Sborník
Velké Vrbno 2006

Káťa Fišerová
Michal Hroch
Víťa Kala
Franta Konopecký
Jiří Koula
Anša Lauschmannová
Michal Rušin
Zuzka Safernová
Martin Tancer
Marek Tesař

editor : Saša Kazda
vydání první, náklad asi 40 výtisků
duben 2006
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Obsah

Matice

Káťa Fišerová

Definice. Maticí A *typu* $m \times n$ *nad množinou* M *budeme rozumět každé obdélníkové schéma*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in M$.

Uvažujme matice nad stejným komutativním okruhem R (např. nad $\mathbb{Z}$).

Definice. (Sčítání matic) *Nechť* $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ *jsou matice typu* $m \times n$. Součtem *těchto dvou matic budeme rozumět matici* $C = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$*, kde* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *pro* $i = 1, 2, 3, \dots, m$ a $j = 1, 2, 3, \dots, n$. *Sčítání matic nad komutativním okruhem je komutativní, asociativní, ke každému typu existuje nulová matice a tedy existují matice opačné.*

Definice. (Násobení matic) *Nechť* $A = (a_{ij})$ *je matice typu* $p \times r$ a $B = (b_{jk})$ *je matice typu* $r \times s$ *nad okruhem* R. Součinem matic A, B *(v tomto pořadí) budeme rozumět matici* $C = (c_{ik})$ *typu* $p \times s$*, kde* $c_{ik} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} b_{jk}$ *pro* $i = 1, 2, \dots, p$ a $k = 1, 2, \dots, s$. *(Prvek* c_{ik} *je skalárním součinem* i*-tého řádku matice* A *a* k*-tého sloupce matice* B*.) Násobení matic není komutativní, ale je asociativní.*

Definice. (Násobení skalárem) *Mějme* $a_{ij} \in R^{m \times n}$ a $c \in R$. *Potom* $cA = (ca_{ij})$.

Tvrzení. Pro skaláry c, d a matice A, B vhodného typu platí:

$$\begin{aligned} (c+d)A &= cA + dA \\ c(A+B) &= cA + cB \\ (cd)A &= c(dA) \\ c(AB) &= (cA)B = A(cB) \end{aligned}$$

Definice. (Transponování matic) Transponovanou maticí A^T *budeme nazývat matici* A *„převrácenou podle diagonály“:*

$$A = (a_{ij}) \text{ typu } p \times q \quad \Rightarrow \quad A^T = (a_{ji}) \text{ typu } q \times p.$$

Pozorování. Pro matice A typu $p \times q$ a B typu $q \times s$ platí: $\underbrace{(AB)^T}_{p \times s} = \underbrace{B^T A^T}_{s \times p}$

Okruh $R^{n \times n}$ (čtvercové matice nad okruhem R)

Protože R má jednotkový prvek, má $R^{n \times n}$ jednotkový prvek:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n.}$$

Existují netriviální dělitele „nuly", např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matice $A \in R^{n \times n}$ se nazývá invertibilní, existuje-li matice A^{-1} taková, že platí $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$. Jsou-li A, B invertibilní, potom je rovněž matice $A \cdot B$ invertibilní a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definice. (Speciální čtvercové matice)

(i) *skalární* $a \cdot E$ *(kde* $a \in R$*)*
(ii) *diagonální*
(iii) *horní trojúhelníková*
(iv) *dolní trojúhelníková*
(v) *symetrická* $a_{ij} = a_{ji} \quad (A = A^T)$
(vi) *antisymetrická* $a_{ij} = -a_{ji} \quad (A = -A^T)$
(vii) *Hermitovské (nad* $\mathbb{C}$*)* $a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad (A^T = \overline{A})$

Definice. Hodnost matice *je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Označení:* $r(A)$.

Poznámka. Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když rovnice $\boldsymbol{0} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ má pouze triviální řešení, tedy když $v_i \equiv 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když můžeme jeden z nich zapsat jako netriviální lineární kombinaci ostatních.

Pozorování. Hodnost matice se nezmění

(i) zaměníme-li pořadí dvou řádků
(ii) násobíme-li každý prvek libovolného řádku nějakým nenulovým číslem
(iii) přičteme-li c-násobek některého řádku k jinému řádku
(iv) přidáme-li nebo vynecháme-li řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků

Tvrzení. Platí $r(A) = r(A^T)$, tedy nezáleží na tom, zda počítáme lineárně nezávislé řádky, nebo sloupce.

Hodnost matice určujeme převedením na odstupňovaný tvar (v něm se počet lineárně nezávislých řádků matice rovná počtu nenulových řádků matice) nebo přímo na diagonální tvar (v něm se počet lineárně nezávislých řádků matice rovná počtu nenulových prvků na hlavní diagonále).

Soustava n lineárních rovnic o m neznámých nad tělesem T

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

kde $a_{ij}, b_i, x_1, x_2, \dots, x_n \in T$.

Úkolem je najít všechny m-tice $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in T^m$, pro které platí výše zapsaná SLR.

Definice. (Typy SLR)

(i) homogenní SLR: $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$
(ii) nehomogenní SLR: *aspoň jedno b_i není rovno nule.*

Definice. *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice soustavy. Pak*

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

je rozšířená matice soustavy.

SLR lze také zapsat ve tvarech:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \cdot \mathbf{x}^T = \boldsymbol{b}^T$$

Věta. *Nechť A je matice typu $n \times m$ nad T a $\mathbf{b} \in T^n$. Soustava $A \cdot \mathbf{x}^T = \boldsymbol{b}^T$ je řešitelná právě tehdy, když je sloupec pravých stran lineární kombinací sloupců matice soustavy, tj. $r(A) = r(A|\boldsymbol{b})$.*

Jestliže je soustava $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešitelná, potom má množina všech jejích řešení tvar $\mathbf{c}+W$, kde $\mathbf{c} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je libovolně zvolené řešení soustavy $A \cdot \mathbf{x}^T = \boldsymbol{b}^T$ a W je podprostor všech řešení příslušné homogenní soustavy $A \cdot \mathbf{x}^T = \boldsymbol{0}^T$. Dále je $\dim W = m - r(A)$.

Je-li $r(A|b) = r(A) = n$, má soustava právě jedno řešení.

Definice. *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n nad komutativním okruhem R (nad tělesem T).* Determinantem *matice A nazveme prvek:*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}.$$

Determinant je součet $n!$ sčítanců tvaru $\operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$; každý sčítanec je součinem n prvků matice A, přičemž z každého řádku a každého sloupce je vzat právě jeden prvek, a tento součin je opatřen znaménkem příslušné permutace ($\operatorname{sgn} \pi = \pm 1$).

Množina permutací S_3 pro determinant matic třetího řádu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi=-1}$$

Tvrzení. (Sarrusovo pravidlo)

$$\det A_{3,3} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

Motivace. (K čemu by mohly být determinanty dobré) Zkusme upravovat soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \quad / \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad / \cdot (-a_{12}) \end{aligned}$$

Po sečtení dostaneme $a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{11}$, z čehož máme:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Tedy:

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

Tvrzení. (Cramerovo pravidlo) Nechť A je regulární matice řádu n nad tělesem T. Jediné řešení soustavy $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b} \in T^n$ je libovolně zvoleno) má tvar: $x_1 = \frac{A_1}{A}, x_2 = \frac{A_2}{A}, \ldots, x_n = \frac{A_n}{A}$, kde matice A_i vznikne z matice A záměnou i-tého sloupce za sloupec pravých stran $\boldsymbol{b}$.

Základní vlastnosti determinantů

Nechť A je matice řádu n nad komutativním okruhem R.

(i) Je-li některý sloupec matice A nulový, je $\det A = 0$.
(ii) Je-li A horní (dolní) trojúhelníková, je det A roven součinu prvků na hlavní diagonále.
(iii) det $A^T =$ det A.
(iv) Vynásobíme-li některý sloupec (řádek) matice A prvkem $c \in R$, pak je determinant vzniklé matice B roven $\det B = c \cdot \det A$.
(v) Má-li matice A dva stejné sloupce (řádky), je $\det A = 0$.
(vi) Přičteme-li k nějakému řádku (sloupci) matice A c-násobek jiného řádku (sloupce), pak je determinant vzniklé matice roven $\det A$.
(vii) Přehodíme-li dva sloupce (řádky) matice, změní determinant znaménko.

Věta. (O rozvoji determinantu) *Nechť A je matice řádu n nad komutativním okruhem R. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \det A_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle i-tého řádku)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot (-1)^{i+j} \det A_{ji} \quad \textit{(rozvoj podle i-tého sloupce)},$$

kde A_{ij} je submatice matice A, která z ní vznikne vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

Poznámka. Člen $(-1)^{i+j}$ det A_{ij} se nazývá *algebraický doplněk* prvku a_{ij}.

Pravidelná tělesa

Michal Hroch

Při přípravě svojí přenášky jsem se nechal velmi výrazně inspirovat starším příspěvkem Roberta Káldyho (sborník ze soustředění ve Valdeku 2000), čímž mu na tomto místě děkuji.

Definice. (Mnohostěn) Mnohostěn *je konečná množina mnohoúhelníků, v níž platí:*

(1) *Mnohoúhelníky se stýkají pouze na stranách nebo ve vrcholech.*
(2) *Každá strana mnohoúhelníka se stýká s právě jednou stranou jiného mnohoúhelníka.*
(3) *Pro každé dva mnohoúhelníky existuje cesta mezi jejich vnitřky.*
(4) *Pro každý vrchol V platí, že existuje cesta mezi vnitřky stěn k vrcholu V přilehlých taková, že neprochází vrcholem V.*

Lemma. (Eulerova formule) *Pro mnohostěny platí*

$$v + s = h + 2,$$

kde v je počet vrcholů, s počet stěn a h počet hran.

