Vytvořující funkce

Zuzka Safernová

Definice. *Nechť* $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* vytvořující funkcí *posloupnosti rozumíme mocninnou řadu*

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Operace s posloupnostmi a jejich vytvořujícími funkcemi

Většina operací, které můžeme provést s posloupnostmi, se převádí i na jejich vytvořující funkce. Např součet dvou posloupností člen po členu neznamená nic jiného než součet příslušných vytvořujících funkcí. Základní operace shrňme pro stručnost do následující tabulky:

operace s posloupnostmi	**příslušná vytv. funkce**
$\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$	$a(x) + b(x)$
$\{\alpha a_n\}_{n=0}^{\infty}$	$\alpha a(x)$
$\{\alpha^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$	$a(\alpha x)$
$(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, a_0, a_1, \dots)$	$x^n a(x)$
$(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$	$\frac{a(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)}{x^n}$
$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_2, \dots)$	$a(x^n)$
$\{\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\}_{n=0}^{\infty}$	$a(x)b(x)$
$\{(n+1)a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$	$a'(x)$
$(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_3, \dots)$	$\int_0^x a(t)dt$

Příklad. (Základní) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(1, 1, 1, \dots)$?

Řešení. Zajímá nás součet geometrické řady

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 1 + x + x^2 + \dots,$$

který je, jak víme, $\frac{1}{1-x}$ pro $|x| < 1$, tudíž vytvořující funkce posloupnosti ze samých jedniček je $\frac{1}{1-x}$.

Zobecněná binomická věta

Nejdříve si definujme kombinační číslo. Nechť r je libovolné reálné číslo a k je nezáporné celé číslo. Pak:

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0 \\ \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!} & \text{pro } k > 0 \end{cases}$$

Zobecněná binomická věta má tvar:

$$(1+x)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} x^i,$$

což v řeči vytvořujících funkcí neznamená nic jiného, než že vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots)$ je[10] funkce $(1+x)^r$.

Fibonacciho čísla

Předpokládám, že jste se s Fibonacciho čísly už někdy setkali (např. při množení králíků). Jsou dána rekurentní formulkou

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

pro n$\geq$ 2 a počátečními podmínkami $F_0 = 0, F_1 = 1$. Naším cílem je vyjádřit n-té Fibonacciho číslo explicitně. Jak na to?

(i) Uvažme vytvořující funkci $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$. Vytvořme si schéma:

$$\begin{array}{rcl|c|l} F(x) & = F_0 + F_1x + F_2x^2 + \ldots + & F_n x^n & + \ldots \\ xF(x) & = \qquad F_0x + F_1x^2 + \ldots + & F_{n-1}x^n & + \ldots \\ x^2F(x) & = \qquad\qquad F_0x^2 + \ldots + & F_{n-2}x^n & + \ldots \end{array}$$

[10]Pokud je r celé záporné ($r = -n, n \in \mathbb{N}$), pak lze kombinační číslo $\binom{r}{k}$ upravit na tvar

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \frac{(n+k-1)\ldots(n+1)n}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1},$$

z čehož snadno plyne

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1}x + \ldots + \binom{n+k-1}{n-1}x^k + \ldots$$

Díky rekurenci $F_n - F_{n-1} - Fn - 2 = 0$ zbude po odečtení druhého a třetího řádku od prvního $F(x)(1 - x - x^2) = F_0 + (F_1 - F_0)x$, z čehož vzhledem k počátečním podmínkám dostáváme

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

(ii) Jmenovatel $1 - x - x^2$ vyjádříme ve tvaru $(1 - \alpha x)(1 - \beta x)$, což se rovná $1 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta x^2$, kde $\alpha\beta = -1$ a $\alpha + \beta = 1$. Z Viètových vztahů plyne, že α, β jsou řešením charakteristické rovnice $y^2 - y - 1 = 0$, tedy

$$\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

(iii) Z (ii) plyne, že $F(x) = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$, což rozložíme na parciální zlomky. Tzn. hledáme konstanty A,B tak, aby

$$\frac{x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} = \frac{A}{(1 - \alpha x)} + \frac{B}{(1 - \beta x)}.$$

Není těžké zjistit, že $A = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(iv) Po rozkladu na parciální zlomky máme $F(x)$ ve tvaru:

$$F(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right).$$

Vytvořující funkce $\frac{1}{1-\alpha x}$ je rovna $\sum \alpha^n x^n$, tedy

$$F(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\sum (\alpha^n - \beta^n) x^n \right),$$

z čehož vzhledem k (i) dostáváme požadované n-té Fibonacciho číslo[11]

$$F_n = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^n - \beta^n),$$

po dosazení konstant α, β:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Předchozí příklad nám dává obecný návod, jak řešit diferenční rovnice tvaru $Ag_n = Bg_{n-1} + Cg_{n-2}$.

[11] Poměr $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ se nazývá zlatý řez a má limitu $\frac{1}{\alpha}$ pro n jdoucí do nekonečna.

Kuchařka

Máme rekurentní rovnici tvaru $Ag_n = Bg_{n-1} + Cg_{n-2}$ a chceme určit její n-tý člen.

