Sborník Rejhotice 2006

Káťa Fišerová
Jaroslav Hančl
Víťa Kala
Franta Konopecký
Anša Lauschmannová
Pavel Paták
Michal Rušin
Zuzka Safernová
Martin Tancer

editor : Saša Kazda
vydání první, náklad asi 40 výtisků
říjen 2006
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Nerovnosti

Káťa Fišerová

Tento příspěvek je až na menší změny (a počeštění) dílem Marka Tesaře, kterému tímto děkuji za pomoc.

Definice. (Symetrie) *Nerovnost je* symetrická v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, *pokud se nezmění, dosadíme-li n-tici $x_1, x_2, \dots, x_n$ v libovolném pořadí.*

Definice. (Homogennost) *Nerovnost $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ se nazývá* homogenní v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, *jestliže je pro každé $t \in \mathbb{R}^+$ ekvivalentní s nerovností $Q(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \geq 0$. (Nerovnost $L \geq P$ zapíšeme jako $G = L - P \geq 0$.)*

Tvrzení. (využijeme při důkazu AG-nerovnosti) Jsou-li $x_1.x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ a $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, pak platí $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$. Přitom rovnost nastane, jen když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

Mezi nejpoužívanější nerovnosti patří nerovnosti mezi harmonickým (H), geometrickým (G), aritmetickým (A) a kvadratickým (K) průměrem, které vypadají následovně: Mějme nezáporná čísla x_1, x_2, $\dots$, x_n a nechť

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{n}{(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n})}, \\ G(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sqrt[n]{(x_1 x_2 \cdots x_n)}, \\ A(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}, \\ K(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}, \end{aligned}$$

potom platí

$$H \leq G \leq A \leq K.$$

Z nerovností mezi těmito průměry je asi nejpoužívanější nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem zvaná též AG-nerovnost. Tu si i dokážeme.

Další nerovností, kterou se budeme zabývat, bude Čebyševova nerovnost.

Věta. (Čebyševova nerovnost) *Mějme reálná čísla $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ a $y_1 \leq \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ pro n přirozené. Potom platí*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \leq n \cdot (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n).$$

Další neméně známou je Cauchyho nerovnost (někdy zvaná také Buňakovského nebo Schwarzova).

Věta. (Cauchyho nerovnost) *Mějme reálná čísla* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *pro* n *přirozené. Potom platí*

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

S těmito základními nerovnostmi bychom si měli vystačit. Budeme se také snažit pomocí nich vyřešit nějaké příklady (většinou samé jednoduché, aby nám to pěkně vycházelo `;-)`).

Kružnice opsaná a vepsaná čtyřúhelníku

Jaroslav Hančl

Úvod

Celkem běžně se v geometrii a především v olympiádách vyskytují úlohy o čtyřúhelnících a jejich příslušných kružnicích. V této přednášce se nejprve seznámíme s teorií, následně se naučíme kresli obrázky a nakonec vyřešíme pár příkladů a naučíme se hledat správné cesta k řešení.

Obvodové úhly

Definice. Obvodový úhel *na kružnici je takový úhel, jehož vrchol leží na kružnici a obě jeho ramena jsou sečnami kružnice.* Středový úhel *v kružnici je úhel, jehož vrchol je ve středu kružnice a jehož ramena procházejí středem kružnice.*

Věta. *Obvodové úhly sestrojené nad touž tětivou mají shodnou velikost, která je rovna polovině středového úhlu příslušící k dané tětivě.*

Kružnice opsaná

Definice. Tětivový čtyřúhelník *budeme nazývat takový konvexní čtyřúhelník, který je vepsán do kružnice.*

Jedná se tedy o kružnici opsanou danému konvexnímu čtyřúhelníku.

Věta. *Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, je-li splněna podmínka: Součet protějších úhlů čtyřúhelníku je* $180°$.

Věta. *Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku rovněž splňují tzv.* Ptolemaiovu větu*:*

$$|AC||BD| = |AB||CD| + |AD||BC|$$

Příklad 1. Máme zadané tři kružnice k, l, m procházející jediným společným bodem P. Další průniky kružnic k, l, kružnic l, m a kružnic k, m označme postupně A, B, C. Nyní zvolme na kružnici k bod K různý od A, P, C. Přímka KA protne kružnici l v bodě L a přímka LB protne kružnici m v bodě M. Dokažte, že bod C leží na přímce KM.

Příklad 2. Nechť kružnice k prochází středem kružnice a. Zvolme na kružnici k bod Ž a veďme tímto bodem tečny ke kružnici a. Průniky těchto tečen s kružnicí k označme A a B. Dokažte, že přímka AB je kolmá na střednou kružnic k a a.

Kružnice vepsaná

Definice. Tečnový čtyřúhelník *budeme nazývat takový konvexní čtyřúhelník, který je opsán kružnici.*

Jedná se tedy o kružnici, která se dotýká všech stran čtyřúhelníku neboli kružnici vepsanou danému konvexnímu čtyřúhelníku.

Věta. *Každý tečnový má tu vlastnost, že součet délek dvou protilehlých stran je roven součtu délek zbylých dvou protilehlých stran.*

Příklad 3. Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC mají vnější dotyk.

Příklady

Příklad 4. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme S průsečík jeho úhlopříček a paty kolmic z bodu S na přímky AB a CD označme E a F. Dokažte, že osa úsečky EF prochází středy stran BC a DA.

Příklad 5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Jeho stranám AB a BC jsou vně připsané shodné pravoúhelníky $ABMN$ a $LBCK$, kde $|AB| = |LB|$. Dokažte, že přímky AL, NK a MC procházejí jedním bodem.

Příklad 6. Nechť kružnice k s průměrem AB protíná kružnici l, jejíž střed je v bodě A v bodech C a D. Uvažujme bod M různý od bodů C a D, který leží na kružnici l. Označme P a Q po řadě průsečíky přímek CM a DM s kružnicí k. Dokažte, že $MPBQ$ je rovnoběžník.

Příklad 7. Je zadán čtyřúhelník takový, že existují postupně body E a F na průniku AB,CD a AD, BC. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABF, CDF, ADE a BCE procházejí společným bodem.

Příklad 8. Dokažte, že středy kružnic ABF, CDF, ADE a BCE z předchozího příkladu leží na jedné kružnici.

Příklad 9. V daném trojúhelníku ABC označme X a Y paty kolmic spuštěných z vrcholu A na osy vnitřních úhlů u vrcholů B a C. Dokažte, že přímky BC a XY jsou rovnoběžné.

Počítání teček

Víťa Kala

Určitě ses už mockrát potkal(a) s nějakým takovýmto příkladem: Urči, jaký obsah má mnohoúhelník nakreslený na obrázku! A vedle zadání byl nakreslený nějaký ten mnohoúhelník, přičemž všechny jeho vrcholy byly takzvané *mřížové body*, neboli body s celočíselnými souřadnicemi. Obvykle bylo potřeba obrázek rozdělit na několik čtverců, trojúhelníků a obdélníků a sečíst jejich obsahy. To ale může být pěkná otrava, a tak pan Georg Pick v roce 1899 vymyslel mnohem chytřejší metodu.

Pickova formule říká, že obsah jednoduchého[1] mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech (říkejme mu třeba *mřížový mnohoúhelník*) můžeme spočítat takto: Označme V počet mřížových bodů, které jsou uvnitř mnohoúhelníku, a H buď počet mřížových bodů, které jsou na jeho hranici. Hledaný obsah je pak roven $V + H/2 - 1$.

To je překvapení, co? Jak by mohlo jít spočítat obsah něčeho, co může být kdovíjak složité, tak jednoduše? Jaktože vzorec vůbec nezohledňuje tvar mnohoúhelníku? Na tom přece taky záleží, ne?

Ať se nám to líbí nebo ne, Pickova formule platí. Proč tomu tak je, si vysvětlíme na přednášce, zde uveďme jen, kudy se důkaz zhruba ubírá:

(i) Platí-li Pickova formule pro nějaké dva polygony[2] se společnou částí obvodu, platí i pro polygon, který dostaneme, když je spojíme.
(ii) Vzoreček platí pro jednotkový čtverec, a tedy i pro libovolný obdélník.
(iii) Vzoreček platí i pro jakýkoli trojúhelník.
(iv) Pickova formule platí pro všechny mnohoúhelníky.

Nu, a je to (: Nejen, že teď můžeš hravě počítat obsahy, ale Pickova formule se hodí i řešení nejrůznějších příkladů. Zkus si rozmyslet následující problémky:

Příklad 1. Platí nějaká obdoba Pickovy formule i v prostoru?

Příklad 2. Dokaž, že každý mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech má racionální obsah. (Každý znamená opravdu každý, tedy i nejednoduchý!)

Příklad 3. Půlbodem nazývejme libovolný bod o souřadnicích $(k/2, l/2)$, kde k a l jsou celá čísla. Každý půlbod určitě jde vyjádřit jako střed úsečky spojující dva mřížové body mnoha různými způsoby.

Příklad 4. Představ si, že máš půlbod ležící uvnitř nějakého mřížového mnohoúhelníku. Dokaž, že jej můžeme dostat jako střed úsečky spojující dva mřížové body, *které samy leží uvnitř tohoto mnohoúhelníku.*

[1] Jednoduchý obrazec poznáme podle toho, že jeho obvod neprotíná sebe sama.
[2] Polygon není nic jiného než přejatý výraz pro mnohoúhelník.

Povídání o matematice

Víťa Kala

Matematika je výplodem chorých mozků.
—Prof. RNDr. Tomáš Kepka, DrSc.

