Oldřichov

Sborník, jaro 2012

Michael „Majkl“ Bílý
Filip Hlásek
Anča Chejnovská
Peter „πtr“ Korcsok
Anh Dung „Tonda“ Le
Mirek Olšák
Tomáš „Šavlík“ Pavlík
Monča Pospíšilová
Michal „Kenny“ Rolínek
Alča Skálová
Alexander „Olin“ Slávik
Michal Szabados
Pepa Tkadlec
Martina Vaváčková

Zvláštní host: Jan Kratochvíl (KAM MFF UK)

Autoři: Michael „Majkl“ Bílý, Filip Hlásek, Anča Chejnovská, Peter „πtr“ Korcsok, Anh Dung „Tonda“ Le, Mirek Olšák, Tomáš „Šavlík“ Pavlík, Monča Pospíšilová, Michal „Kenny“ Rolínek, Alča Skálová, Alexander „Olin“ Slávik, Michal Szabados, Pepa Tkadlec, Martina Vaváčková, zvláštní host – Jan Kratochvíl (KAM MFF UK)
Editor: Alexander „Olin“ Slávik
vydání první, náklad 45 výtisků
duben 2012
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Nerovnosti s podmínkou

Michael „Majkl“ Bílý

Abstrakt. Mnoho nerovností má u sebe ještě takzvanou omezující podmínku. Příspěvek se zabývá metodami řešení právě takových nerovností od těch základních až po některé pokročilé.

Teorie

K řešení jednoduchých i těch velmi složitých nerovností budeme potřebovat některé zbraně.

Definice. (Homogenita) Výraz $V(a,b,c)$ nazveme *homogenní* stupně α, pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t > 0$ platí

$$V(ta,tb,tc) = t^{\alpha} V(a,b,c).$$

Definice. (Symetrie) Výraz $V(a,b,c)$ nazveme *symetrický*, pokud

$$V(a,b,c) = V(a,c,b) = V(b,a,c) = V(b,c,a) = V(c,a,b) = V(c,b,a).$$

Definice. (Cykličnost) Výraz $V(a,b,c)$ nazveme *cyklický*, pokud se nezmění při provedení libovolné cyklické záměny, tj.

$$V(a,b,c) = V(b,c,a) = V(c,a,b).$$

Tvrzení. (AG nerovnost) *Pro libovolná kladná čísla $x_1, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Tvrzení. (Cauchyho nerovnost) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) \geq (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n)^2.$$

Rovnost v Cauchyho nerovnosti nastane právě tehdy, když existuje λ takové, že

$$u_1 = \lambda v_1, u_2 = \lambda v_2, \dots , u_n = \lambda v_n.$$

Teď, když už máme všechny zbraně, se pustíme do boje.

Příklady

Příklad 1. Reálná čísla a, b, c, d splňují

$$ab + cd = 1, \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Dokažte, že některá dvě z těchto čísel se liší nejvýše o 1 a některá dvě se liší nejméně o 1. (MO 61–C–S–3)

Příklad 2. Reálná čísla a, b, c, d splňují $ab + bc + cd + da = 16$. Dokažte, že některá dvě z nich mají součet nejvýše 4. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? (MO 61–C–I–4)

Příklad 3. Předpokládejme, že pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \quad \text{a} \quad ad + bc = 5.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b + c + d$ a zjistěte, které čtveřice a, b, c, d ji dosahují. (MO 61–A–II–4)

Příklad 4. Reálná čísla a, b, c, d, e splňují

$$a + b + c + d + e = 8, \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Jaké největší hodnoty může nabývat e? (Bílovec)

Příklad 5. Reálná čísla x, y, z splňují

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že

(i) každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9 a nejvýše 25,
(ii) některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné alespoň 5.

(MO 60–A–III–3)

Příklad 6. Najděte nejmenší kladné reálné číslo t s následující vlastností: kdykoliv reálná čísla a, b, c, d splňují $a + b + c + d = 6$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$, lze z těchto čísel vybrat dvě, jejichž rozdíl je v absolutní hodnotě nejvýše t. (iKS, A1)

Příklad 7. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla splňující $a+b+c+d=6$ a $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Dokažte

$$36 \le 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right) \le 48.$$

(IMO shortlist 2010, A2)

Příklad 8. Pro kladná a, b, c splňující $abc=1$ dokažte

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge a+b+c.$$

(MO 52–A–III–6)

Příklad 9. Buďte $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ taková, že $abc=1$. Dokažte

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^5+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^5} \le 3.$$

(IMO 2005)

Příklad 10. Pro kladná čísla a, b, c, d platí $abcd=1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \ge 1.$$

(Čínská MO 2004)

Příklad 11. Reálná čísla $x, y, z \ge 1$ splňují $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Dokažte

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}.$$

(Íránská MO 1998)

Substituce

Substituci poznáte podle několika vodítek:

(1) Některé proměnné se ve výrazu chovají jako nějaký goniometrický vzorec.
(2) Proměnné jsou stranami trojúhelníka nebo jsou svázány nějakou jinou známou podmínkou.
(3) Substituce vám přímo pomůže přeformulovat do hezčího tvaru dokazovanou nerovnost, nebo aspoň její podmínku (občas vás může podmínky zbavit).

Jednotlivé substituce si ukážeme na přednášce. Jakmile na nějakou „výhodnou“ substituci přijdete, pravděpodobně jste už na úlohu vyzráli a stačí ji pak umlátit nějakou běžnou metodou.

Příklad 12. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

Příklad 13. Pro kladná čísla a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

(IMO 2000)

Příklad 14. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte

(i) $\sum_{\text{cyc}} a^2(b+c-a) \leq 3abc$, (IMO 1964)

(ii) $\sum_{\text{cyc}} a^2b(a-b) \geq 0$. (IMO 1983)

Příklad 15. Nechť x, y, z jsou kladná čísla splňující $x + y + z = xyz$. Dokažte

(i) $x + y + z \geq 3\sqrt{3}$,

(ii) $xyz \geq 3\sqrt{3}$,

(iii) $xy + yz + zx \geq 9$.

Příklad 16. Pro kladná x, y, z splňující $x + y + z = xyz$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

(Korea 1998)

Příklad 17. Nechť x, y, z jsou kladná čísla splňující $x + y + z + 2 = xyz$. Dokažte

(i) $x + y + z \geq 6$,

(ii) $xyz \geq 8$,

(iii) $xy + yz + zx \geq 12$.

Příklad 18. Pro kladná x, y, z splňující $xy + yz + zx + xyz = 4$ dokažte

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

(Indie 1998)

Příklad 19. Pro kladná x, y, z splňující $x + y + z + 2 = xyz$ dokažte

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2(x+y+z+3)}.$$

Příklad 20. Nechť kladná x, y, z splňují $x^2+y^2+z^2+xyz=4$. Dokažte

$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}+\sqrt{\frac{2-y}{2+y}}+\sqrt{\frac{2-z}{2+z}}\geq\sqrt{3}.$$

Příklad 21. Kladná čísla a, b, c splňují $ab+bc+ca=1$. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}\leq\frac{1}{abc}.$$

(IMO shortlist 2004)

Příklad 22. Pro nezáporná čísla x, y, z platí $x^2+y^2+z^2=3$. Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}}x\sqrt[3]{y+z}\leq 3\sqrt[3]{2}.$$

Příklad 23. Kladná čísla a, b, c splňují $\min(a,b,c)\geq\frac{1}{4}\max(a,b,c)$. Dokažte

$$(ab+bc+ca)\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{(a+b)^2}\right)\geq\frac{9}{4}+\frac{1}{16}\sum_{\text{cyc}}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Literatura a zdroje

[1] Archiv Matematického Korespondenčního Semináře – seriál o nerovnostech
[2] Stránky české Matematické Olympiády *http://www.math.muni.cz/~rvmo/*
[3] Seminář *i*KS *http://kms.sk/iks.php*

Diofantické rovnice

Filip Hlásek

Abstrakt. V úvodu přednášky si dokážeme Velkou Fermatovu větu a poté se podíváme na zoubek několika otevřeným problémům … No, možná se do toho pustíme spíše trochu opatrněji a naučíme se nejprve základní metody používané k řešení diofantických rovnic.

Úmluva. Ve všech úlohách budeme uvažovat $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ a budeme hledat všechna řešení daných rovnic.

Počítání modulo

První metoda řešení diofantických rovnic, kterou si ukážeme, je užitečná především tehdy, když tušíme, že zadaná rovnice nemá řešení. Potom je vhodné se na ni podívat modulo nějaké číslo, po kterém některé členy dávají jenom některé zbytky. Pokud všechno dobře dopadne, zjistíme, že po dělení tímto číslem dávají strany rovnice různé zbytky, takže rovnice určitě žádné řešení nemá. Volba vhodných modulů vyžaduje cvik, takže si vyřešíme několik příkladů.

Příklad 1. $7x^2 + 5y + 14 = 0$

Řešení. Levá strana rovnice dává po dělení pěti stejný zbytek jako $2x^2 + 4$, ale jelikož x^2 dává pouze zbytky 0, 1 a 4, tak nikdy nemůže vyjít nula a zadaná rovnice proto nemá žádné řešení.

Příklad 2. $2^x = 11 + 7y$

Příklad 3. $a^6 + b^4 + c^2 = 1234567$ (PraSe 1987)

Příklad 4. $2^a = 1 + 3^b$

Rozlož to!

Zadaná rovnice se dá mnohdy pěkně upravit na součin. Pokud je navíc na jedné straně prvočíslo nebo nějaké konkrétní číslo, pak rovnou známe všechny jeho rozklady. Rozklad se může hodit i jindy, pokud o činitelích víme, že jsou nesoudělné. Opět si zkusíme tuto teorii aplikovat v praxi.

Příklad 5. $p + 400 = a^2$, kde p je prvočíslo (PraSe 2012)

Řešení. Rovnici upravíme do tvaru $p = (a - 20)(a + 20)$. Protože p je prvočíslo, tak musí nutně platit $a - 20 = 1$ a také $a + 20 = p$. Z toho plyne $a = 21$ a $p = 41$, což je skutečně jediným řešením této rovnice.

Příklad 6. $x^2 + 3x = y^3 - 2$

Příklad 7. $xy + yz + zx = xyz + x + y + z$

Příklad 8. $a^2b + ab^2 = 2(a^3 + b^3)$ (PraSe 2002)

Po sobě jdoucí mocniny

Tvrzení. *Neexistují x, y, a taková, že $x^a < y^a < (x + 1)^a$.*

Toto zdánlivě jednoduché tvrzení má překvapivě mnoho uplatnění. Pokud má být například nějaký výraz roven čtverci, pokusíme se najít dva po sobě jdoucí čtverce, které ho semknou mezi sebe, a to nám zaručí neexistenci řešení. Vtip potom spočívá v tomto semknutí. Jak si ukážeme, někdy to nemusí být vůbec jednoduché.

Příklad 9. $x^2 = y(y + 2)$

Řešení. Pokud je y kladné, tak platí $y^2 < y(y + 2) < (y + 1)^2$ a rovnice tedy podle uvedeného tvrzení nemá žádné řešení. Podobně pro $y < -2$ snadno ukážeme $(y + 2)^2 < y(y + 2) < (y + 1)^2$ a zbývají tedy pouze tři možnosti pro y. Po dosazení do zadané rovnice zjistíme, že řešením jsou dvě dvojice $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ a $x_2 = 0$, $y_2 = -2$.

Příklad 10. $(a + 3)^3 - a^3 = b^2$

Příklad 11. $a^2 = 9^b + 7$

Příklad 12. $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ (MO 59–A–III–1)

Nekonečný sestup

Poslední metoda se opírá o poměrně jednoduché tvrzení:

Tvrzení. *Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.*

Když chceme ukázat, že daná rovnice nemá netriviální řešení, uvažujeme nějaké hypotetické řešení a vyrobíme z něj (obvykle pomocí některé z předešlých technik) řešení menší. Z uvedené věty pak plyne, že řešení nemůže existovat. K lepšímu pochopení si to zkusíme na poslední várce příkladů.

Příklad 13. $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 2abc$

Řešení. Předpokládejme, že přirozená čísla a, b, c řeší danou rovnici. Kdyby a bylo liché, tak bychom měli na levé straně liché číslo, ale na pravé strně je číslo sudé.

Proto $a = 2a_1$ a rovnici můžeme upravit do tvaru $4a_1^3 + b^3 + 2c^3 = 2a_1bc$. Analogicky zjistíme $b = 2b_1$ a tedy $2a_1^3 + 4b_1^3 + c^3 = 2a_1b_1c$. Nakonec ze stejného důvodu musí být $c = 2c_1$, a proto $a_1^3 + 2b_1^3 + 4c_1^3 = 2a_1b_1c_1$. Našli jsme tedy menší řešení rovnice, kterým je a_1, b_1, c_1. Stejnými kroky bychom mohli neustále zmenšovat řešení, ale to podle uvedeného tvrzení není možné dělat do nekonečna a původní řešení a, b, c tedy nemůže existovat. Rovnice nemá v přirozených číslech žádné řešení.

Příklad 14. $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Příklad 15. $a^4 + 4b^4 = 2(c^4 + 4d^4)$ (PraSe 1992)

Literatura a zdroje

[1] Seriál – Teorie čísel: *http://mks.mff.cuni.cz/archive/28/9.pdf*

Vánoční pravděpodobnost

Anča Chejnovská

Abstrakt. Na přednášce se budeme zabývat počítáním úloh z pravděpodobnosti různé obtížnosti.

Příklad 1. (Kostičky) Jiljí dostal pod stromeček hrací kostky po babičce – mají tvar čtyřstěnu a jsou na nich čísla od 1 do 4 (každé právě jednou). Jiljího by velmi zajímalo, jaká je pravděpodobnost, že

(i) při hodu čtyřmi kostkami padnou vesměs různá čísla,
(ii) součet čísel hozených na dvou kostkách bude sudý (lichý).

Příklad 2. (Kuličky) Josefka pro změnu dostala pytlík skleněnek. Celkem jich je 100, z toho 30 zelených a ostatní modré. Pokud Josefa náhodně vytáhne 5 kuliček, jaká je pravděpodobnost, že nejvýše dvě budou zelené? A jaká, že právě dvě budou zelené?

Příklad 3. (Narozeniny) Všech dvacet pět organizítorů Prasátka se sešlo na vánoční besídce. Rozhodli se, že si dárky budou rozdělovat podle toho, kdy mají narozeniny. Při té příležitosti zjistili, že Helča s Romanem mají narozeniny ve stejný den. S jakou pravděpodobností se mělo něco takového stát?

