Zajímavé funkce

Alexander „Olin“ Slávik

Abstrakt. Příspěvek uvádí příklady funkcí v reálných číslech, které se v mnoha ohledech vymykají intuitivním představám o funkcích. Zejména je diskutována spojitost.

Úvod

Jaké znáte ze školy různé funkce? Lineární a kvadratické? Či snad i exponenciální, logaritmické a goniometrické? Svět funkcí v reálných číslech ale je mnohonásobně větší – podíváme se na některé jeho zajímavé obyvatele a jejich vlastnosti, zejména (ne)spojitost.

Spojitost

O spojitosti a spojitých funkcích jste už asi zaslechli, i když asi ne ve škole. Běžně uváděná intuitivní „definice“ zní: „Funkce je spojitá, když její graf jde nakreslit jedním tahem.“ Jako úvodní představa to možná postačí, ovšem z matematického pohledu nám vlastně toto tvrzení mnoho neříká – není totiž vůbec jasné, co to vlastně znamená „nakreslit jedním tahem“. Pro další práci tedy budeme potřebovat formální definici.

Definice. (možná poněkud děsivá) Řekneme, že funkce f je *spojitá* v bodě a, pokud ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

je splněna pro všechna x, pro něž platí

$$|x - a| < \delta.$$

Na přednášce si ukážeme trochu názorněji, co toto trochu nejasné tvrzení vlastně znamená, a přesvědčíme se, že některé „běžné“ funkce jsou vskutku spojité.

Příklad. Funkce $f(x) = x$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru (tedy $\mathbb{R}$).

Příklad. Funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (dolní celá část čísla x) je spojitá ve všech reálných číslech s výjimkou celých čísel.

Klíčová slova. funkce, spojitost, monotónnost, protipříklad

Příklad. (Dirichletova funkce) Funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

není spojitá nikde.

Dirichletova funkce dobře ukazuje, jak je ošemetné spoléhat se na grafickou představu o funkcích – její graf asi těžko někdo někdy „nakreslí“. Od takto nadefinované funkce by se i dalo čekat, že to s její spojitostí nebude moc slavné. Následující příklad však ukazuje, že i zdánlivě „divoká“ funkce může být někde spojitá:

Příklad. (Riemannova funkce) Funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pokud } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ \mathrm{NSD}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je spojitá ve všech iracionálních číslech, v racionálních není.

Vlastnosti funkcí

Funkce, které jsou spojité ve všech bodech nějakého intervalu, se v mnoha ohledech chovají hezky (alespoň v tom intervalu). Jednou z jejich příjemných vlastností je takzvané „nabývání mezihodnot“:

Věta. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje takové $x \in (a, b)$, že $f(x) = y$.*

Z grafického názoru bychom mohli předpokládat, že funkce s touto vlastností už automaticky musí být i spojitá. Ukážeme si však, že opak je pravdou.

Příklad. Funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{pokud } x \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}$$

není spojitá v nule, avšak na libovolném intervalu (byť obsahujícím nulu) má vlastnost „nabývání mezihodnot“.

Podívejme se na jednu ještě podivuhodnější funkci. Pro jednoduchost se omezíme na interval $\langle 0, 1\rangle$.

Příklad. Nechť se číslo $x \in \langle 0, 1\rangle$ zapíše v desítkové soustavě[7] jako $x = 0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$. Funkci f definujeme následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\ldots & \text{pokud je číslo } 0{,}a_1a_3a_5\ldots \text{ racionální} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

[7] Tento zápis bohužel není jednoznačný, jak se můžeme přesvědčit např. na skutečnosti, že $1 = 0{,}999\ldots$. Pro účely sestrojení této funkce však nezáleží na tom, který z možných zápisů čísla použijeme.

přičemž v prvním případě je n definováno tak, že číslem a_{2n-1} začíná první perioda v zápisu čísla $0{,}a_1a_3a_5\ldots$. Tato funkce nabývá na každém (jakkoliv malém!) intervalu všech hodnot z intervalu $\langle 0,1\rangle$. Mimo jiné má tedy také vlastnost „nabývání mezihodnot".

Podíváme se ještě na to, jak jde dohromady spojitost s monotónností[8]. Čekají nás dvě funkce nesoucí jména významných matematiků.

Příklad. (Cantorova funkce) Pracujme opět pouze na intervalu $\langle 0,1\rangle$. Stejně jako v předchozím příkladu, využijeme zápis čísla $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$, tentokrát ovšem v trojkové soustavě. V těch číslech x, které lze zapsat bez použití číslice 1, nadefinujeme funkční hodnotu

$$f(x) = \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \frac{a_4}{2^5} + \cdots,$$

jinak řečeno, všechny dvojky nahradíme jedničkami a výsledek „přečteme" jako číslo ve dvojkové soustavě. V číslech, v jejichž trojkovém zápisu se nějaká jednička vyskytuje, postupujeme tak, že za první jedničkou všechny cifry přepíšeme na nuly, zbývající nenulové číslice nahradíme jedničkami a opět se na výsledek podíváme ve dvojkové soustavě. Takto sestrojená funkce f je na celém intervalu $\langle 0,1\rangle$ neklesající a spojitá, platí $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$, ovšem pokud sečteme délky všech intervalů, na kterých je konstantní (to je třeba $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ nebo $\langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\rangle$), dostaneme jedničku – kde tedy tato funkce tak narostla?

Příklad. (Bolzanova funkce) Než zkonstruujeme finální produkt, budeme potřebovat nadefinovat pomocné funkce. Funkci f_1 definujeme jako $f_1(x) = |x|$ pro $|x| \leq \frac{1}{2}$ a pro zbytek reálných čísel periodicky: $f_1(x+m) = f_1(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$. Pro $n > 1$ pak bude $f_n(x) = 4^{-n+1} \cdot f_1(4^{n-1}x)$. Grafy těchto funkcí vypadají jako čím dál více se zjemňující „pily". Funkci f pak definujeme jako

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \cdots$$

Na pravé straně máme součet nekonečně mnoha funkcí, což je poměrně komplikovaný objekt. Bohužel se budeme muset bez formálních důkazů spokojit s faktem, že takto je funkce f korektně definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a je dokonce všude spojitá. Na přednášce si ale dokážeme, že tato funkce není na žádném (opět libovolně malém!) intervalu monotónní.

Pokud nám na přednášce zbude nějaký čas, možná se podíváme i na něco dalšího – v galerii zajímavých reálných funkcí ještě zbývají mnohé další skvosty!

[8] To jest jestli je funkce rostoucí, klesající, neklesající či nerostoucí.

Literatura

[1] Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet I a II*, Academia, Praha, 1984.
[2] Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1964.