Na přednášce si budeme povídat o tom, proč vlastně matematika vypadá tak, jak vypadá. V tomto příspěvku rozhodně není zachycen obsah přednášky a nejdůležitější myšlenky v ní obsažené, ale jen uvedeno matematické tvrzení, které na přednášce použijeme jako ilustrační příklad.[3]

Věta. (o pevném bodu) *Nechť je $f : [0,1] \to [0,1]$ spojitá funkce. Pak má f aspoň jeden pevný bod, tedy existuje $x \in [0,1]$ takové, že $f(x) = x$.*

Jak uvidíme na přednášce, toto tvrzení je téměř zřejmé a dá se dokázat jedním obrázkem. Je ale takový obrázek korektním důkazem? Co to vlastně znamená, že funkce je spojitá? Aby o tom matematici mohli nějak pořádně mluvit, vymysleli spoustu divných nových pojmů a nepochopitelných definic známých věcí:[4]

Definice. (spojitá funkce) *Nechť je $f : [0,1] \to [0,1]$ funkce. Tuto funkci nazveme* spojitou, *jestliže $\forall x \in [0,1] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in (x-\delta, x+\delta) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*[5]

Definice. (supremum a infimum množiny) *Buď M neprázdná množina reálných čísel. Nejmenší číslo s (reálné nebo nekonečno) takové, že $\forall x \in M : s \geq x$ nazveme* supremem M. *Obdobně největší číslo i (reálné nebo minus nekonečno) takové, že $\forall x \in M : i \leq x$ nazveme* infimem M.[6]

Věta. *Každá neprázdná množina má supremum a infimum.*

Víc ošklivých pojmů bychom na přednášce potřebovat neměli, tak se rozloučíme a na dobrou noc si povíme pár příkladů, které s přednáškou sice opět vůbec nesouvisí, ale vyskytují se v nich spojitost a supremum a infimum. Nenech se moc znechutit neúspěchy snahy o jejich vyřešení. Pro někoho, kdo se s těmito pojmy potkává poprvé, mohou tyto příklady být dost těžké.

---

[3] A kromě tohoto tvrzení je v příspěvku spousta poznámek pod čarou, skoro víc než normálního textu (:

[4] Ty definice jsou FAKT divné, vůbec se tedy nenech znepokojit tím, že jim vůbec nerozumíš – já také ne (; Na přednášce si vše důležité důkladně vysvětlíme a nedůležité pečlivě vynecháme.

[5] To je síla, co? (:

[6] Když si člověk definici trošku rozmyslí, může si všimnout, že supremum a infimum jsou v podstatě jen zobecněním obvyklých a známých pojmů maximum a minimum. Problém je, že zatímco spousta množin maximum nebo minimum nemá, supremum a infimum existuje vždy.

Příklad 1. (Darbouxova vlastnost spojité funkce) Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, která v nějakém bodě nabývá hodnotu a a v nějakém hodnotu b (a¡b). Dokaž, že pro každé $y \in (a, b)$ existuje x takové, že $f(x) = y$.

Příklad 2. Dokaž, že každá neprázdná množina má supremum a infimum.

Příklad 3. (Ještě těžší než ostatní příklady) Nechť je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkce. Dokaž, že tato funkce nabývá maxima, tedy že $\exists x \in [0, 1] \forall y \in [0, 1] : f(x) \geq f(y)$.

Geometrická zobrazení

Franta Konopecký

Geometrická zobrazení jsou nádherná kapitola matematiky, do které když proniknete, tak už neuniknete. Pro lepší představu v tomto příspěvku najdete stručný přehled, co geometrická zobrazení jsou, jaké mají vlastnosti a příklady na ně. Rozlišujeme tři základní skupiny zobrazení – shodná, podobná a jiná.

Definice. *Zobrazení f je dáno, je-li k libovolnému bodu X (prvku dané množiny, např. roviny) určen jednoznačně bod $X' = f(X)$ jako jeho obraz.*

Shodná zobrazení

Definice. *Zobrazení roviny σ na rovinu σ se nazývá* shodné zobrazení, *právě když pro libovolné různé body X, Y roviny σ a jejich obrazy platí $\frac{X'Y'}{XY} = 1$.*

Shodnými transformacemi jsou posunutí (včetně identity), otočení (včetně středové souměrnosti), osová souměrnost a posunutá souměrnost. Předpokládám samozřejmost těchto pojmů, proto se s jejich výkladem nebudeme zdržovat.

Věta. *Trojúhelníkem XYZ a s ním shodným trojúhelníkem $X'Y'Z'$ je určena shodná transformace roviny.*

Věta. *Libovolné shodné zobrazení roviny je buď osovou souměrností, nebo je lze rozložit na nejvýše tři osové souměrnosti.*

Cvičení. V jedné polorovině s hranicí m jsou dány body A, B. Sestrojte na přímce m takový bod X, aby lomená čára AXB byla co nejkratší.

Cvičení. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je částí osy úhlu ABC, jsou-li dány délky jeho čtyř stran a, b, c, d.

Cvičení. Je dán úhel AVB s vnitřním bodem D. Sestrojte všechny kružnice, které procházení bodem D a dotýkají se ramen úhlu AVB.

Cvičení. Jsou dány body A, B, C ležící v tomto pořadí na přímce p a přímka q kolmá k přímce p v bodě C. Sestrojte na přímce q takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

Cvičení. V rovině zbyly z trojúhelníku ABC jen osy úhlů β, γ a bod A. Zrekonstruujte trojúhelník ABC.

Cvičení. Je dán ostrý úhel AVB a bod X jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod Y a na rameni VB bod Z tak, aby měl trojúhelník XYZ co nejmenší obvod.

Cvičení. Jsou dány body A, B. Vyšetřete množinu bodů, které jsou souměrné s bodem A podle některé přímky procházející bodem B.

Cvičení. V rovině je dána přímka p a mimo ni dva různé body A, B. Sestrojte na přímce p bod X tak, aby odchylka přímky AX od přímky přímky p byla dvojnásobkem odchylky přímky BX od přímky p.

Věta. *Zobrazení složené z posunutí t_1, t_2 určených vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je posunutí t_3 určené vektorem $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.*

Cvičení. Jsou dány kružnice k, l a přímka p. Sestrojte přímku q rovnoběžnou s přímkou p tak, aby vytínala stejně dlouhé tětivy na obou kružnicích.

Cvičení. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li délky jeho čtyř stran a, b, c, d a odchylku ω přímek a, c.

Cvičení. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li délky jeho úhlopříček e, f, úhel ω, který tyto úhlopříčky svírají, a vnitřní úhly α, β čtyřúhelníku.

Věta. *Každé posunutí $T(\mathbf{v})$ lze rozložit na dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami, které jsou kolmé na směr posunutí a jejichž vzdálenost je $\frac{1}{2}|\mathbf{v}|$. Každé otočení $R(S, \alpha)$ lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy se protínají ve středu S a svírají úhel $\frac{1}{2}\alpha$.*

Věta. *Složení dvou otočení je otočení nebo posunutí.*

Cvičení. Jsou dány tři rovnoběžné přímky a, b, c, na přímce a leží bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby bod B ležel na přímce b a C na c.

Věta. *Složením dvou středových souměrností $S_1(S_1), S_2(S_2)$ dostaneme posunutí o vektor $2\boldsymbol{S_1 S_2}$.*

Cvičení. Sestrojte lomenou čáru $ABCDE$, jsou-li dány body S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, které jsou středy úseček AB, BC, CD, DE, EA.

Cvičení. Existuje útvar se dvěma středy souměrnosti?

Cvičení. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY.

Cvičení. Jsou dány body A, B a kružnice $k(S, r)$. Sestrojte na kružnici k takové body C, D, aby platilo $AC||BD$ a úhel CSD měl danou velikost α.

Věta. *Zobrazení složené z libovolného sudého počtu osových souměrností je identita, posunutí nebo otočení. Zobrazení složené z libovolného lichého počtu osových souměrností je osová souměrnost nebo posunutá souměrnost.*

Podobná zobrazení

Definice. *Zobrazení roviny σ na rovinu σ se nazývá* shodné zobrazení, *právě když existuje kladné číslo k takové, že pro libovolné dva různé body X, Y roviny σ a jejich obrazy platí $\frac{X'Y'}{XY} = k$.*

Podobnými transformacemi jsou stejnolehlost a spirální podobnost.

Stejnolehlost si můžeme představit tak, že si chytneme rovinu za jeden pevný bod a jinak ji celou roztáhneme nebo zmenšíme. Takto se nám tvar ani orientace objektů nezmění, změní se jen jejich velikost. Zachovává se rovnoběžnost. Přímka se zobrazuje jako přímka, kružnice jako kružnice.

Na spirální podobnost lze použít stejnou představu jen s tím rozdílem, že po zvětšení nebo zmenšení roviny tuto rovinu ještě otočíme. Ve spirální podobnosti se nám tedy zachovává tvar, ale orientace objektů je jiná. Obraz přímky zobrazené ve spirální podobnosti svírá se svým vzorem úhel provedeného otočení.

Věta. *Trojúhelníkem XYZ a jemu podobným trojúhelníkem $X'Y'Z'$ je jednoznačně určena podobná transformace roviny.*

Věta. *Stejnolehlost i spirální podobnost mají vždy právě jeden samodružný bod.*

Věta. *Složením dvou stejnolehlostí je stejnolehlost, případně shodné zobrazení (při opačných koeficientech). Složením dvou spirálních podobností je spirální podobnost, nebo stejnolehlost nebo shodné zobrazení.*

Věta. (Mongeova) *Jsou k_1, k_2, k_3 kružnice s nekolineárními středy a různými poloměry, pak platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlosti každých dvou z těchto kružnic: všechny tři vnější středy stejnolehlosti leží na jedné přímce; každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.*

Cvičení. Je dána kružnice $k(S, r)$ a přímka $p = PQ$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnice k a přímky p v bodě P.

Cvičení. Je dána kružnice k a přímky m, n. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n a kružnice k.

Cvičení. Je dána kružnice k a bod P. Sestrojte bodem P přímku p, která protíná kružnici k v bodech A, B tak, že bod A je středem úsečky BP.

Cvičení. V rovnoběžníku $ABCD$ označme M, N po řadě středy stran DC a CB. Dokažte, že úsečky AM, AN dělí úhlopříčku BD na tři shodné části.

Jiná zobrazení

Jiným zobrazením se příliš věnovat nebudeme, spokojíme se s prozrazením, že mezi ně patří afinita, osová afinita, kolineace, kruhová inverze a spousta dalších zobrazení.

Příklady

Příklad 1. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.

Příklad 2. Jsou dány dva různé body A, B a kružnice $k(S, r)$. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí body A, B a vytínají na kružnici k tětivu délky $|AB|$. Bonbónek: Jak by to bylo s obecnou tětivou?