Poznámka. S toutéž Eulerovou formulí (vztahem) se lze setkat i v teorii grafů a říká, že výše uvedený vztah platí pro každý souvislý rovinný graf. Lze také ukázat, že pomocí stereografické projekce lze jakýkoli konvexní mnohostěn reprezentovat rovinným grafem.

Lemma. (Další podmínky pro existenci mnohostěnu)

$$3s \leq 2h, \quad 3v \leq 2h.$$

Věta. (Steinitzova) *Ke každé uspořádané trojici přirozených čísel $[s,\ v,\ h]$ pro které platí $s + v = h + 2$, $3s \leq 2h$, $3v \leq 2h$ existuje konvexní mnohostěn s počtem stěn s, vrcholů v a hran h.*

Poznámka. Pokud bychom opět zabrousili do teorie grafů tak zjistíme, že platí následující věta: Pro libovolný vrcholově 3-souvislý rovinný graf G (tj. graf, který po vymazání libovolných 2 vrcholů zůstává souvislý) existuje konvexní mnohostěn, jehož grafem je právě G.

Pravidelné mnohostěny

Definice. (Pravidelný mnohostěn) Pravidelný mnohostěn *je konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné p-úhelníky ($p \geq 3$) takový, že v každém vrcholu se stýká stejný počet q ($q \geq 3$) hran a stěn. Takovéto mnohostěny též nazýváme* platónská tělesa.

Poznámka. Podmínku o stejném počtu hran a stěn z předchozí definice můžeme nahradit jednou z následujících ekvivalentních podmínek

(1) má kouli opsanou
(2) všechny jeho sousední stěny svírají stejný úhel
(3) všechny prostorové úhly tvořené vrcholem a stěnami k němu přilehlými jsou shodné

Pozorování. (Rovnice pro platónská tělesa) Vyjděme z podmínky, že ke každému vrcholu přiléhá stejný počet stěn a označme p počet stran každé stěny, q počet hran stýkajících se v jednom vrcholu. Pak z Eulerovy formule vyplývá:

$$E = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}.$$

Lemma. *Platónských těles je pouze pět. Pravidelný čtyřstěn, šestistěn (krychle), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.*

Pozorování. (Dualita) U platónských těles si lze všimnout duality mezi krychlí a osmistěnem a mezi dvanáctistěnem a dvacetistěnem. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě. Projevem této duality je i to, že středy stran každého pravidelného mnohostěnu určují pravidelný mnohostěn duální.

Polopravidelné mnohostěny

V definici pravidelného mnohostěnu požadujeme, aby mnohostěn byl konvexní, jeho stěny byly navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky a všechny vrcholy měly stejnou valenci – počet hran/stěn z něj vycházejících. Budou-li nadále všechny stěny konvexního mnohostěnu pravidelné mnohoúhelníky, můžeme pravidelnost porušit dvěma způsoby. Buď dovolíme, aby různé vrcholy mely různou valenci, nebo, aby stěny mely různé počty vrcholů.

Definice. (Deltaedry) Deltaedry *jsou tělesa, jejichž stěny jsou navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky. Nemusí splňovat např. podmínku stejného počtu stěn kolem každého vrcholu.*

Konvexních deltaedrů je 8, 3 z nich jsou platónská tělesa. Deltaedry vyhovují „intuitivním" kritériím platónských těles, ale nesplňují žádnou z uvedených dodatečných podmínek.

Definice. (Archimédovská tělesa) Archimédovská tělesa *jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou ne nutně stejné pravidelné mnohoúhelníky a jejichž vrcholy jsou rovnocenné, tj. žádné dva vrcholy nejdou odlišit.*

Archimédovských těles je 13, největší z nich má 96 stěn. Každé archimédovské těleso lze reprezentovat kombinací pravidelných mnohoúhelníků kolem jednoho vrcholu. Tímto lze matematicky dokázat, že žádné další archimedovské těleso neexistuje.

Pokud nebudeme požadovat rovnocennost vrcholů, stoupne počet vyhovujících těles 75, nepočítaje v tom hranoly a antihranoly, jichž je nekonečně mnoho.

Uvažujme dále tělesa, jejichž stěny jsou shodné, ale ne nutně pravidelné mnohoúhelníky. Máme dvě možnosti.

Definice. (Romboedry) *Stěny* romboedrů *tvoří shodné kosočtverce, jejichž délky úhlopříček jsou v poměru* $1 : \sqrt{2}$.

Existují dva pravidelné romboedry — dvanáctistěn a čtyřiadvacetistěn.

Definice. (Nastavovaná platónská tělesa) *Na každé stěně tělesa vztyčíme pravidelný jehlan, jehož základnou je původní stěna platónského tělesa.*

Protože výška oněch jehlanů může být libovolná, můžeme přidat ještě jednu omezující podmínku navíc. Jedna možnost je požadovat, aby stěny byly rovnostranné trojúhelníky, druhá možnost je požadovat stejné konvexní úhly mezi stěnami. Druhá možnost je výhodnější v tom, že výsledné těleso je vždy konvexní, tedy na něj můžeme rekurzivně použít stejný postup a tvořit pseudopravidelné mnohostěny o $9 \cdot 3^n$, $24 \cdot 3^n$ a $60 \cdot 3^n$ trojúhelníkových stěnách.

Literatura a zajímavé odkazy

[1] Robert Káldy, Pravidelné mnohostěny aneb o hledání dokonalosti `http://mks.mff.cuni.cz/library/pravidelne_mnohosteny/` `/pravidelne_mnohosteny.ps`

[2] Michaela Koblížková, Mnohostěny a středoškolská matematika (doktorská dizertační práce), 2004.

[3] `http://www.korthalsaltes.com/`

[4] `http://www.physics.orst.edu/~bulatov/polyhedra/index.html`

Řetězové zlomky

Víťa Kala

Úvod

Tento příspěvek napsal kdysi dávno Pavel Podbrdský. Moje přednáška bude výrazně jednodušší, zdaleka na ni neprobereme všechno; příspěvek ti spíše má posloužit jako přehled zajímavých vlastností řetězových zlomků. Rozhodně se tedy nemusíš bát na přednášku přijít, i když mu nerozumíš, leccos si (snad) objasníme.

Na této přednášce se budeme zabývat vyjádřením reálných čísel ve tvaru tzv. řetězových zlomků, tj. výraz

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \tag{$\heartsuit$}$$

$$a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1,\ a_2, \dots \in \mathbb{N}.$$

Tento zlomek může mít konečný, nebo nekonečný počet členů. Pokud je řetězový zlomek konečný, je jeho hodnota výsledkem konečného počtu racionálních úkonů nad čísly $a_0,\ a_1, \dots,\ a_n$. V takovém případě je intuitivně jasné, co míníme hodnotou tohoto řetězového zlomku. Cílem přednášky bude pojem řetězového zlomku přesněji zavést i pro případ nekonečného zlomku, studovat jeho vlastnosti a ukázat jeho jednoduché aplikace.

Zavedení pojmů a značení

Zprvu budeme řetězový zlomek ($\heartsuit$) chápat jako funkci v proměnných $a_0 \in \mathbb{R}$ a $a_1,\ a_2, \dots \in \mathbb{R}^+$.

Pro zkrácení budeme výraz ($\heartsuit$) zapisovat, jako

$$[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots], \tag{$\clubsuit$}$$

resp.

$$[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n], \tag{$\clubsuit$}$$

půjde-li o nekonečný, resp. konečný řetězový zlomek.

Definice. Úsekem *řádu k řetězového zlomku ($\clubsuit$) budeme rozumět*

$$s_k = [a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_k].$$

Zbytkem *řádu k řetězového zlomku* (♣) *budeme rozumět*

$$r_k = [a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \dots].$$

Pozorování. Pro konečné řetězové zlomky a $1 \le k \le n$ platí

$$[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n] = [a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_{k-1},\ r_k].$$

Sblížené zlomky

Věta. *Existují polynomy $P_n,\ Q_n$ o $n+1$ proměnných s celočíselnými koeficienty, takové, že pro každé $a_0 \in \mathbb{R},\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n] = \frac{P(a_0, a_1, \dots,\ a_n)}{Q(a_0, a_1, \dots,\ a_n)}.$$

Definice. Sblíženým zlomkem *řádu k řetězového zlomku* (♣) *budeme rozumět zlomek $\frac{p_k}{q_k}$, kde $p_k = P_k(a_0, a_1, \dots,\ a_k)$ a $q_k = Q(a_0, a_1, \dots,\ a_k)$ a $P_k,\ Q_k$ jsou polynomy z předchozí věty, které již nelze zkrátit.*

Věta. *Pro čitatele a jmenovatele sblížených zlomků platí rekurence*

$$p_0 = a_0,\ p_1 = a_1 a_0 + 1,\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1$$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2},\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

pro $k \ge 2$.

Poznámka. Někdy se nám bude hodit definovat také $p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0$, rekurence z předchozí věty pak platí i pro $k = 1$.

Pozorování. Z rekurence pro q_k a ze skutečnosti $a_k > 0$ pro $k > 0$ plyne, že všechny členy posloupnosti q_k jsou kladné.

Věta. *Pro $k \ge 0$ platí*

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k.$$

Důsledek.

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}.$$

Věta. *Pro $k \geq 1$ platí*

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

Důsledek.

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}.$$

Pozorování. Díky předchozím větám si můžeme utvořit představu o rozložení hodnot sblížených zlomků. Sblížené zlomky sudého řádu tvoří rostoucí posloupnost a sblížené zlomky lichého řádu tvoří klesající posloupnost, přitom libovolný sblížený zlomek sudého řádu je menší, než libovolný zlomek lichého řádu.

Věta. *Pro každé $1 \leq k \leq n$ platí*

$$[a_0;\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}.$$

Věta.

