mezinárodní korespondenční seminář iKS iksko.org

Analytické metody v olympiádní teorii čísel

Matěj Doležálek

Abstrakt. Základní myšlenkou analytické teorie čísel je vzít divokou veličinu, která v sobě kóduje zajímavou informaci (třeba rozložení prvočísel), odhadnout ji hezčí funkcí a něco z toho vyvodit. Ukážeme si, že myšlenky podobného rázu mohou najít uplatnění i v olympiádních úlohách, a prozkoumáme také, jak může konvergence posloupností pomoci v úlohách s celými čísly.

Definice (asymptotická notace). Buďte f, g funkce definované na kladných reálných číslech. Řekneme, že funkce $f(x)$ *je* $O(g(x))$, pokud existuje konstanta C splňující $|f(x)| \le Cg(x)$ pro všechna dostatečně velká x. Tuto skutečnost zapisujeme $f \in O(g(x))$ a méně formálně též $f(x) = O(g(x))$.

Úmluva. Symbolem log budeme značit přirozený logaritmus.

Úloha 1 (motivační). Přirozené číslo n nazveme *mocninové*, pokud $n = x^k$ pro nějaká přirozená x, k, kde $k \ge 2$. Nechť je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rostoucí posloupnost, v níž jsou seřazena všechna mocninová čísla. Dokaž, že pro nekonečně mnoho indexů i je $a_{i+1} - a_i$ násobkem čísla 2021. (*i*KS 10–N6)

Řešení. Všimněme si, že $(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$, takže když se pro nějaké $a \equiv 1010 \pmod{2021}$ mezi a^2 a $(a+1)^2$ nenachází žádné další mocninové číslo, dojde k dělitelnosti, kterou chceme. Teď jen stačí dokázat, že se to děje nekonečně mnohokrát. Ukážeme, že (nečtvercových) mocninových čísel je jednoduše moc málo na to, aby zkazila (skoro) všechny výskyty hledaného jevu.

Uvažujme nějaké přirozené N. V rozmezí 1 až N je nachází $\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ čtverců a přitom mezi každými 2021 dvěma z nich se nachází jeden, jehož základ dává zbytek 1010 modulo 2021. Lze tedy říci, že v 1 až N se vyskytne alespoň $\left\lfloor \frac{1}{2021}\sqrt{N} \right\rfloor$ dvojic $a^2, (a+1)^2$ s $a \equiv 1010 \pmod{2021}$. Aby nám taková dvojice nedala vyhovující index i, musí se mezi těmito dvěma čtverci nacházet další mocninové číslo. To nemůže být další čtverec, takže to bude nějaká třetí nebo větší mocnina.

Kolik je takových v rozmezí 1 až N? Mělo by být $x^k \le N$ pro $x \ge 2$, $k \ge 3$. Pro jedno fixní k je takových dvojic (x, k) zjevně nanejvýš $\sqrt[k]{N} \le \sqrt[3]{N}$. Navíc nemusíme uvažovat všechna k, díky $x \ge 2$ musí být $2^k \le N$, tedy $k \le \log_2 N$. Dohromady tak dostáváme, že vyšších mocninových čísel, která by se mohla vetknout mezi naše čtverce, je jen $O(\sqrt[3]{N}\log N)$. To je ale asymptoticky méně, než kolik máme dvojic čtverců, což roste až na konstantní násobek jako $\sqrt{N}$.

Máme tedy mnohem méně „problémových čísel“ než dvojic, které by jimi mohly být „rozbity“. Nekonečně mnoho dvojic (dokonce valná většina z nich) tak zůstane nerozbito, takže máme vyhráno.

Poznámka (kapitoly a jak je číst). Tento příspěvek se zabývá mnoha nástroji a většina úloh v něm je poměrně těžká. **Rozhodně jej proto nechceš číst popořadě!** Naopak doporučuji přeskakovat z místa na místo a vyzkoušet si úlohy ze všech kapitolek. Ty jsou na sobě povětšinou nezávislé, výjimkou jsou (obzvláště) prvočíselné sumy, jejichž znalosti a ideje se mohou hodit při odhadech v prvočíselném union boundu.

