MECZ

Ukázka z podzimního soustředění 2026

Úloha. Jsou dána reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{2025} \in [-1, 1]$. Určete, jaké největší možné hodnoty může nabývat výraz

$$\sum_{i=1}^{2025} x_i^2(x_{i+1} - x_{i-1}),$$

kde $x_{i+2025} = x_i$ pro všechna i.

Řešení. Nejprve zadaný výraz upravíme:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2025} x_i^2(x_{i+1} - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{2025} (x_i^2 x_{i+1} - x_i^2 x_{i-1}) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2025} (3x_i^2 x_{i+1} - 3x_i^2 x_{i-1}) = \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2025} (3x_i^2 x_{i+1} - 3x_{i+1}^2 x_i) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2025} (-x_i^3 + 3x_i^2 x_{i+1} - 3x_i x_{i+1}^2 + x_{i+1}^3) = \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2025} (x_{i+1} - x_i)^3.
\end{aligned}$$

Označme si $d_i = x_{i+1} - x_i$ pro $1 \le i \le 2025$. Díky $x_i \in [-1, 1]$ máme $d_i \in [-2, 2]$ pro každé i. Zároveň $\sum d_i = 0$. Díky $d_i \in [-2, 2]$ platí nerovnost $(d_i + 1)^2(d_i - 2) \le 0$, kterou po roznásobení můžeme upravit na $d_i^3 \le 3d_i + 2$. Máme tak

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2025} d_i^3 \le \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2025} (3d_i + 2) = \frac{2}{3} \cdot 2025 + \sum_{i=1}^{2025} d_i = 1350.$$

Ještě musíme ukázat, že hodnoty 1350 opravdu lze dosáhnout. Tu získáme například čísly $(1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots)$. Pak pro $i \equiv 1 \pmod 3$ je $x_i^2(x_{i+1} - x_{i-1}) = 1^2(0 - (-1)) = 1$, pro $i \equiv 2 \pmod 3$ je $x_i^2(x_{i+1} - x_{i-1}) = 0^2(-1 - 1) = 0$ a pro $i \equiv 0 \pmod 3$ je $x_i^2(x_{i+1} - x_{i-1}) = (-1)^2(1 - 0) = 1$. Neboli dvě třetiny členů v součtu jsou rovny jedné a zbylá třetina nule. Tedy celkový součet je $\frac{2}{3} \cdot 2025 = 1350$.