DVOUPOMĚR A POLÁRY

PEPA TKADLEC

Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní vlastnosti harmonických čtveřic, harmonických čtyřúhelníků a polár. Obsahuje rovněž přes dvacet úloh týkajících se dané tematiky.

Čím je pro začátečníka v geometrii angle-chasing, tím jsou pro ambiciózního olympionika vlastnosti harmonických čtveřic bodů.

Teorie

Definice. *Dvoupoměrem* čtyř bodů A, B, C, D ležících na jedné přímce rozumíme hodnotu

$$(AB, CD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

kde úsečky nahlížíme orientovaně.

Tvrzení. *Přímky a, b, c, d procházející bodem P protnou přímku ℓ v bodech A, B, C, D a přímku ℓ' v bodech A', B', C', D'. Pak $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.*

Definice. Řekneme, že čtveřice bodů A, B, C, D ležících na jedné přímce je *harmonická*, jestliže $(AB, CD) = -1$. Čtveřice A, B, C, D je tedy harmonická, jestliže body C, D dělí úsečku AB ve stejném poměru (jeden zevnitř, jeden zvenčí).

Tvrzení. *V následujících běžných konfiguracích se vyskytují harmonické čtveřice:*

(1) Ať M je střed AB. Pak $(AB, M\infty) = -1$.
(2) Ať se ceviány AD, BE, CF protínají v P a označme $D' = EF \cap BC$. Pak $(BC, DD') = -1$.
(3) Na průměru AB kružnice k se středem O je dán bod X. Je-li X' jeho obraz v inverzi podle k (tj. platí-li $OX \cdot OX' = OA^2 = OB^2$), pak $(AB, XX') = -1$.

(4) Ať A, B, C, D leží na přímce a P mimo ni. Pak z libovolných dvou bodů plyne třetí:
- $(AB, CD) = -1$,
- $\angle APC = 90°$,
- $\angle BPC = \angle CPD$.

Možná poněkud překvapivě lze promítat i na kružnice.

Tvrzení. *Je dán bod P ležící na kružnici k a mimo přímku ℓ. Přímky a, b, c, d protnou ℓ v A', B', C', D' a k v A, B, C, D. Pak*

$$(A'B', C'D') = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Definice. Řekneme, že tětivový čtyřúhelník $ABCD$ je *harmonický*, pokud pro délky jeho stran platí $ac = bd$.

Tvrzení. *Buď D bod na oblouku BC (neobsahujícím A) kružnice k opsané trojúhelníku ABC. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
(1) $ABDC$ je harmonický
(2) AD je A-symediána v $\triangle ABC$ (tedy čára symetrická s A-těžnicí podle osy úhlu u A).
(3) AD a tečny ke k skrz B a C procházejí jedním bodem.

Tvrzení. *Tečny ke kružnici k vedené bodem A se jí dotýkají v T, U. Libovolná přímka ℓ skrz A protne přímku TU v B a kružnici k v X, Y. Pak $(AB, XY) = -1$.*

Definice. Buď k kružnice se středem O a $X \neq O$. Řekneme, že přímka ℓ je *polára* bodu X vzhledem ke k (bod X je *pól* přímky ℓ vzhledem ke k), jestliže přímka ℓ prochází obrazem X' bodu X v inverzi podle k a je kolmá na OX.

Tvrzení. *Ať P, Q jsou body a p, q jejich poláry (vzhledem k nějaké kružnici k). Pak platí, že pokud P leží na q, pak Q leží na p.*

Tvrzení. *Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsaný do kružnice k. Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Pak trojúhelník PQR je selfpolar, tedy PQ je polára bodu R, PR je polára bodu Q a QR je polára bodu P.*

Na rozjezd

Úloha 1. Mějme trojúhelník ABC, bod I je jeho vepsiště, bod I_a jeho A-připsiště, D je průsečík osy úhlu u A a strany BC. Dokažte, že $(AD, II_a) = -1$.

Úloha 2. Ceviány AD, BE, CF se protínají v P. Označme $Q = BC \cap EF$, $R = AD \cap EF$, $S = CF \cap BR$ a $T = DF \cap BR$. Ukažte, že

$$(QR, EF) = (AP, DR) = (CS, PF) = (BS, RT) = -1.$$

Úloha 3. Na přímce p jsou dány body B, D, C v tomto pořadí. Dokažte, že všechny body A takové, že AD je osa úhlu BAC, leží na pevné kružnici (tzv. *Apoloniově kružnici*).

Úloha 4. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P. Dokažte, že pokud je BP symediána v ABC, pak AP je symediána v ABD.
(Rumunsko TST 2006)

Úloha 5 (Blanchet Theorem)**.** Na A-výšce AD trojúhelníka ABC je dán bod P. Označme $X = BP \cap AC$, $Y = CP \cap AB$. Dokažte $\angle XDA = \angle YDA$.

Úloha 6. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán pevný bod P. Body X, Y se pohybují po AB, AC tak, že $\angle XPA = \angle YPA$. Ukažte, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 7. Je dána kružnice k a přímka p, která ji neprotíná. Po přímce p se pohybuje bod P. Tečny z P ke k se jí dotýkají v T a U. Dokažte, že přímka TU prochází pevným bodem.

Úloha 8. Úhlopříčky AC, BD tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ vepsaného do kružnice k se středem O se protínají v $P \neq O$. Polopřímka OP protne k v X. Ukažte, že obraz přímky CA podle CX, obraz přímky DB podle DX a přímka OX procházejí jedním bodem.

