Iterace

Matěj Doležálek

Abstrakt. Jak zkrotit funkci aplikovanou mnohokrát za sebou? Nakreslíme si obrázek a vydáme se na cestu po šipkách. Možná půjdeme do nekonečna a ještě dál, anebo se možná dostaneme do bludného kruhu, ale s trochou štěstí nám obojí něco poví o zkoumané funkci.

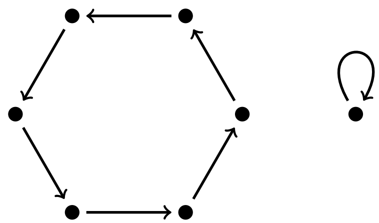
Úmluva. Nechť je f funkce. Pro přirozené n budeme značit

$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-krát}})(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n\text{-krát}}x)\ldots)),$$

tedy f aplikováno n-krát na x, a pro $n = 0$ dodefinujeme $f^0(x) = x$. Kdybychom náhodou chtěli zapsat n-tou mocninu hodnoty $f(x)$, napíšeme $(f(x))^n$.

Úmluva. S funkcí $f\colon M \to M$ budeme zacházet jako s orientovaným grafem na množině vrcholů M. Šipka z a do b povede právě tehdy, když $f(a) = b$. Následně budeme pro takovou funkci používat grafově motivované termíny:

- *Cyklem* nazveme konečnou posloupnost vrcholů, mezi nimiž dokola vedou šipky. Speciálně cyklus délky 1 je *pevný bod*, tedy prvek, který se zobrazuje sám na sebe.



- *Řetězem* nazveme posloupnost navzájem různých vrcholů spojených postupně šipkami, která je ve směru šipek nekonečná. Pokud je řetěz nekonečný i proti směru šipek, nazveme jej *oboustranným řetězem.*

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

- *Cestou* z vrcholu bude rozumět posloupnost vrcholů, na něž se dostaneme, když prostě půjdeme po šipkách, což odpovídá opakovanému aplikování funkce na příslušný prvek. Cesta se může buď zacyklit, nebo může být řetězem.

Pozorování. Funkcím $f\colon M \to M$ odpovídají právě ty grafy na množině vrcholů M, kde z každého vrcholu vychází právě jedna šipka.

Pozorování. Pro funkci na konečné množině se cesta z libovolného vrcholu zacyklí.

Pozorování. Nechť x leží v cyklu délky k na funkci f. Potom $f^n(x) = x$, právě když $k \mid n$.

Pozorování. Funkce uvažovaná jako graf je

- *prostá*, když do každého vrcholu vede *nejvýše* jedna šipka,
- *na*, když do každého vrcholu vede *alespoň* jedna šipka,
- *bijektivní*, když do každého vrcholu vede *právě* jedna šipka.

Pozorování. Nechť je M konečná množina. Potom je funkce $f\colon M \to M$ prostá, právě když je na.

Pozorování. Bijekce se sestává jen z navzájem disjunktních cyklů a oboustranných řetězů.

Pozorování. Prostá funkce se sestává jen z navzájem disjunktních cyklů, jednostranných řetězů a oboustranných řetězů. Počáteční vrcholy jednostranných řetězů jsou přitom přesně ty prvky, který chybí v oboru hodnot.

Úlohy s iteracemi dovedou být dost různorodé a kromě výše uvedených pozorování nemáme moc silnější zbraně. Časté postupy a nástroje zahrnují:

- *prostost a bijektivita*: Pokud dokážeme, že je funkce prostá či bijektivní, značně to zjednoduší obrázek. Následně už lze zvlášť pracovat s cykly a řetězy.
- *extremální princip*: Na cyklech se může vyplatit podívat se na největší nebo nejmenší prvek. Stejně tak může někdy pomoci minimální prvek oboru hodnot. Obecněji má každá podmnožina $\mathbb{N}$ minimum.
- *pořadí a vzdálenost*: Hodí se uvažovat o pořadí a vzdálenostech prvků na řetězu. Někdy se taky hodí porovnat to s pozicemi na číselné ose.
- *indukce*: Iterace často potkáme nad přirozenými čísly. Indukovat potom můžeme obyčejně podle argumentu, anebo třeba podle pořadí v cyklu či na řetězu.
- *funkcionálkové triky*: Funkcionálka s iterací je pořád funkcionálka. Chytré dosazení, úprava nebo symetrie mohou úlohu zpřehlednit.

