[1] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998
[2] Zvezdelina Stankova, Tom Rike: *A Decade of the Berkley Math Circle*, AMS MSRI, 2008

Z českých zdrojů jsem využil materiálů k *Umění vidět v matematice* a také několika příspěvku v PraSečí knihovničce o invariantech.

Tětivové čtyřúhelníky

Martin Töpfer

Abstrakt. Úvodní přednáška o tětivových čtyřúhelnících. Hlavní důraz je kladen na počítání úhlů. Příspěvek obsahuje znění vět o obvodových, středových a úsekových úhlech a deset úloh.

Základní pojmy

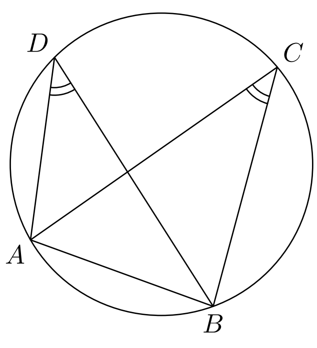
Věta. (o obvodových a středových úhlech) *Mějme kružnici se středem S, její tětivu AB a libovolný bod M na větším oblouku AB. Úhel ASB nazýváme středovým a úhel AMB obvodovým k příslušné tětivě AB. Platí, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle AMB|$.*

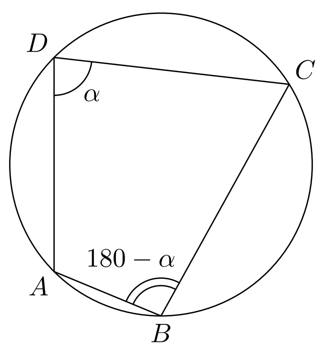
Věta. (o úsekových úhlech) *Mějme kružnici a na ní tětivu AB. Veďme přímku t, která se dotýká kružnice v bodě A. Odchylku AB od t nazveme úsekovým úhlem k tětivě AB. Úsekový úhel má stejnou velikost jako příslušný obvodový úhel.*

Definice. Čtyřúhelník je *tětivový*, když mu lze opsat kružnici.

K důkazu tětivovosti čtyřúhelníka nám mohou pomoci dvě jeho základní vlastnosti (plynoucí triviálně z věty o obvodovém a středovém úhlu). Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když je splněna jedna z podmínek:

(i) součet protějších úhlů je $180°$,
(ii) jedna z jeho stran je vidět ze zbylých vrcholů pod stejným úhlem.





Lehké příklady

Příklad 1. Mějme trojúhelník ABC. Osa úhlu BCA protíná kružnici opsanou $\triangle ABC$ v bodě $\check{S} \neq C$. Dokažte, že $\check{S}$ je střed oblouku AB (který neobsahuje bod C).

Příklad 2. Mějme trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H. Dokažte, že obrazy H v osových souměrnostech podle stran $\triangle ABC$ leží na kružnici opsané ABC.

Příklad 3. Označme D, E a F paty výšek ostroúhlého trojúhelníka ABC. Dokažte, že výšky $\triangle ABC$ jsou osami úhlů $\triangle DEF$.

Příklad 4. Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC. Označme S, S_1 a S_2 středy kružnic opsaných postupně trojúhelníkům ABC, AMC a BMC. Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na jedné kružnici.
(MO 56–A–II–3a)

Další příklady

Příklad 5. (Simsonova přímka) Je dán trojúhelník ABC a bod D na jeho kružnici opsané. Z bodu D spustíme kolmice na strany BC, CA, AB a jejich paty označíme P, Q, R. Dokažte, že P, Q, R leží v přímce.

Příklad 6. Na kratším oblouku AB kružnice opsané čtverci $ABCD$ je bod P. Nechť $PD \cap AB = X$ a $PC \cap BD = Y$. Dokažte, že $|\sphericalangle XYB| = 90°$.

Příklad 7. Mějme čtverec $ABCD$. Na jeho straně BC je bod P, na straně CD bod Q a platí $|\sphericalangle QAP| = 45°$. Nechť $AP \cap BD = X$, $AQ \cap BD = Y$. Dokažte, že body X, Y, P, Q a C leží na jedné kružnici.

Příklad 8. Mějme pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB \perp AD$). Sestrojme kružnici k, která se dotýká přímky AB v bodě A a přímky CD v bodě D. Dále sestrojme kružnici l. Ta se dotýká přímky AB v bodě B a prochází bodem C. Nechť kružnice k a l mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle PCB|$.
(MO 52–II–4)

Příklad 9. Je dána kružnice nad průměrem UV a její tětiva AB se středem S taková, že bod B neleží na UV. Patu kolmice z B na UV označme C. Ukažte, že úhel BCS se nezmění, pokud s tětivou AB začneme pohybovat po celé kružnici.
(MKS 28–2–6)

Příklad 10. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. (MO 59–A–II–2)

Fontenovy věty

Martina Vaváčková

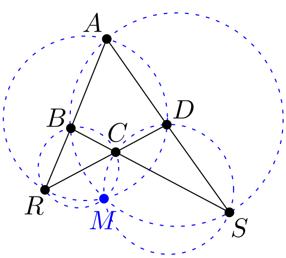
Mějme trojúhelník, jeho kružnici devíti bodů a libovolný bod, z něhož vedeme kolmice na strany trojúhelníka. O vlastnostech průsečíku kružnice opsané patám těchto kolmic s kružnicí devíti bodů hovoří tři Fontenovy[1] věty.