Příklad 4. (Jízda za komercí) Amálie stopuje, protože se potřebuje dostat do obchodního centra. Pravděpodobnost, že v nejbližších 20 minutách stopne auto, je $\frac{609}{625}$. Pokud je šance na stopnutí auta v každém okamžiku stejná, jaká je pravděpodobnost, že Amálii zastaví auto do pěti minut? (Náboj 2012)

Příklad 5. (Kostičky) Marián a Marie dostali pod stromeček hrací kostky. Marián dostal jednu 20-stěnnou a Marie tři 6-stěnné. Jaká je pravděpodobnost, že hodí-li si oba svými kostkami, padne na té Mariánově větší hodnota než na všech Mariiných dohromady? (Náboj 2012)

Příklad 6. (Nebeská doprava) Andělíček jezdí z práce nebeskou mrakovou MHD. Pracovní dobu nemá stálou, takže na zastávku přichází pokaždé ve zcela náhodný čas. Jedním směrem bydlí jeho maminka, druhým směrem Andělka. Andělíček vždy nasedne na ten obláček, který přijede dřív, a povečeří buď s maminkou, nebo s Andělkou. Po půl roce zjistil, že s Andělkou večeřel čtyřikrát častěji než s maminkou. Jak je to možné? Intervaly obláčků jsou samozřejmě v obou směrech stejné.

Příklad 7. (Čísílka) Máme tři čísla x, y, z, každé z nich zvolíme náhodně z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Jaká je pravděpodobnost, že bude platit

(i) $x + y + z \geq 1$,
(ii) $xyz \leq \frac{1}{2}$,
(iii) obojí současně?

Příklad 8. (Hrozinky) Noemi už nebavilo péct cukroví, a tak vymyslela hru, která spočívá v házení hrozinek na stůl se čtverečkovaným ubrusem. Vždy se snaží hrozinku hodit tak, aby celá zůstala ležet uvnitř některého čtverečku. Jakou má Noemi šanci, že se trefí hned na první pokus? Strana jednoho čtverečku je jeden centimetr a hrozinka má v průměru tři čtvrtě centimetru.

Příklad 9. (Andělský turnaj) V andělském turnaji se soutěží o to, kdo zabalí za daný časový úsek nejvíce dárků. Takový turnaj vypadá podobně jako tenisový – na začátku se všichni rozlosují do „pavouka" a do dalšího kola postupují vždy vítězové předchozího. Předpokládejme, že nejšikovnější anděl, archanděl Gabriel, vždycky porazí všechny ostatní a druhý nejšikovnější, archanděl Michael, zase všechny zbývající. Poražený ve finále získává čtyřdenní dovolenou od andělských povinností, vítěz týdenní. Jaká je pravděpodobnost, že čtyřdenní volno získá archanděl Michael?

Příklad 10. (Ozdoby) Alice a Bob si házejí vánočními ozdobami. Každý z nich má nějakou pravděpodobnost, že vyhraje (neupustí ozdobu), když začíná. Můžou hrát podle dvou možných schémat: a) První začíná Alice a pak se v začínání střídají. b) První začíná Alice a pak vždy ten, kdo vyhrál predchozí přehazování. Dokaž, že šance hráčů na celkovou výhru (tzn. na výhru n přehazování, kde n je předem stanovené číslo) nezávisí na volbě schématu.

Literatura a zdroje

[1] S. Kowal: *Matematika pro volné chvíle*
[2] F. Mostller: *Fifty challenging problems in probability*

Chtěla bych poděkovat Alče Skálové, z jejíhož příspěvku jsem čerpala.

Kombinatorika na šachovnici

Peter „πtr“ Korcsok

Abstrakt. Táto prednáška sa zameriava na rôzne kombinatorické úlohy, ktoré sú so šachovnicou viac alebo menej spojené. Na príkladoch rôznych obtiažností si precvičíme základné metódy, ako môžeme takéto problémy zdolať.

Počas tejto prednášky sa spolu pozrieme na niekoľko príkladov, kde šachovnica vystupuje priamo v zadaní, alebo nám aspoň môže výrazne uľahčiť riešenie zadaného problému. Úlohy sú zoradené podľa náročnosti, preto nezúfaj, ak sa Ti hneď prvé z nich zdajú príliš triviálne **:)**.

Príklady na prebudenie

Príklad 1. Na klasickú šachovnicu (8×8 políčok) sa snažíme umiestniť čo najviac veží tak, aby sa žiadne dve neohrozovali.

(a) Koľko maximálne figúrok tam môžeme dať?
(b) Koľkými spôsobmi vieme tento počet veží rozmiestniť?

Príklad 2. Je možné pokryť šachovnicu $2n \times 2n$ bez dvoch protiľahlých vrcholov kockami domina tak, aby sa žiadne neprekrývali?

Príklad 3. Maximálne koľko figúrok koňa vieme rozostaviť na šachovnici 8×8, aby sme nevytvorili ohrozujúcu sa dvojicu?

Príklady na zlepšenie formy

Príklad 4. Určte maximálny počet strelcov, ktorý vieme rozmiestniť po šachovnici 8×8, aby sa žiadna dvojica neohrozovala. Ukážte, že počet všetkých takých umiestnení je druhá mocnina nejakého prirodzeného čísla.

Príklad 5. Rozhodnite, aspoň koľko výstrelov musíme vystreliť do štvorca 7×7, aby sme s istotou zasiahli loď pokrývajúcu 4×1 políčok.

Príklad 6. Je možné pokryť štvorec 10×10 tetramínami tvaru „T“ tak, aby sa žiadne neprekrývali?

Príklad 7. Šachovnicu $m \times n$ máme pokrytú pomocou kociek 2×2 a 4×1. Ukážte, že keď ľubovoľný dielik 2×2 zameníme za 4×1, nie je možné opätovne celú šachovnicu zaplniť.

Príklad 8. Na začiatku vojenskej prehliadky sa 81 vojakov rozostavilo na šachovnicu 9×9, na každé políčko práve jeden. Po zaznení rozkazu každý z nich prešiel na niektoré susedné políčko rovnakej farby. Minimálne koľko miest zostalo prázdnych?

Príklad 9. Dvaja hráči hrajú hru na čokoláde 6×4 a striedavo z nej ujedajú, pričom ani jeden nechce zobrať ľavý dolný roh. Ten, kto je práve na ťahu, si vždy zvolí ľubovoľné políčko, ktoré si vezme, a spolu s ním odoberie aj všetky ešte nezjedené kúsky vpravo a hore od vybraného miesta. Koľko rôznych tvarov môžu týmto postupom vytvoriť? (AIME 1992)

Príklad 10. 18 dominových kociek 2×1 sme uložili do štvorca 6×6. Dokážte, že tam vždy vieme nájsť dva susedné riadky alebo stĺpce, ktoré sú úplne oddelené, teda nemajú spoločnú žiadnu kocku. (MKS 2008/2009, 8. séria)

Príklad 11. Dvaja hráči striedavo hrajú na šachovnici 10×10 nasledujúcu hru. Ten, kto je práve na ťahu, si zvolí jeden z riadkov alebo stĺpcov, ktoré ešte neboli vybrané, a na všetkých 10 políčok v ňom si umiestni svoju figúrku[1]. Nájdite stratégiu pre nezačínajúceho hráča, pri ktorej bude mať na konci aspoň o 10 figúrok viac ako súper. (MKS 2009/2010, 1. jarná séria)

Príklad 12. Organizátori šachového turnaja sa rozhodli víťaza odmeniť špeciálnou šachovnicou s 1234×1234 políčkami, na ktorej by platilo:

(a) z každej dvojice stredovo súmerných[2] políčok je práve jedno čierne a práve jedno biele,
(b) v každom riadku aj každom stĺpci je rovnako veľa bielych a čiernych políčok.

Je možné takúto šachovnicu vyrobiť? (MKS 2002/2003, 4. séria)

Príklad 13. Rozhodnite, pre ktoré $n \geq 2$ je možné prejsť každé políčko šachovnice $n \times n$ práve raz, pokiaľ sa figúrkou kráľa pohybujeme striedavo „šikmo“ a „priamo“ a na začiatočnom políčku nám nezáleží. Pri ceste „šikmo“ prejdeme na susedné políčko rovnakej farby, pri pohybe „priamo“ naopak farbu meníme. (MO 56–A–III–1)

Príklady pre borcov

Príklad 14. Do ľavého dolného rohu šachovnice 50×50 sme položili hraciu kocku, ktorá pokryje práve jedno políčko. Postupne budeme kocku preklápať vždy na susedné políčko vpravo alebo hore a vždy si poznačíme číslo na vrchu kocky. Určte

[1] Ak na niektorom políčku už nejaká figúrka bola, nahradí ju svojou.
[2] Stred súmernosti je presne v strede šachovnice.

najmenšiu a najväčšiu hodnotu, ktorú môžeme dostať, keď týchto 99 čísel posčítame.

Príklad 15. Rozhodnite, či je možné prejsť kráľom celú šachovnicu 8×8, ak okrem prvého kroku prechádza len na políčka susediace s párnym počtom už navštívených miest. (Baltic Way 1999)

Príklad 16. Na šachovnicu obsahujúcu 100×100 políčok chceme umiestniť 2500 kráľov tak, aby boli splnené podmienky:

(a) žiadna dvojica kráľov sa vzájomne neohrozuje,
(b) v každom riadku aj každom stĺpci sa nachádza práve 25 kráľov.

Koľkými rôznymi spôsobmi to môžeme urobiť? Dve pozície líšiace sa rotáciou považujeme za rozličné. (IMO Shortlist 2010)

Príklad 17. Zlaté PraSiatko raz na povale objavilo veľkú šachovnicu $n \times n$, na ktorej bolo rozmiestnených niekoľko figúrok. Z nudy sa rozhodlo, že vždy, keď nájde prázdne políčko, ktoré hranou susedí s aspoň dvomi obsadenými miestami, doplní figúrku aj na prázdne miesto. Po určitom čase prekvapene zistilo, že takto zaplnilo celú šachovnicu. Koľko minimálne figúrok muselo byť na šachovnici, keď ju PraSiatko objavilo? (MKS 2003/2004, 4. séria)

Príklad 18. Figúrka princa sa po šachovnici pohybuje vždy len na políčko susediace hranou. Rozhodnite, či je možné s princom prejsť každé políčko šachovnice 8×8 práve raz, skončiť na mieste, kde sme začali, a pri tom ísť rovnako veľakrát zvislo aj vodorovne. (KMS 2008/2009, letná časť, 2. séria)

Literatúra a zdroje

[1] Archív MKS, *http://mks.mff.cuni.cz/archive*
[2] Internetové fórum Mathlinks, *http://www.mathlinks.ro*
[3] Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša: *Metody řešení matematických úloh II.* Masarykova univerzita, Brno, 2004.
[4] Titu Andreescu, Zuming Feng: *102 Combinatorial Problems: From the Training of the USA IMO Team.* Birkhäuser, Boston, 2003
[5] Archív KMS, *http://www.kms.sk/archiv*

Lifting The Exponent lemma

Anh Dung „Tonda“ Le

Abstrakt. Příspěvek se zabývá použitím „Lifting The Exponent lemmatu“ (dále jen LTE) při řešení exponenciálních Diofantických rovnic z olympiádní matematiky. Obsahuje také příklady k procvičování.

LTE je sice jednoduchý, ale mocný nástroj, který nám za určitých podmínek umožňuje najít největší mocninu prvočísla, která dělí součet nebo rozdíl dvou mocnin se stejným exponentem. Ve většině případů nám LTE ušetří hodně práce a času. Díky tomuto lemmatu můžeme odkrývat spoustu zajímavých, překvapujících a záhadných aspektů olympiádní teorie čísel.

Úmluva. Všechny proměnné v dalším textu jsou z oboru celých čísel, nebude-li řečeno jinak.

Tvrzení. (Zásadní!) *Pro dělitelnost zavádíme symbol $a \mid b$, který čteme „a dělí b“. Platí pro něj následující tvrzení.*

(i) *Pokud je p prvočíslo, pak platí implikace $p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$.*
(ii) *Pokud $d \mid a, d \mid b$, pak $d \mid ka + lb$.*
(iii) *Pokud $a \mid b$, pak $|a| \leq |b|$ (často dokonce $2|a| \leq |b|$ atd.).*

Tvrzení. *Nechť a, b jsou celá čísla. Jejich největší společný dělitel d značíme (a, b) a platí, že d je nejmenší nezáporné číslo, které lze zapsat ve tvaru $ka + lb$, kde k a l jsou celá čísla. Též platí $(a - b, b) = (a, b)$, díky čemuž lze (a, b) snadno vypočítat (tento postup se nazývá Euklidův algoritmus).*

Definice. Skutečnost, že $p \mid a - b$ budeme značit $a \equiv b \pmod{p}$ a říkat a je *kongruentní* s b modulo p.

Definice. Nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b budeme značit $[a, b]$.

Definice. Čísla a, b nazveme *nesoudělná*, pokud $(a, b) = 1$.

Definice. Buď n přirozené číslo. Pak je pro každé prvočíslo p jednoznačně určený exponent v prvočíselném rozkladu čísla n. Tento exponent budeme označovat $v_p(n)$ a říkat mu *p-valuace* čísla n. Pokud $(p, n) = 1$, je $v_p(n) = 0$, a pokud $n = 0$, je $v_p(n) = \infty$.

Tvrzení. *Pro libovolná přirozená čísla a, b platí*

(i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$
(ii) $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$
(iii) *Pokud* $v_p(a) \neq v_p(b)$, *pak dokonce* $v_p(a+b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.
(iv) $v_p((a,b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$
(v) $v_p([a,b]) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$

Tvrzení. *Nechť m, n jsou nesoudělná čísla. Pak platí* $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, *kde $\varphi(n)$ je Eulerova funkce, která značí počet nesoudělných čísel s n a menších než n.*

Tvrzení. (LTE pro lichá prvočísla) *Nechť p je liché prvočíslo a n přirozené číslo. Pro celá čísla x, y, která nejsou dělitelná prvočíslem p, platí:*

(i) $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$, *pokud* $x \equiv y \pmod{p}$,
(ii) $v_p(x^n + y^n) = v_p(x+y) + v_p(n)$, *pokud n je liché a* $x \equiv -y \pmod{p}$.

Tvrzení. (LTE pro 2) *Nechť n je přirozené číslo. Pro lichá celá čísla x, y platí:*

(i) $v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n)$ *pro* $4 \mid x - y$,
(ii) $v_2(x^n - y^n) = v_2(x+y) + v_2(x-y) + v_2(n) - 1$ *pro sudé n.*

Důkaz LTE ukážeme na přednášce, ale můžete to zkusit sami. Použijte matematickou indukci na $v_p(n)$.

