Zajímavé funkce

Michal Beneš

V naší přednášce se sice nebudeme zabývat žádnými komplikovanými problémy, přesto bude potřeba využívat některé pojmy, na které pravděpodododobně nejste zvyklí. V první části tedy pro jistou zavedu základní pojmy z metrických a topologických prostorů, které jsou pro studium vlastností funkcí zcela nezbytné, druhou část věnuji studiu spojitých funkcí, třetí zejména obrázkům, které budou v podání laserové tiskárny vypadat určitě lépe než ty, které jsem schopen kreslit po tabuli.

Čtenáři se omlouvám za nadměrnou stručnost, jež je způsobena snahou vejít se do minimálního počtu stránek.

Úvod do metrických a topologických prostorů

Uvažujme libovolnou množinu M a funkci $\varrho : M \times M \to [0, \infty)$, která dvojicím bodů z M přiřazuje nezáporné číslo (jejich vzdálenost). Jestliže tato funkce splňuje požadavky

(i) $\varrho(x, y) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $x = y$,
(ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro libovolná x, y z M,
(iii) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ pro libovolná x, y, z z M (*trojúhelníková nerovnost*),

nazýváme ji *metrikou.* Dvojici (M, ϱ) nazýváme metrickým prostorem. Symbolem $B_r(x)$ rozumíme *otevřenou kouli* o poloměru r a středu x (z anglického *ball*), tj. množinu bodů y z M, pro které je $\varrho(x, y) < r$. Symbolicky to lze zapsat takto: $B_r(x) = \{y \in M \mid \varrho(x, y) < r\}$. Správně bych ještě měl uvést, v jakém metrickém prostoru pracujeme. Bod x může náležet více množinám a navíc i jedna množina může být opatřena více metrikami (které dávají rozdílné koule). V dalším textu ale nebude hrozit nedorozumění, proto se touto otázkou nebudu dále zabývat.

Dalším důležitým pojmem je okolí bodu. Řekneme, že množina $O \subset M$ je *okolím bodu* x, pokud pro nějaké ε kladné platí $B_\varepsilon(x) \subset O$. Rozmyslíte-li si, co tato definice říká, hned pochopíte, proč se takové množině říká okolí. Symbolem $\mathscr{O}(x)$ značíme systém všech okolí bodu x.

Neméně důležitým pojmem je limita posloupnosti. Mějme posloupnost x_1, x_2, x_3, … Řekneme, že tato posloupnost *konverguje* k bodu x, pokud ke každému okolí $O \in \mathscr{O}(x)$ existuje n takové, že $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ všechna leží v O. Rozmyslete si souvislost s tradiční ε-ovou definicí!

Nyní definujme otevřené množiny. Řekneme, že množina $G \subset M$ je *otevřená*, pokud pro každé $x \in G$ existuje $O \in \mathscr{O}(x)$ tak, že $O \subset G$. Proč se otevřeným množinám říká otevřené, pochopíme, až si uvedeme několik příkladů, nebo až definujeme uzavřené množiny. Označme ještě $\mathscr{G}$ systém všech otevřených množin v M. Hned je vidět že platí

(i) $\emptyset \in \mathscr{G}$, $M \in \mathscr{G}$,
(ii) je-li $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ konečný systém otevřených množin, pak také $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ je otevřená,
(iii) je-li $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ libovolný systém otevřených množin, pak také $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ je otevřená.

Formulkami $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, resp. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ nemáme na mysli nic jiného, než průnik, resp. sjednocení množin G_λ. Dvojici $(M, \mathscr{G})$ splňující podmínky (i), (ii), (iii) se říká *topologický prostor*. Topologické prostory jsou pojem obecnější než prostory metrické. S každým metrickým prostorem je totiž přirozeným způsobem svázán prostor topologický (viz definice otevřené množiny výše), naopak to ale neplatí. Existují topologické prostory, které nelze metrizovat (nelze najít metriku tak, aby si otevřené množiny z metriky i z topologie odpovídaly). Dokážete nějaký vymyslet? Takovými problémy se ale trápit nebudeme, neboť dále se budeme zabývat jen prostory s metrikou.

Uzavřenou množinou nazveme libovolnou $F \subset M$ takovou, že $M \setminus F$ (prvky z M nenáležející F) je množina otevřená. Pro uzavřené množiny se dají formulovat podobné zákony jako pro množiny otevřené. Vezmeme-li $x_1, x_2, x_3, \ldots$ posloupnost prvků z uzavřené množiny F konvergující k $x \in M$, pak nutně $x \in F$. To je důvod, proč se F zve uzavřená — nelze z ní utéci konvergentními posloupnostmi.

Nyní několik příkladů. Na přímce jsou uzavřené intervaly uzavřené množiny a otevřené intervaly otevřené množiny; polouzavřené intervaly $[a, b)$ nejsou ani jedno. V rovině je čtverec uzavřená množina, zatímco čtverec bez obvodu otevřená. Pokud vezmeme za M možinu racionálních čísel, za $\varrho(x, y)$ absolutní hodnotu rozdílu $x - y$ a za F množinu racionálních čísel menších než π, pak je F otevřená i uzavřená množina.

