Vytvořující funkce

Lukáš Zavřel

Abstrakt. Cílem tohoto příspěvku je seznámit se základním využitím vytvořujících funkcí, a to zejména na kombinatorických úlohách. Dále uvede čtenáře do nejzákladnější problematiky práce s mocninnými řadami.

Co jsou to vlastně vytvořující funkce?

Vytvořující funkce jsou krásným odvětvím nebo spíše metodou matematiky. Oplývají spoustou teorie a zajímavých výsledků, které se s jejich použitím dají odvodit. Ale jsou také nečekaně účinné při boji s pro nás tak známými kombinatorickými úlohami. Použití vytvořujících funkcí je sice velký trik, ale práce s nimi nakonec není tak těžká a úlohu předtím nepřístupnou dokáží snadno vyřešit. Jdeme na to:

Definice. Nechť $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je posloupnost reálných čísel. Potom funkce daná předpisem

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots$$

se nazývá vytvořující funkce posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$.

Příklad. Mějme dvě krabičky, ve kterých se nacházejí lístečky s čísly mezi 1 a 10. V první jsou pouze lístečky se sudými čísly a ve druhé s prvočísly. Ptejme se, kolika způsoby lze vybrat po jednom lístečku z každé krabičky tak, že součet čísel na těchto lístečcích je 11.

Příklad. Najděte vytvořující funkci ke geometrické řadě $1 + x + x^2 + \cdots$.

Operace s vytvořujícími funkcemi

Zatím známe vytvořující funkci jenom jedné nekonečné posloupnosti. Nyní si ukážeme několik operací, které nám dovolí určit vytvořující funkce mnoha dalších posloupností.

Násobení reálným číslem (O1). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$ a t reálné. Potom funkce $tf(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(ta_0, ta_1, \dots)$.

Sčítání (O2). Mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou po řadě vytvořujícími funkcemi posloupností $(a_0, a_1, \dots)$ a $(b_0, b_1, \dots)$. Potom $f(x) + g(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$.

Posouvání posloupnosti doprava (O3). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$. Potom $x^n f(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, a_0, a_1, \dots)$.

Posouvání posloupnosti doleva (O4). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$. Tentokrát si ji už pro názornost rozepišme, tj.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Potom

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} = a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \cdots , \qquad (\star)$$

dostáváme tedy, že $(\star)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_n, a_{n+1}, \dots)$.

Dosazení x^n za x (O5). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Co se stane, když za x dosadíme x^n? Dostaneme

$$f(x^n) = a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \cdots .$$

Tedy $f(x^n)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, \underbrace{0, 0, \dots 0}_{n-1}, a_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, a_2, \dots)$.

Dosazení tx za x (O6). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$ a t reálné. Potom $f(tx)$ je vytvořující funkce posloupnosti $(a_0, ta_1, t^2 a_2, \dots)$.

Násobení (O7). Pravděpodobně nejkomplikovanější operací, kterou zde zmíníme, je násobení funkcí. Mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou po řadě vytvořujícími funkcemi posloupností $(a_0, a_1, \dots)$ a $(b_0, b_1, \dots)$. Naším cílem bude určit posloupnost, jejíž vytvořující funkce bude $f(x)g(x)$. Zapišme si tedy $f(x)$ a $g(x)$ jako mocninné řady, tj.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots , \quad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \cdots .$$

Potom

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = a_0 b_0 &+ \\ &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \\ &\vdots \\ &+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pokud ti to bude příjemnější, lze předchozí zápis zkrátit na

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n.$$

Ukázali jsme si tedy, že $f(x)g(x)$ je vytvořující funkce posloupnosti $(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \cdots)$.

Ještě dodejme terminologickou poznámku. Posloupnosti $(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots)$ se obvykle říká *konvoluce* posloupností $(a_0, a_1, \dots)$ a $(b_0, b_1, \dots)$.

Příklad. Určete vytvořující funkci posloupnosti $(2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots)$. Určete, která posloupnost má vytvořující funkci $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$.

Příklad 1. Určete vytvořující funkce následujících posloupností:

(i) $(1, 0, 3, 0, 9, 0, 27, \dots)$,
(ii) $(2008, 134, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$,
(iii) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$,
(iv) $(1, 1, -2, 2, 4, 4, -8, 8, 16, 16, -32, 32, \dots)$,
(v) $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots)$.

Příklad 2. K následujícím vytvořujícím funkcím nalezněte příslušné posloupnosti.

(i) $\frac{1}{1+2x}$,
(ii) $\frac{1}{1-x^2}$,
(iii) $\frac{1}{(1-x)^2}$,
(iv) $\frac{1}{(1-x)^3}$.

Hrátky s kostkami

V dalších úlohách se zaměříme na házení kostkami a pravděpodobnost, resp. počty možností, jak něco hodit.

Poznámka. Obyčejné hrací kostce můžeme přiřadit polynom $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$. Počet možností, jak hodit na dvou kostkách součet n, bude pak koeficient u n-té mocniny x, pokud polynomy obou kostek mezi sebou vynásobíme.

Příklad 3. Najděte dvě jiné než klasické šestistěnné kostky, pro které platí, že počet způsobů, jak může padnout libovolný součet ok, je stejný, jako kdyby se jednalo o klasické šestistěnné kostky (tj. kostky, které mají na stěnách 1, 2, 3, 4, 5 a 6 ok).

Příklad 4. Představte si, že můžete ovlivnit pravděpodobnost, s jakou padnou jednotlivé strany hrací kostky s $2k$ stranami (tj. takové, která má na stěnách $1, 2, \dots 2k$ ok). Můžete tyto pravděpodobnosti „našmelit“ tak, aby pravděpodobnost toho, že hodíme dvěma kostkami součet ok $2, 3, \dots, 4k$, byla stejná?

Za zmínku stojí zobecněná kombinační čísla a zobecněná binomická věta. Je-li r reálné a k přirozené, potom se zobecněné kombinační číslo definuje jako

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Zobecněná binomická věta říká, že pro r reálné je funkce $(1+x)^r$ vytvořující funkcí pro posloupnost

$$\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right),$$

tj.

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots.$$

Tento vztah nám tedy umožňuje relativně jednoduše určit posloupnosti příslušející například vytvořujícím funkcím $\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$, nebo $\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$.

Příklad 5. Kolika způsoby může na šesti hracích kostkách padnout součet 13?

Literatura a zdroje

[1] 27. ročník MKS – seriál Kombinatorika
[2] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum 2000