Lemma. *Hodnota $n - v_p(n)$ roste nade všechny meze pro $n \to \infty$.*

Příklad 1. Dokažte, že pro přirozené n platí $3^{n+3} \mid 1997^{3^n} + 1$.

Příklad 2. Najděte $v_p((p-2)^{2(p-1)} - (p+4)^{p-1})$ pro prvočíslo p.

Příklad 3. Najděte $v_{1991}\big(1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}\big)$. (IMO shortlist 1991)

Příklad 4. Najděte všechna přirozená n, pro která platí: $2^n \mid 3^n - 1$.

Příklad 5. Nechť a, b jsou racionální čísla. Dokažte, že je-li hodnota $a^n - b^n$ celá pro nekonečně mnoho přirozených n, pak jsou obě čísla a, b celá.

Příklad 6. Nechť $a, n \geq 2$ taková, že existuje přirozené číslo $k \geq 2$ takové, že $n \mid (a-1)^k$. Dokažte, že n dělí $a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1$. (Romania TST 2009)

Příklad 7. Najděte všechy dvojice přirozených čísel (a,b) takových, že $b^a \mid a^b - 1$.

Příklad 8. Najděte všechny dvojice prvočísel (p,q) takových, že

$$pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q).$$

Příklad 9. Pro která přirozená n platí, že $2^{n+2}(2^n - 1) - 8 \cdot 3^n + 1$ je čtverec? (Vietnam TST 2011)

Příklad 10. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (m, n), které splňují

$$m^2 + 2 \cdot 3^n = m\left(2^{n+1} - 1\right).$$

(IMO shortlist 2010)

Příklad 11. Najděte všechna přirozená čísla n splňující $n^2 \mid 2^n + 1$.

(IMO 1990)

Příklad 12. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že $n \mid 2^{n-1} + 1$.

Hinty k příkladům

1. Přímé dosazování do vzorce.

2. Berte $(p - 1)$ jako společný exponent.

3. Berte 1991^{1990} jako společný exponent.

4. Použijte LTE na prvočíslo 2 a pak ukažte, že n nemůže být moc velké.

5. Je-li t nejmenší číslo, pro které platí, že $a^t - b^t$ je celé číslo, pak dokažte, že každý exponent s touto vlastností je násobek čísla t.

6. Použijte LTE na výraz $a^n - 1$.

7. Dokažte, že je-li p nejmenší prvočíslo dělící b, pak $p|a - 1$.

8. Předpokládejte, že p je menší pročíslo a ukažte, že p musí být 3.

9. Předpokládejte, že číselný výraz se rovná a^2, a upravte rovnici tak, aby na jedné straně stálo 8.3^n a na druhé součin dvou závorek. Snažte se eliminovat a a použijte lemma na prvočíslo 3. Dále ukažte, že n nemůže být moc velké.

10. Převeďte na úlohu 9.

11. Zjistěte, jaké můžou být 2 nejmenší prvočíselné dělitele čísla n.

12. Vyšetřujte největší mocniny 2, které dělí $n - 1$ a $p - 1$, kde p jsou prvočíselné dělitele čísla n.

Literatura a zdroje

[1] Amir Hossein Parvardi: článek *Lifting The Exponent Lemma*
[2] *www.mathlinks.ro*

Kombinatorická teorie čísel

Mirek Olšák

Abstrakt. Příspěvek obsahuje úlohy z kombinatorické teorie čísel. Na konci jsou k nim uvedeny návody.

Úloha 1. Vybrali jsme $n+1$ čísel z množiny $1, 2, \dots, 2n$. Dokažte, že některé z nich dělí některé jiné. (Paul Erdös)

Úloha 2. Dokažte, že každé přirozené číslo je možné vyjádřit jako součet přirozených čísel tvaru $2^a 3^b$ tak, aby žádné z nich nedělilo jiné.

Úloha 3. Alespoň dvouprvková množina M přirozených čísel je *kouzelná*, jestliže pro každá různá $a, b \in M$ také

$$\frac{a+b}{(a,b)} \in M.$$

Najděte všechny konečné kouzelné množiny. (BAMO, 2009)

Úloha 4. Buď m přirozené číslo a označme

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid m^2 \le n < (m+1)^2\}.$$

Dokažte, že všechny součiny tvaru ab pro $a, b \in M$ jsou různé pro různé neuspořádané dvojice $\{a, b\}$. (Indie 1998)

Úloha 5. Buď A n-prvková množina zbytků modulo n^2. Dokažte, že existuje n-prvková množina B zbytků taková, že součty $A + B$ pokrývají alespoň polovinu všech zbytků modulo n^2. (IMO Shortlist 1999)

Úloha 6. Buď p prvočíslo. Dokažte, že z tabulky $p^2 \times p^2$ je možné vybrat p^3 políček, aby žádná čtveřice vybraných políček netvořila vrcholy pravoúhelníku, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami tabulky. (Česko-Slovensko-Polské střetnutí 2010)

Úloha 7. Najděte všechna přirozená čísla $k \ge 2$, pro která pro libovolný pár různých přirozených čísel m, n nepřevyšujících k není číslo $n^{n-1} - m^{m-1}$ dělitelné k. (MEMO 2009)

Úloha 8. Je dáno prvočíslo p. Najděte všechna k taková, že množinu $\{1, 2, \dots, k\}$ lze rozdělit na p částí se stejným součtem prvků. (IMO Long List 1985)

Nebojme se nekonečna

Úloha 9. Množina všech přirozených čísel je rozdělena na konečně mnoho podmnožin. Ukažte, že některá z nich (označme ji M) má následující vlastnost: s každým $n \in M$ leží v M nekonečně mnoho dalších násobků n.

(Berkeley Math Circle Monthly Contest 1999-2000)

Úloha 10. Rozhodněte, zda existuje nekonečná rostoucí posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro každé k je pouze konečně mnoho z čísel $a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k, \ldots$ prvočísly.

Úloha 11. Dokažte, že existuje libovolně velká množina přirozených čísel M taková, že $(a-b)^2 \mid ab$ pro libovolná různá $a, b \in M$. (USA 1998)

Úloha 12. Buďte a, b přirozená čísla větší než 2. Dokažte, že existuje konečná posloupnost $(n_i)_1^k$ taková, že $n_1 = a$, $n_k = b$, a navíc $n_i + n_{i+1} \mid n_i n_{i+1}$.

(Rumunsko 1998)

Úloha 13. Přirozené číslo n je *rozložitelné*, pokud existuje 2012 přirozených čísel a_i s následujícími vlastnostmi:

(i) $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012}$,
(ii) $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2012}$,
(iii) $a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, 2011$.

Dokažte, že přirozených čísel, která nejsou rozložitelná, je pouze konečně mnoho.

(*i*KS 2012)

Úloha 14. Obarvíme-li všechna přirozená čísla konečně mnoha barvami, dokažte, že najdeme trojici a, b, c různých čísel stejné barvy takovou, že $a + b = c$.

(Schurova věta)

Úloha 15. Nechť $a_1 < a_2 < \cdots$ je rostoucí posloupnost taková, že $a_{n+1} - a_n < 1000000$ pro všechna n. Dokažte, že pak existují indexy i, j takové, že $a_i \mid a_j$.

(Reid Barton)

Návody

1. Rozdělte množinu ze zadání na n částí, že kdykoli vezmeme dvě čísla z jedné části, tak jedno bude dělit druhé.

2. Je-li číslo sudé, vydělte dvěma, je-li liché odečtěte největší možnou mocninu trojky.

3. Vezměte si jakožto a, b nejmenší čísla z M. Pak musí $(a+b)/(a,b) = a$, z toho $a \mid b$ a vyjádříme $b = a^2 - a$. Případ, kdy v množině je ještě třetí nejmenší číslo c dovedeme do sporu (opět $a \mid c$, vyjádříme c, …). Jediné kouzelné množiny jsou tedy dvouprvkové $\{a, a^2 - a\}$

4. Kdykoli $a_1b_1 = a_2b_2$, dají se tato čísla vyjádřit $a_1 = uv$, $b_1 = xy$, $a_2 = ux$, $b_2 = vy$. Dále pokud $u < x$ a $v < y$, tak $\lfloor\sqrt{uv}\rfloor < \lfloor\sqrt{xy}\rfloor$. Rozebráním možností uspořádání u, v, x, y dostáváme výsledek.

5. Postupně vybírejte prvky B. V každém kroku můžete pomocí Dirichletova principu pokrýt alespoň $n/2$ nových zbytků.

6. Rozsekejte na čtverce $p \times p$ a v každém vyberte jakožto p políček úhlopříčku posunutou v závislosti na součinu souřadnic příslušného čtverce.

7. Pouze 2, 3. Pro sudé $k \geq 4$ přímo najdete m, n. Pro lichá $k \geq 5$ existuje alespoň $(k+3)/2$ různých $n \leq k$, pro které n^{n-1} dává kvadratický zbytek, ale těch může být nanejvýš $(k+1)/2$.

8. Musí nutně $k > p$ a $p \mid \frac{k(k+1)}{2}$. A v takových situacích je skutečně možné rozdělení najít. Jakmile máte rozdělení pro k, najdete snadno rozdělení pro $k + 2p$ párováním dvojic se stejným prvkem. Takto ošetříte případ $p = 2$ a pro lichá prvočísla stačí najít rozdělení pro k rovno $2p$, $2p-1$, $3p$ a $3p-1$. Případ $2p$ je možné opět spárovat, pro $3p$ volte posloupnosti: $a_n = 3n$, $b_1 = 3p-1$, b_{n+1} je největší číslo pod b_n nedělitelné třemi, a c_n analogicky jako b_n, ovšem začínající na $(3p-1)/2$. Pak funguje rozdělení na trojice

$$\{a_n, b_n, c_n\}, n = 1, 2, \dots, p.$$

Jelikož mají tato rozdělení pro $2p$ a $3p$ stejně početné části, je možné je použít i na $2p-1$ a $3p-1$, když si do množiny přimyslíte nulu.

9. Sporem, předpokládejte že každá množina má zástupce, jehož pouze konečne násobků leží v příslušné množině. Spor pak hledejte v násobcích součinu všech zástupců.

10. Ano, volíme ji tak, aby a_1 bylo složené, dále a_2 i $a_2 + 1$ byla složená, aby a_3, $a_3 + 1$ i $a_3 + 2$ byla složená, $\dots$.

11. Máme-li takovou množinu, můžeme ji celou posouvat o jistou konstantu, tak, že vlastnost zůstane zachována. Současně, máme-li takovou množinu, můžem do ní „beztrestně“ přidat nulu.

12. Uvědomíme si, že vztah ze zadání říká, že sousední čísla jsou tvaru xyz, $x(x-y)z$. Nejprve umíme převést číslo a na číslo $a!$, pak z něj můžeme postupně odbourávat nejvyšší prvočísla, až dostanem mocninu dvojky. Nakonec stačí libovolné dvě mocniny dvojky na sebe umět převést.

13. Indukcí podle počtu sčítanců, na které to rozkládáme. Chceme-li rozložit obrovské liché číslo l, použijeme indukční přepoklad na $(n-1)/2$, příslušné rozložení vynásobíme dvěma a přičteme jedničku. Stejně rozložíme i násobky obrovských lichých čísel, zbývá rozložit obrovské mocniny dvojky $1 + 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \cdots$.

14. Podle Ramseyovy věty v grafu, jehož vrcholy jsou celá čísla a hrany jsou obarveny podle barvy své délky, najdete nekonečnou kliku.

15. Nazvěme x_n posloupnost k-skoro aritmetckou, pokud existuje aritmetická posloupnost a_n taková, že $0 \leq x_n - a_n \leq k$. Pokud existuje prvek a_n, který nedělí žádný prvek x_n, můžeme z posloupnosti x_n vybrat $(k-1)$-skoro aritmetickou posloupnost.

Literatura a zdroje

[1] Gabriel Carroll: *Combinatorial Number Theory (Teacher's Edition)*
[2] Peter Vandendriessche, Hojoo Lee: *Problems in Elementary Number Theory*

Hyperčísla

Mirek Olšák

Abstrakt. Občas je užitečné přidat k číslům nekonečno. Jenže když přidáme jenom jedno, budeme mít problém s výrazy jako $1 + \infty - \infty$. V tomto příspěvku to vyřešíme tím, že přidáme nekonečen víc. Přidáme jich dokonce tolik, že vůbec nebude poznat, že jsme nějaká přidali. Na závěr se podíváme na použití takových čísel.

Pro začátek trocha teorie

Všechny podmnožiny množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ si rozdělíme do dvou skupin: na dobré (zapíšeme $\smiley$) a špatné (zapíšeme $\frownie$). Nepopíšeme sice přesně, které množiny budou které, ale uděláme to tak, aby pro libovolné množiny $A, B \subset \mathbb{N}$ a libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ platilo:

$$A\smiley \Leftrightarrow (\mathbb{N} \setminus A)\frownie \qquad \text{neboli} \qquad A\frownie \Leftrightarrow (\mathbb{N} \setminus A)\smiley$$

$$(A\smiley \wedge B \supset A) \Rightarrow B\smiley \qquad\qquad (A\frownie \wedge B \subset A) \Rightarrow B\frownie$$

$$(A\smiley \wedge B\smiley) \Rightarrow (A \cap B)\smiley \qquad\qquad (A\frownie \wedge B\frownie) \Rightarrow (A \cup B)\frownie$$

$$\{n\}\frownie$$

Pokud by čtenáře zajímalo, proč je možné množiny takto rozdělit, doporučuji si zjistit něco o takzvaných ultrafiltrech.

A jdeme na věc

Definice. Přirozeným hyperčíslem rozumíme libovolnou posloupnost přirozených čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Analogicky můžeme definovat reálná hyperčísla. Dvě hyperčísla a, b považujeme za stejná, pokud se shodují na dobré množině, čili $\{i : a_i = b_i\}\smiley$. Funkce (například sčítání, násobení) hyperčísel definujeme po složkách. Standardní čísla ztotožňujeme s konstantní posloupností daného čísla, ostatní hyperčísla nazýváme nestandardní.

Hyperčísla se chovají stejně jako standardní čísla

K pochopení tohoto neformálního tvrzení je třeba se seznámit s několika základními pojmy z matematické logiky, které si intuitivně vysvětlíme.

Definice. Formulí rozumíme konečný syntakticky korektní zápis, který je možné brát jako logický celek v tom smyslu, že jednotlivé formule je možné spojovat logickými spojkami. Tedy například $1+1$ není formule, ale $1+1=3$ už je formule. Formule může obsahovat

(i) funkční symboly $+, -, \cdot, \ldots$,
(ii) rovnítka $=$,
(iii) logické spojky $\wedge, \vee, \Rightarrow, \ldots$,
(iv) kvantifikátory $\forall, \exists$,
(v) proměnné $a, b, x_1, \ldots$,
(vi) konstanty $0, 1, 2, \ldots$

Ne všechny proměnné přitom musí být kvantifikovány.

