Vieta jumping

Matěj Doležálek

Abstrakt. Počínaje úlohou číslo 6 z IMO 1988 lze v olympiádách narazit na magické úlohy, které požadují vyvodit ze zdánlivě tuctových dělitelností neuvěřitelně silné závěry. Metodou pro řešení úloh s touto dosti specifickou příchutí je *Vieta jumping* – dosti specifická souhra Viètových vztahů a klasického nekonečného sestupu. V této přednášce zkusíme Vieta jumpingu odebrat jeho magickou auru, prohlédnout si každou jeho přísadu zvlášť a získat hezkou obrázkovou představu pro přeskakování mezi kořeny.

První přísadu na cestě k Vieta jumpingu napovídá samotný název:

Tvrzení (Viètovy vztahy). Má-li polynom $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ kořeny $x_1, \ldots, x_n$ (včetně násobností), pak platí

$$(-1)^k \frac{c_k}{c_n} = \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \prod_{i \in J} x_i.$$

Speciálně pro $n = 2$ a $c_2 = 1$ platí $x_1 + x_2 = -c_1$ a $x_1 x_2 = c_0$.

Diofantická geometrie

Začneme s geometrickým pohledem na diofantické rovnice, který má sice k Vieta jumpingu jako takovému daleko, ale používá podobné myšlenky a dává k němu hezkou geometrickou představu.

Definice. Bod v rovině nazveme *racionálním*, pokud jsou všechny jeho souřadnice racionální čísla. Křivku v rovině nazveme *racionální*, pokud se dá zapsat jako množina řešení nějaké polynomální rovnice s racionálními koeficienty. *Stupněm* křivky rozumíme stupeň polynomu, který ji zadává.

Tvrzení. Nechť racionální přímka protíná racionální křivku stupně n v n bodech (včetně násobnosti), z nichž $n-1$ je racionálních. Potom už je všech n průsečíků racionálních.

Poznámka. Pokud $n \geq 3$, pak je uvažovaná přímka automaticky racionální už jen z toho, že prochází ≥ 2 racionálními body.

Úloha 1. Najdi všechna řešení $x^2 + y^2 = z^2$ v celých číslech.

Úloha 2. Dokaž, že když na kružnici v rovině leží tři různé racionální body, pak už jich na ní leží nekonečně mnoho.

Úloha 3. Rovnice $x^2+2y^2=3z^2$ má nekonečně mnoho primitivních$^{*)}$ celočíselných řešení.

Úloha 4 (eliptické křivky). Uvažujme v rovině křivku

$$E: \quad y^2=x^3+ax+b, \qquad a,b\in\mathbb{Q},$$

přičemž si představujme, že navíc prochází ještě bodem O „v nekonečnu ve svislém směru", který považujeme za racionální. Předpokládejme také, že E je hladká (má v každém bodě tečnu).

Nechť jsou A, B dva body na E, pak jako $A*B$ označíme třetí průsečík$^{\dagger)}$ přímky AB s E a jako $-A$ označíme obraz A v osové souměrnosti podle osy x. Poté definujeme $A+B$ jako $-(A*B)$. Nahlédni, že:

(i) Pro racionální A, B je $A+B$ opět racionální.
(ii) $A+O=A$.
(iii) $A+(-A)=O$.
(iv) Tečna v racionálním bodě A je racionální přímka.
(v) Pokud $A=B$, tak za přímku AA můžeme považovat tečnu v bodě A a vše bude stále fungovat.

Taky platí $A+(B+C)=(A+B)+C$, ale to je netriviální dokázat.

Úloha 5. Dokaž, že v rovině lze zvolit nekonečnou množinu bodů

$$\dots, \quad P_{-2}, \quad P_{-1}, \quad P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad \dots$$

tak, že pro celá čísla a, b, c leží P_a, P_b, P_c na jedné přímce, právě když $a+b+c=2014$.
(USAMO 2014)

Sestupy

Druhou půlkou Vieta jumpingu je nekonečný sestup: v přirozených číslech se nedá klesat do nekonečna. Totéž vyjadřuje skutečnost, že přirozená čísla jsou dobře uspořádaná – každá jejich neprázdná podmnožina má minimum.

Úloha 6. Dokaž, že rovnice $a^3+2b^3+4c^3=6abc$ nemá řešení v přirozených číslech.

Úloha 7. Najdi všechna řešení $x^4+y^4+z^4=9w^4$ v celých číslech.

Úloha 8. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2+y^2+z^2=2xyz$.
(Korea 1996)

Úloha 9. Řeš $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ v celých číslech.