Kompaktní množiny lze v metrických prostorech definovat dvěma způsoby:

(i) Množinu $K \subset M$ nazveme kompaktní, pokud z každé posloupnosti x_1, x_2, x_3, … prvků K lze vybrat podposloupnost $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ konvergující k prvku $x \in K$.
(ii) Množinu $K \subset M$ nazveme kompaktní, pokud z každého systému $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ otevřených množin $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ lze vybrat konečný podsystém $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ takový, že $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} G_\lambda$.

Obě tyto definice jsou ekvivalentní. V eukleidovských prostorech (kterými se budeme zabývat) platí jednoduchá charakterizace. Kompaktní jsou zde ty množiny, které jsou uzavřené a současně omezené (tj. vejdou se do nějaké koule $B_r(x)$).

Funkce spojité

Buďte M, N dva metrické prostory a $f : M \to N$ funkce. Pro $A \subset M$ značme $f(A)$ množinu bodů z N, které jsou tvaru $f(x)$ pro nějaké $x \in A$. Pro $B \subset N$ značme $f_{-1}(B)$ množinu takových bodů $x \in M$, pro které je $f(x) \in B$. Nyní jsme připraveni k definici spojité funkce. Opět uvedeme více ekvivalentních variant. Řekneme, že $f : M \to N$ je *spojitá*, pokud platí jedna z podmínek:

(i) Pro každou posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$ prvků M konvergující k x konverguje posloupnost $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ k $f(x)$.
(ii) Pro každou otevřenou množinu $G \subset N$ je $f_{-1}(G)$ otevřená.
(iii) Je-li $y = f(x)$, pak pro každé $O_N \in \mathscr{O}(y)$ existuje $O_M \in \mathscr{O}(x)$ tak, že $f(O_M) \subset O_N$.

Z definice (ii) kompaktnosti a definice (i) spojitosti snadno dokážeme, že pro f spojitou a K kompatní je také $f(K)$ kompaktní.

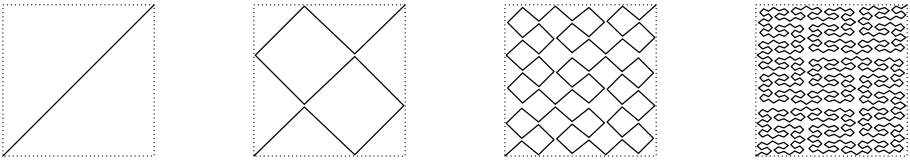
Funkce zajímavé

Cesarova funkce

Nechť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je dvojkový rozpis čísla $x - \lfloor x \rfloor$ (desetinná část x). Definujme $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, pokud tato limita existuje, $f(x) = 0$ jinak. Nyní je f funkce, která zobrazuje libovolně malý interval na celý $[0,1]$. Jak vidíme, nespojité funkce mohou být velmi „divoké“.

Peanova křivka

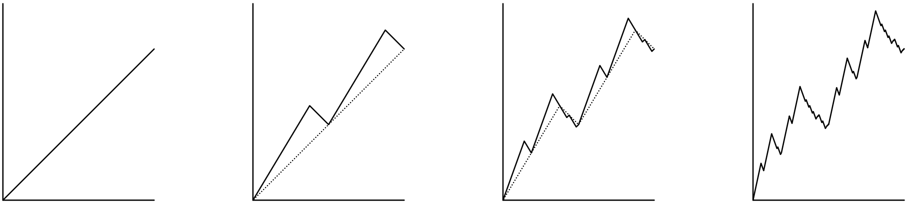
Peanova křivka je spojitá funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ taková, že $f([0,1])$ je celý čtverec $[0,1] \times [0,1]$. To ukazuje, že i spojité funkce mohou být velmi „divoké“. Na obrázcích máme postupné aproximace f_1, f_2, f_3, f_4 funkce f.



Na obrázku jsem záměrně funkce nekreslil přesně, aby byl rozpoznat jejich průběh v „uzlových“ bodech. Funkci f dostaneme jako $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Existuje spojitá funkce, která zobrazuje $[0,1]$ na celou rovinu? Nikoliv: $[0,1]$ je totiž kompakt, a tedy jeho spojitý obraz musí být tedy opět kompakt. Ale „menší“ interval $[0,1)$ spojitě na celou rovinu zobrazit lze — není to paradoxní?

Bolzanova funkce

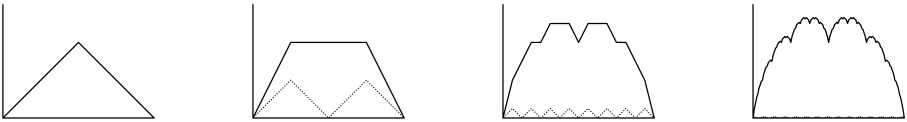
Zajímavou otázkou, kterou můžeme zkoumat, je souvislost derivace a spojitosti. Již Bernard Bolzano (1781–1848) nalezl funkci spojitou, která nemá nikde derivaci. Bolzanova myšlenka byla postupné lámání funce $y = x$ na intervalu $[0, 1]$. Opět kreslím částečné aproximace tzv. Bolzanovy funkce:



Na druhém a třetím obrázku jsou tečkovaně pro srovnání nakresleny předešlé aproximace. Mimochodem, důkaz toho, že takto vzniklá funkce skutečně nemá nikde vlastní derivaci, je poměrně pracný. Lze dokonce „vyrobit“ spojitou funkci, která nemá nikde ani jednostrannou derivaci, a to ani nevlastní. Příklad vymyslel A. Besikovitch v roce 1925.

