Vytvořující funkce

Eva Ondráčková

O co vlastně jde?

Jde o početní techniku, která nám umožní řešit různé, i obtížné úlohy, některé poměrně jednoduše. Základní myšlenkou je, že k posloupnosti, s níž potřebujeme pracovat, najdeme funkci, která k ní určitým způsobem patří. Jakmile takovou funkci máme, můžeme využívat pohodlí, které nám počítání s ní oproti manipulaci s (nekonečně) mnoha členy nabízí. Přitom ale neztrácíme původní posloupnost, protože funkce ji celou obsahuje v sobě, „vytváří" ji.

Definice. *Mocninnou řadou budeme rozumět nekonečnou řadu tvaru $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, kde a_0, a_1, a_2, ... jsou reálná čísla a x je proměnná nabývající reálných hodnot. Uvedenou mocninnou řadu budeme zpravidla označovat $a(x)$.*

Tvrzení. Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Předpokládejme, že pro nějaké číslo K platí $|a_n| \leq K^n$ pro všechna $n \geq 1$. Potom pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $a(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci proměnné x na uvedeném intervalu; tuto funkci budeme označovat také $a(x)$. Hodnotami funkce $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ jednoznačně určeny: funkce $a(x)$ má totiž v bodě 0 derivace všech řádů a pro $n = 0$, 1, 2, ... platí[7]

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!} \qquad (\clubsuit)$$

($a^{(n)}(0)$ značí n-tou derivaci funkce $a(x)$ v bodě 0).

Pokud tomuto tvrzení nerozumíš, například proto, že neznáš některé pojmy, nemusíš věšet hlavu. Jeho detailní pochopení pro nás není nijak klíčové. Podstatné je pouze to, že pokud má posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ vhodné vlastnosti (v tomto případě neroste rychleji než exponenciálně), pak existuje „hezká" funkce, která ve svém zápisu neobsahuje žádný nekonečný součet, ale přitom je našemu požadovanému součtu rovna a navíc v sobě ukrývá informace o celé posloupnosti. Vzoreček ($\clubsuit$) používat nebudeme, jednotlivé členy generované posloupnosti získáme jinak. Rovněž se nebudeme zabývat tím, zda naše proměnná x leží ve vhodném intervalu, tedy zda má

[7] Pokročilejší čtenář by si mohl všimnout, že se nejedná o nic jiného než o koeficienty Taylorova rozvoje funkce $a(x)$ v bodě 0.

pro ni náš součet vůbec smysl. Dokonce se neomezíme ani na posloupnosti splňující předpoklady předchozího tvrzení.

Definice. *Nechť* $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *je posloupnost reálných čísel. Vytvořující (generující) funkcí této posloupnosti rozumíme mocninnou řadu* $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

Z předchozího už víme, že někdy existuje hezký tvar vytvořující funkce $a(x)$ bez nekonečných sum. Pokud jej najdeme, můžeme s ním provádět různé operace, které se pak odpovídajícím způsobem projeví i na původní posloupnosti.

Operace s posloupnostmi a jejich vytvořujícími funkcemi

V následujícím textu budeme pracovat s posloupnostmi $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, $(b_0 , b_1, b_2, \dots)$, $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, jejich vytvořujícími funkcemi $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ a reálným číslem α.

• Sčítání posloupností člen po členu odpovídá sečtení vytvořujících funkcí, tedy posloupnost $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ má vytvořující funkci $a(x) + b(x)$.

• Podobně očekávaný účinek má násobení realným číslem, tedy $(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$ odpovídá $\alpha a(x)$.

• Pro $n \in \mathbb{N}$ vynásobení vytvořující funkce x^n znamená posunutí členů posloupnosti o n členů doprava, tedy $x^n a(x)$ má posloupnost $(0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$.

• Posloupnost můžeme obdobně, vydělením, posouvat i doleva, musíme ale nejdříve odečíst vytvořující funkci pro „přebytečné“ členy. Tedy například $\frac{a(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^3}$ nám dá $(a_3, a_4, a_5, \dots)$.

• Dosadíme-li αx místo x, dostaneme v mocninné řadě jednotlivé členy vynásobené příslušnými mocninami α, tedy posloupnost pro $a(\alpha x)$ je $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \alpha^3 a_3, \dots)$.