Asymptotika valuací a polynomů

Na rozehřátí si zkusíme rozmyslet, jak rychle nebo pomalu že nám to rostou nějaké každodenní objekty teorie čísel – budeme si hrát s celočíselnými polynomy a s p-valuacemi. Pro jistotu následuje rychlé shrnutí všeho důležitého o p-valuacích. U polynomů si povětšinou vystačíme s vědomím, že (nekonstantní) polynomy utíkají do nekonečna a polynomy většího stupně utíkají rychleji.

Definice. Pro prvočíslo p rozumíme *p-valuací celého čísla n* (značíme $v_p(n)$) největší exponent k takový, že $p^k \mid n$. Pro nulu dodefinováváme $v_p(0) = \infty$, pro racionální čísla $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$.

Tvrzení (turboshrnutí p-valuací). Pro přirozená*) a, b a prvočíslo p platí:

(i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,
(ii) $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$, pro $v_p(a) \neq v_p(b)$ už v uvedené nerovnosti dokonce musí nastat rovnost,
(iii) $v_p(a) \leq \log_p(a)$,
(iv) $v_p(a!) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{a}{p^j} \right\rfloor = \frac{a - s_p(a)}{p-1}$, kde s_p je ciferný součet v soustavě o základu p,
(v) $v_p\left(\binom{a+b}{b}\right) =$ počet „přenosů jedničky“ při sčítání $a + b$ pod sebe v soustavě o základu p,
(vi) pokud liché p dělí $a - b$, ale nedělí a, b, pak $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$,
(vii) jsou-li x, y lichá a n sudé, pak $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$.

Úloha 2. Pro polynom f s celočíselnými koeficienty existuje posloupnost po dvou různých přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$0 = f(a_1), \qquad a_1 = f(a_2), \qquad a_2 = f(a_3), \qquad \ldots$$

Jaký může být stupeň f? (Turnaj měst 2003)

Úloha 3. Jsou dány nenulové polynomy f, g s celočíselnými koeficienty takové, že $f(n) \mid g(n)$ pro nekonečně mnoho přirozených n. Nahlédni, že $g = f \cdot h$ pro nějaký polynom h s racionálními koeficienty.

*) Některé z uvedených vlastností platí i pro celá či dokonce racionální a, b – zkus si rozmyslet které.

Úloha 4. Je dáno liché prvočíslo p. Dokaž, že pro všechna dostatečně velká přirozená čísla x má jedno z čísel $x, x+1, x+2, \ldots, x+\frac{p-1}{2}, x+\frac{p+1}{2}$ prvočíselného dělitele většího než p. (China Southeast 2020)

Úloha 5. Přirozené číslo nazveme *palindromem*, pokud se nezmění obrácením pořadí jeho cifer v desítkové soustavě. Najděte všechny polynomy f s celočíselnými koeficienty takové, že $f(n)$ je palindrom pro každé přirozené n.

Úloha 6. Je dáno přirozené číslo k. Dokaž, že existuje N takové, že pro všechna $n \geq N$ má $\binom{n}{k}$ alespoň k různých prvočíselných dělitelů. (China TST 2010)

Úloha 7. Buď f nekonstantní polynom s celočíselnými koeficienty. Potom existuje nekonečně mnoho prvočísel, jež dělí nějaké nenulové $f(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

(Schurova věta)

Převrácené hodnoty

Občas dovedeme o posloupnosti/množině něco vyčíst z řady převrácených hodnot. S nekonečnými sumami a limitami si zatím dovolíme zacházet jen intuitivně – pokud by drahého čtenáře zajímala pořádná definice, nechť mrkne do kapitolky o konvergentních celočíselných posloupnostech.