Příklad 3. Sestrojte na stranách AC, CB daného trojúhelníku ABC po řadě body X, Y tak, aby úsečky AX, XY a YB byly shodné.

Příklad 4. Na přímce h jsou dány body A, C, E v tomto pořadí. Ve stejné polorovině vyťaté přímkou h jsou pak rovnostranné trojúhelníky ABC a CDE. Střed úsečky AD označme S_{AD}, střed BE označme S_{BE}. Dokažte, že je trojúhelník $CS_{AD}S_{BE}$ rovnostranný.

Příklad 5. Kružnici k je vepsán rovnostranný trojúhelník ABC. Dokažte, že pro libovolný bod X kružnice platí: Největší ze vzdáleností bodu X od vrcholů trojúhelníku ABC je rovna součtu jeho vzdáleností od zbývajících dvou vrcholů.

Příklad 6. Je dán obecný trojúhelník ABC, který má ke svým stranám připsány rovnostranné trojúhelníky BCX, ACY, ABZ. Dokažte, že se přímky AX, BY a CZ protínají v jednom bodě a že dále platí $|AX| = |BY| = |CZ|$.

Příklad 7. V rovině je dán trojúhelník PQX, kde $|PQ| = 3$cm, $|PX| = 2,6$ cm, $|QX| = 3,8$ cm. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby se jemu vepsaná kružnice dotýkala přepony AB v bodě P, odvěsny BC v bodě Q a aby bod X ležel na přímce AC.

Příklad 8. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a bod X uvnitř tohoto trojúhelníku. Dokažte, že délky $|AX|$, $|BX|$ a $\sqrt{2}|XC|$ jsou délkami stran trojúhelníku.

Příklad 9. Kružnice k_1 a k_2 mají vnější dotyk v bodě A a současně se obě dotýkají zevnitř kružnice k v bodech A_1 a A_2. Bod P je jeden z vnějších průsečíků společné vnitřní tečny kružnic k_1 a k_2 s kružnicí k. Konečně body B_i jsou druhé průsečíky přímek PA_i s kružnicí k_i $(i = 1, 2)$. Dokažte, že se přímka B_1B_2 dotýká obou kružnic k_1, k_2.

Příklad 10. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označme postupně P, Q a R paty kolmic z bodu D na přímky BC, CA a AB. Dokažte, že $|PQ| = |QR|$ právě tehdy, když se osy úhlů ABC a ADC protínají na přímce AC.

Příklad 11. . Nechť $ABCD$ je daný konvexní čtyřúhelník s různoběžnými stranami BC a AD. Body E, F leží po řadě uvnitř stran BC a AD tak, že $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|DF|}{|AF|}$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P, přímky BD a EF v bode Q, přímky EF a AC v bodě R. Uvažujme všechny trojúhelníky PQR pro různé polohy bodů E a F. Ukažte, že kružnice opsané těmto trojúhelníkům mají společný bod různý od P.

Příklad 12*. V rovině je dán trojúhelník KLM a bod A ležící na polopřímce opačné k polopřímce KL. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, jehož vrcholy B, C a D leží po řadě na přímkách KM, KL a LM. (Calábek...)

Literatura

Kdo by se chtěl dozvědět víc, tak tady je seznam mých pramenů:

[1] František Kuřina.*10 geometrických transformací.* Prometheus, 2002

[2] Jaroslav Šedivý. *Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách.* edice Škola mladých matematiků, Mír, 1980.

[3] Stránka a stará zadání KMS: `http://www.kms.sk`

[4] Stránka se starými zadáními matematické olympiády: `http://www.math.muni.cz/~rvmo/`

Čínská zbytková věta

Anša Lauschmannová

Motivační příklad

Máme několik předmětů, jejich počet není znám. Když je postupně rozdělujeme do trojic, zbudou dva; při dělení do pětic zbudou tři; při dělení do sedmic zbudou opět dva. Jaký počet předmětů máme? (Sun Tsu Suan Ching, 4. století)

Historka s morálním ponaučením

Stará žena šla na trh. Do jejího košíku s vejci kopl kůň a vejce se rozbila. Majitel koně ženě nabídl, že zaplatí škodu, a ptal se, kolik měla v košíku vajec. Ale žena je stará a nepamatuje si to. Ví jen, že když je z košíku vyndavala po dvou, zbylo na dně jedno vajíčko. Totéž se stalo, když je vyndavala po třech, po čtyřech, po pěti a po šesti, ale když je vyndavala po sedmi, nezbylo na dně žádné. Jaký nejmenší počet vajec mohl být v košíku? (Brahmagupta: Brahma Sútra Siddhanta, 7. století)

Značení.

(1) (n_1, n_2) – největší společný dělitel čísel n_1 a n_2
(2) $\mathrm{nsn}(n_1, n_2)$ – nejmenší společný násobek čísel n_1 a n_2

Lemma. *Soustava dvou kongruencí*

$$x \equiv r_1 \pmod{n_1},$$
$$x \equiv r_2 \pmod{n_2}$$

je řešitelná, pouze pokud $r_1 \equiv r_2 \pmod{(n_1, n_2)}$. *Existuje jediné nezáporné řešení menší než* $\mathrm{nsn}(n_1, n_2)$.

Věta. (Čínská věta o zbytcích) *Mějme po dvou nesoudělná čísla* $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ *a nezáporná celá čísla* $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *taková, že* $r_1 < n_1, \dots, r_k < n_k$. *Pak soustava rovnic*

$$\begin{gathered} x \equiv r_1 \pmod{n_1}, \\ \vdots \\ x \equiv r_k \pmod{n_k} \end{gathered}$$

má vždy nezáporné řešení $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Existuje jediné nezáporné řešení* x *menší než* $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Důsledek. Soustava kongruencí $x \equiv r_i \pmod{n_i}$, $i = 1, \dots, k$, je řešitelná právě tehdy, když pro každé i, j ($1 \le i < j \le k$) platí $a_i \equiv a_j \pmod{(n_i, n_j)}$. Je-li tato podmínka splněna, existuje celé číslo y takové, že soustava je ekvivalentní s kongruencí $x \equiv y \pmod{\operatorname{nsn}(n_1, \dots, n_k)}$.

Příklad. Zjistěte, jestli existuje 21 po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž každé je dělitelné jedním nebo více prvočísly z intervalu $\langle 2, 13 \rangle$.

Definice. *Nechť M je množina. Řekneme, že funkce f je* binární operace na M, *jestliže $M \neq \emptyset$ a f je zobrazeni z $M \times M$ do M. Pro $a, b \in M$ obvykle $f(a, b)$ zapisujeme jako $a \cdot b$, ab (multiplikativní zápis) nebo $a + b$ (aditivní zápis).*

Definice.

(1) *Množina M se nazývá* uzavřená vzhledem k operaci f, *jestliže pro každé $a, b \in M$ platí $afb \in M$.*
(2) *Řekneme, že binární operace $\cdot$ je* asociativní, *pokud pro všechny prvky $a, b, c \in M$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*
(3) *Řekneme, že binární operace $\cdot$ je* komutativní, *pokud pro všechny prvky $a, b \in M$ platí $a \cdot b = b \cdot a$.*
(4) *Prvek e množiny M nazveme* neutrální prvek, *pokud $\forall a \in M$ $a \cdot e = e \cdot a = a$. Řekneme, že b je* inverzní prvek *k prvku a a píšeme $b = a^{-1}$, pokud $b \cdot a = a \cdot b = e$. Pokud používáme aditivní zápis, mluvíme obvykle o opačném prvku a píšeme $-a$.*

Definice. *Struktura $(M, +, \cdot, 0, 1)$ se nazývá* komutativní okruh, *pokud jsou splněny následující podmínky:*

(i) *$M \neq \emptyset$ a $+$ a $\cdot$ jsou binární operace, vzhledem ke kterým je M uzavřená.*
(ii) *Obě operace $+$ a $\cdot$ jsou asociativní a komutativní.*
(iii) *0 je prvek neutrální vůči $+$, 1 je prvek neutrální vůči $\cdot$, $0 \neq 1$.*
(iv) *Vzhledem k $+$ existuje ke každému prvku prvek opačný.*
(v) *Platí distributivita, tj. $\forall a, b, c \in M$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*

Definice.

(1) *Řekneme, že okruh je* obor integrity, *pokud $\forall a, b$ $(ab = 0) \rightarrow (a = 0$ nebo $b = 0)$.*
(2) *Pokud v oboru integrity platí $\forall a, b$ $\exists x, y$ $(ax + by | a)$ & $(ax + by | b)$, nazveme takový obor* bezoutovský.

Definice. *Řekneme, že a* dělí *b, a píšeme $a | b$, pokud $\exists x : ax = b$.*

Příklad. Bezoutovské obory integrity jsou například

(1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$,
(2) $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p, 0, 1)$, kde p je prvočíslo a $+_p$, $\cdot_p$ značí sčítání a násobení modulo p,

(3) $(Q[x], +, \cdot, 0, 1)$, kde $Q[x]$ je množina všech polynomů s racionálními koeficienty, $+$ a $\cdot$ značí běžné sčítání a násobení polynomů, 0 značí funkci $p(x) = 0$ a 1 značí funkci $p(x) = 1$.

Věta. (Lagrangeova interpolační metoda) *Ke každým dvěma k-ticím čísel $b_1, \dots, b_k, r_1, \dots, r_k$ existuje polynom $p(x)$ stupně $k - 1$ takový, že $\forall i\ p(b_i) = r_i$. Označíme-li $P_i(x) = (x - b_1)(x - b_2)\cdots(x - b_{i-1})(x - b_{i+1})\cdots(x - b_k)$, pak $p(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{P_i(x)}{P_i(b_i)} r_i$.*

Na přednášce si ukážeme, že toto řešení je jednoduchým důsledkem zobecnění čínské zbytkové věty pro bezoutovské obory integrity.