Rozcvička I – procházky

Úloha 1. David na svých cestách zabloudil do země, kde je konečně mnoho silnic, každá z nich začíná a končí křižovatkou a každá křižovatka je tvaru Y. (Silnice mohou být klikaté a mimoúrovňově se křížit.) Řekl si, že by si ji rád prohlédl, ale trochu se obával, aby se tam úplně neztratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí ze křižovatky u hospody Na mýtince a střídavě bude na křižovatkách odbočovat doleva a doprava. Může si být jistý tím, že se po nějakém čase ocitne opět u hospody Na mýtince?

(PraSe 35–4j–5)

Úloha 2. Na kružnici leží několik hrobů. Do každého z nich dal Hamlet několik lebek (klidně žádnou), k nějakému neprázdnému se postavil a začal si hrát podle následujících pravidel. Pokud u sebe nemá žádné lebky, vezme si všechny z hrobu, u kterého právě stojí, a hned se posune o jeden dál. V opačném případě dá jednu lebku do hrobu, u něhož se nachází, a pokud ještě nějakou drží, přejde opět k dalšímu hrobu. Dokaž, že ať Hamlet rozmístí lebky jakkoli a postaví se kamkoli, budou po nějaké době počty lebek v jednotlivých hrobech stejné jako na začátku. (PraSe 37–1j–5)

Úloha 3. V každém patře nekonečně vysoké začarované věže se nachází magický portál, na kterém je napsáno přirozené číslo. Tato přirozená čísla tvoří nerostoucí posloupnost a zároveň každé číslo udává, do kolikátého patra příslušný portál vede. Mezi patry věže lze cestovat pouze pomocí portálů a každý portál je pouze jednosměrný. V jednom z pater si malá myška usmyslela, že se vydá na výzvědy, a začala putovat skrze portály. Ukaž, že za nějakou dobu zůstane uvězněná ve dvojici pater, případně dokonce jen v jediném. (PraSe 35–1p–4)

Úloha 4. Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. *Centrem* nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Dokaž, že město má centrum. (PraSe 34–1j–6)

Úloha 5. Na tabuli jsou v nějakém pořadí napsána čísla 1 až 2021 v řadě. V jednom kroku se podíváme na první číslo, nechť je to k, a obrátíme pořadí prvních k čísel – tedy $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ přepíšeme na $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1$. Dokaž, že po konečném počtu kroků dostaneme na první pozici jedničku.

Rozcvička II – iterujeme jenom trochu

Úloha 6. Rozhodni, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $f(f(n)) < f(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (PraSe 36–4p–2)

Úloha 7. Je dána funkce $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zkonstruuj $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takovou, že $f^n(x) = 0$ má přesně $g(n)$ řešení pro každé $n \in \mathbb{N}$. (zobecněné PraSe 37–4p–3)

Úloha 8. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňují

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

Úloha 9. Rozhodni, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f(f(n)) = n + 2021$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (IMO 1987)

Úloha 10. Rozhodni, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující $f(f(n)) = 3n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. (USAYNO)

Úloha 11. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $f(f(x)) = x + f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Najdi všechna řešení rovnice $f(f(x)) = 0$.

Cykly

Úloha 12. Najdi všechny neklesající funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro něž existuje $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ splňující $f^{g(x)}(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 13. Je dána bijekce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Musí nutně existovat nekonečně mnoho funkcí $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f(g(x)) = g(f(x))$ pro každé $x \in \mathbb{R}$? (ELMO SL 2018)

Úloha 14. Najdi všechny bijekce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují

$$f(f(n)) \le \frac{n + f(n)}{2}$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (Rumunsko 2004)

Úloha 15. Funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňuje

$$f^{f(n)}(n) = \frac{n^2}{f(f(n))}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Urči všechny možné hodnoty $f(2020)$. (USAMO 2019)

Úloha 16. Nechť $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Funkce $f\colon S \to S$ je *krutopřísná*, pokud pro každé $k \in S$ platí $f^{f(k)}(k) = k$. Dokaž, že každá krutopřísná funkce má alespoň $P+1$ pevných bodů, kde P je počet prvočísel v intervalu $(\sqrt{n}, n\rangle$. (PraSe 36–4p–7)

Úloha 17. O reálném polynomu $f(x) = x^2 + ax - 1$ je známo, že rovnice $f^{47}(x) = x$ má alespoň 50 reálných řešení. Dokaž, že tato rovnice má alespoň 96 řešení. (Russia TST 2020)

Úloha 18. Funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazveme *žůžovou*, pokud

$$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = n$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Najdi všechna m taková, že každá žůžová funkce f splňuje $f^{2021}(m) = m$. (ELMO SL 2014)

Úloha 19. Budiž $S = \{1, \ldots, n\}$. Pro bijekci $f\colon S \to S$ nechť $c(f)$ značí počet cyklů na f. Dokaž, že pro dvě bijekce f, g platí $c(f) + c(g) \le c(f \circ g) + n$. (USA TST 2016)

Řetězy

Úloha 20. Jsou dána $a, k \in \mathbb{N}$. Dokaž, že funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f^k(n) = n + a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje, právě když $k \mid a$. Bonus: kolik takových funkcí existuje?