Úmluva. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost nezáporných reálných čísel. Pokud je součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konečný, řekneme, že tato řada *konverguje*. V opačném případě říkáme, že *diverguje*.

Úloha 8. Uvažujme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokaž, že pokud pro nějaké $k > 0$ suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^k}$ diverguje, pak existuje nekonečně mnoho prvočísel, jež dělí nějaké a_n.

Úloha 9. Je dána neklesající posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje $\lim_{n\to\infty} a_n/n = 0$. Dokaž, že posloupnost $\{n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje všechna přirozená čísla.

Úloha 10. Jsou dána celá čísla $a, b > 1$. Dokaž, že nějaký násobek a ve svém zápisu v soustavě o základu b obsahuje každou z číslic $0, 1, \ldots, b-1$ alespoň jednou.

(upravený Putnam)

Úloha 11. Rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $a_n < 100n$ pro všechna n. Dokaž, že v ní lze nalézt nekonečně mnoho členů, jejichž zápisy v desítkové soustavě obsahují 2023 po sobě jdoucích jedniček.

Sumy a prvočísla

Často se nám stane, že potřebujeme odhadnout jakousi sumu přes prvočísla. V této kapitolce si k tomu představíme potřebná fakta a nástroje. Pokud zde něco označuji jako „Fakt", pak tím chci říct, že pořádný důkaz je nad naše možnosti nebo z jiného důvodu nestojí za to.

Úmluva. Pokud sumu nebo produkt indexujeme písmenkem p, pak za jeho hodnoty bereme jen prvočísla.

Tvrzení (integrální odhad sumy). Nechť je f nerostoucí integrovatelná funkce definovaná na intervalu $[a-1, b+1]$, kde a, b jsou celá čísla. Potom platí

$$\int_{a-1}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{n=a}^{b} f(n) \geq \int_{a}^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analogický odhad lze odvodit i pro neklesající funkci.

Úloha 12. $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + O(1).$

Ve skutečnosti platí ještě silnější vztah $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(1/x)$, kde $\gamma = 0{,}577\ldots$ je konstanta. Důkaz vyžaduje sofistikovanější formu integrálního odhadu.

Fakt. $\displaystyle\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + O(1).$

Úloha 13. Nechť $\omega(n)$ značí počet různých prvočíselných dělitelů přirozeného čísla n. Dokaž, že platí $\sum_{n\leq x} \omega(n) = x\log\log x + O(x)$.

Úloha 14. $\displaystyle\prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0.$

Úloha 15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Fakt. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64\ldots$

Úloha 16. Nahlédni (neformálně), že v intervalu $[1, x]$ je zhruba $\frac{6}{\pi^2}x$ bezčtvercových čísel.

Fakt. $\displaystyle\sum_{p} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}.$

Na závěr kapitoly si ještě označme *prvočíselnou funkci* $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$. Zde nemáme čas si o ní cokoliv dokázat pořádně, k řešení úloh by mělo stačit následující:

Fakt (prvočíselná věta). $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Tím se myslí, že poměr $\pi(x)$ a $\frac{x}{\log x}$ se pro velká x blíží k 1.

Úloha 17. $\displaystyle\sum_{p\leq x} \frac{1}{\log p} = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$

Úloha 18. Nechť $\Omega(n)$ značí počet prvočíselných dělitelů n včetně násobnosti. Dokaž, že pro libovolné dané přirozené číslo k má rovnice $\Omega(n) = k$ jen $O\left(\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right)$ řešení v intervalu $[1, x]$.

Prvočíselný union bound

Vyzbrojeni nástroji na krocení prvočíselných sum můžeme představit mírně komplikovanější verzi myšlenek z úvodní motivační úlohy – chceme-li ukázat existenci (nekonečně mnoha) „dobrých“ čísel, stačí odhadnout počet těch „špatných“. Jelikož je mnoho jevů v teorii čísel dosvědčeno nějakým prvočíslem, budou se v našich odhadech mnohdy vyskytovat právě sumy přes prvočísla.