Na zamyšlení

Úloha 9. Je dán trojúhelník ABC, body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB označme postupně D, E, F. Bod X leží uvnitř trojúhelníku ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku XBC se dotýká jeho stran v bodech D, Y a Z. Dokažte, že E, F, Y, Z leží na jedné kružnici. (IMO shorlist 1995)

Úloha 10. Kružnice vepsaná rovnoramennému trojúhelníku ABC $(AB = AC)$ se dotýká AC v E. Přímka různá od BE protíná kružnici vepsanou v bodech F, G. Přímky EF, EG protnou BC v K, L. Dokažte $BK = CL$.
(MEMO 2008)

Úloha 11. V trojúhelníku ABC označme D patu osy úhlu u A a I_b, I_c vepsiště trojúhelníků ABD, ACD.

(1) (Sharygin 2013) Je-li $Q = BC \cap I_bI_c$, dokažte $\angle DAQ = 90°$.
(2) Označíme-li průsečíky I_bI_c s AB, AC postupně M, N, dokažte, že MC a NB se protnou na AD.

Úloha 12. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patou A-výšky D a kolmištěm H. Kružnice skrz B a C protne kružnici nad průměrem AH v X a Y. Označíme-li P projekci D na XY, dokažte $\angle BPD = \angle CPD$. (Japonsko 2013)

Úloha 13. Trojúhelník ABC je vepsán do kružnice k. Osa úhlu u A a A-těžnice protnou kružnici k podruhé v S a T. Označme $X = ST \cap BC$. Dokažte $AB \cdot BX = AC \cdot CX$.

Úloha 14. Je dán trojúhelník ABC s vepsištěm I. Body dotyku kružnice vepsané s odpovídajícími stranami označme A_1, B_1, C_1. Dále označme $D = BC \cap B_1C_1$ a $F = DI \cap AA_1$. Dokažte $\angle AFB = \angle AFC$.

Úloha 15. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. Kružnice s průměrem AB protne CH v X a Y, kružnice s průměrem AC protne BH v Z a W. Dokažte, že (nezávisle na označení) se XZ a YW protínají na BC.

(Brazílie 2013)

Úloha 16. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se středem I se dotýká jeho stran AB, AC v F, E. Označme N průsečík EF a A-těžnice AM. Dokažte $NI \perp BC$.

Úloha 17. V tětivovém pětiúhelníku $ABCDE$ platí $AC \parallel DE$ a střed M tětivy BD splňuje $\angle AMB = \angle BMC$. Dokažte, že BE půlí tětivu AC.

Úloha 18. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB v D, E, F. Úsečka AD protne vepsanou podruhé v J a přímky BJ, CJ protnou vepsanou podruhé v K, L. Dokažte, že KC, LB a AD procházejí jedním bodem.

Úloha 19. V trojúhelníku ABC označme M, N projekce B, C na osu úhlu u A. Kružnice nad průměrem MN protne BC v X a Y. Dokažte $\angle BAX = \angle CAY$.

(Sharygin 2013)

Úloha 20. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Přímky AB a CD se protnou v bodě E, přímky BC, AD v bodě F. Průsečík úhlopříček označme P a projekci P na EF označme O. Dokažte, že $\angle BOC = \angle AOD$. (China TST 2002)

Úloha 21. Na stranách AB, AC ostroúhlého trojúhelníka ABC jsou dány body E, F tak, že označíme-li jejich projekce na BC postupně G, H, pak se EH a FG protínají na A-výšce AD. Označíme-li P projekci F na DE, dokažte $\angle APF = \angle CPF$. (Korea 2012)

Úloha 22. V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík polopřímek BA, CD a Q polopřímek BC, AD. Je-li H projekce D na PQ, dokažte, že kružnice vepsané ADP a CDQ jsou z H vidět pod stejným úhlem.

(Rusko 2008)

Hinty k úlohám

Hint 1. Využijte tvrzení „dvě ze tří".

Hint 2. Vždy najděte správný bod, z nějž promítat.

Hint 3. Dokreslete čtvrtého do party k B, D, C a využijte tvrzení „dvě ze tří".

Hint 4. Oboje je přece ekvivalentní $ac = bd$.

Hint 5. Zkombinujte konfiguraci „Ceva-Mene" a tvrzení „dvě ze tří".

Hint 6. Podívejte se na XY z P a z A.

Hint 7. Kterým zajímavým bodem prochází polára bodu na přímce p?

Hint 8. Protáhněte polopřímku i na druhou stranu a použijte „dvě ze tří".

Hint 9. Čtvrtý do party k B, D, C. Mocnost.

Hint 10. Označte zbylé body dotyku, najděte harmonický čtyřúhelník a promítněte ho.

Hint 11. (1) Kde je čtvrtý do party k I_bI_c a $X = AD \cap I_bI_c$? (2) Pokud mají dvě harmonické čtveřice společný bod, pak zbylé tři spojnice procházejí jedním bodem.

Hint 12. Chordály tří kružnic procházejí jedním bodem.

Hint 13. Dokreslete rovnoběžku s BC bodem A.

Hint 14. Dokažte a využijte, že AA_1 je polára D.

Hint 15. Pokud mají dvě harmonické čtveřice společný bod, pak zbylé tři spojnice procházejí jedním bodem.

Hint 16. Dokazujte, že N je pól rovnoběžky s BC bodem A.

Hint 17. Začněte tím, že AC je symediána v ABD.

Hint 18. Ukažte, že $JKDL$ je harmonický (AD je polára průsečíku $BC \cap EF$).

Hint 19. Úloha o rovnoramenném lichoběžníku. Průsečík úhlopříček a průsečík ramen jsou harmonické se středy základen.

Hint 20. Dokažte, že OP je společná osa jistých dvou úhlů.

Hint 21. $X = EF \cap BC$. S čím vším je XD harmonické?

Hint 22. Vnější střed stejnolehlosti mezi dvěma malými vepsanými leží na PQ.