Extremální princip

Anša Lauschmannová

Extremální princip patří k těm fintám, které lze použít napříč celou matematikou, od teorie čísel po geometrii, od matematické analýzy po aplikované úlohy ve fyzice. Jedná se přitom o velice jednoduchou myšlenku: lze-li v dané úloze najít nějaké uspořádání, tedy způsob, jak seřadit uvažované objekty podle velikosti, vyplatí se často přemýšlet o největších či nejmenších prvcích. Ukažme si to na jednoduchém a známém příkladě:

Největší prvočíslo

Každý z nás jistě ví, že prvočísel je nekonečný počet. Kdyby jich bylo jen konečně mnoho, musí jistě některé z nich být největší. (*Extremální princip!* Využili jsme přirozené uspořádání prvočísel podle velikosti.) Nechť $p_1, p_2, \dots p_n$ jsou všechna prvočísla. Pak číslo $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ je buďto ještě větší prvočíslo, nebo se rozkládá na prvočinitele $N = q_1 \cdots q_k$, z nichž žádný není mezi již uvažovanými prvočísly, a tedy jsou všichni větší než p_n. To je hledaný spor.

Na přednášce si ukážeme některá z rozmanitých využití extremálního principu. Určitě nebudou chybět následující úlohy:

Geometrická úloha

V rovině je dáno n bodů. Každé tři tvoří trojúhelník, jehož obsah je nejvýš 1. Ukažte, že všech n bodů leží uvnitř trojúhelníka, jehož obsah je nejvýš 4.

Aritmetická úloha

Ukažte, že neexistuje čtveřice přirozených čísel x, y, z, u splňující

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2).$$

Grafařská úloha

Všechny silnice v Novosibiřské oblasti jsou jednosměrné. Každé dvě osady v oblasti jsou propojeny právě jednou přímou silnicí. Ukažte, že existuje osada, do které se lze z kterékoli jiné osady dostat přímo nebo nejvýš přes jednu jinou osadu.

Úloha pro šachisty

Na dvourozměrnou šachovnici $n \times n$ lze umístit n věží tak, že ohrožují všechna pole. Kolik věží je potřeba pro třírozměrnou šachovnici $n \times n \times n$?

Pohádková úloha

Kolem stolu sedí 7 trpaslíků, každý má před sebou pohár mléka. (Prázdný pohár se taky počítá jako pohár mléka.) Celkem mají 3 litry tohoto životodárného nápoje. První trpaslík rozdělí své mléko rovnoměrně do zbývajících pohárů. Pak postupně, proti směru hodinových ručiček, udělají totéž všichni ostatní. Když sedmý trpaslík skončí, má každý tolik mléka, kolik měl na začátku. Určete, kolik to je.

Využití dělitelnosti v praxi

Pavel Paták

Úvod

Dělitelnost a modulární aritmetika jsou téma, která pro svou jednoduchost našla řadu uplatnění, výborně se například hodí při řešení diofantovských rovnic či šifrování dat na internetu.

Definice a základní vlastnosti dělitelnosti

Definice. *Pokud a beze zbytku dělí b (tedy $\exists k \in Z$, že $k = \frac{b}{a}$), píšeme $a|b$ (číslo a je* dělitelem *čísla b, a je* násobkem *b).*

Definice. *Pokud polynom P dělí polynom R beze zbytku (tedy existuje polynom Q takový, že $R = PQ$), užíváme stejné označení tj. $P|R$.*

Pro celá čísla zjevně platí:

(i) $a|b \Rightarrow (-a)|b$
(ii) $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$
(iii) $a|b \wedge b|a \Rightarrow |a| = |b|$
(iv) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(rb \pm sc)$
(v) $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

Definice.

(1) Největším společným dělitelem *čísel a, b rozumíme největší přirozené číslo k, které současně dělí a i b. Označení* $\mathrm{D}(a, b)$, $\mathrm{gcd}(a, b)$, $\mathrm{nsd}(a, b)$.
(2) Nejmenším společným násobkem *rozumíme nejmenší takové přirozené číslo k, které je současně násobkem a i b. Označení* $\mathrm{n}(a, b)$, $\mathrm{lcm}(a, b)$, $\mathrm{nsn}(a, b)$
(3) *Čísla a, b jsou* nesoudělná, *pokud* $\mathrm{D}(a, b) = 1$

Euklidův algoritmus pro zjištění největšího společného dělitele

Tento algoritmus je založen na faktu, že pokud je t dělitelem a i b, pak t dělí i $a - rb$. Tedy čísla a, b můžeme snižovat, aniž bychom změnili největšího společného dělitele. Po konečném počtu kroků skončíme ve stavu $\mathrm{D}(a, 0) = a$.

Věta. (Bézout) *Čísla a, b jsou nesoudělná, právě když $\forall k \in Z$ je rovnice $ra + sb = k$ řešitelná v celých číslech.*

Tvrzení. Rovnice $ra + sb = t$ má celočíselné řešení právě tehdy, když $\mathrm{D}(a, b)$ dělí t.

Věta. (Jednoznačný rozklad) *Každé přirozené číslo lze (až na pořadí) jednoznačně rozložit na součin prvočísel.*

Kongruence

Definice. *Nejjednodušším příkladem kongruence je tzv.* parita – *rozdělení čísel na lichá a sudá. Je zcela přirozené tento pojem zevšeobecnit: Pokud mají čísla a, b stejný zbytek po dělení m, říkáme, že a je* kongruentní s b modulo m. *Píšeme $a \equiv b (mod\ m)$.*

Pro praktické počítání nám tedy stačí zvolit vhodného zástupce (obvykle menšího než m). Kongruence našly velké uplatnění především proto, že je lze sčítat a násobit zcela normálně jako obyčejná čísla.

Příklad 1. Určete:

(i) paritu čísla $N = 22 \cdot 31 + 11 \cdot 17 + 13 \cdot 19$
(ii) poslední číslici N
(iii) zbytek po dělení čísla N sedmi.

Příklad 2. Určete poslední číslici $3^{815} + 2^{701}$.

Tvrzení. $\binom{a}{b} \equiv 0 \pmod{p}$ pro p prvočíslo.

Věta. (Malá Fermatova věta) $a^p \equiv a \pmod{p}$ *pro p prvočíslo.*

Tvrzení. $m \equiv 1 \pmod{p-1} \Rightarrow a^m \equiv a \pmod{p}$, pro p prvočíslo.

Poznámka. Uvědomme si, že s pomocí kongruencí lze velice jednoduše stanovit tzv. kritéria dělitelnosti: V soustavě o základu z stačí jen vypočítat $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \pmod{k}$. (Tímto postupem navíc zjistíme, jaký zbytek po dělení dané číslo má.)

Například dělitelnost jedenácti v desítkové soustavě zjistíme takto: $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n \equiv a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 + \cdots + a_n \cdot (-1)^n (\mathrm{mod}\ 11)$. Ke zjištění dělitelnosti jedenácti tedy stačí zjistit rozdíl součtu číslic na lichém a sudém místě.

Příklad 3. Určete kritérium dělitelnosti třinácti v desítkové soustavě.

Příklad 4. V osmičkové soustavě má 17! desítkový zápis $1206773ab63300cd0$. Určete číslice a,b,c,d.

Definice. Eulerova funkce $\varphi(n)$ = *počet přirozených čísel menších než n s n nesoudělných.*

Příklad 5. Najděte vzorec pro výpočet $\varphi(n)$.

Asymetrické šifry

Symetrické šifry využívají k zakódování i dekódování stejný klíč, to je však například pro potřeby internetu poněkud nepraktické. Pokud můžeme bezpečně doručit klíč, proč tímto způsobem nepředat celou zprávu?

Zajímavější jsou šifry asymetrické, využívající veřejného klíče, pomocí něhož se zpráva kóduje, a klíče soukromého, který se používá pro dešifrování. Oba klíče musí být matematicky provázány, avšak mělo by být prakticky nemožné z klíče veřejného vypočítat klíč soukromý. V praxi se používá některých těžko obratitelných matematických operací, např. násobení velice dlouhých prvočísel, diskrétních logaritmů a podobně.

Nejznámější asymetrická šifra RSA využívá prvního z uvedených principů.

Algoritmus m je nezakódovaná zpráva, c zpráva zakódovaná.

(1) Zvolíme dvě obrovská prvočísla p a q.
(2) Spočteme $n = pq$.
(3) Vypočteme $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
(4) Zvolíme e nesoudělné s $\varphi(n)$ (obvykle se užívá 65537).
(5) Najdeme d, aby $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.
(6) Veřejný klíč je (e, n), soukromý (d, n).
(7) Odesílatel zprávu zakóduje $c = m^e \pmod{n}$.
(8) Zprávu dekódujeme $m = c^d \pmod{n}$.

Příklady

Příklad 6. Vyzkoušejte uvedený postup na směšně malých hodnotách: $p = 3, q = 5, e = 3, m = 3$.

Příklad 7. Buď n přirozené číslo, dokažte, že rovnice $x^2 - y^2 = a^3$ má vždy celočíselné řešení.

Příklad 8. Najděte všechna přirozená čísla, která nejdou vyjádřit jako $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$.

Příklad 9. Jaké je největší přirozené číslo N s tou vlastností, že $n^5 - 5n^3 - 4n$ je dělitelné N pro každé n?

Příklad 10. Dokažte, nebo vyvraťte: $2^{70} + 3^{70}$ je dělitelné 13.

Základné vlastnosti polynómov

Michal Rušin

Definície a základné vlastnosti polynómov

Definícia. Polynómom (mnohočlenom) *premennej x rozumieme výraz*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in N_0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazývame koeficienty polynómu, *výrazy $a_i x^i$ nazývame* členy polynómu, *člen a_0 nazývame* absolútny člen *polynómu $P(x)$. V ďalšom texte budeme predpokladať, že polynóm máme zapísaný v uvedenom tvare.*

Definícia. *Ak $a_n \neq 0$, hovoríme, že polynóm $P(x)$ je* stupňa n, *značíme*

$$\operatorname{st} P(x) = n.$$

Definícia. *Polynóm, ktorého všetky koeficienty sú nulové, sa nazýva* nulový polynóm. *Nulovému polynómu sa často nepriradzuje žiadny stupeň, je však dobré položiť st $0 = -1$.*

Definícia. *Ak existuje také reálne (komplexné) číslo a, že platí $P(a) = 0$, hovoríme, že a je* koreňom polynómu *$P(x)$. Hovoríme, že číslo c je* k-násobným koreňom *polynómu $P(x)$, ak je k najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $(x-c)^k | P(x)$.*

Veta. (O delení so zvyškom) *Nech $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy, pričom $Q(x)$ nie je nulový polynóm. Potom existuje práve jedna dvojica polynómov $R(x)$, $S(x)$ taká, že platí*

$$P(x) = R(x) \cdot Q(x) + S(x).$$

Pritom buď $S(x) \equiv 0$, alebo st $S(x) <$ st $Q(x)$.