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k;\ a_{k-1},\ a_{k-2}, \ldots,\ a_1].$$

Nekonečné řetězové zlomky

Máme-li nekonečný řetězový zlomek, již jsme nadefinovali nekonečnou posloupnost jeho sblížených zlomků

$$\frac{p_0}{q_0},\ \frac{p_1}{q_1}, \ldots$$

Nabízí se následující přirozená definice:

Definice. *V případě, že posloupnost sblížených zlomků nekonečného řetězového zlomku má limitu $\alpha \in \mathbb{R}$, řekneme, že tento řetězový zlomek* konverguje *a má* hodnotu *α. V takovém případě budeme psát*

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2, \ldots].$$

V opačném případě řekneme, že daný řetězový zlomek diverguje.

Věta. *Konverguje-li nekonečný řetězový zlomek, konverguje také každý jeho zbytek. Naopak konverguje-li alespoň jeden z jeho zbytků, konverguje také celý řetězový zlomek.*

Věta. *Hodnota α nekonečného řetězového zlomku vyhovuje pro každé k nerovnosti*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Řetězové zlomky s přirozenými prvky

Dále se již výhradně budeme zabývat řetězovými zlomky, pro které platí $a_0 \in \mathbb{Z}$ a $a_1,\ a_2, \dots \in \mathbb{N}$.

Věta. *Je-li $a_0 \in \mathbb{Z}$ a $a_1,\ a_2, \dots \in \mathbb{N}$, pak řetězový zlomek $[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots]$ konverguje.*

Pozorování. Sblížené zlomky jsou v základním tvaru (nelze je zkrátit).

Definice. *Zlomky* vsunutými *mezi $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ (pro $k \geq 1$) budeme rozumět posloupnost zlomků*

$$\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}},\ \frac{2p_{k-1}+p_{k-2}}{2q_{k-1}+q_{k-2}}, \dots,\ \frac{a_k p_{k-1}+p_{k-2}}{a_k q_{k-1}+q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}.$$

Zobrazení čísel řetězovými zlomky

Dále ze svých úvah vyloučíme konečné řetězové zlomky, jejichž poslední prvek má hodnotu 1.

Věta. *Ke každému reálnému α existuje právě jeden řetězový zlomek, který má hodnotu α. Tento řetězový zlomek je konečný právě tehdy, když α je racionální číslo.*

Sblížené zlomky jako nejlepší přiblížení

Definice. *Zlomek $\frac{a}{b}$, $b > 0$ nazveme* nejlepším přiblížením prvního druhu *k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$, leží-li každý zlomek s týmž nebo menším jmenovatelem ve větší vzdálenosti od α než zlomek $\frac{a}{b}$. Jinak řečeno: platí-li nerovnost*

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$$

pro nějaký zlomek $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, pak již nutně $d > b$.

Věta. *Každé nejlepší přiblížení prvního druhu k* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je jedním ze sblížených nebo vsunutých zlomků* α.

Definice. *Zlomek* $\frac{a}{b}$, $b > 0$ *nazveme* nejlepším přiblížením druhého druhu k α, *pokud je splněno: Platí-li nerovnost*

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a|$$

pro nějaký zlomek $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, *pak již nutně* $d > b$.

Věta. *Každé nejlepší přiblížení druhého druhu k* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je nějaký sblížený zlomek* α. *Naopak není-li* $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, *pak je každý sblížený zlomek* α *nejlepším přiblížením druhého druhu k* α.

Poznámka. Existuje ještě spousta dalších zajímavých a užitečných vět o řetězových zlomcích, které bych sem mohl napsat. Jelikož by se délka mého příspěvku stala naprosto neúnosnou a jelikož asi většinu z nich na přednáškách nestihneme ani zmínit, nebudu je zde všechny vypisovat.

Literatura

Vše, co budeme na přednáškách dělat a spoustu dalších věcí najdete v knížečce A. J. Chinčin, *Řetězové zlomky*, Přírodovědecké vydavatelství Praha, 1952

Multiperiodická slova

Víťa Kala

Jak již název napovídá, na přednášce se budeme bavit o (multi)periodických slovech. Co to je?

Inu, co je slovo, to asi každý ví – slovo délky n je jednoduše posloupnost n písmen[1]. Písmena daného slova budeme (zleva) číslovat a značit třeba $u = a_1a_2a_3 \dots a_n$, kde u je naše slovo a a_i jsou písmena.

A co je to perioda, jistě také víš – periodou budeme nazývat libovolné číslo p takové, že pro každé i $(1 \leq i \leq n-p)$ je $a_i = a_{i+p}$. Nás bude zajímat, jaké periody může nějaké slovo mít. Všimni si, že každé slovo má spoustu period – například každé číslo $p > n$ je perioda. Tyto periody ovšem nejsou příliš zajímavé.

Jak nám napovídá selský rozum, jedno slovo několik různých „zajímavých“ period mít nemůže. Přesněji, dá se čekat, že má-li slovo periodu p a q, bude mít také největší společný dělitel (p, q) jako periodu. To pro dostatečně dlouhá slova vskutku platí:

Lemma. (Periodické od pánů Finea a Wilfa) *Pokud má slovo délky aspoň $p + q - (p, q)$ periody p a q, má i periodu (p, q).*

Nabízí se také otázka, jak je tomu pro větší počet period. Mějme nějakou (obecně nekonečnou) množinu period $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ a hledejme, jakou největší délku může mít slovo, které má všechny tyto periody, ale nemá jejich největší společný dělitel jako periodu. Pro usnadnění vyjadřování budeme předpokládat,[2] že tento největší společný dělitel je 1.

Chceme tedy, aby naše slovo mělo všechny periody obsažené v P, ale nemělo periodu 1, což neříká nic jiného, než že má obsahovat aspoň dvě různá písmena. Pro dané k označme $[P, k]$ největší možný počet různých písmen ve slově délky k s periodami P. Hledané největší k takové, že $[P, k] > 1$, označíme L_P.

Lemma. *Označme m nejmenší z čísel v množině P, ať je $Q = \{p - m; p \in P, p \neq m\} \cup \{m\}$. Pak pro $k \geq m$ platí $[Q, k] = [P, k + m]$. Pokud je $m > 1$, je $[P, 2m - 1] > 1$.*

Z tohoto lemmatu už snadno odvodíme následující tvrzení, které je odpovědí na naši otázku.

[1] Nezáleží nám (samozřejmě?) na tom, z jaké abecedy tato písmena jsou, nejsme tedy omezeni tím, že anglická abeceda má 26 znaků, česká asi 41 písmen, dokonce ani tím, že čínština má jen 10 000 znaků.

[2] Rozmysli si, že postup a výsledek půjde snadno zobecnit i na obecný případ!

Věta. *Definujme posloupnost* $Q_0 = P$, Q_1, Q_2, $\ldots$, Q_n *tak, že* $Q_{l+1} = \{p - m_k; p \in Q_k, p \neq m_k\} \cup \{m_k\}$, *kde* m_k *je nejmenší prvek* Q_k. n *je nejmenší takové, že* $m_n = 1$. *Pak*

$$L_P = m_0 + m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-2} + 2m_{n-1} - 1.$$

O takovýchto slovech jistě platí spousta zajímavých tvrzení, například to, že libovolné slovo s periodami P, které má (maximální možnou) délku L_P, je palindrom (čte se stejně zepředu i zezadu).

Pellova rovnice

Franta Konopecký

Úvod

Co se skrývá pod tímto pojmem? Patří to vůbec do pohádky?

Jako Pellova rovnice je známa rovnice

$$x^2 - Dy^2 = 1, \qquad (\heartsuit)$$

kde $D > 0$ je přirozené číslo, které není druhou mocninou. Řešení hledáme v celých číslech. Tato rovnice je jednou z nejdůležitějších rovnic v teorii čísel.

Zobecněním Pellovy rovnice jsou tzv. Pellovské rovnice tvaru $ax^2 \pm by^2 = c$. K řešení konkrétní Pellovské rovnice je potřeba různých metod, které zvládá např. program Mathematica verze 5.0 zadáním příkazu:

`Reduce[`$f[x, y]$` && Element[x|y, Integers]]`

kde $f[x, y]$ je levá strana zadané rovnice. Tento příspěvek se však zabývá výhradně řešením Pellovy rovnice.

Triviálními řešeními Pellovy rovnice jsou dvojice $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$. Těmi se již dále zabývat nebudeme a automaticky s nimi nebudeme počítat.

Jak vypadají řešení

Pro pochopení, jak Pellova rovnice funguje, je podstatná následující věta. Neříká nic jiného, než, že když už jsme našli nějaké řešení (x, y) Pellovy rovnice, tak umíme pomocí něj najít dalších nekonečně mnoho různých řešení.

Věta 1. *Předpokládejme, že rovnici $x^2 - Dy^2 = 1$ vyhovuje řešení $(x, y) = (p, q)$, pro nějaká $p, q \in \mathbb{N}$. Pak jsou řešeními i všechny dvojice celých (!) čísel (x, y) tvaru*

$$x = \frac{(p+q\sqrt{D})^n + (p-q\sqrt{D})^n}{2} \qquad (1)$$

$$y = \frac{(p+q\sqrt{D})^n - (p-q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}. \qquad (2)$$

Vzorečky na první pohled spadlé z nebe mají jednoduchý důkaz (prostým dosazením (neroznásobovat na n-tou!)) i jednoduché odvození. Odvození (a vlastně i o maličko delší důkaz) je následující:

Důkaz. Za předpokladu, že (p, q) řeší zadanou rovnici, je $1 = p^2 - Dq^2 = (p+q\sqrt{D})(p-q\sqrt{D})$, z čehož následně plyne $1 = 1^n = ((p+q\sqrt{D})(p-q\sqrt{D}))^n =$

$= (p+q\sqrt{D})^n(p-q\sqrt{D})^n$. Dále je zřejmé, že existují pevně daná $x, y \in \mathbb{N}$, že

$$\begin{aligned} x+y\sqrt{D} &= (p+q\sqrt{D})^n & (3)\\ x-y\sqrt{D} &= (p-q\sqrt{D})^n & (4) \end{aligned}$$

Pokud totiž roznásobíme výraz $(p+q\sqrt{D})^n$, určitě dostaneme nějaké přirozené číslo (v našem značení je to číslo x) plus y-násobek odmocniny $\sqrt{D}$. Čísla x, y pak získáme prostým vyřešením soustavy rovnic (3),(4). To, že nám vyjdou i z výše napsaných nechutných výrazů celá čísla, je dáno „požráním“ odmocnin $\sqrt{D}$ v čitateli zlomků.