Příklad. Formulemi tedy mohou být například

$$x = 4, \quad a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c, \quad \exists x\, (y = x \cdot x),$$

$$\forall a\, \exists b\, \forall c\, \forall d\, (c \cdot d = a + b \Rightarrow (c = 1 \vee d = 1)).$$

Formule je jen jakýsi formální zápis, který sám o sobě nic neznamená. Smysl dostane v okamžiku, kdy zvolíme takzvanou *strukturu*. To je množina, přes kterou chápeme kvantifikace, a která má navíc definované významy funkčních symbolů. Příkladem struktury jsou třeba standardní přirozená čísla $\mathbb{N}$. Jinou strukturou jsou pak například přirozená hyperčísla, která budeme značit $\mathbb{N}^*$.

V okamžiku, kdy navíc přiřadíme všem nekvantifikovaným proměnným ve formuli daný prvek struktury, můžeme hovořit o pravdivostní hodnotě. Skutečnost, že formule φ platí ve struktuře A při ohodnocení nekvantifikovaných proměnných prvky $a^1, a^2, \ldots, a^n \in A$, zapisujeme

$$A \models \varphi[a^1, \ldots, a^n].$$

Nyní můžeme formulovat kýžené tvrzení mnohem přesněji.

Věta. *Mějme hyperčísla $a^1, a^2, \ldots a^k \in \mathbb{N}^*$ a formuli φ o k nekvantifikovaných proměnných. Pak*

$$\mathbb{N}^* \models \varphi[a^1, a^2, \ldots, a^k] \iff \{i : \mathbb{N} \models \varphi[a^1_i, a^2_i, \ldots, a^k_i]\} \ddot{\smile}.$$

Speciálně, má-li φ všechny proměnné kvantifikované, má v $\mathbb{N}$ i v $\mathbb{N}^*$ stejnou pravdivostní hodnotu.

Použití nekonečných čísel

Nestandardní přirozená hyperčísla jsou větší než jakékoli standardní přirozené číslo. To nám umožňuje některé nekonečné množiny považovat za konečné.

Úloha. Pomocí dané konečné sady konečně velkých dlaždiček umíme pokrýt libovolně velký čtverec (dlaždičky se nepřekrývají, ale můžou vyčuhovat ze čtverce). Dokažte, že pak umíme pokrýt celou rovinu.

Úloha. Z dané nekonečné množiny míčů umíme každou konečnou podmnožinu vtěsnat do jednotkové krychle. Dokažte, že pak je umíme do jednotkové krychle vtěsnat všechny.

Úloha. (Z nekonečné Ramseyovy věty plyne konečná.) Jsou dána přirozená čísla b, k a nekonečný graf. Každému konečnému podgrafu umíme obarvit hrany b barvami tak, aby nevznikla žádná jednobarevná klika (úplný podgraf) velikosti k. Dokažte, že pak je možné obarvit všechny hrany b barvami bez kliky na k vrcholech.

Drobet nestandardní analýzy

Definice. Říkáme, že reálné hyperčíslo je *nekonečně malé*, pokud jeho absolutní hodnota je menší než všechna standardní kladná reálná čísla. Je-li rozdíl dvou reálných hyperčísel $a - b$ nekonečně malý, říkáme, že se tato dvě čísla *přibližně rovnají*, a značíme $a \doteq b$.

Definice. Reálná čísla (na rozdíl například od racionálních) jsou *úplná*. To znamená, že ke každému reálnému hyperčíslu $x \in \mathbb{R}^*$, které není nekonečné velké (tedy $\exists n \in \mathbb{N} : |x| < n$), umíme najít standardní reálné číslo $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ takové, že $x \doteq \mathrm{st}(x)$.

Definice. Říkáme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, pokud pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}^*$ takové, že $y \doteq x$, platí i $f(y) \doteq f(x)$.

Definice. Říkáme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá, pokud pro libovolnou dvojici reálných hyperčísel $x, y \in \mathbb{R}^*$ platí $x \doteq y \Rightarrow f(x) \doteq f(y)$.

Úloha. (Bolzanova věta) Spojitá funkce f někde nabývá záporné hodnoty, někde jinde kladné. Dokažte, že někde nabývá nuly.

Úloha. (Weierstrassova věta) Dokažte, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maximální hodnoty.

Úloha. Jsou dány dvě funkce $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující pro libovolné reálné x z intervalu $\langle 0; 1\rangle$

$$f(x, 0) < 0, \quad g(0, x) < 0, \quad f(x, 1) > 0, \quad g(1, x) > 0.$$

Dokažte, že pak existují reálná čísla x, y taková, že $f(x, y) = g(x, y) = 0$.

Literatura

[1] *http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperreals*

Permutační grupy

TOMÁŠ „ŠAVLÍK" PAVLÍK

Permutace

Permutací rozumíme prosté zobrazení $\pi\colon M \to M$ na konečné množině M. Permutace můžeme skládat stejně jako zobrazení, tedy $\pi \circ \rho(x) = \pi(\rho(x))$. Dále si zavedeme několik základních pojmů a budeme zjišťovat, jaká je souvislost permutací s algebraickou strukturou nazývanou grupa.

Definice 1. *Pevným bodem* permutace π rozumíme prvek $x \in M$ takový, že $\pi(x) = x$.

Definice 2. *Identickou permutací* (také *identitou*) rozumíme permutaci, ve které jsou všechny prvky pevné body. Značíme ji *id*. *Transpozicí* rozumíme permutaci, kde se dva prvky prohodí a ostatní jsou pevné body.

Definice 3. Permutaci nazveme *lichou*, pokud ji lze zapsat jako složení lichého počtu transpozic. Permutace je *sudá*, pokud není lichá.

Poznámka 4. Sudost nebo lichost můžeme zjistit také pomocí počtu inverzí nebo počtu sudých cyklů v permutaci.

Definice 5. *Řád* permutace π je nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$\underbrace{\pi \circ \cdots \circ \pi}_{n} = id.$$

Příklad 6. Najděte všechny permutace na 3 prvcích a rozhodněte, které jsou sudé a které liché.

Příklad 7. Dokažte, že pro každé n je stejně sudých a lichých permutací na n prvcích.

Grupy

Definice 8. *Grupa* je čtveřice $(G, \circ, ^{-1}, e)$, kde G je množina prvků grupy, $\circ\colon G \times G \to G$ je binární operace, $^{-1}\colon G \to G$ je unární operace, která každému prvku přiřadí prvek inverzní a $e \in G$ je neutrální prvek (též jednotka). Navíc musí platit:

(i) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,
(ii) $a \circ e = e \circ a = a$,
(iii) $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Příklady grup:

(a) Množina čísel $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ s operací sčítání modulo n. Značíme $\mathbb{Z}_n$.
(b) Množina čísel $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ s operací násobení modulo p, kde p je prvočíslo.
(c) Všechny symetrie čtverce s operaci skládání zobrazení, značíme D_8.

Definice 9. *Permutační grupou* nazveme grupu, kde G jsou některé permutace na konečné množině M, e je identická permutace, $(\pi \circ \rho)(x) := \pi(\rho(x))$ a π^{-1} je opačná permutace k π.

Poznámka 10. Pozor, permutace v permutační grupě G musí být uzavřené na skládání. Pokud G obsahuje všechny permutace na M, pak jí říkáme *symetrická* a značíme ji S_n, kde $n = |M|$. Pokud G obsahuje jen všechny sudé permutace, pak jí říkáme *alternující* a značíme ji A_n.

Tvrzení 11. *Každá grupa lze zapsat jako permutační grupa.*

Definice 12. Permutační grupa je *k-tranzitivní*, pokud pro každné dvě posloupnosti prvků $\{a_i\}_{i=1}^k \in M$, $\{b_i\}_{i=1}^k \in M$ existuje $\pi \in G$ takové, že $\pi(a_i) = b_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$.

Příklad 13. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ určete, kolik má grupa S_6 prvků řádu n.

Příklad 14. Dokažte, že pokud má grupa sudý počet prvků, pak má alespoň jeden prvek řádu 2.

Příklad 15. Mějme 2-tranzitivní permutační grupu G, která obsahuje transpozici. Dokažte, že G je symetrická.

Příklad 16. Dokažte, že pokud je permutační grupa k-tranzitivní a obsahuje cyklus délky k, pak je už nutně symetrická nebo alternující.

Návod.

(i) G je k-tranzitivní a má k-cyklus $\Rightarrow$ G obsahuje všechny k-cykly.
(ii) G obsahuje všechny k-cykly $\Rightarrow$ G obsahuje všechny 3-cykly.
(iii) G obsahuje všechny 3-cykly $\Rightarrow$ G obsahuje všechny sudé permutace.
(iv) G obsahuje všechny sudé permutace a jednu lichou $\Rightarrow$ G je symetrická.

Tvrzení 17. *Pokud je permutační grupa n-tranzitivní, kde $n \geq 5$, pak je nutně symetrická nebo alternující.*

Literatura a zdroje

[1] Jakub Opršal: *Rubikova teorie grup* (Sborník MKS Domaslav 2010)
[2] Libor Barto: Hlavolamy a grupy (knihovna MKS, *mks.mff.cuni.cz*)

Kdyby Eukleides žil v Japonsku

Monča Pospíšilová

Při této přednášce budeš mít za úkol sestrojit všechno možné jen pomocí ohýbání papíru, podobně jako při origami. Ovšem protože je přednáška matematická a ne umělecká, raději se dohodneme, jaké ohýbání bude dovolené. Určíme si šest axiomů přehýbací geometrie, tedy šest akcí, které můžeme provádět.

(A1) Máme-li dány na papíře body A a B, umíme udělat přehyb, který jimi prochází (papír přehneme v přímce procházející oběma body).

(A2) Máme-li dány body A a B, umíme udělat přehyb, aby bod A ležel na bodu B (body dáme prostě na sebe a přehneme, vytvoříme tak vlastně osu úsečky AB).

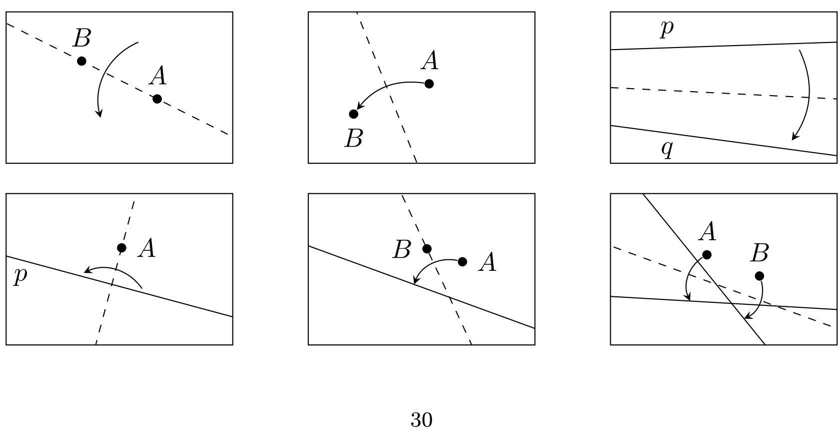
(A3) Máme-li dány dvě přímky p a q, umíme udělat přehyb takový, že p bude ležet na q.

(A4) Máme-li dán bod A a přímku p, umíme udělat přehyb kolmý na p procházející A.

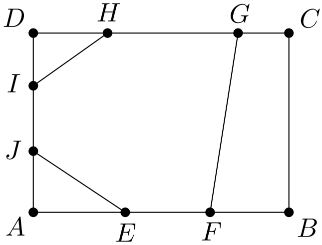
(A5) Máme-li dány body A a B a přímku p, umíme udělat přehyb procházející B takový, že A bude ležet na p (to už vyžaduje jistou dávku šikovnosti, přesto to proveditelné je).

(A6) Máme-li dány body A, B a přímky p, q, umíme udělat přehyb takový, že A bude ležet na p a B na q.

Pro názornost ještě axiomy v obrázcích:



Příklad 1. Na stranách obdélníkového papíru $ABCD$ formátu A4 jsou nakreslené body E, F, G, H, I, J jako na obrázku. Poskládejte střed kružnice vepsané trojúhelníku určenému přímkami EJ, FG a HI.



Příklad 2. Obarvěme jednu stranu papíru bíle a druhou černě. Poskládání papíru nazveme *vyvážené*, pokud pro každý bod při pohledu shora vidíme (i skrz) stejně bílých i černých stran (příklad: přehneme-li obdélník napůl, máme vyvážené poskládání, přehneme-li ho na třetiny, pak nikoliv).

Ukažte, že máme-li obdélník takový, že poměr délek jeho stran je racionální číslo, potom z tohoto obdélníku je možné poskládat čtverec tak, že toto poskládání bude vyvážené.

Příklad 3. Nechť $v_d > 2v_b$. Dokažte, že existuje nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že úhel u vrcholu B je větší než 180°, výška trojúhelníku ABC z vrcholu B je rovna v_b, výška trojúhelníku ADC z vrcholu D je rovna v_d a ze čtyřúhelníku $ABCD$ lze poskládat čtyřstěn (pozor, ať neposkládáte „placku“).

Příklad 4. Poskládejte rovnostranný trojúhelník, máte-li dány dva jeho vrcholy. Je-li více možností, stačí nám jedna z nich.

Příklad 5. Je dán obdélníkový list papíru, obdélník tvořící papír označme R. Napřehýbejte **pouze pomocí axiomu (A2)** vrcholy obdélníku O takového, že O je podobný R a delší strana O má stejnou délku jako kratší strana R.

Příklad 6. Je dán čtvercový list papíru s vrcholy čtverce A, B, C, D (v tomto pořadí). Na straně AB je dán bod X_1. Napřehýbejte všechny body X_2 na straně BC takové, aby $X_1 = X_5$ při následujícím postupu skládání: Bod X_3 je bod na straně CD takový, že když přeložíme papír podél úseček X_1X_2 a X_2X_3, potom (přeložené) přímky BX_2 a CX_2 splývají (bod X_4 na straně DA a bod X_5 na AB získáme podobně).

Příklad 7. Mějme na papíře tři body, které tvoří trojúhelník. Poskládejte čtverec o stejném obsahu, jako má trojúhelník.

Příklad 8. Rozdělte zadaný úhel na třetiny.

Literatura

Přednáška je převzatá z 6. série 24. ročníku MKS:
http://mks.mff.cuni.cz/archive/24/6.pdf.