Veta. (Bézoutova veta) *Zvyšok po delení polynómu $P(x)$ polynómom $x - a$ sa rovná $P(a)$. Polynóm $P(x)$ je deliteľný polynómom $x - a$ práve vtedy, keď číslo a je koreňom polynómu $P(x)$.*

Veta. (Základná veta algebry) *Každý polynóm stupňa aspoň 1 s komplexnými koeficientmi má aspoň jeden komplexný koreň.*

Dôsledok. *Každý polynóm $P(x)$ stupňa $n \geq 1$ s komplexnými koeficientmi má práve n komplexných koreňov $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pričom každý koreň počítame s jeho násobnosťou a platí*

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Veta. (Veta o rozklade polynómu nad R) *Každý nenulový polynóm*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in N_0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla, sa dá nad telesom reálnych čísel rozložiť na súčin lineárnych a kvadratických činiteľov

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2 + c_1^2)^{\beta_1} (x^2 + c_2^2)^{\beta_2} \cdots (x^2 + c_l^2)^{\beta_l},$$

pričom $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + 2 \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_l) = n$, x_i je reálny koreň násobnosti α_i a $c_1, c_2, \ldots, c_l$ sú kladné reálne čísla.

Veta. *Nech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi a $\frac{p}{q}$ je racionálne číslo, kde p je celé číslo, q prirodzené číslo a p, q sú nesúdeliteľné čísla. Nech $\frac{p}{q}$ je koreňom polynómu $P(x)$. Potom p delí a_0 a q delí a_n. Navyše $p - mq$ delí $P(m)$ pre ľubovoľné celé m. Špeciálne $p - q$ delí $P(1)$ a $p + q$ delí $P(-1)$.*

Veta. *Nech $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy stupňa n a platí $P(a) = Q(a)$ pre $n + 1$ rôznych čísel. Potom sa polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ rovnajú.*

Veta. *Nech $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi, $s, t \in Z$. Potom $s - t$ delí $P(s) - P(t)$.*

Vieťove vzťahy

Nech x_1, x_2 sú korene polynómu $P(x) = ax^2 + bx + c$ druhého stupňa. Potom $P(x)$ môžeme zapísať v tvare

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Roznásobením a porovnaním koeficientov pri zodpovedajúcich si mocninách dostávame

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Podobne dostávame pre polynóm $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tretieho stupňa a jeho korene x_1, x_2, x_3 nasledujúce vzťahy:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Uvažujme polynóm

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

pričom $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálné čísla a $a_n \neq 0$. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú jeho (vo všeobecnosti komplexné) korene. Potom platia nasledujúce vzťahy:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\cdots x_n = (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n},$$

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n},$$

pričom v k-tej rovnici sčítavame cez všetky k-tice premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nazývame ich Vieťovými vzťahmi.

Príklady

Príklad 1. Zistite súčet koeficientov polynómu $P(x) = (1 - 2x^2 - 3x^3 + 4x^5 + 5x^7 - 6x^{11} - 7x^{13} + 8x^{17} + 9x^{19} - 10x^{23})^{2006}$.

Príklad 2. Nech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a nech existujú štyri reálne čísla také, že $P(x)$ v nich nadobúda hodnotu 7. Dokážte, že neexistuje také celé číslo m, pre ktoré by platilo $P(m) = 9$.

Príklad 3. Nech $P(x)$ je polynóm aspoň prvého stupňa s celočíselnými koeficientmi. Potom v postupnosti $P(0), P(1), P(2), \ldots$ je nekonečne veľa zložených čísel. Dokážte.

Príklad 4. Pre čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \neq b$ a $c^3 = a^3 + b^3 + 3abc$. Dokážte, že $c = a + b$.

Príklad 5. Ak sú koeficienty a, b, c, d polynómu $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ také celé čísla, že ad je nepárne a bc je párne, tak aspoň jeden koreň tohto polynómu nie je racionálny. Dokážte.

Príklad 6. Dokážte, že ak sa súčet niektorých dvoch koreňov polynómu $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ rovná súčtu zvyšných dvoch, potom platí $a^3 - 4ab + 8c = 0$.

Přes Cantorovo diskontinuum do světa fraktálů

Zuzana Safernová

Cantorovo diskontinuum

Jedná se o jedno z prvních matematických monster, jejichž vlastnosti nechtěli matematici dlouho akceptovat. Tato množina je totiž velice malá (její „délka“ je nulová), avšak zároveň má mohutnost kontinua. První důkaz tohoto tvrzení podal Georg Cantor, po němž nese tato množina jméno.

Konstrukce množiny

Ze zvolené úsečky odstraníme prostřední třetinu, v následujícím kroku ze zbylých dvou úseček opět odstraníme prostřední třetiny, atd. Limitní množina tohoto postupu je Cantorovo diskontinuum.

Trochu formálněji řečeno: z intervalu $K_0 = \langle 0, 1\rangle$ odstraníme prostřední třetinu, tedy interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Dostáváme tak 2 intervaly o délce $\frac{1}{3}$.

$$K_1 = \langle 0, \frac{1}{3}\rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 1\rangle.$$

Z těchto intervalů opět vyjmeme prostřední třetiny. Vzniknou tak 4 intervaly o délce $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$

$$K_2 = \langle 0, \frac{1}{9}\rangle \cup \langle \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\rangle \cup \langle \frac{2}{3}, \frac{7}{9}\rangle \cup \langle \frac{8}{9}, 1\rangle.$$

V n-tém kroku pak dostáváme sjednocení 2^n uzavřených intervalů, každý o délce $\frac{1}{3^n}$

$$K_n = \langle 0, \frac{1}{3^n}\rangle \cup \langle \frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\rangle \cup \ldots .$$

Cantorovo diskontinuum K je pak definováno

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n.$$

Sedmá iterace při výrobě Cantorovy množiny
obrázek pochází z [1]

Délka množiny

Součet délek vynechaných intervalů je

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\ldots=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1,$$

což je rovno délce původního intervalu $\langle 0,1\rangle$. Cantorovo diskontinuum má tudíž délku nulovou. Téhož můžeme nahlédnout pomocí jednoduché úvahy. Cantorovo diskontinuum tvoří 2^n intervalů délky $\frac{1}{3^n}$, což v limitním případě dává nulu ($\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n=0$).

Mohutnost množiny

Zkusme popsat každý bod patřící do Cantorova diskontinua. Označme ciframi 0,1,2 úsečky vznikající v každé iteraci. Tzn. v první iteraci nula přísluší intervalu $\langle 0,\frac{1}{3}\rangle$, jednička intervalu $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ a dvojka intervalu $\langle\frac{2}{3},1\rangle$. Ve druhé iteraci označuje dvojice cifer 01 interval $\langle\frac{1}{9},\frac{2}{9}\rangle$. Neustálé střídání cifer 0,1,2 nás snadno přivádí na myšlenku použití trojkové soustavy.

Například:

$$0,102210201\ldots=\frac{1}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{0}{3^6}+\frac{2}{3^7}+\frac{0}{3^8}+\frac{1}{3^9}+\ldots$$

Pomocí tohoto zápisu můžeme množinu K_1 vyjádřit jako množinu všech čísel z $\langle 0,1\rangle$, která lze zapsat bez použití cifry 1 na prvním místě trojkového rozvoje. K_2 je pak množina, všech čísel z $\langle 0,1\rangle$, která lze zapsat bez použití jedničky na prvních dvou místech trojkového rozvoje. Obecně K_n je množina všech čísel z $\langle 0,1\rangle$, která lze zapsat bez použití jedničky na prvních n místech trojkového rozvoje. Samotná množina K je pak je pak množina všech čísel z $\langle 0,1\rangle$, která se dají vyjádřit bez použití jedničky v trojkovém rozvoji. Trojkový zápis není jednoznačný, neb například $\frac{1}{3}=(0,1)_3=(0,022222)_3\ldots$. Pokud existuje varianta zápisu, ve které jednička není, pak bod do kontinua patří.

Nyní definujme bijektivní zobrazení, které každému trojkovému rozvoji bez jedniček přiřadí posloupnost nul a jedniček, přičemž 2 se zobrazí na 1 a 0 se zobrazí na 0. Tímto vzniká množina všech posloupností nul a jedniček. Pomocí těchto posloupností můžeme vyjádřit všechna reálná čísla z intervalu $\langle 0,1\rangle$ v binární soustavě. Množina těchto posloupností má mohutnost kontinua, a proto má i Cantorovo diskontinuum mohutnost kontinua (bodů C.D. je stejně jako všech bodů na úsečce $\langle 0,1\rangle$).

Fraktály

Soběpodobnost

Soběpodobnost, neboli také invariance vůči změně měřítka. Soběpodobnost způsobuje, že objekt či jeho část vypadá podobně (ne však nutně stejně) při pohledu v různém zvětšení. V přírodě existuje spousta příkladů, oblíbená jsou pobřeží ostrovů či hranice států (jejich délka se v závislosti na jemnosti měření může lišit až o násobek přirozeného čísla), plocha plic či mozku. Jedná se o jeden z hlavních znaků fraktálů. Občas jsou fraktály definovány jako soběpodobné množiny. Tato intuitivní definice ovšem není zcela korektní, neboť vylučuje některé stochastické fraktály.

Topologická dimenze

Je klasická dimenze, jak ji znáte ze školy. Jedná se o počet parametrů (nezávislých proměnných), jimiž lze jednoznačně definovat objekty Euklidova prostoru (body mají dimenzi 0, křivky 1, plochy 2, ...). Neškodí podotknout, že tato dimenze je celočíselná.

Hausdorffova dimenze

Tato dimenze se hojně využívá ve fraktální geometrii, neboť udává míru členitosti daného objektu. Exaktní definice je velmi složitá a vyžaduje znalost netriviálních pojmů, tak se jí radši vyhněme. Dále uvažujme jen omezené množiny.