Další věta říká, že množina řešení Pellovy rovnice je maximálně[3] množina dvojic $\left\{\left(\frac{(p+q\sqrt{D})^n+(p-q\sqrt{D})^n}{2}, \frac{(p+q\sqrt{D})^n-(p-q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}\right)\right\}$ pro pevně daná celá čísla (p, q) a $n = \{1, 2, 3, \dots\}$ (pokud existují řešení, tak jsou v tomto tvaru a jiná řešení už daná rovnice nemá).

Věta 2. *Mějme dvě různá celočíselná řešení (x,y) a (x',y') zadané rovnice (1). Pak existují celá čísla p, q a přirozená čísla k, l taková, že $x+y\sqrt{D} = (p+q\sqrt{D})^k$ a $x'+y'\sqrt{D} = (p+q\sqrt{D})^l$.*

Důsledek. Pro každá dvě různá řešení existuje „společný dělitel“ těchto řešení. Z existence minimálního řešení (nejmenšího dělitele všech ostatních řešení) rovnice (1) (tuto existenci si každý hravě zvládne rozmyslet) pak plyne množina řešení $\{(x+y\sqrt{D})\}$ ve tvaru $\{(p+q\sqrt{D})^n\}$.

Věta 3. *Pokud $D = d^2$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$, pak nemá Pellova rovnice $x^2 - y^2d^2 = 1$ celočíselné řešení.*

Věta 3 nám bude jasná, když si Pellovu rovnici upravíme do tvaru $x^2 - (yd)^2 = 1$ a otážeme se, kdy může být rozdíl dvou čtverců[4] roven jedné.

Věta 4. *Pro každé $D > 0$, $D \neq d^2$, má rovnice (1) alespoň jedno celočíselné řešení.*

Důsledek. (Vět 2 a 4) Každá Pellova rovnice[5] má množinu řešení (x, y) přesně ve tvaru $\left\{\left(\frac{(p+q\sqrt{D})^n+(p-q\sqrt{D})^n}{2}, \frac{(p+q\sqrt{D})^n-(p-q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}\right)\right\}$ pro pevně daná čísla p, q, a $n \in \mathbb{N}$.

[3] prozatím „maximálně“, později „právě“
[4] druhých mocnin
[5] s $D \neq d^2$

Zbývá ještě dát návod, jak to první, nebo alespoň jedno řešení, najít ... To bude i náznak důkazu, že toto řešení existuje, a tedy i věty 4. Pro tyto účely si ujednotíme označení.

Značení 1. Řetězové zlomky (z Víťovy přednášky) budeme značit způsobem

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\cdots}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}} \quad \text{a} \quad [a_0, a_1, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots}},$$

kde $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$.

Značení 2. p_n, q_n jsou čísla taková, že $\mathrm{nsn}(p_n, q_n) = 1$ a $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Nyní si pomůžeme několika nedokázanými větami. Začíná špetka humusu.

Věta 5. *Každé reálné číslo r lze jednoznačně vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $r = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ nebo $r = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. První způsob je pro čísla racionální, druhý pro iracionální.*

Věta 6. (Jediná, se kterou se obracejte na Víťu) *Každou iracionální odmocninu $\sqrt{D}$ lze zapsat ve tvaru $\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0}] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0, a_1, \dots]$.*

Věta 7. *Koeficienty $a_0, a_1, \dots$ a čísla $p_0, p_1, \dots; q_0, q_1, \dots$ hledáme pomocí těchto rekurentních vztahů (P_n, Q_n jsou další pomocné posloupnosti):*

$$\begin{array}{cc}
P_0 = 0,\ P_1 = a_0, & P_n = a_{n-1}Q_{n-1} + P_{n-1} \\
Q_0 = 1,\ Q_1 = D - a_0^2, & Q_n = \frac{D - P_n^2}{Q_{n-1}} \\
a_0 = \lfloor D \rfloor, & a_n = \lfloor \frac{a_0 + P_n}{Q_n} \rfloor \\
p_0 = a_0,\ p_1 = a_0 a_1 + 1, & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\
q_0 = 1,\ q_1 = a_1, & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}
\end{array}$$

A na co nám to všechno je? Odpověď není jednoduchá ;). Ale pomůže nám v ní jediná věta, další věta ...

Věta 8. *Pro čísla zadaná rekurencí v předchozí větě platí vztahy:*

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (-1)^{n+1} \\ p_n^2 - D q_n^2 &= (-1)^{n+1} Q_{n+1} \quad (\clubsuit) \end{aligned}$$

Teď s nápovědou, že právě pro $n = k$ (připomínáme, že k je délka periody posloupnosti a_n u řetězových zlomků) je $Q_k = 1$, a detailním shlédnutím identity

(♣) nám vyvstane, že jakmile najdeme periodu k, tak čísla q_{k-1}, p_{k-1} (popřípadě q_{2k-1}, p_{2k-1}) jsou nejmenším řešením zadané rovnice. Jak tato řešení používat a jestli jsou skutečně řešeními se dozvíte na přednášce (ať zbude aspoň střípek tajemna nad tímto krásným problémem).

A poslední věta je na zamyšlení, jak nám vyřešení základní Pellovy rovnice může pomoct i s dalšími obecnějšími rovnicemi.

Věta 9. *Nechť existuje nějaké celočíselné řešení rovnice $x^2 - Dy^2 = \pm c$, pak existuje těchto řešení nekonečně mnoho.*

Literatura

Kdo by se chtěl dozvědět víc, tak tady je stránka, ze které jsem převážně čerpal: `http://mathworld.wolfram.com/PellEquation.html`. Ať vám slouží.

Náhodné procházky

Jiří Koula

Autorem tohoto příspěvku je Šárka Štěpánová, s jejímž svolením jej zde uvádím a tímto jí děkuji.

Zavedení pojmů

Nejdříve si zavedeme několik základních pojmů teorie pravděpodobnosti, nebudeme je však přesně definovat (definice lze najít v každé základní literatuře), jen si řekneme, co znamenají, používat je budeme vždy v souladu s intuicí.

(i) pravděpodobnost: viz intuice
(ii) jev: něco, co se buď stane, nebo ne
(iii) úplný systém jevů: takové jevy, že při daném pokusu vždy musí nastat právě jeden z nich
(iv) podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$: pravděpodobnost, že nastane jev A, víme-li, že nastal jev B
(v) náhodná veličina X: X je výsledek pokusu (např. kolik ok padlo na kostce)
(vi) střední hodnota $\mathrm{E}\,X$: průměrná hodnota náhodné veličiny (např. při házení kostkou je $\mathrm{E}\,X = 3.5$),

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i),$$

kde X je náhodná veličina, která nabývá hodnot X_i, kde $i = 1, \ldots, n$.
(vii) podmíněná střední hodnota: (X je náhodná veličina jako výše)

$$\mathrm{E}(X|B) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i|B).$$

A ještě dvě tvrzení:

Věta. (o úplné pravděpodobnosti) *Mějme úplný systém jevů* $\{B_j, j = 1, \ldots, m\}$, *pak platí*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m} P(A|B_j) \cdot P(B_j).$$

Věta. (o úplné střední hodnotě) *Mějme úplný systém jevů* $\{B_j, j = 1, \ldots, m\}$, *pak platí*

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{E}(X|B_j) \cdot P(B_j).$$

Náhodné procházky

A nyní konečně k náhodným procházkám. Co to vlastně je? Obecně lze říci, že to jsou takové úlohy, kde předem známe množinu možných stavů a v jednotlivých krocích se náhodně z jednoho stavu dostáváme do jiného s určitou pravděpodobností. Není dán počet „kroků“, není to tedy nějaké kombinatorické počítání možností (těch je totiž nekonečně mnoho). Počítáme většinou pravděpodobnost, že se dostaneme do určitého (koncového) stavu, popř. jak dlouho to v průměru bude trvat. Nejlépe si vše ukážeme na příkladech.

Příklad. (Těžký život opilce aneb nejjednodušší náhodná procházka) Opilec jde z hospody tak, že každý krok je buď směrem šikmo dopředu a doprava s pravděpodobností p nebo dopředu a doleva s pravděpodobností $1-p$. Začíná uprostřed nekonečně dlouhé silnice, která je široká tak, že do strany smí udělat jen jeden krok, další týmž směrem je už do příkopu (ze kterého už nevstane a procházka tedy končí). Jaká je pravděpodobnost, že spadne do pravého (do levého) příkopu? Je vůbec jisté, že skončí v příkopu? Kolik kroků (průměrně) stihne udělat, než skončí v příkopě?

Příklad. (How to gamble if you must aneb opatrnost se ne vždy vyplácí) Hráč má 900 Kč, chce získat 1000 Kč. Pravidla sázení jsou jednoduchá: Vsadí-li X, vyhraje s pravděpodobností p částku $2X$, nebo prohraje s pravděpodobností $1-p$ a nedostane nic. Hra končí, jakmile vše prohraje, nebo má požadovanou částku 1000 Kč. Jakou má zvolit strategii? Jakou má pak pravděpodobnost výhry?