Antirovnoběžnost

MICHAL „KENNY“ ROLÍNEK

ABSTRAKT. Příspěvek vysvětluje princip antirovnoběžnosti na mnoha úlohách z českých i zahraničních soutěží. Ukazuje i využití antirovnoběžnosti v moderní geometrii trojúhelníka.

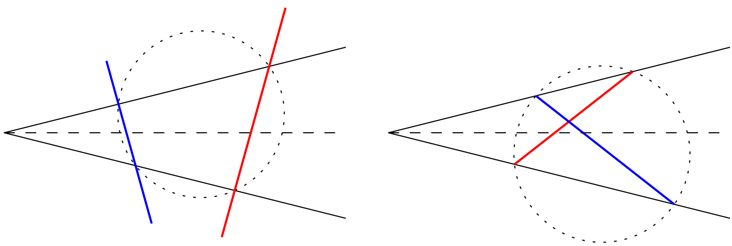
O co jde?

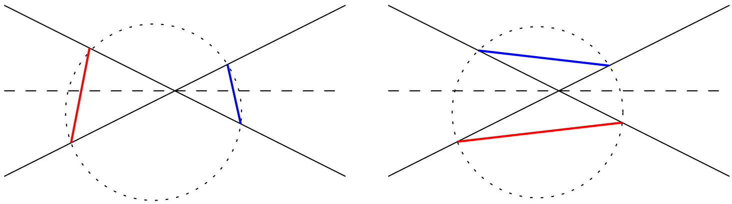
Definice. Je dán úhel XVY a jeho osa o. Přímky p a q nazveme *antirovnoběžné* v úhlu XVY, pokud pro osový obraz p' přímky p podle o platí $p' \parallel q$. Pokud navíc $V \in p$ a $V \in q$, říkáme, že p a q jsou *izogonální* v úhlu XVY.

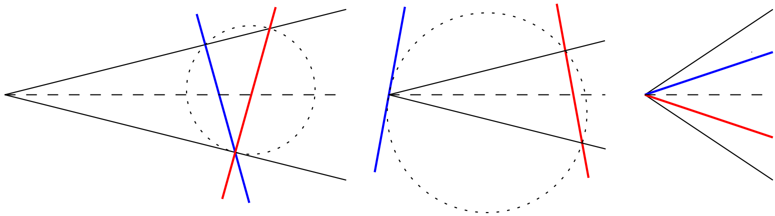
Úhlem v přechozí definici rozumíme i dvojici rovnoběžných přímek. Osou úhlu pak v tomto případě rozumíme osu pásu mezi rovnoběžkami.

Bez nároku na přesnou formulaci a přesný důkaz uvedeme klíčové tvrzení, které propojí antirovnoběžnost s tětivovými čtyřúhelníky.

Tvrzení. *Přímky p a q jsou antirovnoběžné v daném úhlu, právě když nastane jedna ze situací zachycených na obrázcích níže.*







Tvrzení. *Pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům, pak mají tyto úhly kolmé či rovnoběžné osy.*

Tvrzení. *Pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům, pak dvojice antirovnoběžných přímek v těchto úhlech splývají.*

Lehké příklady

Příklad 1. Na kružnici k je dána tětiva AB. Označme $\check{S}$ střed kratšího oblouku AB. Bodem $\check{S}$ vedeme dvě různé přímky, které protnou AB a k ve čtyřech dalších bodech. Ukažte, že tyto body leží na kružnici.

Příklad 2. Ať $ABCD$ je tětivový. Buď $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že osy úhlů AQB and BPC jsou kolmé.

Příklad 3. Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL.

(Domácí kolo MO 2010)

Příklad 4. Ať ABC je trojúhelník. Kružnice procházející body B a C protne strany AB a AC podruhé postupně v C' a B'. Ukažte, že BB', CC' a HH', kde H a H' jsou postupně ortocentra trojúhelníků ABC a $AB'C'$, procházejí jedním bodem.

(IMO shortlist 1995)

Kamarádi H a O

Tvrzení 5. *V $\triangle ABC$ je H průsečík výšek a O střed kružnice opsané. Pak AH a AO jsou izogonální v úhlu BAC.*

Příklad 6. V trojúhelníku ABC platí, že výška a těžnice z vrcholu A rozdělí úhel BAC na třetiny. Určete vnitřní úhly v $\triangle ABC$.

Příklad 7. V trojúhelníku ABC platí, že výška, těžnice a osa úhlu z vrcholu A rozdělí úhel BAC na čtvrtiny. Určete vnitřní úhly v $\triangle ABC$.

Příklad 8. Úhlopříčky AC a BD tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v P. Středy kružnic opsaných $ABCD$, ABP, BCP, CDP a DAP označme postupně O, O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že OP, O_1O_3 a O_2O_4 procházejí jedním bodem. (Čína 1990)

Příklad 9. Trojúhelník ABC je ostroúhlý. Buďte D a E body na stranách BC a AC takové, že A, B, D a E leží na kružnici. Dále předpokládejme, že kružnice opsaná D, E a C protne stranu AB ve dvou bodech X a Y. Ukažte, že střed XY je zároveň patou výšky z C na AB. (Baltic Way 2010)

Příklad 10. V rovině se kružnice k_1 a k_2 o středech po řadě I_1 a I_2 protínají ve dvou bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D. Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

Symediány

Definice 11. Je dán trojúhelník ABC. Přímku, která je izogonální s těžnicí z vrcholu A v úhlu BAC, nazveme A-*symediánou* trojúhelníka ABC.

Tvrzení 12. *Ke kružnici opsané $\triangle ABC$ sestrojíme tečny v bodech B a C a jejich průsečík označíme S. Pak AS je symediána v $\triangle ABC$.*

Příklad 13. Ať ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB. Dále nechť P je jeho vnitřní bod takový, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PBC|$. Označme M střed AB. Ukažte, že $|\sphericalangle APM| + |\sphericalangle BPC| = 180°$. (Polsko 2000)

Příklad 14. Jsou dány dvě kružnice k_1 a k_2, které se protínají v bodech A a B. Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B, který označíme L. Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě ruzném od A, který označíme K. Dokažte, že přímka, na níž leží težnice z vrcholu C trojúhelníku KLC, prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C.

(zobecněné domácí kolo MO 2011)

Tvrzení 15. *Symediány se protínají v jednom bodě. Nazveme ho Lemoinovým bodem $\triangle ABC$.*

Příklad 16. Buď ABC trojúhelník s Lemoinovým bodem L. Rovnoběžka s AB vedená bodem L protne strany CA a CB v bodech C_1, C_2. Podobně definujme A_1, A_2, B_1, B_2. Ukažte, že pak těchto šest bodů leží na kružnici. Kde je střed této kružnice?

Příklad 17. Buď ABC trojúhelník s Lemoinovým bodem L. Antirovnoběžka s AB v úhlu ACB vedená bodem L protne strany CA a CB v bodech C_1, C_2. Podobně definujme A_1, A_2, B_1, B_2. Ukažte, že pak těchto šest bodů leží na kružnici. Kde je střed této kružnice?

Isogonal conjugates

Definice 18. Body P a P' v trojúhelníku ABC nazveme *isogonal conjugates* vůči $\triangle ABC$, pokud jsou AP a AP' izogonální v úhlu BAC a podobně dvojice přímek BP, BP' a CP, CP' jsou izogonální postupně v úhlech ABC a BCA.

Tvrzení 19. *Ke každému bodu v rovině, který neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$, existuje isogonal conjugate vůči $\triangle ABC$.*

Příklad 20. Ať P a P' jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$. Pak projekce bodů P a P' na strany trojúhelníka leží na jedné kružnici.

Příklad 21. Je dán trojúhelník ABC, Γ je Gergonneův bod a H^+ střed kladné stejnolehlosti, která zobrazí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici opsanou. Pak Γ a H^+ jsou isogonal conjugates.

Příklad 22. Je dán trojúhelník ABC, N je Nagelův bod a H^- střed záporné stejnolehlosti, která zobrazí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici opsanou. Pak N a H^- jsou isogonal conjugates.

Příklad 23. Uvnitř čtyřúhelníka $ABCD$ je dán bod P neležící na BD tak, že $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DBA|$ a $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle BDA|$. Ukažte, že $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|AP| = |PC|$. (IMO 2004)

Příklad 24. Ať P a P' jsou isogonal conjugates vůči $\triangle ABC$. Ukažte, že P' je střed kružnice opsané trojúhelníku tvořenému obrazy bodu P přes strany $\triangle ABC$.

Příklad 25. Kružnice k vytne na každé straně trojúhelníka ABC úsečku. Ukažte, že potenční střed kružnic, jejichž průměry jsou tyto úsečky, je isogonal conjugate středu kružnice k. (zobecněné IMO 2008)

Příklad 26. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P. Označme A', B', C' paty kolmic spuštěných z bodu P na příslušné strany. Dále nechť A'' je průsečík kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ a strany BC různý od A'. Konečně nalezněme na úsečce $A''B'$ bod X takový, že $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle PAB|$. Ukažte, že $|\sphericalangle AXB| = 90°$.

(*i*KS G3)

Tvrzení 27. *Je dán $\triangle ABC$ a přímka ℓ. Množina bodů X', které jsou isogonal conjugate k nějakému bodu $X \in \ell$, je kuželosečka.*

Příklad 28. (General Feuerbach Theorem) Je dán $\triangle ABC$ a v něm X a X' isogonal conjugates. Pokud přímka XX' prochází středem O kružnice opsané $\triangle ABC$, pak kružnice opsaná projekcím bodů X a X' na strany $\triangle ABC$ se dotýká kružnice devíti bodů.

Příklad 29. Je dán trojúhelník ABC ($|AB| \neq |AC|$). Na jeho výšce AA_0, kde A_0 leží na BC, zvolíme bod X. Označíme B_1 resp. C_1 průsečíky BX s AC, resp. CX s AB. Pokud je BCC_1B_1 tětivový, ukažte, že X je průsečík výšek trojúhelníka ABC. (Celostátní kolo MO 2007)

Literatura a zdroje

[1] Nathan Altshiller-Court: *College Geometry*, Dover Publication, New York, 2007

[2] *http://www.mathlinks.ro*

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Alča Skálová

Cauchy-Schwarz (zkracujeme CS) je hned po AG nerovnosti[1] nejdůležitější nerovností s širokým uplatněním. Tři nejběžnější způsoby se naučíme na následujících příkladech.

Věta. (Cauchy-Schwarzova nerovnost)
Pro každé dvě n-tice $u_1, u_2, \dots u_n \in \mathbb{R}$ a $v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{R}$ platí

$$\left(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $u_1 = \lambda v_1$, $u_2 = \lambda v_2, \dots, u_n = \lambda v_n$.

Klasický CS

Příklad 1. Buď ABC trojúhelník o stranách a, b, c a KLM trojúhelník o stranách k, l, m. Ukaž, že

$$(a^2 + b^2 + c^2)(k^2 + l^2 + m^2) = (ak + bl + cm)^2,$$

právě když $\triangle ABC \sim \triangle KLM$.

Příklad 2. Dokaž následující nerovnosti pro kladná čísla a_i, $i = 1 \dots n \in \mathbb{N}$:

(i) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$,

(ii) $n\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$.

Příklad 3. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokaž, že platí

(i) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$,

(ii) $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$.

Příklad 4. Dokaž nerovnost pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

[1] Tak říkáme nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

CS a zlomky

Tvrzení. (CS zlomkobijec)
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, b_2, \dots b_n \in \mathbb{R}^+$. Pak platí

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Příklad 5. Buďte a, b, c, d kladná čísla splňující $a+b+c+d=1$. Ukaž, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Irská MO)

Příklad 6. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokaž následující nerovnost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nesbittova nerovnost)

Příklad 7. Pro kladná čísla a, b, c dokaž nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

Příklad 8. Nechť a, b, c jsou kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Dokaž, že platí

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

CS a odmocniny

Tvrzení. *Buď n přirozené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ čísla kladná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

Příklad 9. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má levá strana smysl, dokaž nerovnost

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12.$$

Příklad 10. Dokaž následující nerovnosti pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

(i) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$,

(ii) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}$,

(iii) $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$.

Příklad 11. Kladná čísla $x, y, z \geq 1$ splňují $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokaž, že

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.$$

(Iránská MO 1998)

Příklad 12. Pro kladná čísla a, b, c dokaž nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Literatura a zdroje

Přednáška čerpá ze seriálu Nerovnosti (29. ročník, na stránkách *mks.mff.cuni.cz* v sekci *Archiv*) napsaného Michalem „Kennym“ Rolínkem a Pavlem Šalomem.

Sinová věta

Alča Skálová

Věta. (Sinová věta) *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ, stranami a, b, c a poloměrem kružnice opsané R platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

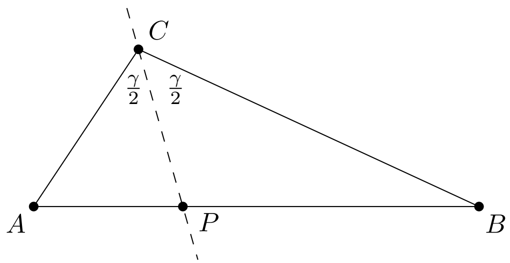
Úlohy na zahřátí

Příklad 1. Mějme trojúhelník ABC, průsečík osy úhlu ACB se stranou AB označme P. Dokaž, že $\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

Řešení. Použijeme sinovou větu na „sousední“ trojúhelníky APC a CBP:

$$\frac{|AP|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle APC|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|BP|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle CPB|}.$$

Jelikož ovšem $|\sphericalangle APC| = 180^\circ - |\sphericalangle CPB|$, je $\sin|\sphericalangle APC| = \sin|\sphericalangle CPB|$ a dokončení úlohy je již pouze otázkou vyjádření z předchozích rovnic.



Příklad 2. Je dán trojúhelník ABC, střed strany BC označme M. Nechť na straně AB leží bod P. Označme Q průsečík AM a PC. Dokaž, že $|CQ| = |AB|$ právě tehdy, když $|AP| = |PQ|$.

Příklad 3. Mějme rovnostranný trojúhelník ABC, jeho střed označme S. Na straně AB leží bod D takový, že $|AS| = |AD|$. Postupně označme E a F průsečíky přímky DS s AC a BC. Dokaž, že $|DE| = |EF|$.

Úlohy střední až těžké

Příklad 4. (netradiční) V pevném úhlu XVY „plave“ tětiva konstantní délky d s konci A (na polopřímce VX) a B (na polopřímce VY). Dokaž, že každá kružnice opsaná trojúhelníku ABV se dotýká jedné pevné kružnice.

Příklad 5. V rovnoběžníku $TUVW$ jsou na stranách TU a UV po řadě body X, Y tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Přímky TY a VX se protínají v bodě P. Dokaž, že P leží na ose úhlu VWT.