Úloha 21. Najdi všechna nezáporná celá čísla k, pro něž existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f^n(n) = n + k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 22. Najdi všechna přirozená k, pro než existují funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že g nabývá nekonečně mnoha hodnot a $f^{g(n)}(n) = f(n)+k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (MEMO 2020 I1)

Úloha 23. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1$$

pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{N}$. (ELMO 2020)

Úloha 24. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují

$$f^{x+1}(y) + f^{y+1}(x) = 2f(x + y)$$

pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ a navíc nabývají nekonečně mnoha různých hodnot.
(upravené IMOC 2019)

Úloha 25. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, které splňují $f(f(f(n))) = f(n+1)+1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. (ISL 2013)

Úloha 26. Pro funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje k splňující $f^{2k}(n) = n+k$. Jako k_n označme nejmenší takové k. Dokaž, že posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neomezená. (ISL 2012)

Trocha teorie čísel

Úloha 27. Pro dané celé číslo $a_0 > 1$ definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pro každé $n \geq 0$ předpisem

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{pokud je } \sqrt{a_n} \text{ celé číslo,} \\ a_n + 3, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Urči všechny hodnoty a_0, pro něž existuje číslo A takové, že $a_n = A$ platí pro nekonečně mnoho indexů n. (IMO 2017)

Úloha 28. Definujme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takto: $a_1 = 1$ a pro každé přirozené k je $a_{k+1} = a_k^3 + 1$. Dokaž, že pro všechna prvočísla p tvaru $3\ell + 2$, kde ℓ je celé nezáporné, existuje přirozené n, že $p \mid a_n$. (MEMO 2018 T7)

Úloha 29. Urči největší přirozené $N < 2020$, pro něž existuje polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že $2020 \mid P^k(0)$, právě když $k \mid N$. Bonus: jak se odpověď změní, když místo 2020 napíšeme 2021? (USA EGMO TST 2020)

Úloha 30. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $x + f^x(y) \mid 2(x + y)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$. (IMOC 2018)

Úloha 31. Je dáno prvočíslo p a $S = \{1, 2, \ldots, p\}$. Urči počet funkcí $f\colon S \to S$, které splňují $f^p(1) = 2$.

Úloha 32. Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující:

(i) Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{f^n(m)-m}{n} \in \mathbb{N}$.
(ii) Množina $\mathbb{N} \setminus \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ je konečná.

Dokaž, že posloupnost $\{f(n) - n\}_{n=1}^{\infty}$ je periodická. (ISL 2015)

Náhodné

Úloha 33. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, jež pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ splňují

$$f^{f(x)}(y) = f(x)f(y).$$

Úloha 34. Najdi všechny páry funkcí (f, g) z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, které splňují

$$f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. (ISL 2011)

Úloha 35. Najdi všechny prosté funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f^{f(a)}(b) \cdot f^{f(b)}(a) = \left(f(a+b)\right)^2$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (Taiwan TST 2017)

Úloha 36. Nechť je $S \subseteq \mathbb{R}$. Dvojici funkcí (f, g) z S do S nazveme *španělskou*, pokud

(i) jsou obě rostoucí,
(ii) pro libovolné $x \in S$ platí $f(g(g(x))) < g(f(x))$.

Rozhodni, zda existuje španělská dvojice

(a) pro $S = \mathbb{N}$,
(b) pro $S = \left\{a - \frac{1}{b} : a, b \in \mathbb{N}\right\}$. (ISL 2008)

Úloha 37. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *chuťovka*, pokud existuje nekonstantní $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$f(n) + g(n) = f^{g(n)}(n) + g^{f(n)}(n)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Rozhodni, zda existuje $f_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že zároveň platí

(i) Pokud $f(n) \leq f_0(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak už f je chuťovka.
(ii) Pokud $f(n) > f_0(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak už f není chuťovka.