Příklad. (Tenis aneb alespoň jedna výchovně nezávadná úloha) Hráči A a B hrají tenis (s trochu zjednodušenými pravidly). A získá míček s pravděpodobností p, B s pravděpodobností $1-p$. Hra končí jakmile jeden z nich vyhraje 4 míčky, podmínkou však je, že má alespoň o 2 míčky víc, než ten druhý. Pokud tomu tak není, hrají dál, dokud nebude mít jeden z nich o 2 míčky víc. Jaká je pravděpodobnost výhry hráče A a jaká hráče B? Je jisté, že hra skončí? Jak dlouho průměrně budou takovou hru hrát?

Trojpoměr v geometrii

Anša Lauschmannová

Co to ten trojpoměr vlastně je?

Definice. Trojpoměrem[6] *bodu C přímky AB vzhledem k bodům A, B nazýváme číslo (ABC) definované takto:*

(i) *leží-li C na úsečce AB, je $(ABC) = -\frac{|AC|}{|BC|}$*

(ii) *leží-li C mimo úsečku AB, je $(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}$.*

Pro pevná A a B je každému bodu $X \neq B$ na přímce AB přiřazeno číslo (ABX). Naopak, každému reálnému číslu $\lambda \neq 1$ je jednoznačně přiřazen bod X na přímce AB.

Úloha. Trojpoměr je vlastnost uspořádaných trojic.

(a) Nakreslete trojici bodů na přímce takových, že $(ABC) = \frac{3}{2}$ a určete trojpoměry (BAC), (ACB), (CAB), (BCA), (CBA).

(b) Určete hodnoty zbývajících pěti trojpoměrů pro trojici bodů A, B, C takových, že $(ABC) = \lambda$. Dokažte, že pro každou uspořádanou trojici různých bodů X, Y, Z téže přímky platí

$$(XYZ) \cdot (YXZ) = 1$$

$$(XYZ) + (XZY) = 1$$

Úloha. Charakterizujte případ, kdy pro trojpoměr platí $(ABC) < 0$.

Úloha. Zvolte přímku AB za číselnou osu s body $A\,[0]\,, B\,[1]\,, X\,[x]$. Načrtněte graf funkce $y = (ABX)$.

Úloha. Nechť jsou dány body A, B a číslo $\lambda \neq 1$. Zvolme libovolnou přímku $AJ \neq$ $\neq AB$ procházející bodem A a považujme ji za číselnou osu, kde bod J odpovídá 1. Nechť K je čtvrtý vrchol rovnoběžníku $JABK$. Označme X průsečík přímky AB s přímkou KL, kde L je bod přímky AJ se souřadnicí λ. Ukažte, že bez ohledu na volbu bodu J je $(ABX) = \lambda$.

Úloha. Zkonstruujte pomocí pravítka a kružítka bod X na přímce AB tak, aby platilo

[6] Místo trojpoměr se častěji říká *dělicí poměr*, ale trojpoměr je kratší a líbí se mi víc.

(a) $(ABX) = \sqrt{3}$

(b) $(ABX) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $(ABX) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) $(BAX) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Tvrzení. (Zachování trojpoměru při promítání.) Trojpoměr každé uspořádané trojice různých bodů přímky se zachovává při rovnoběžném promítání této přímky na kteroukoli jinou přímku a při středovém promítání přímky na přímku s ní rovnoběžnou.

Úloha. Nakreslete dvě úsečky AB, XY ležící

(a) na rovnoběžných přímkách

(b) na různoběžných přímkách. Zvolte bod C na přímce AB a přiřaďte mu bod Z přímky XY tak, aby $(ABC) = (XYZ)$.

K čemu ten trojpoměr vlastně je?

Mějme trojúhelník ABC a tři body A', B', C' na přímkách $a = BC, b = AC, c = AB$, které nesplývají s vrcholy A, B, C. Platí následující tři věty:

Věta. (Menelaova) *Body A', B', C' leží na jedné přímce právě tehdy, když platí $(BCA')(CAB')(ABC') = 1$.*

Věta. (Cevova) *Přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem nebo jsou rovnoběžné právě tehdy, když $(BCA')(CAB')(ABC') = -1$.*

Věta. (Van Aubelova) *Nechť se přímky AA', BB', CC' protínají v bodě P. Pak platí $(AA'P) = (ACB') + (ABC')$.*

Cevova věta má nejvíc jednoduchých důsledků. Určitě Tě už někdy napadlo, že je divné, že těžnice, výšky i osy úhlů se vždycky protnou v jediném bodě. S pomocí Cevovy věty se to dá snadno dokázat.

Jak lze sčítat body?

Definice. Vektor v prostoru *si budeme představovat jako šipku, která má daný směr a velikost, ale můžeme pro ni zvolit libovolný počáteční bod. Je-li dána nějaká soustava souřadnic, umístíme počátek šipky do počátku souřadnic. Koncové body šipky potom určují* souřadnice vektoru. *Můžeme tedy psát* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Důležité je, že vektory umíme sčítat. Pomocí souřadnic se to udělá snadno, prostě sečteme jednotlivé složky, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.[7] Nakreslíme-li šipku $\boldsymbol{v}$ tak, že začíná v koncovém bodě šipky $\boldsymbol{u}$, je $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ šipka z počátečního bodu $\boldsymbol{u}$ do koncového bodu $\boldsymbol{v}$.

Vektory umíme také násobit reálným číslem[8] – prostě tím číslem vynásobíme jeho délku a zachováme jeho směr. V souřadnicích platí, že $\lambda \cdot \boldsymbol{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$.

Všimněte si, že výraz $[x_1, x_2, x_3]$ označuje souřadnice bodu X, zatímco výraz (x_1, x_2, x_3) značí souřadnice vektoru $\mathbf{x}$.[9]

Příklad. (Operace s body) Střed S úsečky AB má souřadnice $s_i = \frac{a_i+b_i}{2}$, kde $i = 1, 2, 3$, čili $S = \frac{A+B}{2}$. Toto je speciální případ následujícího tvrzení při volbě $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Soustava rovnic

$$X = \alpha A + \beta B$$

$$\alpha + \beta = 1,$$

(první rovnice je stručným zápisem tří rovností v souřadnicích), určuje přímku AB. Podobně platí, že bod X leží v rovině určené body A, B a C právě tehdy, když existují čísla α, β, γ taková, že

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

Tvrzení. (Zadání bodu jako součtu bodů) Zvolme si body A_i a čísla α_i, kde $i = 1, \ldots k$. Bod definovaný rovností

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1.$$

V případě, že pro všechna α_i platí $0 \leq \alpha_i \leq 1$, mluvíme o konvexní kombinaci bodů. Zkus si rozmyslet, že všechny konvexní kombinace dvou bodů A a B tvoří úsečku AB a všechny konvexní kombinace tří bodů A, B a C tvoří (vyplněný)

[7] Místo součet vektorů často také říkáme *lineární kombinace.*

[8] V tomto kontextu se číslům často říká *skaláry.*

[9] V matematické hatmatilce se prostorům, ve kterých existují jak body, tak vektory, říká *afinní prostory.*

trojúhelník ABC. Množině všech konvexních kombinací bodů A_i říkáme *konvexní obal* těchto bodů; je to nejmenší konvexní útvar, který všechny tyto body obsahuje, tedy útvar obsahující všechny body, které leží „mezi“ zadanými body A_i.

Sčítání bodů lze velmi výhodně využít k hledání těžišť různých objektů. Ukážeme si to na dvou jednoduchých příkladech:

Věta. (O těžišti trojúhelníka) *Těžnice trojúhelníka ABC se protínají v jednom bodě T, kterému říkáme těžiště. To dělí každou těžnici v poměru $2:1$ (počítáno od vrcholu k jeho protější straně). Platí*

$$T = \frac{A+B+C}{3}.$$

Věta. (O těžišti čtyřstěnu) *Těžnice čtyřstěnu $ABCD$ se protínají v jediném bodě T, kterému říkáme těžiště. Toto těžiště dělí každou těžnici v poměru $3:1$ (počítáno od vrcholu k protější stěně). Platí*

$$T = \frac{A+B+C+D}{4}.$$

Těžiště je středem každé úsečky, jejímiž krajními body jsou středy dvou protilehlých hran čtyřstěnu.

Příklad. (Další operace s body) Vektor z bodu A do bodu B má souřadnice $v_i = b_i - a_i$, čili $\boldsymbol{AB} = B - A$. Při volbě $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ to je speciálním případem následujícího tvrzení.

Tvrzení. (Zadání vektoru jako součtu bodů.) Nechť A_i jsou body a α_i jsou čísla. Vektor definovaný rovností

$$\mathbf{v} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 0.$$

Úloha. Je dán trojúhelník ABC. Zapište půlicí bod C^* těžnice t_C jako lineární kombinaci bodů A, B a C.

Úloha. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Napište rovnici těžnice t_A.

Vektorový pohled na trojpoměr

Tvrzení. (Rovnice bodu s daným trojpoměrem.) Nechť jsou dány body A a B a číslo $\lambda \neq 1$. Potom existuje právě jeden bod C takový, že platí $(ABC) = \lambda$. Lze jej zapsat ve tvaru
$$C = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B.$$

Věta. (O průsečíku výšek) *Výšky trojúhelníka ABC se protínají v jediném bodě V. Je-li navíc O střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku, platí*
$$V = O + (A - O) + (B - O) + (C - O).$$

Věta. (O Eulerově přímce) *Nechť T je těžiště trojúhelníka ABC, V a O jako v předešlé větě. Pak body O, T a V leží na jedné přímce a platí, že $|OT| : |TV| = 1 : 2$; jinými slovy, $|(OVT)| = \frac{1}{2}$.*

Literatura

První a druhá část vycházejí z poznámek *Libora Barta* na téma Geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka. Pokud Tě zaujala část třetí, doporučuji Tvé pozornosti přednášku *Martina Fraase* věnovanou *barycentru*; oba textíky najdeš v knihovně na našich stránkách.