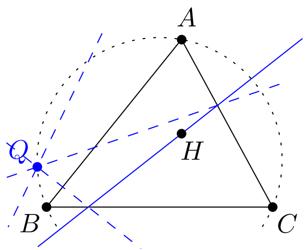
Jednoduchým důsledkem těchto vět je například tvrzení, že kružnice vepsaná se dotýká kružnice devíti bodů (v bodě zvaném *Feuerbachův bod*), známé pod názvem Feuerbachova věta.

Pomocná tvrzení

Tvrzení. (Kružnice devíti bodů) *Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem H. Pak středy jeho stran, paty výšek a středy úseček AH, BH, CH leží na jedné kružnici. Tato kružnice se nazývá* kružnice devíti bodů, *někdy též* Feuerbachova kružnice.

Tvrzení. (Miquelův bod čtyřúhelníka) *Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme R průsečík přímek AB a CD, S průsečík přímek BC a DA. Pak kružnice opsané trojúhelníkům ADR, ABS, BCR a CDS prochází jedním bodem. Tento bod se nazývá* Miquelův bod čtyřúhelníka *$ABCD$.*



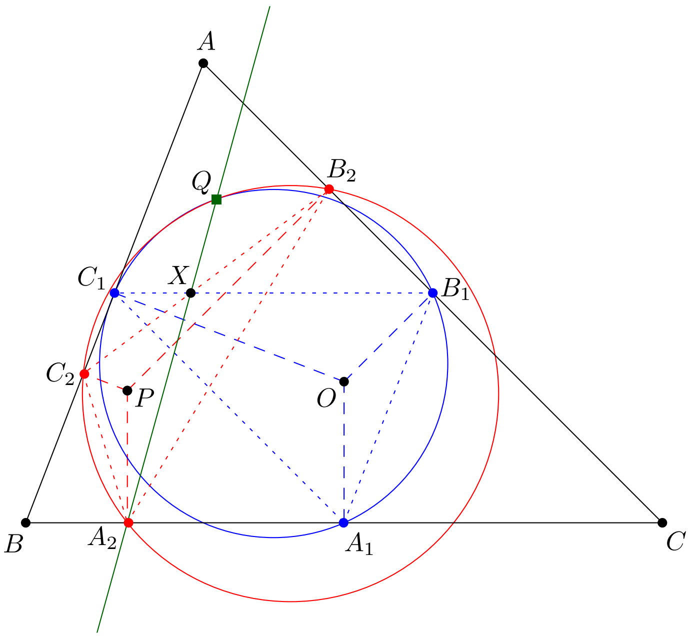


Tvrzení. (Anti-Steinerův bod) *Mějme trojúhelník ABC a libovolnou přímku p, která prochází jeho ortocentrem. Pak se osové obrazy přímky p podle stran AB, BC a CA protínají v jednom bodě, který leží kružnici opsané trojúhelníku ABC. Tento bod se nazývá* Anti-Steinerův bod *přímky p vzhledem k trojúhelníku ABC.*

[1] Georges Fontené (1848–1923) byl francouzský matematik.

Fontenovy věty

Věta. (První Fontenova – FV1) *Je dán trojúhelník ABC. Nechť A_1, B_1, C_1 jsou po řadě středy stran BC, CA, AB. Zvolme libovolný bod P a označme A_2, B_2, C_2 paty kolmic z bodu P na přímky BC, CA, AB. Dále označme X průsečík přímek B_1C_1 a B_2C_2, Y průsečík přímek A_1C_1 a A_2C_2, Z průsečík přímek A_1B_1 a A_2B_2. Pak platí, že přímky A_2X, B_2Y, C_2Z se protínají v jednom z průsečíků kružnic opsaných trojúhelníkům $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$.*



Strategie důkazu. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, F průsečík kružnic nad průměry AO a AP, L průsečík přímky PA_2 a kružnice nad průměrem AP, Q průsečík přímky A_2X a kružnice opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

Ukážeme platnost následujících tvrzení:

(1) F je Miquelův bod čtyřúhelníka AC_1XB_2,
(2) LA_2FQ je rovnoramenný lichoběžník,
(3) kružnice opsané trojúhelníkům $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ se protínají v bodě Q.