Příklad 6. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P. Dokaž, že platí

$$|AP| \cdot \sin\alpha + |CP| \cdot \sin\gamma = |BP| \cdot \sin\beta + |DP| \cdot \sin\delta.$$

Příklad 7. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC a T průsečík tečen v bodech B a C ke kružnici opsané trojúhelníku ABC. Dokaž, že potom $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle MAC|$. Přímka AT je takzvaná *symediána.*

Příklad 8. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB, BC a CD jsou stejně dlouhé a který není lichoběžník.[1] Označme S průsečík jeho úhlopříček. Dokaž, že $|AS| = |SD|$, právě když $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ADC| = 120°$.

(MKS, ročník 28)

Příklad 9. Je dán trojúhelník ABC. Buď S střed strany AB a H ortocentrum $\triangle ABC$. Přímka p je kolmice na SH procházející bodem H. Její průsečíky s přímkami AC, BC označme P, Q. Dokaž, že $|HP| = |HQ|$.

Příklad 10. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC ($\alpha = \beta = 50°$). Na straně AB nalezněme bod K tak, že $|\sphericalangle ACK| = 50°$, dále sestrojme bod L na straně BC tak, aby $|\sphericalangle CAL| = 30°$. Urči $|\sphericalangle ALK|$.

Příklad 11. Mějme konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se všemi stranami shodné délky a. Průsečík úhlopříček AD a EC označme S. Víme, že $|\sphericalangle ASE| = 60°$. Dokaž, že dvě strany $ABCDE$ jsou rovnoběžné. (MEMO 2011, Mišo Szabados)

Příklad 12. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme P, Q, R paty kolmic z bodu D postupně na BC, CA, AB. Dokaž, že $|PQ| = |QR|$ právě tehdy, když se osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle ADC$ protnou na AC. (IMO 2003)

Literatura a zdroje

Přednáška čerpá převážně ze staršího příspěvku Tomáše „Šavlíka“ Pavlíka.

[1] Neboli žádné dvě jeho strany nejsou rovnoběžné.

Banach-Tarského paradox

ALEXANDER „OLIN“ SLÁVIK

Úvod

Roku 1924 spatřil světlo světa krásný paradox z dílny Stefana Banacha a Alfreda Tarského, který odhalil, že ačkoliv se v trojrozměrném euklidovském prostoru ($\mathbb{R}^3$) dá bez potíží provozovat klasická stereometrie, existují zde i množiny, jejichž vlastnosti odporují jakékoliv geometrické intuici. Přesné znění je následující:

Paradox. (Banach-Tarského, silnější forma) *Pro jakékoliv dvě omezené množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$, které mají neprázdný vnitřek (tj. obsahují jako podmnožinu nějakou kouli), existuje $n \in \mathbb{N}$, disjunktní množiny $A_1, \ldots, A_n$ a disjunktní množiny $B_1, \ldots, B_n$ takové, že $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ a množiny A_i a B_i jsou přímo shodné*[1] *pro $1 \leq i \leq n$ (neformálně, A lze „rozřezat“ a „přeskládat“ na B).*

Populární je však podstatně slabší forma paradoxu, kterou si na přednášce dokážeme a která praví (již jen neformálně):

Paradox. (Banach-Tarského, populární forma) *Kouli lze „rozřezat“ a „přeskládat“ na dvě koule.*

Důsledek. *V $\mathbb{R}^3$ neexistuje „univerzální objem“, tedy funkce μ, která by* každé *množině přiřadila nezáporné reálné číslo či ∞, jednotkové krychli by přiřadila* 1*, při shodných zobrazeních by neměnila hodnotu a pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ by platilo $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*[2]

[1] Tedy liší se jen posunutím a otočením.

[2] Tento problém naštěstí není až tak palčivý, jak by se mohlo zdát – s uvedenými patologickými případy se v „praxi“ téměř nikdy nesetkáváme, takže pokud se smíříme s jistými nepříliš striktními omezeními na množiny, u kterých chceme měřit objem (tzv. měřitelné množiny), můžeme takovouto μ sestrojit.

Plán důkazu

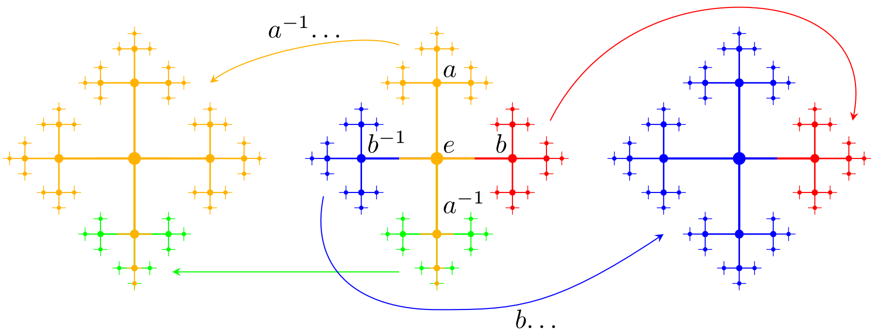
Důkaz provedeme v následujících krocích:

(1) Rozdělíme na čtyři části (množiny) tzv. *volnou grupu generovanou dvěma prvky*, přičemž z dvojic „protějších“ částí dokážeme sestavit dvě kopie původní grupy.
(2) Analogický rozklad (prvky grupy interpretujeme jako rotace koule) provedeme na kouli, ze které vyhodíme některé body.
(3) Ukážeme, že nám vyhození bodů v části (2) nevadí.

Část (1) – volná grupa a její rozklad

Definice. *Volná grupa generovaná dvěma prvky* je množina všech (konečných) slov (posloupností, řetězců) skládajících se z „písmen“ a, b, a^{-1}, b^{-1}, přičemž a a a^{-1}, resp. b a b^{-1} se v těchto slovech nesmí vyskytovat za sebou; navíc obsahuje prázdné slovo e. Tuto grupu značíme F_2. Prvky F_2 lze skládat tak, že příslušná slova napíšeme za sebe[3] a případná zakázaná podslova vyškrtneme[4].

Následující obrázek ilustruje výše zmiňovaný rozklad F_2:



Rozkladové množiny budeme nadále značit F_a, $F_{a^{-1}}$ F_b, $F_{b^{-1}}$.

Pozorování. *F_2 je spočetná množina.*

Část (2) – rozklad koule

V dalším textu budeme jako B označovat jednotkovou kouli se středem v počátku a S její povrch (tzv. sféru).

[3] Pokud je jedním z těchto slov e, jednoduše místo něj nic nenapíšeme.

[4] Pokud po vyškrtnutí vzniknou nová zakázaná podslova, pokračujeme ve škrtání. Pokud po vyškrtání nic nezbyde, jde o prázdné slovo e.

Prvkům F_2 nyní přiřadíme následující symetrie B: a budeme intepretovat jako otočení o[5] $\vartheta = \arccos \frac{1}{3}$ podle osy y, b jako otočení o ϑ podle osy z, příslušné „$^{-1}$-prvky“ jako inverzní otočení, delší slova jako postupná otáčení[6] a prázdné slovo jako identitu. V dalším textu budeme prvky F_2 ztotožňovat s příslušnými rotacemi.

Definice. Pro $s \in S$ nazveme *orbitou* s množinu všech prvků S, na které lze s zobrazit při nějakém otočení z F_2; značíme ji O_s.

Pozorování. *Orbity tvoří rozklad sféry.*

Nyní provedeme přeskládání sféry. Nejprve z ní ale „vyhodíme“ orbity těch prvků, které se zachovávají (tj. leží na ose) při nějakém otočení z F_2 – ty by mohly dělat problémy. Takto jsme vyhodili spočetně mnoho (každá rotace z F_2 zachovává právě dva prvky a F_2 je spočetná) spočetných množin (každá orbita je jen „nakreslením“ spočetné množiny F_2), jde tedy o spočetnou množinu. Tuto množinu označíme D.

Množinu $S \setminus D$ již umíme rozložit na čtyři části – z každé orbity vybereme[7] jeden prvek, množinu těchto prvků označíme A. Aplikujeme-li nyní na všechny prvky A rotace z množin F_a, $F_{a^{-1}}$ F_b, $F_{b^{-1}}$, dostaneme rozklad $S \setminus D$ na čtyři množiny (každá obsahuje „čtvrtinu“ z každé orbity v $S \setminus D$), přičemž z odpovídajících dvojic můžeme otočením dostat dvě kopie $S \setminus D$.

Část (3) – dokončení a opravy

Pozorování. *Umíme-li přeskládat sféru, umíme přeskládat i kouli bez středu.*

Lemma.

(i) *Kružnici lze přeskládat na kružnici bez jednoho bodu.*
(ii) *Kouli lze přeskládat na kouli bez středu.*
(iii) *Sféru lze přeskládat na sféru bez spočetně mnoha bodů.*

Ve světle uvedeného Pozorování a Lemmatu se problém přeskládání koule redukuje na přeskládání množiny $S \setminus D$ (tj. sféry bez spočetně mnoha bodů), což jsme již vyřešili výše.

Literatura a zdroje

[1] Paták, P.: *Sbírka příkladů: Teorie množin a patologické případy*, *http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~papa/texty/sbirka-temno.pdf*
[2] Článek o Banach-Tarského paradoxu na Wikipedii, *http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski_paradox*

[5] Lze volit i mnohé jiné hodnoty ϑ, tato je „tradiční“ a obvykle se v důkazech používá.

[6] Tedy např. $abba^{-1}$ reprezentuje otočení, které vznikne takto: nejprve kouli otočíme o ϑ podle y, potom dvakrát o ϑ podle z a nakonec o $-\vartheta$ podle y.

[7] Stojí za zmínku, že v tuto chvíli je nutné použít tzv. *axiom výběru*. Bez něj by paradox nemusel být platný.

Deka pani Perkinsovej

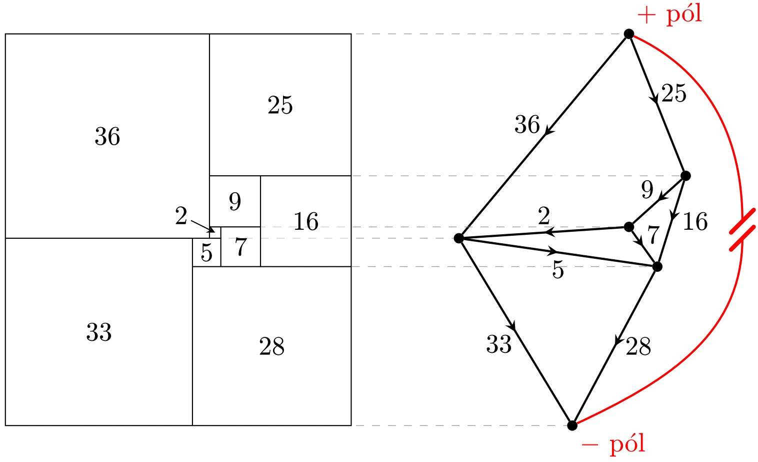
Michal Szabados

Názov prednášky pochádza z úlohy v jednej z Dudeneyho kníh – v anglickom originále je *quilt* vyšívaná deka na posteľ so štvorcovým vzorom. Na prednáške sa budeme pokúšať vyriešiť nasledujúcu úlohu:

Na koľko najmenej štvorcov s celočíselnou stranou sa dá rozdeliť štvorec $n \times n$?

Dudeney ju riešil pre $n = 13$. My si najprv rozmyslíme, ako úlohu presne formulovať, a ukážeme si rôzne stratégie pri jej riešení, ktoré sa používajú pri kombinatorických úlohách. Okrem iného si položíme aj tieto otázky:

- Musia mať malé štvorce rovnobežné strany s veľkým?
- Dá sa štvorec rozdeliť tak, že niektoré dva štvorce majú iracionálny pomer strán?
- Ako s tým súvisia Fibonacciho čísla a reťazové zlomky?
- Slávny problém: Dá sa rozdeliť štvorec na štvorce tak, že každý má inú veľkosť?
- Čo sú to Kirchhofove zákony?
- Ako súvisí nasledujúce dláždenie obdĺžnika a elektrický obvod vpravo?



Literatúra a zdroje

Ak neprídete na prednášku, o téme sa viac dozviete z týchto zdrojov:

[1] Weisstein, Eric W.: *Mrs. Perkins's Quilt.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/MrsPerkinssQuilt.html
[2] Weisstein, Eric W.: *Perfect Square Dissection.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html
[3] *http://squaring.net*
[4] Conway, J. H.: *Mrs. Perkins's Quilt.* Proc. Camb. Phil. Soc. (1964), 60, 363
[5] Trustrum, G. B.: *Mrs. Perkins's Quilt.* Proc. Camb. Phil. Soc. (1965), 61, 7

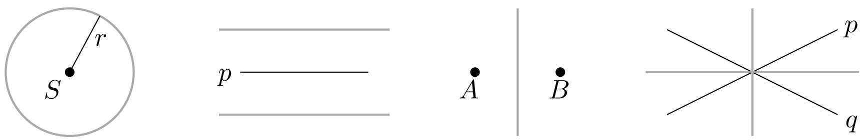
Geometrické množiny bodů

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní geometrické množiny bodů a obsahuje řadu převážně snadných úloh k nimž jsou na konci uvedeny stručné postupy a výsledky.

Tvrzení. *Množina bodů, které mají*

(i) *danou vzdálenost r od daného bodu S, je kružnice $k(S, r)$.*
(ii) *danou vzdálenost od dané přímky p, je dvojice přímek rovnoběžných s p.*
(iii) *stejnou vzdálenost od dvou daných bodů A, B, je osa úsečky AB.*
(iv) *stejnou vzdálenost od dvou daných přímek p, q, je dvojice přímek, které jsou osami úhlů vytvořenými přímkami p, q.*



Věta. (Věta o obvodovém úhlu) *Množina bodů, z nichž je daná úsečka AB vidět pod daným úhlem φ, je dvojice kružnicových oblouků symetrických podle přímky AB s krajními body A, B. Speciálně pro $\varphi = 90°$ je hledanou množinou kružnice nad průměrem AB.*

Lehounké úložky

Příklad 1. Jsou dány rovnoběžné přímky p, q. Najděte množinu středů úseček AB takových, že bod A leží na p a bod B na q.

Příklad 2. Je dán obdélník $ABCD$. Určete množinu bodů X, pro něž $|XA| + |XB| = |XC| + |XD|$.

Příklad 3. Je dána kružnice k a bod O. Určete množinu středů všech úseček OP, kde P probíhá kružnici k.

Příklad 4. Jsou dány body A, B. Najděte všechny přímky p, jejichž vzdálenost od A je stejná jako od B.