Palindromická čísla

Michal Rušin

Palindromické číslo je „súmerné“ číslo. Jeho hodnota sa po napísaní číslic v opačnom poradí nezmení, napr. 11, 22, 3333, ale i 121, 12321, 10201 atď. Zaujímavé sú predovšetkým čísla, ktoré majú nejakú známu vlastnosť a naviac sú palindromické, napríklad:

- Palindromické prvočísla: 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, … Zatiaľ najväčšie známe palindromické prvočíslo je $10^{130022} + 3761673 \cdot 10^{65008} + 1$, ktoré našiel Harvey Dubner (7.11.2004)
- Palindromické štvorce: 0, 1, 4, 9, 121, 484, 676, 10201, 12321, …

Palindromickým číslam sa niekedy tiež hovorí Šeherezádine čísla (napríklad 101, 1001, 10001, …)

Formálna definícia

Hoci o palindromických číslach sa najčastejšie uvažuje v desiatkovej sústave, pojem palindromické číslo môže byť aplikovaný na prirodzené čísla aj v iných sústavách.

Definícia. *Uvažujme číslo $n > 0$ v sústave o základe $b \geq 2$, kde n je zapísané štandardným spôsobom pomocom $k + 1$ číslic a_i ako*

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b^i,$$

kde $0 \leq a_i < b$ pre všetky i a $a_k \neq 0$. Potom n je palindromické práve vtedy, keď $a_i = a_{k-i}$ pre každé i.

Alternatívna ale rovnocenná definícia: V ľubovoľnej sústave s pevným základom b je číslo n palindromické práve vtedy, keď platí jedna z nasledujucích podmienok:

(i) n pozostáva z jedinej číslice
(ii) n pozostáva z dvoch rovnakých číslic
(iii) n pozostáva z troch alebo viacerých číslic, prvá a posledná číslica je rovnaká a po ich odobraní je „nová prvá“ a „nová posledná“ opať rovnaká; postup možme opakovať až kým neostane len jedna alebo dve číslice.

Desiatkové palindromické čísla

Všetky jednociferné čísla v desiatkovej sústave (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) sú palindromické. Počet dvojciferných je 9, trojciferných je už 90 atď. Všetkých palindromických čísel menších ako $10n$, $n \geq 4$ je postupne 199, 1099, 1999, 10999, 19999, 109999, 199999, 1099999, ...

Existuje zaujímavý matematický postup, ktorým sa dá dopracovať k palindromickému číslu (v desiatkovej sústave): Ak zvolíme číslo a pripočítame k nemu jeho zrkadlový obraz (to isté číslo napísané v opačnom poradí) a túto operáciu (v anglickej literatúre nazývanú 196-Algorithm) budeme opakovať, veľmi často získame po konečnom počte opakovaní palindromické číslo. Existujú však čísla, u ktorých sa nevie, či sa po konečnom počte opakovaní algoritmu dá k palindromickému číslu dostať. Príkladom sú čísla 196 (podľa ktorého sa algoritmus nazýva), 295, 394, 493 a mnoho ďalších. Počet opakovaní može byť rôzny, napr. u čísla 89 budeme potrebovať 24 krokov a výsledkom bude číslo 8813200023188.

Iné základy

Ako sme už spomenuli, o palindromických číslach môžeme uvažovať aj v iných číselných sústavách ako v desiatkovej. Napríklad, binárne palindromické čísla sú: 0, 1, 11, 101, 111, 1001, 1111, 10001, 10101, 11011, 11111, 100001, ... tj. 0, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17, 21, 27, 31, 33, ...

Všeobecne, každé číslo n vieme zapísať ako palindromické vkaždej sústave so základom $b \geq n+1$ (pretože n je v týchto sústavách jednociferné) a tiež v sústave so základom $b = n-1$ (zápis n je potom 11_{n-1}). Mnoho čísel má však palindromickú reprezentáciu aj v číselnej sústave so základom menším ako $n-1$ (može ich byť aj viac), napr. číslo 105 je palindromické v piatich základoch: $1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 55_{20} = 33_{34}$. Číslo, ktoré nie je palindromické v žiadnej sústave so základom $2 \leq b < n-1$ sa nazýva *prísne nepalindromické číslo (strictly non-palindromic number).*

Príklad. Nájdite najväčší štvormiestny palindróm, ktorého druhá mocnina je tiež palindrómom.

Vytvořující funkce

Zuzka Safernová

Definice. *Nechť* $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* vytvořující funkcí *posloupnosti rozumíme mocninnou řadu*

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Operace s posloupnostmi a jejich vytvořujícími funkcemi

Většina operací, které můžeme provést s posloupnostmi, se převádí i na jejich vytvořující funkce. Např součet dvou posloupností člen po členu neznamená nic jiného než součet příslušných vytvořujících funkcí. Základní operace shrňme pro stručnost do následující tabulky:

operace s posloupnostmi	**příslušná vytv. funkce**
$\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$	$a(x) + b(x)$
$\{\alpha a_n\}_{n=0}^{\infty}$	$\alpha a(x)$
$\{\alpha^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$	$a(\alpha x)$
$(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, a_0, a_1, \dots)$	$x^n a(x)$
$(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$	$\frac{a(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)}{x^n}$
$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_2, \dots)$	$a(x^n)$
$\{\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\}_{n=0}^{\infty}$	$a(x)b(x)$
$\{(n+1)a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$	$a'(x)$
$(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_3, \dots)$	$\int_0^x a(t)dt$

Příklad. (Základní) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(1, 1, 1, \dots)$?

Řešení. Zajímá nás součet geometrické řady

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 1 + x + x^2 + \dots ,$$

který je, jak víme, $\frac{1}{1-x}$ pro $|x| < 1$, tudíž vytvořující funkce posloupnosti ze samých jedniček je $\frac{1}{1-x}$.

Zobecněná binomická věta

Nejdříve si definujme kombinační číslo. Nechť r je libovolné reálné číslo a k je nezáporné celé číslo. Pak:

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0 \\ \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} & \text{pro } k > 0 \end{cases}$$

Zobecněná binomická věta má tvar:

$$(1+x)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} x^i,$$

což v řeči vytvořujících funkcí neznamená nic jiného, než že vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots)$ je[10] funkce $(1+x)^r$.

Fibonacciho čísla

Předpokládám, že jste se s Fibonacciho čísly už někdy setkali (např. při množení králíků). Jsou dána rekurentní formulkou

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

pro n≥ 2 a počátečními podmínkami $F_0 = 0, F_1 = 1$. Naším cílem je vyjádřit n-té Fibonacciho číslo explicitně. Jak na to?

(i) Uvažme vytvořující funkci $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$. Vytvořme si schéma:

$$\begin{array}{rlr|c|l} F(x) & = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots + & & F_n x^n & + \dots \\ xF(x) & = \quad F_0 x + F_1 x^2 + \dots + & & F_{n-1} x^n & + \dots \\ x^2 F(x) & = \quad\quad F_0 x^2 + \dots + & & F_{n-2} x^n & + \dots \end{array}$$

[10]Pokud je r celé záporné ($r = -n, n \in \mathbb{N}$), pak lze kombinační číslo $\binom{r}{k}$ upravit na tvar

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \frac{(n+k-1)\dots(n+1)n}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1},$$

z čehož snadno plyne

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} x + \dots + \binom{n+k-1}{n-1} x^k + \dots$$

Díky rekurenci $F_n - F_{n-1} - Fn - 2 = 0$ zbude po odečtení druhého a třetího řádku od prvního $F(x)(1 - x - x^2) = F_0 + (F_1 - F_0)x$, z čehož vzhledem k počátečním podmínkám dostáváme

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

(ii) Jmenovatel $1 - x - x^2$ vyjádříme ve tvaru $(1 - \alpha x)(1 - \beta x)$, což se rovná $1 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta x^2$, kde $\alpha\beta = -1$ a $\alpha + \beta = 1$. Z Viètových vztahů plyne, že α, β jsou řešením charakteristické rovnice $y^2 - y - 1 = 0$, tedy

$$\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

(iii) Z (ii) plyne, že $F(x) = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$, což rozložíme na parciální zlomky. Tzn. hledáme konstanty A,B tak, aby

$$\frac{x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} = \frac{A}{(1 - \alpha x)} + \frac{B}{(1 - \beta x)}.$$

Není těžké zjistit, že $A = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(iv) Po rozkladu na parciální zlomky máme $F(x)$ ve tvaru:

$$F(x) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x}\right).$$

Vytvořující funkce $\frac{1}{1-\alpha x}$ je rovna $\sum \alpha^n x^n$, tedy

$$F(x) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\sum (\alpha^n - \beta^n) x^n\right),$$

z čehož vzhledem k (i) dostáváme požadované n-té Fibonacciho číslo[11]

$$F_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\alpha^n - \beta^n\right),$$

po dosazení konstant α, β:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Předchozí příklad nám dává obecný návod, jak řešit diferenční rovnice tvaru $Ag_n = Bg_{n-1} + Cg_{n-2}$.

[11] Poměr $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ se nazývá zlatý řez a má limitu $\frac{1}{\alpha}$ pro n jdoucí do nekonečna.

Kuchařka

Máme rekurentní rovnici tvaru $Ag_n = Bg_{n-1} + Cg_{n-2}$ a chceme určit její n-tý člen.

(i) Určíme kořeny příslušné charakteristické rovnice – ta má tvar $Ax^2 - Bx - C = 0$. Nechť jsou tyto kořeny p,q.

(ii) Hledané řešení má tvar $Kp^n + Lq^n$, přičemž konstanty K a L určíme z počátečních podmínek g_0 a g_1.

Počet korektních uzávorkování n párů závorek

Korektním uzávorkováním rozumíme posloupnost délky $2n$ obsahující n levých a n pravých závorek, kde každé levé závorce odpovídá právě jedna pravá závorka ležící napravo od ní. Např. (()())() je korektní uzávorkování, naproti tomu ())(není.