Úloha 19. Jsou dána celá čísla a_1, a_2, b_1, b_2 taková, že $a_i > 0$ a zároveň $\gcd(a_i, b_i) = 1$. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho t takových, že $a_1t + b_1$ i $a_2t + b_2$ jsou bezčtvercová čísla. (Iran 2020)

Řešení. Aby a_it+b_i nebylo bezčtvercové, musí to být násobek nějakého p^2. Prozkoumejme tedy řešení kongruence $a_it + b_i \equiv 0 \pmod{p^2}$. Mohou nastat dva případy:

- $p \mid a_i$. Potom z nesoudělnosti $p \nmid b_i$, takže $a_it + b_i$ nikdy není ani násobkem p.
- $p \nmid a_i$. Potom má kongruence jediné řešení $t \equiv -b_i/a_i \pmod{p^2}$.

V souhrnu tedy existuje nanejvýš jedna zbytková třída, která kongruenci řeší. Uvažujeme dvě aritmetické posloupnosti, takže pro jedno p můžeme mít zakázány nanejvýš dvě zbytkové třídy mod p^2, tudíž mezi libovolnými p^2 po sobě jdoucími přirozenými čísly jsou jen (nanejvýš) dvě zakázána prvočíslem p.

Podívejme se na počet všech zakázaných t menších nebo rovných nějakému N. Odhadneme jej shora jako součet počtů čísel zakázaných jednotlivými prvočísly – stačí přitom ale zahrnout jen prvočísla menší než odmocnina ze všech relevantních $|a_it + b_i|$. Tuto velikost členů našich aritmetických posloupností stačí velmi hrubě odhadnout třeba jako kN, kde $k = |a_1| + |a_2| + |b_1| + |b_2|$ je konstanta. Počet zakázaných čísel tak bude odhadnut sumou

$$\sum_{p \le \sqrt{kN}} 2\left\lceil \frac{N}{p^2} \right\rceil \le 2N \sum_{p \le \sqrt{kN}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p \le \sqrt{N}} 2.$$

První člen shora odhadneme jako $2cN$, kde $c = \sum_p \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}$, druhý jako

$$2\pi(\sqrt{kN}) = O\left(\frac{\sqrt{N}}{\log \sqrt{N}}\right),$$

což je asymptoticky menší než N. Asymptoticky největším členem v odhadu tak je $2cN$, což je lineární funkce s vedoucím koeficientem ostře menším než 1. Pro dost velká N tedy získáme lineárně mnoho (zhruba $(1-2c)N$) nezakázaných t, pro která budou obě $a_it + b_i$ bezčtvercová.

Poznámka (pozor na zaokrouhlovací členy). V předchozí úloze jsme viděli, že kromě „té hlavní“ sumy $\sum_p \frac{1}{p^2}$ jsme v úloze dostali i členy plynoucí z odhadu (horní) celé části. Člověk může při přemýšlení o podobných úlohách snadno nabít dojmu, že tyto části odhadu lze zanedbat, tak tomu ale není! K jejich vypořádání typicky používáme prvočíselnou větu, a pokud by tyto zaokrouhlovací odhady připadaly v úvahu pro příliš mnoho prvočísel, mohly by se posčítat na něco příliš velkého.

Poznámka (ředění posloupností). Uvažujme, že se v úloze snažíme o to, aby nějaké výrazy (třeba prvočísla nebo jejich mocniny) nedělily moc členů nějaké posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (třeba aritmetické posloupnosti). Často dovedeme některé konkrétní výrazy (prvočísla) úplně vyřadit ze hry, když se místo celé $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme dívat jen na vhodně zvolenou podposloupnost. Ilustrováno na příkladu: u posloupnosti $an+1$ možná musíme řešit, kolik členů je dělitelných jedním zvoleným prvočíslem q. Když se ale zaměříme jen na podposloupnost $aqn+1$, jsme v klidu – všechny její členy jsou s q nesoudělné.