Věta. (Druhá Fontenova – FV2) *Nechť se bod P pohybuje po pevně zvolené přímce procházející středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Pak se poloha průsečíku kružnic opsaných trojúhelníkům $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ nemění.*

Strategie důkazu. Všimneme si, že Q je Anti-Steinerův bod přímky OP vzhledem k trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

Věta. (Třetí Fontenova – FV3) *Nechť P' je isogonal conjugate bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC. Pak se kružnice opsané trojúhelníkům $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ dotýkají, právě když body O, P, P' leží na jedné přímce.*

Některé důsledky

Důsledek 1. (Feuerbachova věta) *V libovolném trojúhelníku má kružnice devíti bodů vnitřní dotyk s kružnicí vepsanou a vnější dotyk s kružnicemi připsanými.*

Důsledek 2. *Nechť A_2, B_2, C_2, X, Y, Z jsou jako v FV1 a nechť O' je střed kružnice opsané trojúhelníku $A_2B_2C_2$. Pak O' je ortocentrum trojúhelníka XYZ.*

Důsledek 3. *Je dán trojúhelník ABC se středem kružnice opsané O a libovolná přímka procházející bodem O. Její průsečíky s přímkami BC, CA, AB označme po řadě X, Y, Z. Ukažte, že kružnice nad průměry AX, BY, CZ a kružnice devíti bodů trojúhelníka ABC se protínají v jednom bodě.*

Zdroje

[1] Linh Nguyen Van: *Fontene theorems and some corollaries*, článek ze 30. 4. 2010.

[2] Luiz Gonzalez, Cosmin Pohoata: *On the Intersections of the Incircle and the Cevian Circumcircle of the Incent*, Forum Geometricorum, Volume 12 (2012).

AG Nerovnost

Lukáš Zavřel

Abstrakt. Cílem přednášky je seznámit posluchače se základní, avšak velmi účinnou zbraní na nerovnosti – AG nerovností. Tyto nerovnosti se naučíme používat, sčítat, ale i všelijak jinak upravovat tak, aby se to co nejlépe hodilo našim potřebám.

Tvrzení. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + y^2 \geq 2xy$.*

Důkaz. Snadno spatříme, že nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $(x-y)^2 \geq 0$, která jistě platí.

Tvrzení. *Pro jakákoliv kladná čísla a, b platí*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Důkaz. Jistě platí

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Vydělme tuto nerovnost číslem (kladným, znaménko se tedy nezmění!) ab a získáme

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

což je přesně nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Příklad 1. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Tvrzení. (AG nerovnost[1]) *Pro libovolná kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

[1] Někdy se jí také říká nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Příklad 2. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Příklad 3. Pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y.$$

Příklad 4. Pro $x \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Cvičení 5. Pro kladná x, y, z dokažte

(i) $\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$,
(ii) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$,
(iii) $2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 15xyz$,
(iv) $x^3(x+2y) + y^3(y+2x) \geq 6x^2y^2$.

Sčítání AG nerovností

Příklad 6. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x.$$

Příklad 7. Pro kladná x, y, z dokažte

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

Cvičení 8. Pro kladná x, y, z dokažte

(i) $x^7 + y^7 + z^7 \geq x^5y^2 + y^5z^2 + z^5x^2$,
(ii) $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3y$,
(iii) $(x+y+z)^2 \geq 3\big(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}\big)$,
(iv) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$,
(v) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$,
(vi) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.

Příklad 9. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(MO 52–A–III–6)

Příklad 10. Pro $x \in \mathbb{R}^+$ ukažte

$$8x^3 + x^2 - 8x + 3 \geq 0.$$

Příklad 11. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq 3(a + b + c).$$

Příklad 12. Ukažte, že pro $a, b, c > 0$ platí

$$\frac{2}{3}(a + b + c) \geq \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1.$$

Cyklické sumy

Pro snazší zápis cyklických výrazů definujeme cyklickou sumu, kde stačí místo velkého množství výrazů zapsat jen vybrané, a pokud všechny ostatní lze z vybraných získat cyklickou záměnou proměnných, je snadné si domyslet celý výraz.

V následujících příkladech uvažujme výrazy ve třech proměnných a, b, c.

Příklad. Ukážeme několik zápisů pomocí cyklické sumy.

(i) $\sum_{\text{cyc}} a = a + b + c$,

(ii) $\sum_{\text{cyc}} a^2 b = a^2 b + b^2 c + c^2 a$,

(iii) $9 \sum_{\text{cyc}} a\sqrt{a + bc} = 9(a\sqrt{a + bc} + b\sqrt{b + ca} + c\sqrt{c + ab})$.

Příklad 13. Ukažte, že pro všechny trojice kladných čísel a, b, c platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

(USAMO 1998)

Příklad 14. Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c splňující $abc = 1$ platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq 1.$$

(IMO shortlist 1996)

Návod: Použijte odhad $a^5 + b^5 \geq a^2 b^2 (a + b)$.

AG a zlomky

Příklad 15. Pro kladná čísla a, b, c ukažte nerovnost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Řešení. Podle AG nerovnosti platí $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$. Sečtením tří analogických nerovností získáme to, co jsme měli dokázat.

Cvičení 16. Následující nerovnosti dokažte pro kladná čísla a, b, c.

(i)
$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c,$$

(ii)
$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

Příklad 17. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{a+b+c}{4}.$$

Příklad 18. Pro $a, b, c > 0$ ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{b(2c+a)} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Příklad 19. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{b+2c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Literatura

[1] Michal Rolínek, Pavel Šalom: seriál *Nerovnosti*, MKS 29. ročník, 2009/2010

Obsah