Úloha 10. Je dáno 2017 kamenů s celočíselnými hmotnostmi. Kdykoliv jeden kamen odebereme, lze ty zbylé rozdělit na dvě stejně hmotné hromádky po 1008 kamenech. Dokaž, že všechny kameny mají stejnou hmotnost.

$^{*)}$ Řešení (x,y,z) nazveme primitivním, pokud jsou x, y, z po dvou nesoudělná.

$^{\dagger)}$ Včetně násobnosti: např. pokud se AB dotýká E v bodě B, pak je třetím průsečíkem bod B.

Skákání k dalším řešením

O něco snadnější verzí Vieta jumpingu je jeho obrácený chod: vyrábění větších řešení z malých.

Úloha 11. Pro přirozené n řešme rovnici

$$a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$$

v přirozených číslech. Dokaž, že:

(i) Pro $n = 2017$ neexistuje žádné řešení (a, b, c).
(ii) Pro $n = 2016$ je v každém řešení číslo a násobkem 3.
(iii) Pro $n = 2016$ existuje nekonečně mnoho řešení. (MEMO 2016 T8)

Úloha 12. Je dáno nenulové celé číslo k. Dokaž, že rovnici

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

vyhovuje lichý počet uspořádaných dvojic celých čísel (x, y), právě když je k dělitelné sedmi. (MO A-66-III-6)

Úloha 13. Má pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a + b + c}$$

nekonečně mnoho řešení v přirozených číslech? (ISL 2002 N4)

Úloha 14. Dokaž, že pro každé přirozené číslo m lze najít nekonečně mnoho dvojic přirozených čísel (x, y) takových, že x, y jsou nesoudělná, $x \mid y^2 + m$ a zároveň $y \mid x^2 + m$. (ISL 1992)

Úloha 15. Existuje nekonečně mnoho dvojic přirozených čísel (x, y) takových, že

$$x \mid y^2 + y + 1 \qquad \text{a zároveň} \qquad y \mid x^2 + x + 1?$$

Úloha 16. Najdi nejmenší přirozené číslo n, pro něž existuje nekonečně mnoho n-tic $(a_1, \ldots, a_n)$ kladných racionálních čísel takových, že

$$a_1 + \cdots + a_n \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

jsou celá čísla. (ISL 2017 N6)

Úloha 17. Budiž n přirozené číslo, které není čtverec a uvažujme rovnici

$$k = \frac{x^2 - n}{x^2 - y^2}.$$

Nechť je A množina těch přirozených k, pro něž má rovnice celočíselné řešení s $x > \sqrt{n}$, zatímco B budiž množina těch přirozených k, pro něž má rovnice celočíselné řešení s $0 \leq x < \sqrt{n}$. Dokaž $A = B$. (ISL 2016 N5)

Úloha 18. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho trojic přirozených čísel x, y, z splňujících $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Parametrizuj část z nich pomocí Fibonacciho čísel. (Markov)

Úloha 19. Najdi největší možnou hodnotu výrazu $a^2 + b^2$ pro přirozená $a, b \leq 1981$ splňující $\left(a^2 - ab - b^2\right)^2 = 1$. (IMO 1981/3)

Skákání s parametrem

Dostáváme se k nejtypičtějším úlohám na Vieta jumping. Ty většinou nastíní nějakou dělitelnost s kvadratickými výrazy a požadují něco dokázat o podílu či jiném parametru; občas se prostě hledají všechna řešení. Méně časté je skákání v nerovnostech, ale po zafixování vhodné veličiny se řeší podobně.

Motto. Dělitelnost je jen rovnice s proměnnou navíc.

Úloha 20. Pro přirozená čísla a, b je

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$$

celé číslo. Dokaž, že je to číslo 3.

Řešení. Pojmenujme $k = \frac{a^2+b^2+1}{ab}$. Pak řešme $a^2 - kba + b^2 + 1 = 0$ jako kvadratickou rovnici v a. Z Viètových vztahů musí její kořeny splňovat

$$a_1 + a_2 = kb,$$
$$a_1 a_2 = b^2 + 1.$$

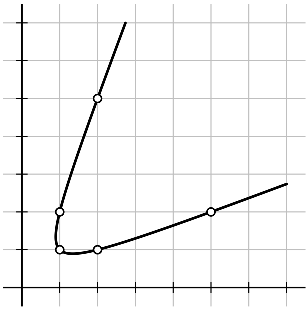
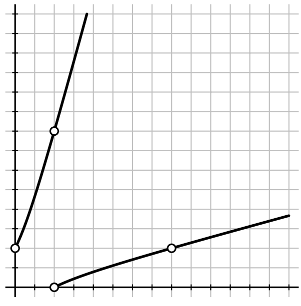
Pokud je tedy $a_1 = a$ přirozené číslo, pak je z prvního vztahu a_2 taktéž celé, zatímco z druhého je kladné. Dohromady je tedy a_2 přirozené.