Označme si b_n počet korektních uzávorkování s n páry závorek. Uvažujme korektní posloupnost n párů závorek a jednu dvojici v ní pevně zafixujme. Je evidentní, že

$$\mathbf{(}\underbrace{()(())}_{b_i}\mathbf{)}\ \underbrace{()()}_{b_{n-1-i}},$$

z čehož plyne rekurentní formulka:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-1-i}. \tag{$\heartsuit$}$$

Určíme si počáteční podmínky: $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$.

Nechť $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Z pravidla pro násobení dvou vytvořujících funkcí dostáváme

$$b(x)b(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}\right) x^n,$$

což se vzhledem k ($\heartsuit$) rovná $b_1 + b_2x + b_3x^2 + \ldots$ Takže

$$xb^2(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_{n+1}x^{n+1} \ldots = b(x) - b_0,$$

z čehož plyne $xb^2(x) - b(x) + 1 = 0$. Řešením dostáváme

$$b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Tato rovnice má být splněna i pro $x = 0$. V prvním případě dostáváme, $b_0 = \frac{2}{0} = \infty$, což rozhodně není a ani nikdy nemůže být jednička. V druhém případě máme $b_0 = \frac{0}{0}$, což je sice neurčitý výraz, ale vzhledem k tomu, že rovnice nějaké řešení mít musí (víme, že $b_0 = 1$), je tohle jediná možnost.

Ze zobecněné binomické věty plyne:

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{1/2}{n}(-1)^n 2^{2n}}_{c_n} x^n = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

takže

$$b(x) = \frac{1-(1+c_1x+c_2x^2+\dots)}{2x} = -\frac{1}{2}\Big(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \dots\Big) = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1},$$

tudíž

$$b_n = -\frac{1}{2}c_{n+1}.$$

Podíváme-li se, jak jsme si zadefinovali c_n, zjistíme, že platí (na první pohled složitá) rovnost $b_n = -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-1)^{n+1}2^{2n+2}$, která se však dá vcelku přímočaře upravit na $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Těmto číslům říkáme Catalanova.

Příklady

Příklad. Nalezněte vytvořující funkce následujících posloupností:

(i) $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$
(ii) $3, 2, 3, 4, 3, 8, 3, 16 \dots$
(iii) $1, 4, 9, 16, \dots$

Příklad. Určete koeficient u x^{17} v $(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^3$

Příklad. Určete koeficient u x^{14} v $(x^5 + x^7 + x^9 + \dots)^2$

Příklad. Určete koeficient u x^5 v $(2+3x)^5\sqrt{1-x}$

Příklad. Určete koeficient u x^4 v $(1 - x + 2x^2)^8$

Příklad. Ověřte rovnost pro k přirozené:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots\Big(1+x^{2^k}\Big) = \frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x}$$

Příklad. Včelař chce, aby sadař vysadil 25 nových stromků, přičemž ten má k dispozici pouze 4 druhy. Sadařova manželka odmítá ořešák, neb je velký a zabírá moc místa. (Navíc každý správný borec ví, že med z ořešáku se nedá jíst `:-)`) Jabloně jsou jí taky proti gustu, mají jich už příliš. Naproti tomu bezmezně miluje třešňovo-švestkovou marmeládu, a tak klade tvrdé podmínky – nejvýše jeden ořešák, nejvýše 10 jabloní, alespoň 6 třešní a alespoň 8 slivoní (slivovice – silná motivace) – nebo rozvod. Kolika způsoby může sadař zabránit rozvodu? (Tedy kolik existuje různých způsobů výběru druhů stromů?)

Příklad. V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků (míčky téže barvy jsou nerozpoznatelné). Kolik je různých možností, jak z takovéto krabice vybrat soubor 70 míčků?

Příklad. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 kostkami padne dohromady součet 30?

Příklad. Vyjádřete obecný člen posloupností určených následujícími rekurencemi:

(i) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ pro $n = 1, 2, 3 \dots$
(ii) $a_0 = 0$,$a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$ pro $n = 0, 1, 2, 3 \dots$
(iii) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$ pro $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Příklad. Řešte rekurenci, kde v posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je následující člen aritmetickým průměrem předchozích dvou.

Příklad. Řešte rekurenci $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ s počátečními podmínkami $a_0 = 2$,$a_1 = 8$. Nápověda: $b_n = \log a_n$.

Příklad. Kolika způsoby lze vyjít schodiště o n schodech, jestliže každým krokem vyjdeme maximálně dva schody?

Příklad. Spočtěte počet triangulací konvexního n-úhelníku.

Literatura

[1] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum 2000

Komplexní čísla a jejich geometrické aplikace

Martin Tancer

Úvod

Komplexní čísla rozšiřují běžně používaná reálná čísla. Na některé aplikace se pak hodí lépe než právě čísla reálná. Například lze pomocí nich snáze řešit některé úlohy. Také se hodí k bodování úloh pro PraSátko. Více si povíme na přednášce.

Definice a základní vlastnosti komplexních čísel

Definice. Komplexními čísly *budeme rozumět výrazy tvaru $z = a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla. i pro nás bude pouze symbol. Hodnotu a nazveme* reálnou částí *čísla z a budeme značit* $\operatorname{Re} z$, *hodnotu b* imaginární částí *a budeme značit* $\operatorname{Im} z$. *Množinu komplexních čísel budeme značit* $\mathbb{C}$.

Poznámka. Pokud je a nebo b rovno nule, potom příslušnou část komplexního čísla nepíšeme, tj. píšeme například jen 1 místo $1 + 0i$, $-i$ místo $0 + (-1)i$ nebo 0 místo $0 + 0i$.

Poznámka. Všimni si, že se na komplexní čísla podle definice lze dívat jako na dvojice reálných čísel, to budeme časem používat.

Definice.

(1) Součtem *komplexních čísel $z = a + bi$ a $w = c + di$ rozumíme číslo* $z + w = (a + c) + (b + d)i$

(2) Součinem *komplexních čísel $z = a + bi$ a $w = c + di$ rozumíme číslo* $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Poznámka. Všimni si, že podle definice součinu je $i^2 = i \cdot i = -1$. Tento vztah byla hlavní motivace pro zavedení komplexních čísel. Myšlenka totiž byla rozšířit reálná čísla tak, aby rovnice $x^2 = -1$ měla řešení. V komplexních číslech tato rovnice tedy řešení má (totiž i, ale také $-i$). Násobení komplexních čísel může vypadat trochu podivně a těžko zapamatovatelně. Nicméně, stačí si pamatovat pouze vztah $i^2 = -1$ a potom se už intuitivně dá odvodit $(a+bi)(c+di) = ac+(ad+bc)i+bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$.

Jedna z hlavních sil komplexních čísel je následující věta (s těžkým důkazem). Ukazuje, že zabývat se polynomiální rovnicí $x^2 = -1$ stačilo.

Věta. (Základní věta algebry) *Každá rovnice tvaru $P(z) = 0$, kde P je nekonstantní komplexní polynom má v komplexních číslech řešení.*

Definice. *Nechť $z = a + bi$. Definujme číslo* komplexně sdružené *k číslu z jako $\overline{z} = a - bi$.*

Tvrzení. Nechť z_1, z_2 jsou komplexní čísla a P je komplexní polynom, potom platí.

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(3) $\overline{P(z_1)} = P(\overline{z_1})$.
(4) Je-li P reálný polynom, potom $P(z_1) = 0$, právě když $P(\overline{z_1}) = 0$.

Definice. *Nechť $z = a + bi$. Definujme* absolutní hodnotu *z čísla z jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.*

Tvrzení. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Goniometrický tvar komplexních čísel

Nyní přejdeme ke goniometrickému tvaru komplexních čísel, dává geometrický pohled na komplexní čísla a ukazuje jejich další vlastnosti.

Definice. *Každé nenulové komplexní číslo lze vyjádřit ve tvaru $r(\cos\phi + i\sin\phi)$, kde $r > 0$ je jednoznačně určeno a $\phi \in \mathbb{R}$ je jednoznačně určeno až na sčítanec $2k\pi$, kde k je celé. Tomuto tvaru se říká* goniometrický tvar *komplexního čísla.*

Jak je vidět z následujícího tvrzení, výhoda goniometrického tvaru je, že se v něm dobře násobí. Na druhou stranu se v něm hůře sčítá.

Tvrzení.

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\phi + i\sin\phi) \cdot r_2(\cos\theta + i\sin\theta) = \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta)). \end{aligned}$$

Věta. (de Moivre) $\cos n\phi + i\sin n\phi = (\cos\phi + i\sin\phi)^n$.

Na přednášce si povíme ještě o komplexní exponenciele, která se hodí k všelijakému počítání. Dále se budeme věnovat zejména příkladům - především geometrickým aplikacím komplexních čísel.

Příklady

Příklad 1. Nalezněte všechna komplexní řešení polynomiální rovnice $x^n - 1 = 0$.

Příklad 2. Nechť P je reálný polynom lichého stupně. Dokažte, že má kořen v reálných číslech.

Příklad 3. Spočítejte v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin k\alpha.$$

Příklad 4. Sečtěte

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots .$$

Příklad 5. Ke každé straně daného trojúhelníku připíšeme rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že těžiště takto vzniklých trojúhelníků tvoří opět rovnostranný trojúhelník.

Příklad 6. Ke každé straně daného čtyřúhelníku připíšeme čtverec. Dokažte, že středy takto vzniklých čtverců tvoří čtyřúhelník s kolmými a stejně dlouhými úhlopříčkami.

Příklad 7. Nechť $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ jsou stejně orientované rovnostranné trojúhelníky. Nechť C_i je střed A_iB_i. Dokažte, že buď body C_1, C_2 a C_3 splývají, nebo tvoří rovnostranný trojúhelník.

Příklad 8. Dokažte Ptolemaiovu větu, tj. tvrzení, že pro každý čtyřúhelník platí

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

a rovnost nastane, právě když je $ABCD$ tětivový.

