Van der Waerdenova věta

David Stanovský

Světu vládne chaos – to vám jistě poví (skoro) každý náhodný kolemjdoucí. Známe však některé matematické věty, které říkají, že v lecjaké struktuře existuje jistá pravidelnost.

Začneme motivačním příkladem. Nakreslete si housenku, která bude mít 100 článků. Vezměte si 4 pastelky a začněte články postupně vybarvovat, každý náhodně vybranou pastelkou. Za chvíli se vám začne zdát, že nevybíráte moc náhodně, protože tu se vyskytnou 3 stejné barvičky vedle sebe, tam zase 4 stejné barvičky v pravidelných vzdálenostech od sebe. Kupodivu, jinak to být ani nemůže, jak říká van der Waerdenova věta.

Věta. (van der Waerden) *Mějme k barviček a dané číslo l. Pak existuje číslo $N(k,l)$ takové, že kdykoliv máme množinu $\{1,\dots,N(k,l)\}$ obarvenou k barvičkami, tak existuje nějaká jednobarevná aritmetická podposloupnost délky aspoň l.*

Aritmetickou podposloupností délky l myslíme množinu tvaru $\{a, a+b, a+2b, \dots \dots, a+(l-1)b\}$. Povšimněte si, že důsledkem této věty je, že obarvíme-li množinu všech přirozených čísel k barvičkami, pak existuje *libovolně dlouhá* jednobarevná aritmetická podposloupnost.

Důkaz věty provedeme na přednášce, není nijak zvlášť náročný.

Jsou známa různá zobecnění této věty. Místo aritmetické posloupnosti můžeme vzít jakýkoliv jiný pravidelný vzorek, místo $\mathbb{N}$ můžeme barvit d-rozměrnou mřížku $\mathbb{N}^d = \{(a_1,\dots,a_d) : a_1,\dots,a_d \in \mathbb{N}\}$. Tj. máme-li $S \subset \mathbb{N}$ konečnou (vzorek), pak pro každé obarvení $\mathbb{N}^d$ k barvičkami existuje číslo $a \in \mathbb{N}$ a bod $(v_1,\dots,v_d) \in \mathbb{N}^d$ takový, že množina $\{(as_1+v_1,\dots,as_d+v_d) : (s_1,\dots,s_d) \in S\}$ je jednobarevná. Volbou $d=1$ a $S=\{1,\dots,l\}$ pro rostoucí l dostaneme důsledek van der Waerdenovy věty.

Větám typu „při každém obarvení jisté množiny existuje jakási pravidelná jednobarevná struktura“ se říká *věty Ramseyova typu*. První z nich dokázal F. P. Ramsey roku 1930, na něj pak navázali mnozí další.

Věta. (Ramsey) *Pro každé obarvení $\binom{\mathbb{N}}{r}$ k barvičkami existuje nekonečná $A \subseteq \mathbb{N}$ taková, že $\binom{A}{r}$ je jednobarevná.*

Symbol $\binom{A}{r}$ značí množinu všech r-tic prvků z A. Důkaz sice není dlouhý, avšak vyžaduje jisté nemalé znalosti teorie množin. Zájemce odkazujeme na knihu Balcar, Štěpánek: *Teorie množin*, Academia, 1986, v níž najdete doslova vše.

Z této věty se dá dokázat celá škála zajímavých důsledků. Jedním z nich je např. fakt, že každý nekonečný graf obsahuje nekonečný úplný podgraf nebo nekonečnou nezávislou množinu (pojmy vysvětlíme na přednášce). Také se z ní dá odvodit její konečná verze.

Věta. (konečný Ramsey) *Pro každá $m, r, k \in \mathbb{N}$ existuje (dostatečně velké) $n \in \mathbb{N}$ takové, že každé obarvení $\binom{\{1,\dots,n\}}{r}$ k barvičkami existuje m-prvková podmnožina $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že $\binom{A}{r}$ je jednobarevná.*

Nejmenší číslo n, pro které taková množina existuje, se nazývá Ramseyovo číslo $R_r(m, k)$. Jejich výpočet je velmi těžký a mnoho se jich nezná. Např. $R_2(3, 2) = 6$, $R_2(4, 2) = 18$. Pro větší čísla jsou známé jen odhady – např. $13 \leq R_3(4, 2) \leq 15$, nebo $42 \leq R_2(5, 2) \leq 55$. Kdyby se vám podařilo uvedené odhady zlepšit či dokonce příslušná Ramsyova čísla spočítat přesně, jistě by to byl hodnotný výsledek.

Další části Ramseyovy teorie se ubírají směrem k „nekonečněticím" (tj. posloupnostem) přirozených čísel a k větším množinám, než je $\mathbb{N}$. Teorie se však velmi rychle stává nesmírně složitou. Již posloupnosti přirozených čísel nemůžeme barvit zcela libovolně. Je známa charakterizace těch obarvení, pro která příslušná množina A existuje, avšak samotné napsání podmínky kladené na obarvení by zabralo aspoň půl stránky …