Definice. *Nazvěme ε-sítí dané omezené množiny M takovou její konečnou podmnožinu N, že každý bod má od množiny N vzdálenost nejvýše ε. Hausdorffova dimenze se definuje jakožto*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

pokud tato limita existuje, kde n označuje minimální možný počet prvků ε-sítě N.

Pokud ještě více upustíme od formalismu a připustíme jen pravidelné množiny, pak můžeme limitu zcela vynechat a předchozí definice nevyjadřuje nic jiného, než že pokud máme n kopií sebe sama zmenšených na ε, pak je Hausdorffova dimenze rovna $\frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$.

Tento vztah přímo plyne z empirického vyjádření $n\varepsilon^D = K$ (K je délka křivky v příslušné aproximaci), které bylo známo mnohem dříve (odvodil ho Richardson při měření délky ostrova, význam konstanty D si však neuměl vysvětlit), než byla Hausdorffova dimenze D vůbec zavedena.

Hausdorffova dimenze hladkých křivek je rovna dimenzi topologické. Existují však i křivky, které zaplňují celou plochu – jejich topologická dimenze je rovna 1, avšak Hausdorffova dimenze je rovna 2 (hranice Mandelbrotovy množiny, Hilbertova křivka).

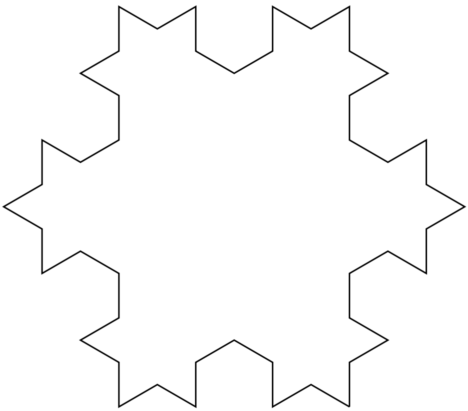
přírodní objekt	odhad fraktální dimenze
pobřeží	1,26
povrch mozku člověka	2,76
neerodované skály	2,2 - 2,3

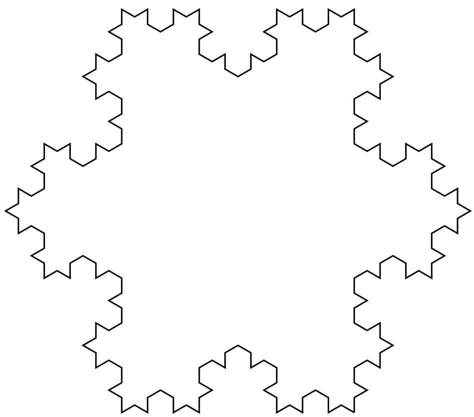
Zkusme spočítat, jakou Hausdorffovu dimenzi má Cantorovo diskontinuum. Z obrázku je patrné, že množina obsahuje dvě kopie sebe sama zmenšené na třetinu, takže $n = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$, tudíž

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63.$$

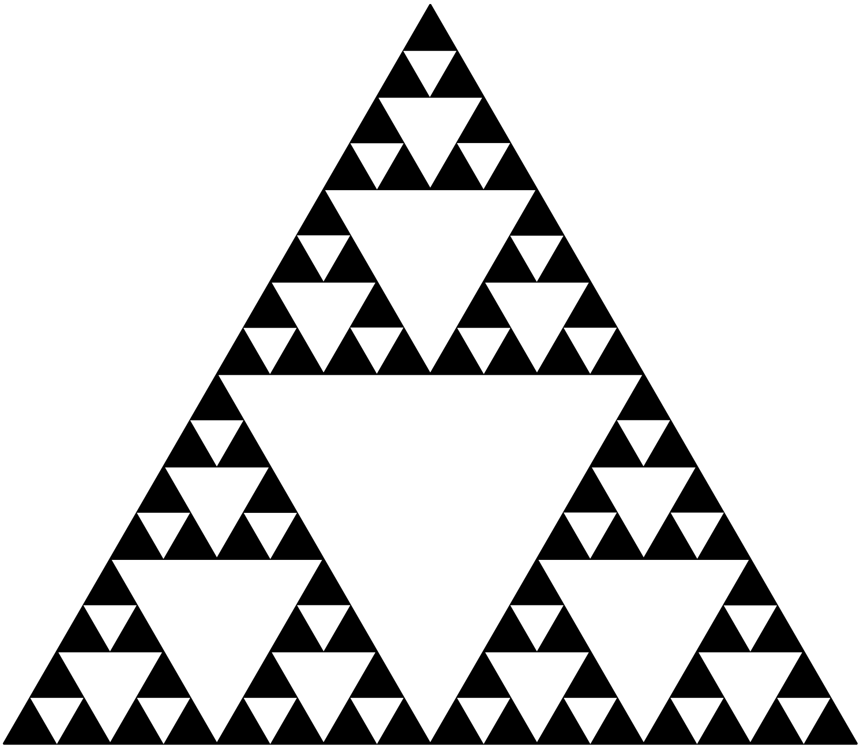
Zpátky k fraktálům: Fraktál je množina či geometrický útvar, jehož Hausdorffova dimenze je ostře větší než dimenze topologická, pravil pan Benoît Mandelbrot. Ani toto ovšem není úplně přesná definice fraktálu a to z jednoho velmi prostého důvodu, žádná přesná definice totiž neexistuje.

Pár nejznámějších fraktálů



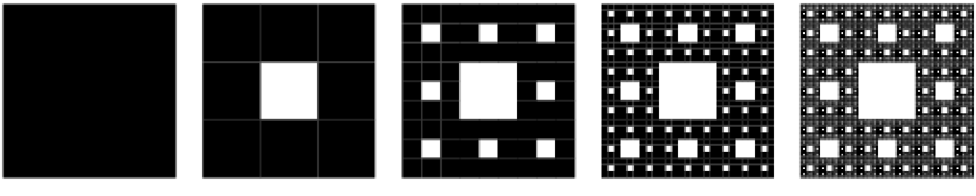


Kochova vločka – K základnímu trojúhelníku (často rovnostrannému) přidáme k prostření třetině každé strany trojúhelník o třetinu menší. Pokračujeme. Křivka je spojitá, avšak nemá v žádném bodě derivaci. Délka této křivky je nekonečná, ovšem plocha křivkou vymezená konverguje.



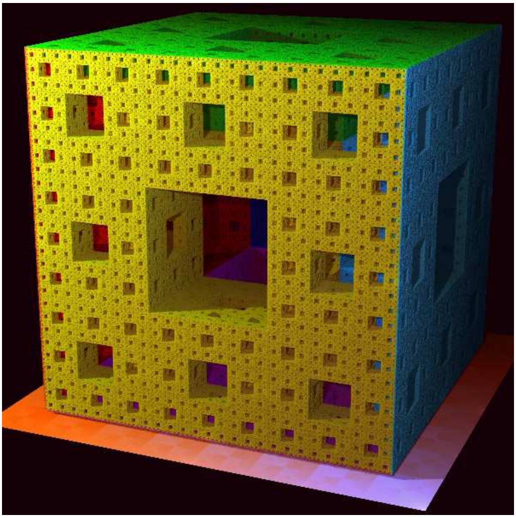
obrázek pochází z [2]

Sierpinského trojúhelník – Z trojúhelníku vyjmeme trojúhelník tvořený středními příčkami. Toto opakujeme stále u každého nově vzniklého útvaru, až dostaneme nekonečně mnoho trojúhelníků s plochou konvergující k nule.



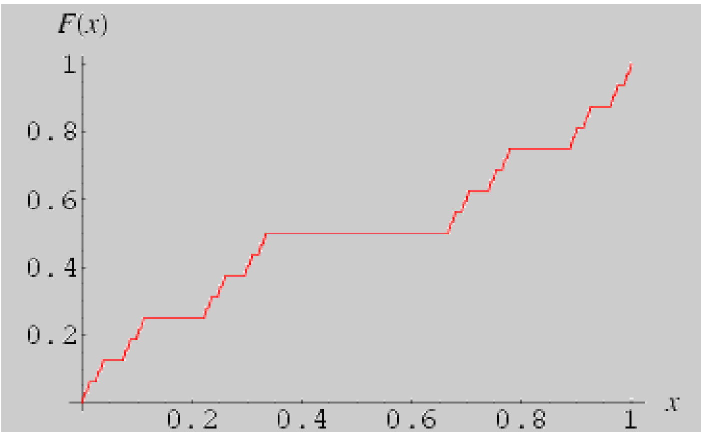
obrázek pochází z [4]

Sierpinského koberec – V podstatě představuje přenesení Cantorova diskontinua do roviny. Jednotkový čtverec rozdělíme na 9 menších čtverců a odstraníme prostřední z nich. Pokračujeme do nekonečna.



obrázek pochází z [3]

Mengerova houba – Jedná se o zobecnění Sierpinského koberce v prostoru. Objekt s nekonečně velkým povrchem, ovšem objemem konvergujícím k nule.



obrázek pochází z [5]

Ďáblovo schodiště – úzce souvisí s Cantorovým diskontinuem. Poskládáme-li všechny vynechané třetinové úseky z jeho konstrukce nad sebe do stupňů o výšce stejné jako šířka, vznikne ďáblovo schodiště. Toto schodiště má navzdory své složité fraktální struktuře nekonečně mnoha stupňů konečnou délku rovnou 2.

Úlohy

Příklad 1. Spočtěte Hausdorffovu dimenzi:

(1) čtverce
(2) krychle
(3) Kochovy vločky
(4) Sierpinského trojúhelníku
(5) Sierpinského koberce
(6) Mengerovy houby.