Příklad 9. Spočítejte součet délek všech úhlopříček v pravidelném n-úhelníku, má-li poloměr kružnice opsané roven 1.

Příklad 10. Dokažte, že rovnice $a^3 + b^3 = c^3$ nemá řešení v nenulových celých číslech.

Teorie množin

Martin Tancer

Úvod

Hlavní náplní této přednášky bude (jak název napovídá) povídání o množinách a jejich vlastnostech. Určitě už víš, co množina je. Na přednášce si ukážeme, že intuitivní pohled na pojem množiny může dost často selhat a vede k mnoha paradoxům. Naznačíme, jak se dá těmto paradoxům vyhnout. Posléze se budeme zabývat velikostmi množin, ukážeme si například, že existují různě velká nekonečna.

Intuitivní pojem množiny

Nejprve si zmíníme intuitivní pojem množiny a ukážeme si, co je na něm špatné. Intuitivně je množina souhrn nějakých prvků, které do ní patří (například množina přirozených čísel, množina organizátorů prasátka nebo prázdná množina).

Paradox. Jak vypadá množina A definovaná jako množina všech čísel, které lze popsat nejvýše dvaceti českými slovy? Množina A je určitě konečná, protože českých slov je konečně mnoho, tedy má maximální prvek. Patří do množiny A číslo definované jako „největší prvek množiny čísel sestávající z prvků, které lze popsat dvaceti českými slovy, zvýšený o jedna“? Všimni si, že jsme pro popis tohoto prvku použili jen 16 slov, což je méně než dvacet.

Paradox. Jak vypadá množina všech množin, které neobsahují sebe sama? Obsahuje sebe sama, nebo ne?

Paradox. Jak vypadá množina všech podmnožin množiny všech množin?

Přesnější pojem množiny

Jak je vidět z předcházejících paradoxů, intuitivní pojem množiny má určité nedostatky. Objevují se v něm množiny, které nejsou příliš dobře definované. Proto se matematikové začali zabývat tím, jak tyto nedostatky odstranit, jak přesněji říci, co je to množina.

Tyto snahy vyústily v takzvanou axiomatickou definici množiny. Základním principem této axiomatizace je, že nepoužívá žádný přirozený jazyk, nýbrž jen výrazy z matematické logiky. Přirozený jazyk je totiž často nejednoznačný nebo zavádějící. Princip axiomatizace spočívá v tom, že se vyjmenují nějaké vlastnosti (axiomy), pomocí nichž lze získat množinu, a objekty získané jiným způsobem se za množiny nepovažují. Nezískáme tak například množinu všech množin, které neobsahují sebe sama.

Do axiomatické definice se v tomto příspěvku pouštět nebudeme, nicméně na přednášce si určitě řekneme o něco více.

Velikosti množin

Nyní už přejdeme k matematickým pojmům a budeme si povídat o velikostech množin. Našim hlavním cílem bude získat různě velké nekonečné množiny a naučit se tato nekonečna porovnávat, popř. zjišťovat o nich různé zajímavé výsledky. Na přednášce si řekneme motivaci, ve sborníčku zmíníme především definice a tvrzení.

Definice. *Nechť A, B jsou množiny, jejich* kartézským součinem *rozumíme množinu $A \times B$ definovanou jako množinu dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$.*

Definice. *Nechť A, B jsou množiny.* Funkcí *f z A do B rozumíme podmnožinu $A \times B$ takovou, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $f(a) \in B$, že $(a, f(a))$ patří do této podmnožiny. Méně formálně řečeno: Každému a z A přiřadíme právě jednu funkční hodnotu $f(a)$ z B.*

Definice. *Funkci f z A do B nazveme*

(i) prostou, *právě když platí $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.*
(ii) surjektivní*(„na“), právě když pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$, že $b = f(a)$.*
(iii) bijekcí, *právě když je prostá a surjektivní.*

Definice. *Řekneme, že* velikost množiny A je menší rovna velikosti množiny B, *značíme $A \preccurlyeq B$, právě když existuje prostá funkce z A do B. Ekvivalentně, existuje surjektivní funkce z B do A.*

Definice. *Řekneme, že A* a *B* jsou stejně veliké, *právě když existuje bijekce z A do B, značíme $A \approx B$. Dále používejme značení $A \prec B$ v případě, že $A \preccurlyeq B$, ale neplatí $A \approx B$.*

Následující věta vypadá velmi intuitivně, nicméně její důkaz není tak jednoduchý, jak by se na první pohled mohlo zdát.

Věta. (Cantor-Berstein) *Jsou-li A a B množiny splňující $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq A$, potom $A \approx B$.*

Definice. *Značme*

(1) $\mathbb{N}$ *množinu přirozených čísel.*

(2) $\mathbb{Z}$ *množinu celých čísel.*
(3) $\mathbb{Q}$ *množinu racionálních čísel.*
(4) $\mathbb{R}$ *množinu reálných čísel.*

Definice. *Je-li taková A množina, že $A \preccurlyeq \mathbb{N}$, potom A nazveme* spočetnou. *Ostatním množinám říkáme* nespočetné.

Věta. $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$

Věta. (Cantor) $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

Věta. *Je-li A nekonečná, potom $A \times A \approx A$.*

Definice. *Značme*

(1) 2 *množinu* $\{0, 1\}$.
(2) $\mathcal{P}(A)$ *množinu podmnožin množiny A.*
(3) A^B *množinu všech funkcí z B do A.*

Všimni si, že $A \times A$ je přirozeně ztotožnitelné s A^2 a dále $\mathcal{P}(A)$ je přirozeně ztotožnitelné s 2^A.

Věta. $\mathcal{P}(A) \succ A$.

Věta. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$.

Ještě jedna zajímavost

Z počítání s množinami na přednášce bude patrné, že koule o poloměru jedna je nekonečná množina a je stejně veliká jako množina sestávající ze dvou koulí o témže poloměru jedna. Následující paradoxní věta ukazuje, že ve světě matematiky se stále objevují tvrzení, nad kterými zůstává rozum stát.

Věta. (Banach, Tarski) *Kouli o poloměru* 1 *je možno rozdělit na konečně mnoho množin takových, že pouhým posouváním a otáčením těchto množin lze získat dvě koule o poloměru* 1.

Příklady

Příklad 1. Rozhodněte, zda lze $\mathbb{R}$ rozdělit na nespočetně mnoho nespočetných množin.

Příklad 2. Dokažte, že platí $A^{B\times C} \approx \left(A^B\right)^C$.

Příklad 3. Rozhodněte, jestli $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \succ \mathbb{R}$.

Příklad 4. Dokažte, že existuje funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která na každém intervalu nabývá všech reálných hodnot.

Goniometrické substituce

Marek Tesař

Použitie goniometrických substitúcií

Asi každý z vás vie, čo je to substitúcia. Je to akési nahradenie určitého výrazu iným výrazom. My sa na tejto prednáške pozrieme na špeciálny typ substitúcie a to na goniometrickú substitúciu. To je taká, že substituovať budeme rôzne goniometrické funkcie ako napríklad cos, sin, tg, cotg a prípadne ich kombinácie. Tak si skúsme uviesť jeden krátky príkladík.

Úloha. Nech a, b sú reálne čísla také, že $a^2+b^2 = 1$. Nájdite maximum a minimum výrazu $a \cdot b$.

No asi je každému hneď jasné, že musí platiť $-1 \leq a, b \leq 1$. Ďalšia vec, ktorá sa dá tiež rýchlo vypozorovať je, že z rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ vyplýva, že existuje reálne číslo σ také, že $a = \sin\sigma$ a $b = \cos\sigma$. A to je naša hľadaná goniometrická substitúcia. Teraz si už len stačí uvedomiť, že $a.b = \sin\sigma.\cos\sigma = 1/2\sin 2\sigma$. A každému je asi jasné, že koľko je hladané maximum a minimum.

Skúsený riešiteľ by tento prvý príklad takmer určite neriešil pomocou goniometrickej substitúcie, ale najskôr asi pomocou nejakej AG nerovnosti. Neskôr si však ukážeme príklady, kedy takáto substitúcia, bude najpriamejší postup k nájdeniu riešenia. Trošku to už naznačuje aj nasledujúci príklad.

Úloha. Nech a, b, c, d sú reálne čísla, ktoré splňujú $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ a $ac + bd = 0$. Zistite aké hodnoty môže nadobúdať výraz $ab + cd$.

Tak ak by sme použili podobnú substitúciu ako v predchádzajúcom prípade tak by sme mohli substituovať $a = \sin\sigma$, $b = \cos\sigma$, $c = \sin\theta$ a $d = \cos\theta$. Potom dostávame $0 = ac + bd = \sin\sigma\sin\theta + \cos\sigma\cos\theta = \cos(\sigma - \theta)$. A teda dostávame, že $\sigma - \theta = \pi/2 + k\pi$ pre vhodné celé číslo k. My ale chceme zistiť hodnotu výrazu $ab+cd = \sin\sigma\cos\sigma+\sin\theta\cos\theta = 1/2(\sin 2\sigma+\cos 2\theta)$. My však vieme, že $2\sigma = 2\theta+$ $+\pi+2k\pi$ a teda $ab+cd = 1/2(\sin(2\theta+\pi+2k\pi)+\sin 2\theta) = 1/2(\sin(2\theta+\pi)+\sin 2\theta)$. No a teraz už nie je ťažké ukázať, že $ab + cd = 0$.

Na záver si dajme ešte jednu netriviálnu úlohu:

Úloha. Spočítajte sumu $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}(1/(1 + n + n^2))$.

No a ako ste si už určite všimli, tak výhodou použitia goniometrických substitúcií je práve to, že pre goniometrické funkcie platia rôzne identity (ktoré obecne pre reálne čísla neplatia) a práve v tom je sila týchto substitúcií.