Těžké příklady na zobrazení

Franta Konopecký

Úvod

Toto bude doplňková přednáška k tomu, co se nestihlo na minulém soustředění. Bude náročná a budou se na ní dělat brutality. Pochopitelné, ale brutality. Je doporučeno před ní shlédnout přednášku z minulého soustředění.

Nelehké příklady

Příklad 1. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.

Příklad 2. Jsou dány dva různé body A, B a kružnice $k(S, r)$. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí body A, B a vytínají na kružnici k tětivu délky $|AB|$. Bonbónek: Jak by to bylo s obecnou tětivou?

Příklad 3. Sestrojte na stranách AC, CB daného trojúhelníku ABC po řadě body X, Y tak, aby úsečky AX, XY a YB byly shodné.

Příklad 4. Na přímce h jsou dány body A, C, E v tomto pořadí. Ve stejné polorovině vyťaté přímkou h jsou pak rovnostranné trojúhelníky ABC a CDE. Střed úsečky AD označme S_{AD}, střed BE označme S_{BE}. Dokažte, že je trojúhelník $CS_{AD}S_{BE}$ rovnostranný.

Příklad 5. Kružnici k je vepsán rovnostranný trojúhelník ABC. Dokažte, že pro libovolný bod X kružnice platí: Největší ze vzdáleností bodu X od vrcholů trojúhelníku ABC je rovna součtu jeho vzdáleností od zbývajících dvou vrcholů.

Příklad 6. Je dán obecný trojúhelník ABC, který má ke svým stranám připsány rovnostranné trojúhelníky BCX, ACY, ABZ. Dokažte, že se přímky AX, BY a CZ protínají v jednom bodě a že dále platí $|AX| = |BY| = |CZ|$.

Příklad 7. V rovině je dán trojúhelník PQX, kde $|PQ| = 3$cm, $|PX| = 2,6$ cm, $|QX| = 3,8$ cm. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby se jemu vepsaná kružnice dotýkala přepony AB v bodě P, odvěsny BC v bodě Q a aby bod X ležel na přímce AC.

Obtížnější příklady

Příklad 8. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a bod X uvnitř tohoto trojúhelníku. Dokažte, že délky $|AX|$, $|BX|$ a $\sqrt{2}|XC|$ jsou délkami stran trojúhelníku.

Příklad 9. Kružnice k_1 a k_2 mají vnější dotyk v bodě A a současně se obě dotýkají zevnitř kružnice k v bodech A_1 a A_2. Bod P je jeden z vnějších průsečíků společné vnitřní tečny kružnic k_1 a k_2 s kružnicí k. Nakonec, body B_i jsou druhé průsečíky přímek PA_i s kružnicí k_i $(i = 1, 2)$. Dokažte, že se přímka B_1B_2 dotýká obou kružnic k_1, k_2.

Příklad 10. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označme postupně P, Q a R paty kolmic z bodu D na přímky BC, CA a AB. Dokažte, že $|PQ| = |QR|$ právě tehdy, když se osy úhlů ABC a ADC protínají na přímce AC.

Slíbené brutality

Příklad 11. Nechť $ABCD$ je daný konvexní čtyřúhelník s různoběžnými stranami BC a AD. Body E, F leží po řadě uvnitř stran BC a AD tak, že $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|DF|}{|AF|}$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P, přímky BD a EF v bode Q, přímky EF a AC v bodě R. Uvažujme všechny trojúhelníky PQR pro různé polohy bodů E a F. Ukažte, že kružnice opsané těmto trojúhelníkům mají společný bod různý od P.

Příklad 12. V rovině je dán trojúhelník KLM a bod A ležící na polopřímce opačné k polopřímce KL. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, jehož vrcholy B, C a D leží po řadě na přímkách KM, KL a LM. (Calábek ...)

Zdroj

Minulý příspěvek do sborníčku s názvem *Geometrická zobrazení*. Najdete ho na stránkách Prasátka (`http://mks.mff.cuni.cz`) v Knihovně.