Příklad 2.** Dokažte, že Cantorovo diskontinuum je řídká množina. (Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *řídká*, jestliže v každém intervalu I existuje interval $J \subset I$ takový, že $J \cap M = \emptyset$)

Zdroje:

http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal
http://www.vood.mysteria.cz/fraktaly/clanky/1.htm
http://www.root.cz/clanky/fraktaly-v-pocitacove-grafice-i/
http://www.root.cz/clanky/fraktaly-v-pocitacove-grafice-ii/
http://astronuklfyzika.cz/Gravitace3-3.htm
http://www.chytraktim.com/fraktaly/fraktaly_prehled.php
http://www.hyperkrychle.cz/fractals.html

Obrázky:

[1] Wikipedie
http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Cantor_set_in_seven_iterations.png
[2] Wikimedia Commons
http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Sierpinski.svg
[3] Wikimedia Commons
http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Menger_sponge_%28IFS%29.jpg
[4] Weisstein, Eric W. *Sierpinski Carpet.* MathWorld.
http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiCarpet.html
[5] Weisstein, Eric W. *Cantor Function.* MathWorld.
http://mathworld.wolfram.com/CantorFunction.html

Důkazy pomocí obarvování

Martin Tancer

Úvod

Cílem přednášky je seznámit se s metodou obarvování při řešení různých matematických úloh. Přednáška v sobě neobsahuje v podstatě vůbec žádnou teorii, půjde především o řešení příkladů.

Poděkování

Příklady k této přednášce byly čerpány z textu Roberta Šámala. Ten uvádí, že je čerpal od Arthura Engela z knihy Problem-Solving Strategies.

Polymina

V příkladech se často vyskytují nějaká polymina. k-mino dostaneme tak, že ze čtverečkového papíru vystřihneme k čtverců držících při sobě (držení za roh se nepočítá). Pro $k = 2, 3, 4, 5 \dots$ se často používá výrazů domino, trimino, tetramino, pentamino, … Domino je určeno jednoznačně. Trimina jsou dvě. Tetramin je pět (osově souměrná považujme za stejná) a jistě si domyslíš, jak vypadají tetramina označená I, L, O, T a S.

Příklady

Příklad 1. Je možno z pěti tetramin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?

Příklad 2. Lze pokrýt šachovnici 8×8 pomocí patnácti tetramin T a jednoho tetramina O?

Příklad 3. Lze pokrýt obdélník 10×10 pomocí 25 tetramin I?

Příklad 4. Obdélníková tabulka je vyplněna tetraminy typu I a O. Pavel chce jedno z tetramin vyndat, vyměnit ho za tetramino druhého typu a těmito tetraminy opět vyplnit stejnou tabulku. Může se mu to podařit?

Příklad 5. Šachovnici 8×8 je možno vyplnit dominy $2^4 \cdot 901^2 = 12988816$ způsoby. Kolika způsoby lze vyplnit šachovnici, z níž jsme vyřízli dva protilehlé rohy.

Příklad 6. Je možno vyplnit krychli $10 \times 10 \times 10$ pomocí 250 cihel $1 \times 1 \times 4$?

Příklad 7. Obdélník $a \times b$ lze pokrýt obdélníky $1 \times n$, právě když $n|a$ nebo $n|b$. Dokažte. Kdy jej lze pokrýt obdélníky $m \times n$?

Příklad 8. Jeden z rohů čtverce $(2n+1) \times (2n+1)$ je vyříznut. Pro která n lze pokrýt zbývající čtverce dominy, z nichž polovina je vodorovně a polovina svisle?

Příklad 9. Na jedno z políček čtverce 5×5 napíšeme -1 na ostatních 24 políček 1. Jedním tahem můžeme změnit znaménko u všech čísel v nějakém čtverci $a \times a$, pro $a > 1$. Chceme docílit toho, aby na všech políčkách byla 1. Kde může být na začátku -1, aby to bylo možné?

Příklad 10. Na každém políčku šachovnice 9×9 sedí beruška. V jeden okamžik každá beruška přeleze na jedno z políček sousedícím rohem s výchozím. Některá políčka zůstanou volná. Jaký je nejmenší možný počet volných políček?

Příklad 11. Na nekonečné čtvercové síti hrajeme solitér: Na začátku máme na $n \times n$ průsečících rozmístěny dámové kameny, v každém tahu můžeme přeskočit libovolným kamenem nějakého jeho souseda (jen vodorovně či svisle), toho odstranit a přeskakujícím kamenem dopadnout na políčko za kamenem přeskakovaným (to musí být volné). Pro která n můžeme vyhrát, tj. docílit stavu, kdy zbude jediný kámen?

Příklad 12. Obdélník O je rozdělen na konečně mnoho obdélníků $O_1, \ldots, O_n$. Pokud každý z obdélníků O_i má celočíselnou stranu, tak i obdélník O má celočíselnou stranu, dokažte.

Příklad 13. Výstavní síň má půdorys tvaru (ne nutně konvexního) n-úhelníku. Najděte co nejmenší počet hlídačů, kteří (pro dané n) takovou síň ohlídají (hlídač je bod, který vidí všemi směry).

Příklad 14. Čtverec 7×7 je pokryt šestnácti dílky 3×1 a jedním 1×1. Kde všude může být dílek 1×1?

Příklad 15. Lze do krychle $6 \times 6 \times 6$ umístit 53 cihel velikosti $1 \times 1 \times 4$ (rovnoběžně se stěnami)?

Příklad 16. Čtverec 23×23 je vyplněn čtverci 1×1, 2×2 a 3×3. Kolik nejméně čtverců 1×1 potřebujeme?

Příklad 17. Na krychli vyznačíme vrcholy, středy stěn a stěnové úhlopříčky. Můžeme projít každý z vyznačených bodů právě jednou, smíme-li přecházet jen po stěnových úhlopříčkách?

Příklad 18. Na šachovnici $4 \times n$ neexistuje uzavřená cesta jezdcem, která by procházela každým políčkem právě jednou, dokažte.

Escherovy obrázky a trocha matematiky k tomu

Martin Tancer

Úvod

Tato přednáška bude se trochu lišit od ostatních. Nebude v ní kladen až tak silný důraz na matematickou stránku. Jejím cílem je spíše seznámit s určitým druhem umění inspirovaným trochou matematiky. Jelikož je Prasátko matematický seminář, povíme si ale i něco matematického – především o symetriích roviny.

M. C. Escher

Maurits Cornelis Escher (1898–1972) byl nizozemský umělec známý především svými kresbami a grafikami, ve kterých zobrazuje paradoxy perspektivního kreslení, topologické útvary a rozvržení roviny na pravidelné obrazce. Některé z jeho obrázků si na přednášce určitě ukážeme.

Symetrie roviny

Nezanedbatelná část Escherova díla je zaměřená na symetrie roviny. Jeho obrázky vznikly na základě práce Györgyho Pólyi o 17 symetriích roviny. My si oněch 17 symetrií roviny popíšeme a budeme studovat, jak se poznají v obrázcích. Za tímto účelem si prvně zmíníme nějaké elementární symetrie, ze kterých pak poskládáme 17 grup[7] symetrií roviny.

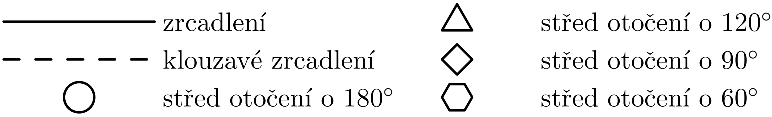
Elementární symetrie roviny

Pro účely této přednášky pro nás budou zajímavé následující symetrie roviny: posunutí, zrcadlení, klouzavé zrcadlení[8] a otočení o 180° (středová souměrnost), o 120°, o 90° a o 60°. V obrázcích budeme používat značení jako na dalším obrázku.

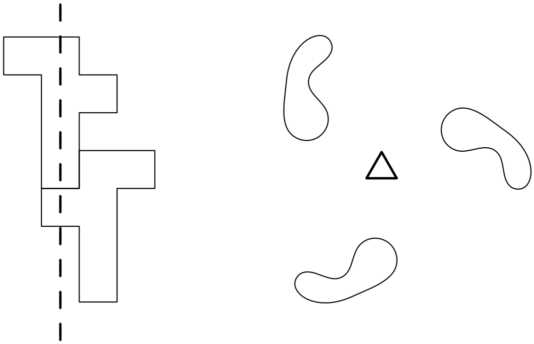
Pro posunutí žádné speciální značení mít nebudeme, bude patrné z takzvaných Escherových buněk.

[7]Slova grupa se, prosím, nelekni. Má určitý matematický význam, který odpovídá kontextu, nicméně pro nás onen matematický význam bude naprosto nepodstatný. Vždy, když v textu narazíš na pojem grupa symetrie roviny, představuj si pod ním soubor pravidel, kterými se dané symetrie řídí.

[8]Překlad anglického glide reflection. Nejsem si vědom toho, že by existoval český termín.



Značky pro různé druhy symetrií

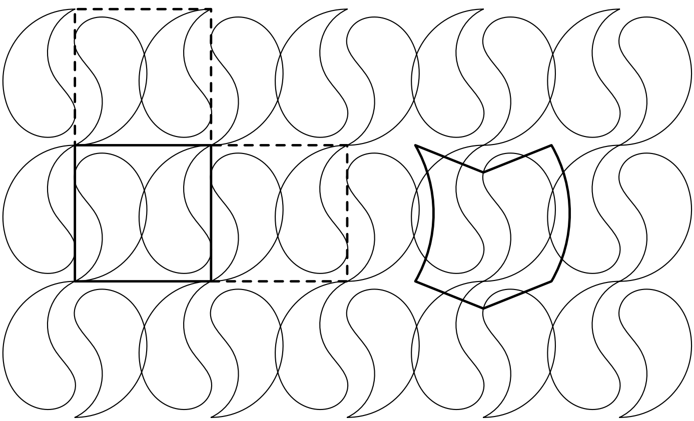


Příklady elementárních symetrií

Escherovy buňky

Definice. Escherovým obrázkem *(alespoň v úvodní části přednášky) budeme rozumět takový obrázek v rovině, že existují dvě různá (nezávislá) posunutí v rovině, která obrázek nemění.*

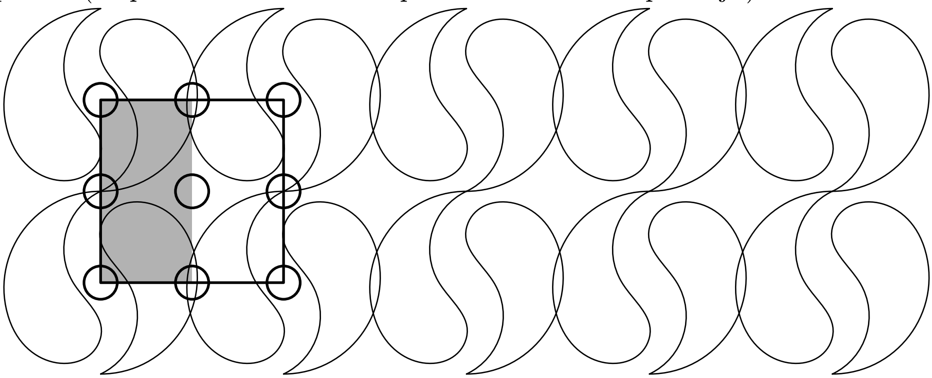
Definice. Escherovou buňkou *budeme rozumět minimální takovou oblast v Escherově obrázku, že jejím posouváním lze už získat celý obrázek.*



Na obrázku je vlevo vyznačena Escherova buňka s možným posunutím nahoru a doprava. Vpravo je vyznačena jiná možná volba Escherovy buňky, aby bylo poznat, že Escherova buňka není jednoznačná.