Příklad 5. Je dána úsečka AB. Určete množinu obrazů A' bodu A v osové souměrnosti podle libovolné přímky procházející bodem B.

Příklad 6. Uvnitř kružnice k se středem O je dán bod P. Určete množinu středů všech tětiv AB kružnice k, které procházejí bodem P. Co kdyby bod P ležel vně kružnice k?

Příklad 7. Polem vede rovná cesta, po které se rozjel autobus.

(i) Kde musí člověk stát, aby autobus dostihnul, pokud běží stejnou rychlostí, jakou autobus jede?
(ii) Co kdyby člověk vyrážel o minutu dřív?
(iii) Co kdyby byl člověk dvakrát pomalejší?

Příklad 8. Po ramenech VX, VY pravého úhlu XVY se pohybují body A, B tak, že úsečka AB má konstantní délku d. Určete množinu středů M úseček AB.

Příklad 9. Je dána úsečka AB. Uvažme všechny dvojice kružnic k, l, které se dotýkají úsečky AB postupně v bodech A, B a navíc mají samy vnější dotyk v T. Určete množinu bodů T.

Běžné příklady

Příklad 10. Na úsečce AC je dán bod B. Určete množinu druhých průsečíků X shodných kružnic, z nichž jedna prochází body A, B a druhá body B, C.

Příklad 11. Osa úhlu ABC protne stranu AC trojúhelníku ABC v bodě D. Najdeme bod E tak, aby $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BAC|$ a $|CE| = |AD|$. Dokažte, že střed úsečky DE leží na BC.

Příklad 12. Určete množinu středů všech úseček AB, jejichž krajní body leží na dané půlkružnici t.

Příklad 13. Bod C probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou AB. Určete množinu opsišť, těžišť, ortocenter a vepsišť všech takových trojúhelníků ABC.

Příklad 14. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu opsišť trojúhelníků ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k.

(MO 56–A–I–5)

Příklad 15. Bod C probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou AB. Označme P patu kolmice vedené středem M strany BC na přímku AC. Určete množinu bodů P.

Příklad 16. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod O tak, že $|\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle OAC|$, $|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle OCB|$ a $|\sphericalangle BOC| = 90°$. Určete poměr $|AC| : |OC|$.

(Moskva 2011)

Příklad 17. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Označme D, E, F průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B, C s protějšími stranami. Ukažte, že $|\sphericalangle DEF| = 90°$.

Návody

1. Nakreslete přímky vodorovně. Jak vysoko leží střed? (Vyjde osa pásu určeného přímkami p, q.)

2. Pro body osy úsečky BC tvrzení platí, pro body „nad“ ní je $|XB| > |XC|$ a $|XA| > |XD|$, pro body „pod“ ní naopak.

3. Stejnolehlost. (Vyjde „poloviční“ kružnice vzhledem k bodu O.)

4. Konstuujte tečny ke stejně velkým kružnicím se středy v A a B. (Vyjdou rovnoběžky s AB a přímky skrz střed AB.)

5. Ukažte, že $\triangle ABA'$ je rovnoramenný. (Vyjde kružnice se středem B a poloměrem $|BA|$.)

6. Tětiva je kolmá na spojnici svého středu se středem kružnice. (Vyjde Thaletova kružnice nad OP případně její oblouk.)

7. Množina bodů, ze kterých je člověk schopen autobus dostihnout v jistém pevném bodě X je kruh. Sjednoťte tyto kruhy přes všechny přípustné body X. (Vyjde postupně polorovina, posunutá polorovina, úhel o velikosti 60°.)

8. Vzdálenost středu přepony od vrcholu s pravým úhlem je rovna polovině délky přepony. (Vyjde čtvrtkružnice se středem V a poloměrem $\frac{1}{2}d$.)

9. Ať vnitřní společná tečna v T protne AB v M. Pak $|MA| = |MT| = |MB|$ (stejně dlouhé tečny). (Vyjde kružnice nad průměrem AB bez bodů A, B.)

10. Úhly $\sphericalangle XAB$ a $\sphericalangle BCX$ jsou obvodové k téže tětivě ze stejně velkých kružnic, takže mají stejnou velikost. (Vyjde osa usečky AC.)

11. Označme A' obraz A podle osy $\sphericalangle BAC$. Pak $A'D$ a CE jsou stejně dlouhé a svírají týž úhel s BC, tedy D je „nad“ BC přesně o tolik, o kolik je E „pod“.

12. Vyjde vnitřek půlkruhu bez půlkruhů nad průměry určenými koncovými body t a jejím středem.

13. Vyjde po řadě bod, „přitřetěný“ oblouk C ke středu strany AB, oblouk nad AB odpovídající úhlu $180° - \gamma$, oblouk odpovídající úhlu $90° + \frac{1}{2}\gamma$ (resp. oblouk posunutý tak, aby procházel A a B).

14. Mocnost S ke všem takovým kružnicím je stejná ($|SB| \cdot |SC|$), takže druhý průsečík k a AS je pevný a množina opsišť je přímka.

15. Ukažte, že všechny takové přímky procházejí středem X tětivy kolmé na AB skrz B. Vyjde pak Thaletova kružnice nad AX.

16. Začněte od $\triangle BOC$, nakreslete obraz C' bodu C přes OB a ukažte, že A je bod dotyku tečny z C ke kružnici opsané $\triangle BOC'$. Z mocnosti vyjádřete hodnotu poměru $\sqrt{2}$.

17. Ukažte, že D a F jsou připsičtě trojúhelníků AEB a ECB.

Literatura a zdroje

[1] Nathan Altschiller-Court: *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, New York, 2007.
[2] V. V. Prasolov: *Zadachi po planimetrii*, MCCME, Moskva, 2006.
[3] *http://www.problems.ru*

To nejlepší ze stereometrie

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Stereometrie známá ze školy se zabývá převážně určováním objemů a povrchů těles a konstrukcemi řezů. Stereometrie je však mnohem širší téma. Příspěvek proto uvádí dvacet netradičních trikových úloh všech obtížností. Obsahuje též stručné návody k řešením.

Lehké úlohy

Příklad 1. Rovina protíná hrany AB, AC, CD čtyřstěnu $ABCD$. Které všechny hrany ještě protíná?

Příklad 2. Lze meloun rozdělit na čtyři části tak, aby po snězení jeho vnitřku zbylo 5 kusů slupky?

Příklad 3. Krychli $3\times3\times3$ chceme rozkrájet na 27 jednotkových kostiček, přičemž po každém řezu můžeme všechny doposud vzniklé části libovolně přeskládat. Kolik řezů je na to minimálně potřeba?

Příklad 4. Obdélníkový stůl má nohy délek postupně 90 cm, 95 cm, 105 cm. Jak dlouhou má čtvrtou nohu, víme-li, že se neviklá? (PraSe 29–7–2)

Příklad 5. Jsou dány dvě brambory libovolného tvaru a velikosti. Dokažte, že lze vytvarovat drát tak, aby se dal těsně přiložit ke kterékoliv z nich.

Nesnadné úlohy

Příklad 6. Je dán kužel s vrcholem V a bodem A na kraji podstavy o poloměru 1 ($|VA| = 3$). Beruška leze nejkratší možnou cestou z bodu A po povrchu kužele opět do bodu A tak, že obleze celý kužel. Určete, v jaké vzdálenosti od V je beruška ve chvíli, kdy je k V nejblíže. (PraSe 26–3–5)

Příklad 7. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body B, C, D veďme postupně roviny kolmé na AB, AC, AD a označme A' jejich průsečík. Body B', C', D' definujeme obdobně. Ukažte, že čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou shodné. (PraSe 26–3–8)

Příklad 8. Vrcholy pravidelného čtyřstěnu jsou obarveny zelenou barvou. Nejdříve obarvíme zeleně všechny body, které leží na přímce s některými dvěma zelenými, následně provedeme tutéž operaci ještě jednou. Jsou teď všechny body prostoru zelené? (Prase 29–7–4)

Příklad 9. Lze prostor rozřezat na jednotkové krychle tak, aby existovala krychle, která žádnou svou stěnu nesdílí s některou jinou krychlí? (Turnaj Měst)

Příklad 10. Lze do krychle vyvrtat takovou díru, aby skrz ni bylo možno prostrčit druhou stejně velkou krychli?

Příklad 11. V prostoru je dán bod. Jaké je nejmenší n takové, že do prostoru lze rozmístit n disjunktních koulí tak, aby zcela zakrývaly výhled z tohoto bodu (tj. aby libovolná polopřímka z něj vycházející protínala alespoň jednu z koulí)?

Příklad 12. Existují v prostoru krychle a rovina tak, že vzdálenosti vrcholů této krychle od dané roviny jsou (v nějakém pořadí) čísla $1, 2, \ldots, 8$?

Příklad 13. Krychle $20 \times 20 \times 20$ je složena z 2000 kvádříků tvaru $2 \times 2 \times 1$. Ukažte, že ji lze propíchnout jehlou, která bude procházet protějšími stěnami a nepropíchne žádný kvádřík. (Turnaj Měst 1988)

Příklad 14. V prostoru jsou dány dva různě velké dvacetistěny tak, že některých 6 z jejich vrcholů tvoří vrcholy pravidelného osmistěnu. Určete poměr velikostí dvacetistěnů. (Sharygin 2010)

Obtížné úlohy

Příklad 15. Na letišti se za zavazadla (tvaru kvádru) platí úměrně tomu, jaký mají součet délek svých tří rozměrů. Lze ušetřit tím, že své zavazadlo zabalíme do jiného? Tedy existují kvádry K a L takové, že K se vejde do L a přitom má K větší součet délek hran než L?

Příklad 16. Existuje mnohostěn P a bod O mimo něj tak, že z bodu O není vidět žádný vrchol P?

Příklad 17. Ukažte, že existuje 2012 konvexních mnohostěnů, které lze umístit do prostoru tak, aby se každé dva dotýkaly a přitom žádné tři neměly společný bod. (PraSe 29–8–7b)

Příklad 18. Uvnitř jednotkové koule se středem O je dán konvexní n-stěn P obsahující O. Ukažte, že součet vzdáleností O od stěn P je nejvýše $n-2$. (Rumunsko)

Příklad 19. Určete nejmenší počet prken o šířce 10 cm, jimiž lze zakrýt studnu o průměru 1 m. Prkna lze klást přes sebe.

Příklad 20. Lze mezi dvě rovnoběžné roviny umístit nekonečně mnoho shodných mnohostěnů tak, aby se žádný mnohostěn nemohl pohnout bez toho, že by se pohnuly i nějaké jiné? (Moskva 2000)

Návody

1. Na kterých stranách od roviny leží které body?

2. Ano. Uvažte válcovou díru skrz.

3. Na samotnou prostřední krychličku je potřeba 6 řezů a 6 zřejmě stačí. Lze též pozorovat velikost největšího dílu.

4. Položte stůl na desku. Jak vysoká by musela být noha vedoucí z prostředku stolu?

5. Myšlenkově brambory protněte.

6. Rozstřihněte plášť podle VA a rozbalte ho. Nejkratší je úsečka.

7. Analogie ve 2D, Thaletova sféra a středová souměrnost.

8. Rozmyslete si, které body zezelenají kvůli dvěma konkrétním zeleným přímkám podle toho, zda jsou tyto přímky různoběžné nebo mimoběžné. Pomůže představit si vrcholy čtyřstěnu jako polovinu vrcholů krychle.

9. Ano. Vydlážděte prostor standardně, vyberte si jednu krychli a „rozposuňte" šest přilehlých neprotínajících se „komínů".

10. Ano. Podívejte se podél tělesové úhlopříčky. Do pravidelného šestiúhelníku o straně délky $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ se vejde čtverec o straně délky 1.

11. Analogie ve 2D. Opište bodu čtyřstěn a výhled přes každou stěnu zakryjte jednou koulí (o hodně různých poloměrech). Uvědomte si, že tři koule nestačí.

12. Ano. Rovina $x + 2y + 4z = 0$ se „odklání" od směrů os rychlostmi v poměru $1 : 2 : 4$. Čísla 0 až 7 lze zapsat ve dvojkové soustavě. Rovinu lze o 1 vzdálit.

13. Je $3 \cdot 19^2$ možných vpichů. Žádný nemůže být narušen jen jedním kvádříkem (parita). Zároveň každý kvádřík blokuje jediný vpich. Konečně $3 \cdot 19^2 \cdot 2 = 2166 > 2000$.

14. Žádné tři vrcholy dvacetistěnu netvoří pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, takže „dělba" vrcholů osmistěnu musí být $3 : 3$, a to na dva rovnostranné. Dvacetistěn obsahuje rovnostranné trojúhelníky jen dvou velikostí, poměr jejich velikostí je jako úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka ku straně, tedy $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

15. Uvažte objemy ε-okolí obou kvádrů (tj. jakýchsi zaoblených nadkvádrů). Pro každé ε je objem ε-okolí vnějšího kvádru větší (obsahuje ε-okolí toho vnitřního uvnitř sebe), takže (úvahou o obrovském ε) musí mít větší koeficient u vedoucího členu ε^2 (členy s ε^3 se odečtou).

16. Ano. Ke každé stěne krychle přilepte rovnoběžně s jistými jejími hranami dlouhou tenkou destičku tak, aby se její konce při pohledu ze středu krychle „schovaly" za destičky přilepené k jiným stěnám. Odmyslete si krychli a 6 destiček spojte „mosty", které nebudou z jejího střed vidět.

17. Zkonstruujte nejdřív 2012 konvexních mnohoúhelníků, které budou všechny svislé, vůči sobě mírně pootočené a každý další se bude dotýkat všech předchozích „zespodu". Mnohoúhelníky poté doplňte na velmi placaté jehlany.

18. Vzpomeňte si, že povrch vrchlíku jednotkové koule je $2\pi \cdot h$, kde h je jeho výška. Vrchlíky odřezané všemi stěnami zakrývají (s překryvem) povrch celé koule, takže součet jejich povrchů je větši než 4π a součet jejich výšek než 2.

19. Uvažme polokouli nad studnou. Svislý průmět každého prkna určuje kulový polopás o pevném povrchu (ten totiž závisí jen na tloušťce pásu, nikoliv na jeho pozici – odečítáme kulové vrchlíky). Je potřeba zakrýt celou polokouli, tedy je potřeba alespoň 10 prken. Tolik stačí.

20. Ano. Skládejte pravidelné čtyřstěny do jedné vrstvy do jakési mřížky tak, aby měly jednu hranu „dole“ a jednu „nahoře“ a byly do sebe „zaklíněné“.

Literatura a zdroje

Čerpal jsem z archivu PraSátka a ze stránek *problems.ru*.