V důsledku toho nám z prvočíselné sumy, která se v úloze vyskytne, téměř zadarmo zmizí člen od prvočísla q. S tímto trikem se tak často přihodí, že tam, kde na první pohled potřebujeme prvočíselnou sumu menší než 1, nám postačí, aby byla konvergentní. Vyzkoušej si to na následující úloze!

Úloha 20. Jsou dána přirozená čísla $a_1, \ldots, a_k$. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho t takových, že a_it+1 jsou bezčtvercová čísla pro všechna $i = 1, \ldots, k$.

Úloha 21. Nahlédni, že kdyby $\sum_p \frac{1}{p}$ konvergovalo, pak by nekonečně mnoho přirozených čísel nemělo žádné prvočíselné dělitele. (elementární důkaz $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$)

Úloha 22. Dokaž, že pro nekonečně mnoho přirozených n je n^2+1 bezčtvercové číslo. (China TST 2015)

Úloha 23. Posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *roztomilou*, je-li rostoucí a zároveň splňuje $a_n < 9000n$. Index i nazveme *hustým*, pokud $a_i \mid \mathrm{lcm}(a_1, \ldots, a_{i-1})$, a *řídkým*, pokud $a_i \nmid \mathrm{lcm}(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Rozhodni, zdali každá roztomilá posloupnost musí mít nekonečně mnoho

(i) hustých indexů,
(ii) řídkých indexů. (EMMO 2016)

Úloha 24. Budiž $a_1, a_2, \ldots$ rostoucí posloupnost, v níž jsou seřazena všechna bezčtvercová přirozená čísla. Dokaž, že pro nekonečně mnoho indexů i platí $a_{i+1} - a_i = 2020$. (China Southeast 2020)

Úloha 25. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že číslo n^2+1 nemá žádného dělitele tvaru k^2+1 vyjma sebe sama a jedničky. (Iran 2010)

Úloha 26. Pro přirozená b a x označujme jako $s_b(x)$ ciferný součet čísla x zapsaného v soustavě o základu b. Dokaž, že pro libovolné dané přirozené k umíme zvolit nekonečně mnoho přirozených n splňujících $s_p(n) > k$ pro všechna prvočísla p.

Úloha 27. Dokaž, že existuje kladná reálná konstanta c s následující vlastností: kdykoliv jsou a, b, n přirozená čísla taková, že pro libovolná $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ platí $\gcd(a+i, b+j) > 1$, potom je splněna nerovnost $\min\{a, b\} > (cn)^n$. (zesílené USAMO 2014/6)

Úloha 28. Dokaž, že existuje konstanta $c > 0$ s vlastností: kdykoliv je n přirozené číslo a zvolíme n různých čísel nepřevyšujících $2n$, pak některá dvě z nich mají největšího společného dělitele většího než cn. (Tuymaada 2007)

Konvergentní celočíselné posloupnosti

Když už se bavíme o technikách z pomezí teorie čísel a matematické analýzy, byl by hřích nezmínit konvergentní celočíselné posloupnosti. A co že je to teda ta konvergence?

Definice. Řekneme, že reálné číslo a je *limitou* posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje N takové, že pro všechna $n \geq N$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Říkáme též, že (posloupnost) a_n *konverguje* k a.

Říkáme-li, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* k nějakému součtu s, pak tím myslíme, že k limitě s konverguje posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Tvrzení (turboshrnutí limit). Nechť jsou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupností konvergující po řadě k a, b. Potom:

(i) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $a + b$,

(ii) $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k ab,

(iii) pokud $b \neq 0$, pak $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k a/b,

(iv) je-li f funkce spojitá v a, pak $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $f(a)$,

(v) je-li $a = b$ a pro všechna dostatečně velká n platí $a_n \leq c_n \leq b_n$, pak i posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k a.