Literatura a zdroje

[1] Martin „Vodka“ Vodička: *Funkcionálky nad prirodzenými číslami*, Sborník *i*KS 2017
[2] Vít „Vejtek“ Musil: *Funkcionální rovnice*, Oldřichov 2012
[3] Rado van Švarc: *Dvě neobvyklé existenční techniky*, Hojsova Stráž 2016

Hinty

Hint 1. Jako stavy Davidovy cesty ber třeba trojice (silnice, směr, parita).
Hint 2. Stačí si rozmyslet, že proces jde jednoznačně obrátit.
Hint 3. Každá cesta se zacyklí – podívej se na cyklus.
Hint 4. Rozmysli si, že ve městě neexistují zatáčky, které zároveň nejsou křižovatky. Potom se zkus procházet uvnitř města.
Hint 5. Podívej se na cyklus a učiň extremální volbu.
Hint 6. Podívej se na cestu z libovolného n.
Hint 7. Prostě si nakresli stromeček.
Hint 8. Nahlédni prostost a poté indukuj.
Hint 9. Každý řetěz musí střídavě procházet dvě zbytkové třídy mod 2021.
Hint 10. Zkus si tipnout.
Hint 11. Je to jen 0.
Hint 12. Neklesajícnost je v cyklu dost omezující.
Hint 13. Rozděl komponenty souvislosti na oboustranné řetězy, pevné body a ostatní cykly.
Hint 14. Oboustranné řetězy vysporuj, v cyklech učiň extremální volbu.
Hint 15. Rozmysli si, že f musí být poskládána z dvojcyklů a pevných bodů.
Hint 16. Délky cyklů.
Hint 17. Kolik je cyklů délek 1 a 47?
Hint 18. Rozmysli si bijektivitu. Uvnitř cyklu indukuj proti směru šipek.
Hint 19. Funkci zeslab na neorientovaný graf, místo cyklu ber komponentu souvislosti.
Hint 20. Kolik prvků se s každou aplikací f ztrácí z oboru hodnot?
Hint 21. Cesta z n musí navštívit (skoro všechny) prvky zbytkové třídy n mod k. Najdi spor pomocí toho, že po vhodném n následuje na řetězu $n + k$ příliš brzo.
Hint 22. Cesta z $f(n)$ navštíví skoro celou zbytkovou třídu $f(n)$ mod k. Buď najdi spor s neomezeností g, anebo zkus vhodně poskládat graf.
Hint 23. Řetěz z 1 musí obsahovat vše. S pomocí úlohy 20 si rozmysli $1 \mapsto 2 \mapsto 3$ a je vyhráno.
Hint 24. Vyindukuj $f(n) = f^n(1)$. Nekonečnost oboru hodnot potom zpřehlední situaci.
Hint 25. Uprav do $f^4(n) = n+c$, následně porovnávej, kolik prvků chybí v oborech hodnot f a f^3. Pak už si stačí rozmyslet pořadí prvních čtyř prvků na řetězu – jsou dvě možnosti, které fungují.
Hint 26. Omez se na cestu jdoucí z 1 a označ $g(n) = f^{2k_n}(n) = n + k_n$. Využij toho, že g posouvá věci na cestě z 1 dvakrát dál, než je posouvá na číselné ose. Kolik bude mít řetězů?
Hint 27. Rozmysli si modulo 3. Potom se dívej na minimum cyklu.
Hint 28. Trik: $0^3 + 1 \equiv 1 \pmod p$.
Hint 29. Rozlož úlohu do $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_{101}$. Jak funguje délka cyklů při skládání zpět?
Hint 30. Zafixuj y a ber dostatečně velké x.
Hint 31. Prostě kombinatoricky počítej, prvočíselnost zařídí, že skoro žádná délka cyklu nevadí. Až nebudeš vědět, co se sumou, zkus teleskop.

Hint 32. Rozmysli si prostost a vysporuj cykly. Pro fixní a si rozmysli, že když nějaké T splňuje $\frac{f^d(a)-a}{d} = T$ pro nekonečné mnoho různých d, pak už je řetěz jdoucí z a aritmetická posloupnost s diferencí T.
Hint 33. Je to trochu troll. Rozmysli si $\frac{f(f(x))}{f(x)} = c$ a dále pracuj jen na oboru hodnot.
Hint 34. Zeslab rovnost na $f^{g(n)+1}(n) < f(n+1)$. Indukuj najednou, že

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(a-1) < f(a) < f(\text{cokoliv většího než } a)$$

a zároveň $f(n) = n$ pro $n \leq a-1$.
Hint 35. Existuje jen jedno řešení. Nejdřív urozebírej $1 \mapsto 2 \mapsto 3$, potom indukuj.
Hint 36. V (a) vyindukuj $g^k(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in S$, $k \geq 0$. V (b) najdi konstrukci: zkus, aby na číslech tvaru $a - \frac{1}{b}$ funkce f měnila a, zatímco g mění b.
Hint 37. Pro (ii) zkus zvolit f_0 tak, se dalo zdola odhadnout $g(n) - g^{f(n)}(n)$. To napoví správnou konstrukci funkce f_0, pro (i) pak zkus vymyslet dost postačujících podmínek. Pevné nervy a dobrou chuť!