Mocnost bodu ke kružnici

Martina Vaváčková

Na přednášce si řekneme, co je to mocnost bodu ke kružnici a proč se hodí ji znát. Naučíme se, jak a kdy je výhodné ji použít. Po seznámení se základními vlastnostmi se pustíme do řešení příkladů.

Trocha teorie na úvod

Definice. Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r. *Mocností* bodu M ke kružnici k rozumíme číslo $p(M,k) = |MO|^2 - r^2$.

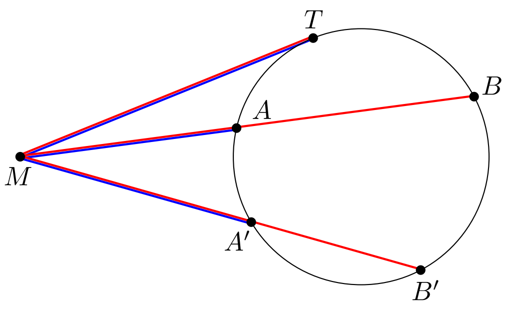
Poznámka. Pokud bod M leží vně, resp. uvnitř kružnice k, je číslo $p(M,k)$ kladné, resp. záporné. Leží-li bod M na kružnici k, je $p(M,k) = 0$.

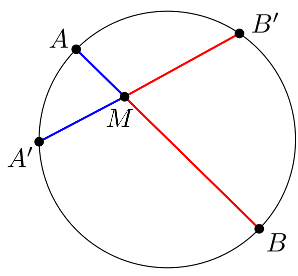
Poznámka. Nechť M a N jsou dva různé body. Pak $p(M,k) = p(N,k)$, právě když $|MO| = |NO|$.

Tvrzení. *Nechť přímka p vedená bodem M protne kružnici k v bodech A, B. Pak platí*

$$p(M,k) = \begin{cases} |MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ vně } k, \\ -|MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ uvnitř } k. \end{cases}$$

Jestliže speciálně M leží vně k a označíme T bod dotyku tečny ke kružnici k vedené bodem M, pak $p(M,k) = |MT|^2$.





Tvrzení. *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a $M = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový, právě když $|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$.*

Definice. Nechť k, l jsou kružnice. Množinu bodů X splňujících $p(X, k) = p(X, l)$ nazýváme *chordálou* kružnic k, l.

Tvrzení. *Chordálou dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.*

Příklady

Příklad 1. Kružnice k, l se středy K, L se protínají v bodech A, B. Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l, která se jich dotýká v bodech T, U, v bodě P. Pak $|PT| = |PU|$.

Příklad 2. Na prodloužení tětivy KL kružnice k se středem O leží bod A. Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U. Označme M střed úsečky TU. Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový.

Příklad 3. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na jeho odvěsně AC zvolme bod D. Nyní sestrojme kružnici k_1, která se dotýká AB v bodě A a prochází bodem D. Dále též kružnici k_2, která se dotýká AB v bodě B a též prochází bodem D. Označme E druhý průsečík kružnic k_1 a k_2. Dokažte, že úhly BAC a DEC jsou shodné. (Hradiště 2007)

Příklad 4. Je dána kružnice k a bod A různý od jejího středu. Ukažte, že středy kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k, leží na jedné přímce. (MO 56–A–I–5)

Příklad 5. Uvažujme ty paraboly určené rovnicí $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, které protínají osy x, y ve třech různých bodech. Ke každé trojici průsečíků uvažme kružnici, která jimi prochází. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem. (Španělsko 1997)

Příklad 6. Kružnice k a l jsou soustředné, přičemž k leží uvnitř l. Bodem $A \in l$ vedeme tečnu AB ke k, kde $B \in k$, a jejíž druhý průsečík s kružnicí l označíme C. Dále buď D střed AB. Přímka procházející bodem A protne kružnici k v bodech E a F tak, že osy úseček DE a CF se protínají v bodě M na AB. Určete poměr $|AM|/|MC|$. (USA MO 1998)

Příklad 7. V trojúhelníku ABC označme B_0, C_0 paty příslušných výšek. Zvolme bod P tak, aby přímka PB byla tečnou ke kružnici opsané $\triangle PAC_0$ a přímka PC tečnou ke kružnici opsané $\triangle PAB_0$. Dokažte, že AP je kolmá na BC.
(MEMO 2011, MR&JT)

Příklad 8. Body P a Q leží na stranách CA a AB trojúhelníka ABC. Označme K, L a M postupně středy úseček BP, CQ a PQ. Dále předpokládejme, že přímka

PQ je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KLM. Ukažte, že body P a Q jsou stejně vzdálené od středu kružnice opsané $\triangle ABC$. (IMO 2009)

Další příklady

Příklad 9. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedené bodem Q. Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$. (PraSe 2005)

Příklad 10. Úhlopříčky nerovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Nechť A_1 je druhý průsečík kružnice opsané $\triangle BCD$ s přímkou AP, body B_1, C_1, D_1 definujeme obdobně. Dokažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je také lichoběžník.
(Turnaj měst 2008)

Příklad 11. V trojúhelníku ABC je $|BC| = 20$. Kružnice vepsaná dělí těžnici AD na tři stejné části. Určete obsah trojúhelníku ABC. (AIME 2005)

Příklad 12. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku platí $OI^2 = R^2 - 2rR$ (kružnice opsaná se středem O má poloměr R, kružnice vepsaná se středem I má poloměr r). *Hint:* Tvrzení vlastně hovoří o mocnosti bodu I ke kružnici opsané.

Zdroje

Mezi hlavní zdroje příkladů patří seminář *Umění vidět v matematice* vedený Michalem Rolínkem a Pepou Tkadlecem. Dále jsem čerpala ze starších příspěvků Alči Skálové a Pepy Tkadlece. Všem výše jmenovaným děkuji.

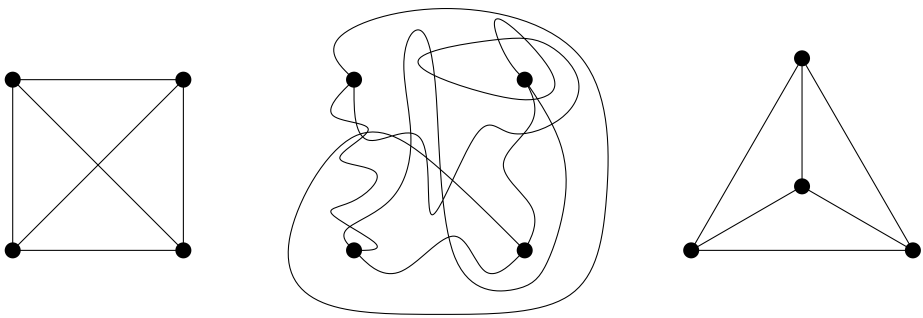
Zajímavé reprezentace rovinných grafů

Jan Kratochvíl (KAM MFF UK)

1. Grafy

Definice. *Graf* je dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina *vrcholů* a E je množina neuspořádaných dvojic vrcholů. Takovým dvojicím říkáme *hrany* grafu.

Názvosloví je zvoleno názorně, grafy totiž rádi graficky znázorňujeme neboli kreslíme v rovině. Vrcholy jako body, hrany jako křivky. Hrana u, v je nakreslena tak, aby ji znázorňující křivka začínala v bodě odpovídajícím vrcholu u, končila v bodě odpovídajícím vrcholu v a žádným jiným vrcholem (přesněji jeho nakreslením) neprocházela. Na obrázku jsou tři různá nakreslení téhož grafu – úplného grafu o čtyřech vrcholech.

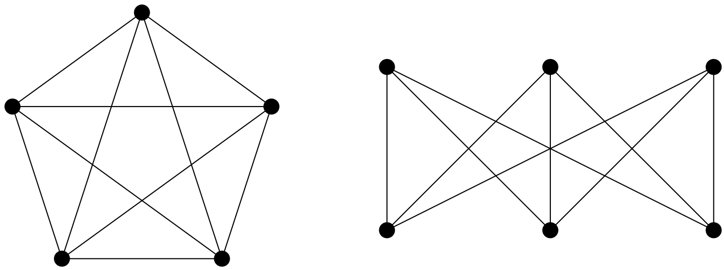


2. Rovinné grafy

Definice. Graf se nazývá *rovinný*, pokud je možno jej nakreslit v rovině tak, že žádné dvě hrany se nekříží.

Ne každé nakreslení rovinného grafu musí tuto podmínku splňovat, jak ukazuje obrázek nahoře. Úplný graf na čtyřech vrcholech je rovinný, jak dokazuje nakreslení úplně vpravo, ale nakreslení vlevo a uprostřed obsahují křížící se hrany.

Slavná věta pojmenovaná po polském matematiku Kuratowském říká, že graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje ani úplný graf na pěti vrcholech, ani úplný bipartitní graf na 3+3 vrcholech jako topologický podgraf (to znamená že hrany podgrafu jsou nahrazeny cestami). Tyto dva Kuratowského grafy vidíte na druhém obrázku.



Definice. *Stěny* konkrétního nekřížícího se nakreslení rovinného grafu jsou oblasti roviny, které by vznikly, kdybychom rovinu rozstříhali podle nakreslení hran.

Definice. Graf se nazývá *triangulace*, pokud existuje takové jeho nakreslení, ve kterém jsou všechny stěny ohraničeny třemi hranami (kombinatorickými trojúhelníky), včetně té vnější.

Do triangulace již nelze přidat žádnou novou hranu, aby graf zůstal rovinný. Tedy triangulace jsou maximální rovinné grafy na daném počtu vrcholů. Má-li triangulace n vrcholů, pak má vždy přesně $3n-6$ hran a každé nekřížící se nakreslení má $2n-4$ stěn. Úplný graf na čtyřech vrcholech je triangulace.

3. Barevnost rovinných grafů

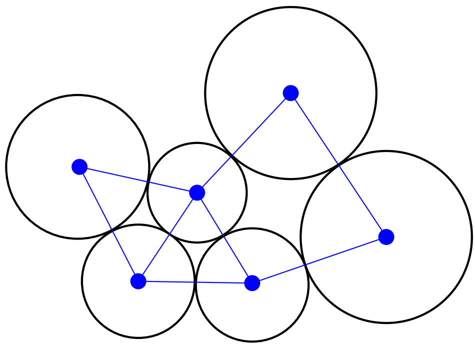
Definice. *Barevnost* grafu G, značená $\chi(G)$, je nejmenší počet barev, kterými lze obarvit vrcholy grafu G tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou nebyly obarveny stejnou barvou. Formálně definováno je to nejmenší přirozené číslo k takové, že existuje zobrazení $f\colon V \to \{1,...,k\}$, pro něž $f(u) \neq f(v)$, kdykoliv $\{u,v\} \in E$.

Slavný **problém čtyř barev** formulovaný poprvé F. Guthriem v roce 1852 říká, že barevnost libovolného rovinného grafu je nejvýše 4. Po řadě chybných pokusů byla tato hypotéza dokázána v roce 1975 Applem a Hakenem, kteří podali první zpočátku kontroverzní důkaz pomocí počítače. Druhý, opět počítačový, ale dnes obecně uznávaný důkaz podali Robertson, Sanders, Seymour a Thomas v roce 1997.

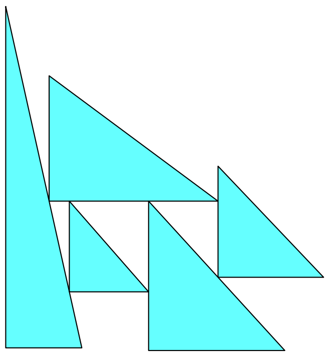
Slabší tvrzení, totiž že 5 barev stačí k obarvení libovolného rovinného grafu, bylo dokázáno Heawoodem již v roce 1890. Jednodušší důkaz matematickou indukcí, který si ukážeme, předložil C. Thomassen v roce 1994.

4. Dotykové reprezentace

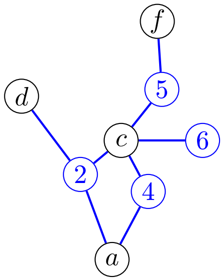
Rovinné grafy mají různé zajímavé reprezentace pomocí geometrických útvarů v rovině. Nejstarší a nejznámější je tzv. „coin representation“ dokázaná Koebem v roce 1930. Každý rovinný graf má reprezentaci, v níž vrcholy jsou reprezentovány disjunktními kruhy, z nichž libovolné dva se dotýkají právě tehdy, když odpovídající vrcholy jsou spojené hranou – jak ukazuje obrázek. Důkaz této věty je značně netriviální a používá poznatky matematické analýzy.

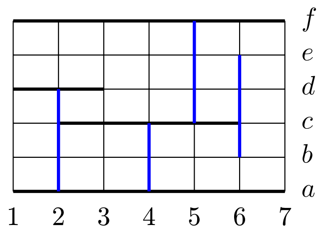


Francouzští matematici H. de Fraysseix a P. Ossona de Mendez ukázali, že každý rovinný graf má podobnou reprezentaci pomocí trojúhelníků. Návod, jak takovou reprezentaci sestrojit, si ukážeme.



Titíž pánové ještě spolu s J. Pachem ukázali, jak rovinné grafy barevnosti 2 reprezentovat jako dotykové grafy vodorovných a svislých úseček. I na sestrojení takové reprezentace si ukážeme návod.





5. Pár problémů na závěr

Povídání o rovinných grafech zakončíme dvěma otevřenými problémy, jejichž řešení zatím nikdo nezná. Oba se týkají *průnikových reprezentací* úsečkami, tj. reprezentací, kdy každému vrcholu grafu přiřadíme úsečku v rovině tak, aby úsečky přiřazené vrcholům spojeným hranou měly neprázdný průnik, zatímco dvojice vrcholů nespojených hranou byly disjunktní.

V roce 2009 Goncalves a Chalopin ukázali, že každý rovinný graf má takovou reprezentaci. Již dříve ale Scheinermann vyslovil následující otázku.

Problém 1. Má každý rovinný graf průnikovou reprezentaci pomocí úseček rovnoběžných s jedním z pevné čtveřice směrů v rovině, přičemž každé dvě rovnoběžné úsečky jsou disjunktní?

Jednoduchý důkaz takového tvrzení je nepravděpodobný, neboť by současně dokazoval větu o čtyřech barvách. Pokud ale tvrzení neplatí, možná se zrovna vám podaří najít protipříklad.

Definice. *Doplněk* grafu $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V, \{\{x, y\} : x \neq y,\ \{x, y\} \notin E\})$ se stejnou množinou vrcholů, ale množinou hran tvořící doplněk do množiny hran úplného grafu.

Problém 2. Má doplněk libovolného rovinného grafu průnikovou reprezentaci pomocí úseček v rovině?

Obsah