Symetrie obrázků – příklad

V této části si uvedeme příklad směřující k tomu, jak různé symetrie značit a poznat (na přednášce budeme mít příklad o trochu komplexnější).

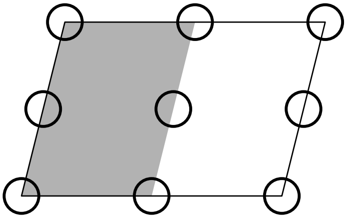


Chceme-li určit symetrie nějakého obrázku, zvolíme si nejprve nějakou (raději ne moc komplikovanou) Escherovu buňku. Potom hledáme elementární symetrie, které do obrázku zaznačíme. V tomto případě najdeme několik otočení o 180°. Dostaneme tak schéma symetrií obrázku. Šedá oblast na obrázku značí nejmenší motiv, který se opakuje, tj. v této šedé oblasti lze předekreslit libovolný obrázek. Potom už je zbytek jednoznačně určen.

Klasifikace symetrií

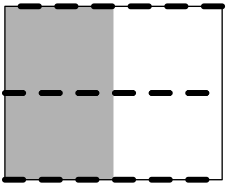
Jak jsme již zmínili v úvodu, je dohromady 17 grup (tříd) symetrií, které zkoumáme. Nakreslíme si zde k nim schématické obrázky. Hranice Escherovy buňky budeme kreslit tenkou čarou zatímco zrcadlení čarou tučnou.

$p1$

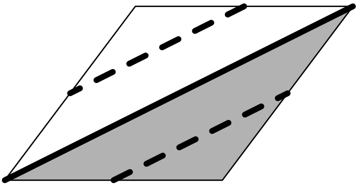


$p2$

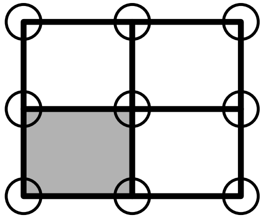
pm



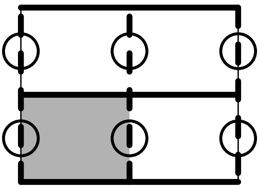
pg



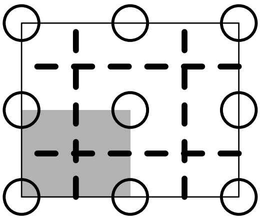
cm



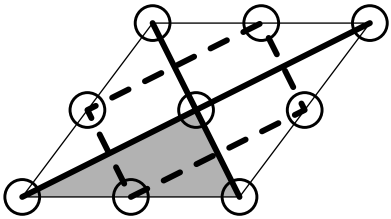
pmm



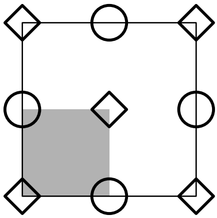
pmg



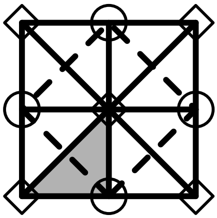
pgg



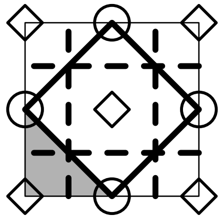
cmm



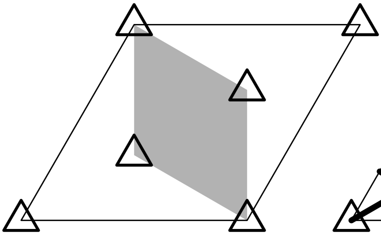
$p4$



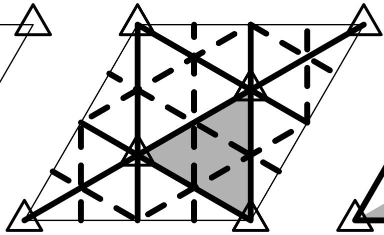
$p4m$



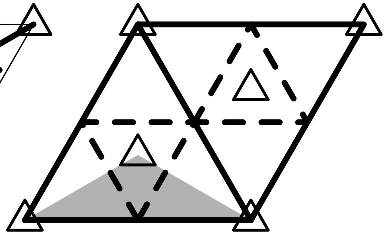
$p4g$



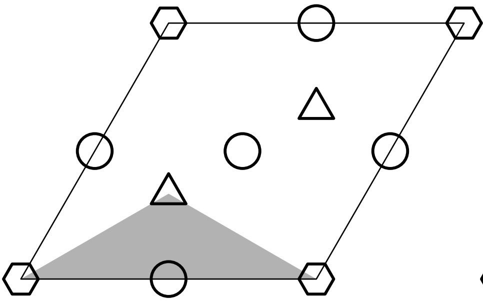
$p3$



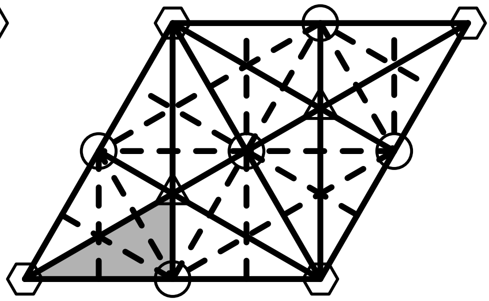
$p3m1$



$p31m$



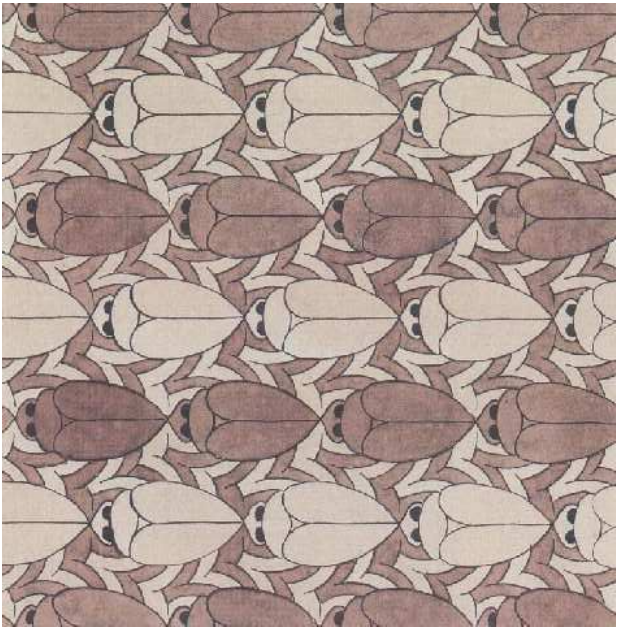
$p6$

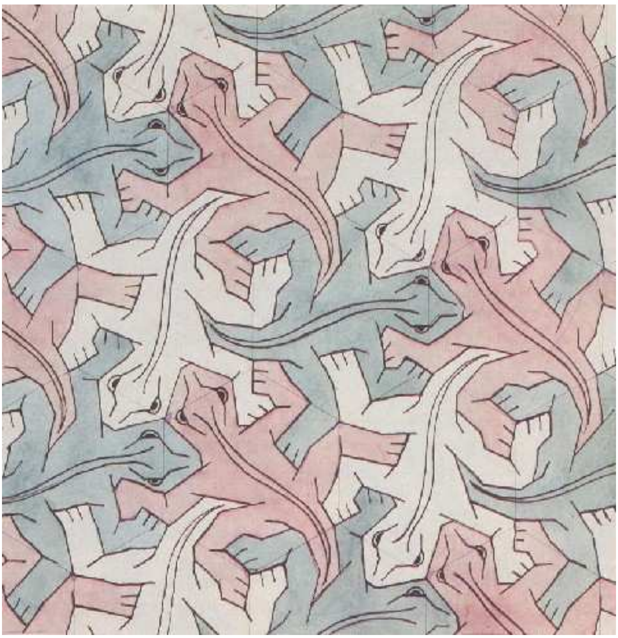


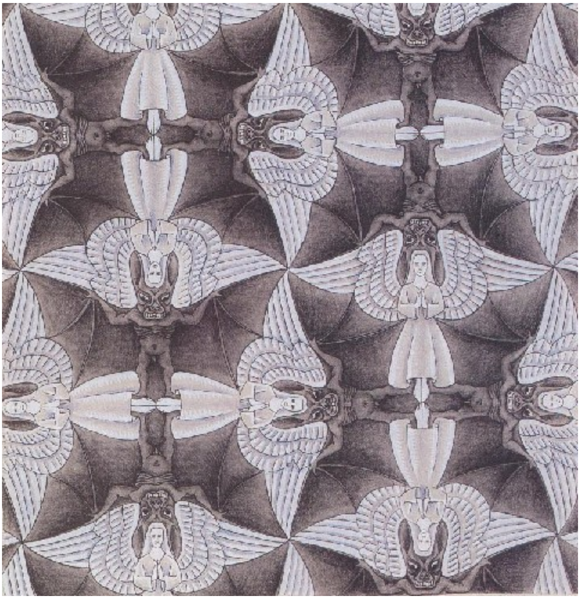
$p6m$

Obrázky

Příspěvek by samozřejmě byl neúplný bez toho nejdůležitějšího – obrázků. Proto si na následujících stránkách můžeš prohlédnout (alespoň černobílé) verze nějakých obrázků. Na procvičení můžeš zkusit k jednotlivým obrázkům přiřazovat grupy symetrie.







Mé objevy

. . . . *(doplň své jméno)*

Obsah