Cvičení. Rozhodni, zda následující posloupnosti konvergují, a případně k čemu:

(i) $\frac{p(n)}{q(n)}$ v závislosti na polynomech p, q,

(ii) $\sqrt{n-1} - \sqrt{n}$,

(iii) $\frac{n^{2023} + 10^{10^{10}}}{2^n}$.

Tvrzení (stěžejní). Má-li posloupnost celých čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu A, znamená to, že od jistého N už pro $n \geq N$ platí $a_n = A$.

Úloha 29. Jsou dána kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_k$, z nichž alespoň jedno není celé. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že n je nesoudělné s

$$\lfloor a_1 n \rfloor + \cdots + \lfloor a_k n \rfloor .$$

Úloha 30. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) takové, že $a^n + b^n$ je $(n+1)$-tou mocninou přirozeného čísla pro každé n.

Úloha 31. Je dána rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje $a_n \mid a_1 + \cdots + a_{n-1}$ pro všechna přirozená $n \geq 2001$. Dokaž, že pro všechna dostatečně velká n platí $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-1}$. (Turnaj měst 2001)

Úloha 32. Je dán kvadratický polynom f s celočíselnými koeficienty takový, že $f(n)$ je čtverec pro každé přirozené n. Nahlédni, že f je rovno čtverci nějakého lineárního polynomu.

Úloha 33. Celá čísla a, b splňují, že $a2^n + b$ je čtverec pro každé přirozené n. Dokaž, že $a = 0$. (Polsko)

Úloha 34. Přirozené číslo nazvěme *jedničkové*, pokud je v desítkové soustavě zapsáno samými jedničkami. Najděte všechny reálné polynomy f takové, že pro jedničkové n je $f(n)$ také jedničkové. (Putnam 2007)

Úloha 35. Budiž $b > 5$ celé číslo a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme x_n jako číslo se zápisem

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}5$$

v soustavě o základu b. Dokaž, že x_n je čtverec pro všechna dostatečně velká n právě tehdy, když $b = 10$. (ISL 2003)

Úloha 36. Je dán monický polynom f s celočíselnými koeficienty takový, že $f(x) = 2^n$ má pro každé $n \in \mathbb{N}$ řešení v přirozených číslech. Dokaž, že f je lineární. (iKS 8–N2)

Aplikace předchozího

Na závěr je tu pár úložek, které jako lemmátko používají něco, co bylo k vidění výše v příspěvku. Ne vždy je souvislost vidět na první chvíli, takže dobrou chuť!

Úloha 37. Nahlédni, že pro nekonečně mnoho přirozených čísel n platí $\pi(n) \mid n$.

Úloha 38. Je dáno kladné reálné číslo ν. Je-li $p_1, p_2, \ldots$ rostoucí posloupnost všech prvočísel, dokaž, že čísla $\lfloor p_n \nu \rfloor$ mají dohromady nekonečně mnoho prvočíselných dělitelů.

Úloha 39. Ukaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n splňujících dělitelnost

$$(n!)^{n+2015} \mid \left(n^2\right)!.$$

(Turkey TST 2015)

Úloha 40. Nechť p_n značí n-té prvočíslo a ν je kladné reálné číslo. Dále označme $a_n = \lfloor p_n \nu \rfloor$. Rozhodni, zda je možné, aby existovalo pouze konečně mnoho indexů k takových, že $p_i^{10} \mid \binom{2a_k}{a_k}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, 2020$. (KöMaL A.787)

Úloha 41. Nechť $\varphi(n)$ značí počet přirozených čísel menších než n, které jsou s ním nesoudělné. Dokaž, že pro nějaké přirozené m má rovnice $\varphi(x) = m$ alespoň 2015 řešení. (USA TSTST 2015)

Úloha 42. Uvažujme funkci $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která vždy přirozenému číslu s prvočíselným rozkladem $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ přiřazuje hodnotu

$$g(n) = \prod_{i=1}^{r} \alpha_i p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Dokaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $g(n+1) = g(n) + 1$.
(VJIMC 2022)

Úloha 43. Nechť $\tau(n)$ značí počet dělitelů přirozeného čísla n a budiž dáno $\varepsilon > 0$. Dokaž, že pro všechna dostatečně velká x je v intervalu $[1, x]$ méně než εx přirozených čísel n splňujících $\tau(n) \mid n$.

