Základy kombinatoriky

Eva Ondráčková

Cílem této přednášky je shrnout a rozšířit vaše znalosti středoškolské kombinatoriky. Uvedeme si některé základní pojmy a řadu tvrzení, která vám mohou být často k užitku.

Variace, permutace, faktoriál

Pravidlo. (kombinatorický součin) Počet uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý po výběru prvního n_2 způsoby atd. až k-tý po výběru všech předchozích n_k způsoby, je roven $n_1 n_2 \cdots n_k$.

Tvrzení. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$. Počet všech zobrazení z n-prvkové množiny do m-prvkové množiny je m^n.

Tvrzení. Libovolná n-prvková množina má právě 2^n podmnožin.

Tvrzení. Nechť n, $m \in \mathbb{N}_0$. Počet všech prostých zobrazení n-prvkové množiny do m-prvkové množiny je $m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

Definice. (variace) *k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.*

Variace můžeme také chápat jako prostá zobrazení k-prvkové množiny do n-prvkové. Potom nikoho nepřekvapí, že jejich počet je $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.

Definice. (permutace) *Permutace z n prvků je každá n-členná variace z n prvků.*

Rovněž permutace lze chápat jako zobrazení. Protože variace jsou prostá zobrazení, budou prosté i permutace. Je-li zobrazení z nějaké n-prvkové množiny M_1 do n-prvkové množiny M_2 prosté, musí být i na (každý prvek M_2 má v M_1 svůj vzor). Jde tedy o bijekci. Dále budeme uvažovat zejména bijekce množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ do sebe, budeme tedy mluvit o permutaci množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Kolik je takových permutací? Použitím vztahu pro variace dostaneme, že jich je $n(n-1)(n-2)\cdots 1$.

Definice. *Pro $n \geq 0$ budeme číslo $n(n-1)(n-2)\cdots 1$ značit $n!$ a nazývat n faktoriál. Speciálně je $0! = 1$.*

Definice. (inverze permutace, cyklus permutace) *Buď π nějaká permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Řekneme, že dvojice $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ je inverze π, pokud $i < j$ a zároveň $\pi(i) > \pi(j)$.*
Cyklem π nazveme posloupnost $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ takovou, že $i_a \neq i_b$ pro $a \neq b$ a $\pi(i_1) = i_2$, $\pi(i_2) = i_3$, ... , $\pi(i_k) = i_1$.

Kombinace, kombinační čísla a binomická věta

Definice. (kombinace) *k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.*

Jak jistě každý vidí, kombinace představuje k-prvkovou podmnožinu n-prvkové množiny.

Definice. (kombinační číslo) *Nechť $n \geq k$ jsou nezáporná celá čísla. Kombinační číslo (binomický koeficient) $\binom{n}{k}$ (čteme „en nad ká“) je definováno vzorcem $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Definice. *Nechť X je množina a k nezáporné celé číslo. Symbolem $\binom{X}{k}$ budeme značit množinu všech k-prvkových podmnožin množiny X.*

Tvrzení. Pro každou konečnou množinu X platí $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$.

Tvrzení. (některé vlastnosti kombinačních čísel) Nechť n, $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Potom platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Věta. (binomická) *Pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.*

„-ace“ s opakováním, multinomická věta

Definice. (variace s opakováním) *k-členná variace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý je v ní nejvýše k-krát.*

Jde opět o zobrazení k-prvkové množiny do n-prvkové, ale tentokrát nemusí být prosté. Podle toho, co jsme už ukázali, je jejich počet roven n^k.

Definice. (permutace s opakováním) *Permutace z n prvků, které se opakují $k_1, \dots,$ k_n krát, je uspořádaná n-tice, v níž jsou jednotlivé prvky zastoupeny $k_1, \dots, k_n$ krát.*

Tvrzení. Počet takových permutací je roven $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$.

Definice. (multinomický koeficient) *Číslo z předchozího tvrzení nazýváme multinomický koeficient a značíme $\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_n}$.*

Věta. (multinomická) *Pro libovolná čísla $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ a libovolné celé $n \geq 1$ platí rovnost*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_1,\dots,k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_k^{k_m}.$$

Definice. (kombinace s opakováním) *k-členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý je v ní nejvýše k-krát.*

Tvrzení. Počet k-členných kombinací s opakováním z n prvků je $\binom{n+k-1}{k}$.

Princip inkluze a exkluze

Věta. (Princip inkluze a exkluze) *Pro každý soubor konečných množin $A_1, \dots, A_n$ platí*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\dots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$