(i) Určíme kořeny příslušné charakteristické rovnice – ta má tvar $Ax^2 - Bx - C = 0$. Nechť jsou tyto kořeny p,q.
(ii) Hledané řešení má tvar $Kp^n + Lq^n$, přičemž konstanty K a L určíme z počátečních podmínek g_0 a g_1.

Počet korektních uzávorkování n párů závorek

Korektním uzávorkováním rozumíme posloupnost délky $2n$ obsahující n levých a n pravých závorek, kde každé levé závorce odpovídá právě jedna pravá závorka ležící napravo od ní. Např. $(()())()$ je korektní uzávorkování, naproti tomu $())($ není.

Označme si b_n počet korektních uzávorkování s n páry závorek. Uvažujme korektní posloupnost n párů závorek a jednu dvojici v ní pevně zafixujme. Je evidentní, že

$$\mathbf{(}\underbrace{()(())}_{b_i}\mathbf{)}\underbrace{()()}_{b_{n-1-i}},$$

z čehož plyne rekurentní formulka:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-1-i}. \tag{$\heartsuit$}$$

Určíme si počáteční podmínky: $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$.

Nechť $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Z pravidla pro násobení dvou vytvořujících funkcí dostáváme

$$b(x)b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i} \right) x^n,$$

což se vzhledem k ($\heartsuit$) rovná $b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \dots$ Takže

$$xb^2(x) = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_{n+1} x^{n+1} \ldots = b(x) - b_0,$$

z čehož plyne $xb^2(x) - b(x) + 1 = 0$. Řešením dostáváme

$$b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Tato rovnice má být splněna i pro $x = 0$. V prvním případě dostáváme, $b_0 = \frac{2}{0} = \infty$, což rozhodně není a ani nikdy nemůže být jednička. V druhém případě máme $b_0 = \frac{0}{0}$, což je sice neurčitý výraz, ale vzhledem k tomu, že rovnice nějaké řešení mít musí (víme, že $b_0 = 1$), je tohle jediná možnost.

Ze zobecněné binomické věty plyne:

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{1/2}{n}(-1)^n 2^{2n}}_{c_n} x^n = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots ,$$

takže

$$b(x) = \frac{1-(1+c_1x+c_2x^2+\dots)}{2x} = -\frac{1}{2}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \dots\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1},$$

tudíž

$$b_n = -\frac{1}{2}c_{n+1}.$$

Podíváme-li se, jak jsme si zadefinovali c_n, zjistíme, že platí (na první pohled složitá) rovnost $b_n = -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-1)^{n+1}2^{2n+2}$, která se však dá vcelku přímočaře upravit na $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Těmto číslům říkáme Catalanova.

Příklady

Příklad. Nalezněte vytvořující funkce následujících posloupností:

(i) $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$
(ii) $3, 2, 3, 4, 3, 8, 3, 16 \dots$
(iii) $1, 4, 9, 16, \dots$

Příklad. Určete koeficient u x^{17} v $(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^3$

Příklad. Určete koeficient u x^{14} v $(x^5 + x^7 + x^9 + \dots)^2$

Příklad. Určete koeficient u x^5 v $(2+3x)^5\sqrt{1-x}$

Příklad. Určete koeficient u x^4 v $(1 - x + 2x^2)^8$

Příklad. Ověřte rovnost pro k přirozené:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots\left(1+x^{2^k}\right) = \frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x}$$

Příklad. Včelař chce, aby sadař vysadil 25 nových stromků, přičemž ten má k dispozici pouze 4 druhy. Sadařova manželka odmítá ořešák, neb je velký a zabírá moc místa. (Navíc každý správný borec ví, že med z ořešáku se nedá jíst :-)) Jabloně jsou jí taky proti gustu, mají jich už příliš. Naproti tomu bezmezně miluje třešňovo-švestkovou marmeládu, a tak klade tvrdé podmínky – nejvýše jeden ořešák, nejvýše 10 jabloní, alespoň 6 třešní a alespoň 8 slivoní (slivovice – silná motivace) – nebo rozvod. Kolika způsoby může sadař zabránit rozvodu? (Tedy kolik existuje různých způsobů výběru druhů stromů?)

Příklad. V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků (míčky téže barvy jsou nerozpoznatelné). Kolik je různých možností, jak z takovéto krabice vybrat soubor 70 míčků?

Příklad. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 kostkami padne dohromady součet 30?

Příklad. Vyjádřete obecný člen posloupností určených následujícími rekurencemi:

(i) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ pro $n = 1, 2, 3 \dots$
(ii) $a_0 = 0$,$a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$ pro $n = 0, 1, 2, 3 \dots$
(iii) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$ pro $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Příklad. Řešte rekurenci, kde v posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je následující člen aritmetickým průměrem předchozích dvou.

Příklad. Řešte rekurenci $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ s počátečními podmínkami $a_0 = 2$,$a_1 = 8$. Nápověda: $b_n = \log a_n$.

Příklad. Kolika způsoby lze vyjít schodiště o n schodech, jestliže každým krokem vyjdeme maximálně dva schody?

Příklad. Spočtěte počet triangulací konvexního n-úhelníku.

Literatura

[1] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum 2000