• Další operací je dosazení x^n za x. Také zde můžeme výsledek lehce poznat z chování mocninné řady - zmizí nám mocniny x, které nejsou násobky n. $a(x^n)$ tedy vytváří posloupnost $(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots, 0, a_2, 0, \dots)$, kde členy jsou „proložené“ vždy $n - 1$ nulami.

• Zderivováním vytvořující funkce $a(x)$ dostaneme $b(x) = a'(x)$ se členy $b_n = (n + 1)a_{n+1}$ (mocninnou řadu derivujeme jako polynom). Z $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ tedy získáme $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$. Naopak zintegrováním dostaneme z $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$ s vytvořující funkcí $b(x) = \int_0^x a(t)dt$, kde $b_n = \frac{1}{n}a_{k-1}$ pro $k \geq 1$, $b_0 = 0$.

• Pro někoho možná překvapivý účinek má operace násobení vytvořujících funkcí. Součin $a(x)b(x)$ totiž odpovídá posloupnosti se členy $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

• Předchozí operace můžeme hned chytře využít. Použijeme-li totiž v součinu jako $b(x)$ vytvořující funkci posloupnosti samých jedniček (jak si ukážeme, je to $\frac{1}{1-x}$), dostaneme jako výsledek $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 1 = \sum_{i=0}^{n} a_i$, tedy posloupnost $(a_0,$ $a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \dots)$. Získali jsme tzv. posloupnost částečných součtů posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$.

Jak získat z vytvořující funkce vzorec pro n-tý člen posloupnosti?

Stačí nám nalézt koeficient u n-tého členu mocninné řady. K tomu se nám bude hodit následující:

Definice. (Zobecněné kombinační číslo) *Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme kombinační číslo $\binom{r}{k}$ předpisem $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!}$ (speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$).*

Tvrzení. (Zobecněná binomická věta)[8] Funkce $(1+x)^r$ je vytvořující funkcí pro posloupnost $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \binom{r}{3}, \dots)$.

Poznámka. Pro nás je užitečné zejména to, že pro r celé záporné můžeme $\binom{r}{k}$ upravit na

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{-r+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-r+k-1}{-r-1}.$$

Pak dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} x + \dots + \binom{n+k-1}{n-1} x^k + \cdots.$$

A k čemu nám to vůbec je?

Použitím vytvořujících funkcí si můžeme například značně usnadnit řešení různých pracných úloh s posloupnostmi. Na přednášce si ukážeme některé typové příklady, které jsou k tomu (jako) stvořené. Některé se dají poměrně jednoduše řešit i jinak, ale nám budou sloužit k předvedení početní techniky. Následuje malá ukázka toho, co tě čeká:

[8] Důkaz si může laskavý zájemce udělat snadno pomocí Taylorova rozvoje.

Úloha. V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky téže barvy se od sebe nepoznají. Kolik je různých možností, jak vybrat z takové krabice soubor 70 míčků?

Úloha. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 hracími kostkami padne součet 30?

Úloha. Najděte vzorec pro součet $1+4+9+\cdots+n^2$, $1+8+27+\cdots+n^3$.

Úloha. Na planetě X žijí čtyři bakterie. V loňském roce tam byla pouze jedna. Kolik bakterií tam bude žít v roce 4002? Víme, že každý následující rok se počet bakterií bude řídit rekurentním předpisem $b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} + 3$.

Některé posloupnosti a jejich vytvořující funkce

posloupnost	vytvořující funkce
$(1, 1, 1, 1, \dots)$	$\frac{1}{1-x}$
$(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$	$\frac{1}{1+x}$
$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$	$\frac{1}{1-x^n}$
$(1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$(1, k, k^2, k^3, \dots)$	$\frac{1}{1-kx}$
$(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$	$\frac{1+x}{(1-x)^3}$
$(1, k, \binom{k}{2}, \binom{k}{3}, \binom{k}{4}, \dots, \binom{k}{k}, 0, \dots)$	$(1+x)^k$
$(\binom{k-1}{k-1}, \binom{k}{k-1}, \binom{k+1}{k-1}, \binom{k+2}{k-1}, \dots)$	$\frac{1}{(1-x)^k}$
$(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$	$\ln \frac{1}{1-x}$
$(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots)$	$\ln(1+x)$
$(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots, \frac{1}{k!}, \dots)$	e^x

Literatura.

[1] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum 2000
[2] František Zítek: Vytvořující funkce, edice Škola mladých matematiků, sv. číslo 29, Mladá Fronta 1989
[3] Graham, Knuth, Patashnik: Concrete Mathematics, Addison-Wesley