Literatura a zdroje

Z následujících zdrojů jsem čerpal většinu úloh, přičemž jsem ani zdaleka nevyčerpal všechny. V [1] a v menší míře též v [3] (kapitoly 15 a 17) lze také nalézt další analytické techniky, kterým jsem se v tomto příspěvku nevěnoval, převážně proto, že obnáší větší množství teorie.

[1] Ayan Nath: *A Taste of Analytic Number Theory*, `https://www.cmi.ac.in/~ayannath/olympiad-analytic-nt.pdf`.

[2] Pavel Turek: *Konvergentní posloupnosti v* $\mathbb{N}$, sborník *i*KS, 2019.

[3] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems of the Book*, XYZ Press, 2008.

Hinty

Hint 2. No, neočekáváme spíš, že nám polynomy čísla zvětšují?
Hint 3. Vyděl se zbytkem $f = gh + r$ s $\deg r < \deg g$. Pozor na technické detaily!
Hint 4. Napiš si ke každému z čísel největší prvočíselnou mocninu z jeho rozkladu.
(Fun fact: tahle úloha je děsně slabá – Størmerova věta říká, že pro všechna dost velká x musí už jen jedno z x, $x + 1$ mít prvočíselného dělitele většího než p.)
Hint 5. $f(n+1)-f(n)$ bude asymptoticky mnohem menší než $f(n)$, takže několik nejvyšších cifer v zápisu $f(n)$ se dlouho nezmění – tudíž se i několik nejmenších cifer dlouho nezmění.
Hint 6. Konstruktivnější řešení: nahlédni, že když $k < p^m \mid n - j$, $0 \leq j < k$, pak $p \mid \binom{n}{k}$. Nekonstruktivní řešení: prvočíselné mocniny v rozkladu $\binom{n}{k}$ nepřevyšují n.
Hint 7. Vyber si počáteční bod a skákej z něj modulo velký společný násobek všech „malých“ prvočísel. Alternativně mrkni na úlohu 8 a využij, že $f(n)^{1/\deg f}$ je zhruba n.
Hint 8. Pokud by se v rozkladech vyskytovala jen prvočísla $p_1, \ldots, p_r$, odhadni řadu geometrickými.
Hint 9. Co se děje, když n/a_n roste?
Hint 10. Suma převrácených hodnot čísel neobsahujících jednu zvolenou číslici.
Hint 11. Zápis v soustavě o základu 10^{2022}.
Hint 12. $1/x$ se zintegruje na $\log x$.
Hint 13. Přepiš na sumu přes prvočísla a použij $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$.
Hint 14. $\sum \frac{1}{n}$.
Hint 15. Buďto odhadni integrálem, anebo nahlédni a použij tzv. *kondenzační kritérium*: je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel, pak $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum 2^n a_{2^n}$.
Hint 16. Může pomoci pravděpodobnostní intuice: s jakou pravděpodobností je „náhodné“ číslo dělitelné p^2? Dělitelnosti nesoudělnými čísly jsou nezávislé jevy.
Hint 17. Odhadni zvlášť prvočísla menší a větší než $\sqrt{x}$.
Hint 18. Indukuj podle k a uvědom si, že stačí suma přes prvočísla $p \leq \sqrt[k]{x}$.
Hint 20. Z union boundu vyleze něco jako $k \sum_p \frac{1}{p^2}$. Ředěním dostatečně mnoha prvočísel zařiď, aby to bylo < 1.
Hint 21. Prostě nařeď posloupnost všech přirozených čísel.
Hint 22. Kolik kořenů mod p^2 může mít $x^2 + 1$? Pak už aplikuj standardní postup a ono to vyjde.
Hint 23. (ii) je snazší, posloupnost by pak musela být omezená. V (i) nech nedělitelnosti být dosvědčeny nějakými prvočíselnými mocninami – zjistíš, že jich není dost.
Hint 24. Chceš nacházet situaci, kdy (1) x i $x + 2020$ jsou bezčtvercová a (2) $x + 1, \ldots, x + 2019$ nejsou bezčtvercová. (1) připomíná něco, co už jsme viděli, (2) zařiď ředěním.
Hint 25. Nahlédni, že $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ má nanejvýš $2^{\omega(m)}$ řešení. Ale ω je divná funkce, odhadni ji vhodným logaritmem, aby vznikla konvergentní suma.
Hint 26. Rozmysli, kolik čísel zakazuje jedno prvočíslo; měla by z toho vzejít suma zobecňující úlohu 17. Pozor na malá n.
Hint 27. Vypiš si do tabulky $(n + 1) \times (n + 1)$ společné prvočíselné dělitele a ukaž, že prvočísla menší než εn^2 zaberou (pro vhodné ε) méně než polovinu tabulky.