Weierstrassova funkce

Známější než Bolzanova funkce je u nás funkce Weierstrassova. Také toto je spojitá funkce, která nemá nikde derivaci. Vznikne jako součet funcí f_n, kde f_n je „pila“. Snažší, než to formálně popisovat, je příslušné funkce nakreslit. Na obrázcích jsou tečkovaně nakresleny funkce f_n a plně částečné součty $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$



$n = 1$ n=2 n=4 n=7

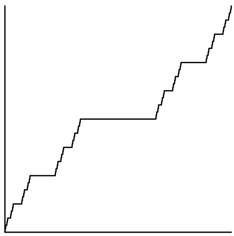
Ani u této funkce není zcela triviální dokázat, že nemá nikde derivaci.

Cantorova funkce

V našem seznamu nesmí chybět jedna z nejzajímavějších funkcí, funkce Cantorova. Nejprve se jemně zmíním o tzv. Cantorově diskontinuu. Označme C_0 interval $[0, 1]$. Z prostředka tohoto intervalu odstraníme otevřený interval délky $1/3$, dostaneme dva intervaly $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$, sjednocení těchto intervalů označíme C_1. Dále postupujeme analogicky. C_k se skládá z 2^k uzavřených intervalů délky $1/3^k$, z každého z těchto intervalů odstraníme prostřední třetinu, čímž obdržíme množinu C_{k+1}. Množina $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ se zove *Cantorovo diskontinuum*.

Cantorovo diskontinuum je kompakt. Platí velmi zajímavá věta, že každý kompakt je spojitým obrazem Cantorova diskontinua. Hned je tedy vidět, že každý obloukově souvislý kompakt (každé dva jeho body lze spojit spojitou křivkou) je obrazem intervalu $[0,1]$ — obloukovou souvislost pochopitelně potřebujeme na „překonávání" děr vzniklých odstraňováním intervalů z $[0,1]$ (Cantorovo diskontinuum je velmi „děravé"). Tady si vzpomeňte na Peanovu křivku.

Cantorova funkce vznikne tak, že na i-tém intervalu odstraňovaném v k-tém kroku předepíšu hodnotu $f(x) = \frac{2i-1}{2^k}$. V bodech Cantorova diskontinua funkci dodefinuji tak, aby byla spojitá. Opět je obrázek lepší než dlouhé vysvětlování.



Cantorova funkce je neklesající na intervalu $[0,1]$, a její derivace je skoro všude nulová — tj. je nulová až na body C, což je ale množina nulové míry (spočítejme si celkovou délku odstraněných intervalů). Přesto platí $f(1) - f(0) = 1$. Vzdejme se tedy myšlenky, že by integrál derivace Cantorovy funkce mohl zpět rekonstruovat Cantorovu funkci. V teorii Lebesgueova integrálu dokonce pro Cantorovu funkci platí

$$\int_0^x f'(x)\, d\lambda = 0 \qquad x \in [0,1].$$

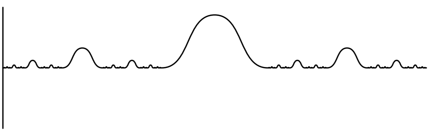
Další zajímavostí této funkce je, že, ač spojitá, zobrazuje některé měřitelné množiny na množiny neměřitelné (to je poznámka pro ty, kteří se již setkali s teorií Lebesgueovy míry).

Volterrova funkce

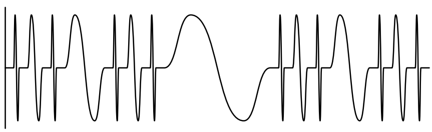
Označme D_0 interval $[0,1]$, tentokrát však nebudeme odstraňovat intervaly délky $1/3^k$, ale délky $1/4^k$. Tím dostaneme diskontinuum $D = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$ kladné míry. Na každém z odstraněných intervalů (a,b) můžeme definovat

$$f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 \sin \frac{1}{(x-a)(x-b)(b-a)},$$

v bodech D definujeme $f(x) = 0$. Na obrázku je tato funkce znázorněna, jen jsem místo toho strašného sinu nakreslil obyčejný „kopeček". Napravo od této funkce je nareslena derivace funkce f_4 (vznikla analogickým způsobem z D_4).



funkce f



funkce f_4'

Nyní f' je omezená, má Newtonův integrál, ale nemá Riemannův integrál (je nespojitá na množině D, a ta má nenulovou míru). Tento příklad pochází od V. Volterry.