Vytvořující funkce

Pavel Šalom

Abstrakt. V příspěvku najdete definici vytvořující funkce, zobecněnou binomickou větu, která je užitečná při řešení příkladů, a přehledovou tabulku porovnávající operace s posloupnostmi a odpovídající operace s vytvořujícími funkcemi. Nejedná se o studijní text.

Co je vytvořující funkce?

Definice. *Nechť* $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *je posloupnost reálných čísel. Potom funkce daná předpisem*

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

se nazývá vytvořující funkce posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$.

Je-li posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ od nějakého členu nulová, je její vytvořující funkce obyčejný polynom. V obecném případě se jedná o „nekonečný polynom“ – tzv. *mocninnou řadu.* Mocninné řady budeme sčítat a násobit stejně jako polynomy[16].

Co se dá vytvořujícími funkcemi počítat?

Díky své povaze se dají vytvořující funkce velice elegantně používat v kombinatorice a pravděpodobnosti a při práci s posloupnostmi. Pro motivaci malá ochutnávka problémů, ve kterých mohou vytvořující funkce dobře posloužit

(i) dokazování kombinatorických identit jako například

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n},$$

(ii) hledání explicitního vzorce pro rekurentně zadané posloupnosti jako je například Fibonacciho posloupnost, rozmnožování buněk, atd.,

(iii) počet triangulací n-úhelníku, počet alkanových radikálů tvořených n uhlíky, atd.

Co bude potřeba

Budeme potřebovat určitou zručnost při práci s polynomy a mocninnými řadami. Často budeme používat vztah

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad \text{kde } |x| < 1, \tag{$\spadesuit$}$$

Klíčová slova. vytvořující funkce, zobecněná binomická věta

[16] Přestože není zcela jasné, že takové zacházení je korektní, a ve skutečnosti je korektní jen pro x z určitého intervalu kolem nuly.

a různé formy binomické věty.

Zobecnění binomické věty

Obyčejná binomická věta má tvar

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zobecněná binomická věta[17] vypadá podobně

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \quad r \in \mathbb{R},$$

kde ale je součet nekonečný a vystupují v něm zobecněná kombinační čísla

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-(k-1))}{k!}, \quad r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \qquad \binom{r}{0} = 1.$$

Speciálním užitečným případem je „magický vztah“[18]

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1}x + \binom{n+1}{n-1}x^2 + \dots, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (\heartsuit)$$

Jak si odpovídají operace s posloupnostmi a funkcemi

Abychom uměli pomocí vytvořujících funkcí spočítat něco netriviálního, je potřeba se s nimi naučit dobře pracovat. Předpokládejme, že posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $a(x)$ a posloupnost $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $b(x)$. Následující tabulka podává stručný přehled, které operace si navzájem odpovídají.

operace s posloupnostmi	**operace s funkcemi**
$(0,0,0,a_0,a_1,a_2,\dots)$	$x^3 a(x)$
$(a_0,0,0,a_1,0,0,a_2,\dots)$	$a(x^3)$
$(3a_0,3a_1,3a_2,3a_3,\dots)$	$3a(x)$
$(a_0,3a_1,3^2a_2,3^3a_3,\dots)$	$a(3x)$
$(a_2,a_3,a_4,\dots)$	$\frac{a(x)-a_1x-a_0}{x^2}$
$(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,\dots)$	$a(x)+b(x)$

[17] Ta se odvodí snadno, pokud víme, co to je Taylorův rozvoj, ale tak daleko se na přednášce pouštět nebudeme.

[18] Kombinační čísla ve vzorci odpovídají takzvaným kombinacím s opakováním.

$(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots)$	$a(x)b(x)$
$(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$	$\frac{a(x)}{1-x}$
$(a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots)$	$a'(x)$
$(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$	$\int a(x)$

Příklad 1. Vejtek se v Americe rozhodl nakoupit pohledy všem prasátkům na soustředění (těch je 36). V suvenýrech ale měli jen tři druhy pohledů a jednotlivých druhů bylo postupně 10, 20 a 30. Kolika způsoby mohl pohledy nakoupit?

Příklad 2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 4 kostkami padne součet 14?

Příklad 3. Zjistěte, zda existuje podmnožina $X \subset \mathbb{N}_0$ taková, že rovnice $n = a + 2b$, $a, b \in X$, má pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ právě jedno řešení.

Příklad 4. Je dáno přirozené číslo n. Označme A počet způsobů, kterým lze n zapsat jako součet lichých čísel (mohou být stejná). Označme B počet způsobů, kterým lze n zapsat jako součet navzájem různých čísel. Dokažte, že $A = B$.

Příklad 5. Je dáno konečně mnoho (alespoň dvě) aritmetických posloupností takových, že každé přirozené číslo patří právě do jedné z nich. Dokažte, že potom některé dvě z daných posloupností mají stejnou diferenci.

Příklad 6. Dokažte $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

Příklad 7. Dokažte $\sum_k \binom{k}{n-k} = F_{n+1}$, kde se sčítá přes ta k, přes která má výraz smysl.

Příklad 8. Stojíme před schodištěm, které má n schodů. Každým krokem vyjdeme jeden nebo dva schody. Kolika způsoby lze schodiště vyjít?

Příklad 9. Najděte explicitní vyjádření n-tého členu posloupnosti zadané vztahem $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n + n$ a $x_1 = x_0 = 0$.

Příklad 10. Kolik existuje n-členných posloupností tvořených písmeny a, b, c, d, v nichž a nikdy nesousedí s b?

Příklad 11. Spočtěte počet triangulací konvexního n-úhelníku.

Příklad 12. Ve frontě před divadlem stojí $2n$ lidí. Lístek stojí 50Kč, přičemž n lidí má padesátikorunu a dalších n stokorunu. Pokladní ale nemá zrovna žádné drobné. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení fronty bude mít pokladní pro každého nazpátek?

Příklad 13. (spíše pro zajímavost) Dokažte, že pokud je zrovna 13. den v měsíci, je to nejpravděpodobněji pátek!