Zafixujme nyní k a uvažme řešení $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ takové, že $a + b$ je minimální. Víme, že (a_2, b) bude taky řešení v přirozených číslech, takže $a_2 + b \geq a + b$. Tedy

$$a \leq a_2 = \frac{b^2 + 1}{a}$$

neboli $a^2 \leq b^2 + 1$. Zcela obdobně taky $b^2 \leq a^2 + 1$, takže dva přirozené čtverce a^2, b^2 se od sebe liší nejvýš o 1. Mezi různými přirozenými čtverci je ale vždy mezera alespoň 3, takže nutně $a = b$.

Z toho už plyne $a^2 \mid 2a^2 + 1$, takže $a = 1$, což dá $k = 3$, jak jsme chtěli.

Úloha 21. Uvažujme přirozená čísla a, b. Dokaž, že pokud je

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

celé číslo, pak už je to čtverec. (IMO 1988/6)

Úloha 22. Najdi všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

celé číslo.

Úloha 23. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{a^2+b^2+3}{ab}$$

pro přirozená a, b. (Turkey TST 1994)

Úloha 24. Je dáno přirozené n. Nahlédni, že pro přirozená a, b může výraz

$$\frac{a^2+b^2+n}{ab}$$

nabývat jen konečně mnoha celočíselných hodnot.

Úloha 25. Uvažujme nad přirozenými čísly rovnici $x^2+y^2-axy+2=0$ s přirozeným parametrem a. Dokaž, že pro $a=4$ má rovnice nekonečně mnoho řešení, zatímco pro $a\neq 4$ neexistují žádná. (Greece TST 2008)

Úloha 26. Najdi všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí

$$ab+a+b \mid a^2+b^2+1.$$

Úloha 27. K přirozenému číslu k existují přirozená a, b splňující

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=k.$$

Urči všechny možné hodnoty k. (MOP 2007)

Úloha 28. Dokaž, že dělitelnost $pq+1 \mid p^2+q^2$ nemá řešení v prvočíslech.

Úloha 29. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{p^2+q^2+1}{pq+2}$$

pro prvočísla p, q.

Úloha 30. Přirozená čísla a, b, c splňují

$$0 < a^2+b^2-abc \le c.$$

Dokaž, že a^2+b^2-abc je čtverec. (Crux Mathematicorum)

Úloha 31. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$$

pro přirozená a, b.

Úloha 32. Najdi všechny dvojice monických komplexních polynomů P, Q takových, že $P \mid Q^2+1$ a zároveň $Q \mid P^2+1$. (IMC 2018)

Úloha 33. Urči všechna přirozená čísla n, pro něž má rovnice

$$x+y+z+w = n\sqrt{xyzw}$$

řešení v přirozených číslech. (Vietnam 2002)

Úloha 34. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

pro přirozená a, b, c. (AMM 1994)

Úloha 35. Lichá přirozená čísla a, b splňují $2ab+1 \mid a^2+b^2+1$. Dokaž, že $a=b$. (Iran 2013)

Neočividné skákání

V následujících úlohách se nedá skákat hned – je potřeba se nejdřív pomocí nějakých substitucí dostat k rovnici či dělitelnosti, která vypadá lépe.

Úloha 36. Přirozená čísla a, b splňují $4ab-1 \mid \left(4a^2-1\right)^2$. Dokaž, že $a=b$. (IMO 2007/5)

Úloha 37. Lichá přirozená čísla $m > n$ splňují

$$m^2-n^2+1 \mid n^2-1.$$

Dokaž, že m^2-n^2+1 je čtverec. (Ireland 2005)

Úloha 38. Pro jistá přirozená x, y, k platí $\frac{x^2+1}{y^2} + 4 = k^2$. Dokaž, že $k = 3$.

Úloha 39. Najdi všechny dvojice přirozených čísel (x, y), pro něž je

$$(xy + 1)(xy + x + 2)$$

čtverec. (China TST 2018)

Úloha 40. Jsou dána přirozená čísla a, b. Dokaž, že

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$

není čtverec. (ISL 2019 N8)

Literatura a zdroje

[1] Filip Bialas: *Vieta jumping*, Paseky, 2018.
[2] Víťa Kala, Jakub „šnEk“ Opršal: *Teorie čísel*, PraSečí seriál, 2008/2009.
[3] Pepa Svoboda: *Diofantovské rovnice*, sborník iKS, 2014.
[4] Rado van Švarc: *Úvod do diofantických rovnic*, Lipová-Lázně, 2016.