Hint 28. Vhodně zvol a, b tak, aby $\prod_{a\le p\le b}(1-1/p)$ bylo dost malé. Potom najdeš v dané n-tici čísel dost takových, co mají prvočíselného dělitele $a \le p \le b$. Jeho pokrácením vyrobíš těmto číslům dělitele z intervalu $[n/b, 2n/a]$.
Hint 29. Pokud se budeme dívat jen na prvočíselná n, pak se nesoudělnost zjednoduší na nedělitelnost. Potom stačí odhad $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$.
Hint 30. Pokud $a^n + b^n = c_n^{n+1}$, k čemu konverguje c_n?
Hint 31. Podívej se na posloupnost $\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{a_n}$.
Hint 32. Nechť $f(n) = x_n^2$, nahlédni že $x_{n+1} - x_n$ konverguje.
Hint 33. Buď $x_n^2 = a2^n + b$, pak se podívej na $2x_n - x_{n+2}$.
Hint 34. Nechť $f\left(\frac{10^n-1}{9}\right) = \frac{10^{x_n}-1}{9}$, pak se podívej na $x_n - n \deg f$.
Hint 35. Buď $x_n = y_n^2$. Pomocí posloupnost $by_n - y_{n+1}$ získáš, že $b-1$ je čtverec, a pak už umíš vše dořešit pomocí mezer mezi čtverci.
Hint 36. Nechť $f(x_n) = 2^n$, pak se podívej na $x_{n+\deg f} - 2x_n$. Jakmile narazíš na konstantu, můžeš vyvodit rovnost polynomů a najít příliš mnoho kořenů.
Hint 37. $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$.
Hint 38. $\sum \frac{1}{\lfloor p_n \nu \rfloor} \ge \frac{1}{\nu} \sum \frac{1}{p_n}$.
Hint 39. Upravuj nerovnost valuací a rozmysli si, které členy jsou podstatné.
Hint 40. Valuace kombinačního čísla se dá poznat z ciferného zápisu. Nepřipomíná to v tu chvíli některou úlohu?
Hint 41. Najdi dost velkou množinu prvočísel S takovou, že pro každé $p \in S$ nemá $p-1$ žádné dělitele z S. K tomu pomůže prvočíselná věta.
Hint 42. $g(27) = 27$, $g(169) = 26$. Nedovedeme je nějak přenásobit, aby se dostali vedle sebe a hodnota g se přitom nezměnila?
Hint 43. Toto bude hint k řešení, které znám já – nevylučuji, že existuje jednodušší. Návodná situace: co kdybychom úlohu řešili jen pro *bezčtvercová* n? Najednou to bude mnohem snazší, a přitom bezčtvercových čísel je docela hodně. Zobecni tuhle myšlenku tak, aby fungovala pro libovolně malé ε.