Hinty

Hint 1. Racionální přímky skrz jeden pevný bod na jednotkové kružnici.
Hint 2. Střed je racionální.
Hint 3. Racionální přímky skrz pevný bod. Vypsat všechna celočíselná řešení je trošku otrava kvůli technikáliím s největším společným dělitelem, tak se s tím moc nezdržuj.
Hint 4. (i) Racionální přímka skrz $3-1$ racionální body. (iv) Derivuj a využij racionalitu bodu.
Hint 5. Vol body na kubické křivce. Nepříjemnosti můžou vznikat kvůli $3 \nmid 2014$, ale dá se s nimi vypořádat.
Hint 6. Vezmi řešení s minimálním $a+b+c$ a všimni si, že v rovnici půjde zkrátit dvojka.
Hint 7. Třeba modulo 5 nebo 16.
Hint 8. Modulo 4.
Hint 9. Zeslab pravou stranu na $x^2y^2z^2$ a postupně krať prvočísla z x a y.
Hint 10. Vyrob zhruba poloviční sadu kamenů.
Hint 11. Pro první dvě části najdi správné modulo. V poslední najdi jedno řešení a skákej k větším a větším řešením.
Hint 12. Páruj ty body na elipse, které leží ve stejné výšce.
Hint 13. Zvol si m tak, aby jedno řešení existovalo, a přímočaře skákej k dalším. Taky to jde zabít náhodnými Pellovkami.
Hint 14. Sluč dělitelnosti do jedné a pak z jednoho řešení skákej k dalším. Rozmysli si, že skákání zachová nesoudělnost.
Hint 15. Sluč dělitelnosti do jedné a skákej.
Hint 16. Malá n vysporuj. Potom vyráběj další a další řešení skákáním.
Hint 17. Přesubstituuj do součtu a rozdílu, potom skákej po hyperbole.
Hint 18. Přímočaře skákej. Skákání podle prostřední proměnné (při seřazení podle velikosti) dá rekurenci lichých Fibonacciho čísel.
Hint 19. Najdi pár malých řešení a odhadni, která (a, b) řeší rovnici.
Hint 21. Zafixuj hodnotu a skákej k minimálnímu $a+b$. Nečtvercovost zařídí nenulovost absolutního členu. V případě záporného a_2 jej dosaď do zlomku a zkoumej znaménko.
Hint 22. Pokud je jedna proměnná větší než druhá, skoč k nižšímu řešení.
Hint 23. Minimální řešení zjednoduší dělitelnost.
Hint 24. Jen si pořádně rozmysli, co se dělo v předchozí a ukázkové úloze.
Hint 25. Standardně doskákej k $x=y$.
Hint 26. Standardní skákání, pozor nulu.
Hint 27. Skákej úplně stejně jako v ukázkové úloze.
Hint 28. Začni u minimálního bodu na hyperbole a pořádně prozkoumej skákací rekurence.
Hint 29. Doskákej k minimálnímu řešení. U jedné rodinky hyperbol podoba rekurence vyloučí prvočíselnost, zbylé možnosti povolí jen jednu hodnotu podílu.
Hint 30. Zafixuj $d = a^2 + b^2 - abc$ a skákej. Případ záporného a_2 vyřeš podobně jako v IMO 1988.
Hint 31. Zafixuj podíl k, doskákej k minimálnímu řešení a udělej odhad k pomocí $\frac{1}{ab}$.
Hint 32. V komplexních polynomech se dá skákat stejně dobře jako v celých číslech. Co dává smysl minimalizovat?

Hint 33. Vieta jumpingem odhadni $n \leq 4$, pak najdi příklady.
Hint 34. Využij Vieta jumping k odhadu výraz ≤ 9. Pak zbývá trochu pracné dorozebrání.
Hint 35. Skoky zachovávají paritu, lichost vyloučí $a_2 = 0$.
Hint 36. Uprav podmínku, aby byla symetrická, a následně skákej k minimálnímu řešení.
Hint 37. Čtvercovost dělitele se dokazuje mizerně – převeď to na čtvercovost nějakého podílu. Substituce do součtu a rozdílu dá symetrii.
Hint 38. Převeď na úlohu 20. Taky to lze ubít Pellovou rovnicí a okruhem $\mathbb{Z}[\sqrt{k^2-4}]$, ale není to vůbec zábava.
Hint 39. Největší společný dělitel dvou závorek napoví první z několika substitucí, která tě dovede ke skákatelné dělitelnosti. Ta bude (povrchně) připomínat úlohu 37.
Hint 40. Nechť se výraz rovná c^2 pro nějaké $c > a$. Substitucí $x = c+a$, $y = c-a$ dostaneš symetričtější situaci, v níž už se dá skákat.