Základné vlastnosti polynómov

Michal Rušin

Definície a základné vlastnosti polynómov

Definícia. Polynómom (mnohočlenom) *premennej x rozumieme výraz*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in N_0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazývame koeficienty polynómu, *výrazy $a_i x^i$ nazývame* členy polynómu, *člen a_0 nazývame* absolútny člen *polynómu $P(x)$. V ďalšom texte budeme predpokladať, že polynóm máme zapísaný v uvedenom tvare.*

Definícia. *Ak $a_n \neq 0$, hovoríme, že polynóm $P(x)$ je* stupňa *n, značíme*

$$\operatorname{st} P(x) = n.$$

Definícia. *Polynóm, ktorého všetky koeficienty sú nulové, sa nazýva* nulový polynóm. *Nulovému polynómu sa často nepriradzuje žiadny stupeň, je však dobré položiť st $0 = -1$.*

Definícia. *Ak existuje také reálne (komplexné) číslo a, že platí $P(a) = 0$, hovoríme, že a je* koreňom polynómu *$P(x)$. Hovoríme, že číslo c je k-*násobným koreňom *polynómu $P(x)$, ak je k najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $(x - c)^k | P(x)$.*

Veta. (O delení so zvyškom) *Nech $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy, pričom $Q(x)$ nie je nulový polynóm. Potom existuje práve jedna dvojica polynómov $R(x)$, $S(x)$ taká, že platí*

$$P(x) = R(x) \cdot Q(x) + S(x).$$

Pritom buď $S(x) \equiv 0$, alebo st $S(x) <$ st $Q(x)$.

Veta. (Bézoutova veta) *Zvyšok po delení polynómu $P(x)$ polynómom $x - a$ sa rovná $P(a)$. Polynóm $P(x)$ je deliteľný polynómom $x - a$ práve vtedy, keď číslo a je koreňom polynómu $P(x)$.*

Veta. (Základná veta algebry) *Každý polynóm stupňa aspoň 1 s komplexnými koeficientmi má aspoň jeden komplexný koreň.*

Dôsledok. *Každý polynóm $P(x)$ stupňa $n \geq 1$ s komplexnými koeficientmi má práve n komplexných koreňov $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pričom každý koreň počítame s jeho násobnosťou a platí*

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Veta. (Veta o rozklade polynómu nad R) *Každý nenulový polynóm*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in N_0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla, sa dá nad telesom reálnych čísel rozložiť na súčin lineárnych a kvadratických činiteľov

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}\cdot(x^2+c_1^2)^{\beta_1}(x^2+c_2^2)^{\beta_2}\cdots(x^2+c_l^2)^{\beta_l},$$

pričom $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+2\cdot(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_l) = n,$ x_i je reálny koreň násobnosti α_i a $c_1, c_2, \ldots, c_l$ sú kladné reálne čísla.

Veta. *Nech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi a $\frac{p}{q}$ je racionálne číslo, kde p je celé číslo, q prirodzené číslo a p, q sú nesúdeliteľné čísla. Nech $\frac{p}{q}$ je koreňom polynómu $P(x)$. Potom p delí a_0 a q delí a_n. Navyše $p - mq$ delí $P(m)$ pre ľubovoľné celé m. Špeciálne $p - q$ delí $P(1)$ a $p + q$ delí $P(-1)$.*

Veta. *Nech $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy stupňa n a platí $P(a) = Q(a)$ pre $n+1$ rôznych čísel. Potom sa polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ rovnajú.*

Veta. *Nech $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi, $s, t \in Z$. Potom $s - t$ delí $P(s) - P(t)$.*

Vietove vzťahy

Nech x_1, x_2 sú korene polynómu $P(x) = ax^2 + bx + c$ druhého stupňa. Potom $P(x)$ môžeme zapísať v tvare

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Roznásobením a porovnaním koeficientov pri zodpovedajúcich si mocninách dostávame

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Podobne dostávame pre polynóm $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tretieho stupňa a jeho korene x_1, x_2, x_3 nasledujúce vzťahy:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Uvažujme polynóm

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

pričom $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálné čísla a $a_n \neq 0$. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú jeho (vo všeobecnosti komplexné) korene. Potom platia nasledujúce vzťahy:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\cdots x_n = (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n},$$

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n},$$

pričom v k-tej rovnici sčítavame cez všetky k-tice premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nazývame ich Vieťovými vzťahmi.

Príklady

Príklad 1. Zistite súčet koeficientov polynómu $P(x) = (1 - 2x^2 - 3x^3 + 4x^5 + + 5x^7 - 6x^{11} - 7x^{13} + 8x^{17} + 9x^{19} - 10x^{23})^{2006}$.

Príklad 2. Nech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a nech existujú štyri reálne čísla také, že $P(x)$ v nich nadobúda hodnotu 7. Dokážte, že neexistuje také celé číslo m, pre ktoré by platilo $P(m) = 9$.

Príklad 3. Nech $P(x)$ je polynóm aspoň prvého stupňa s celočíselnými koeficientmi. Potom v postupnosti $P(0), P(1), P(2), \ldots$ je nekonečne veľa zložených čísel. Dokážte.

Príklad 4. Pre čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \neq b$ a $c^3 = a^3 + b^3 + 3abc$. Dokážte, že $c = a + b$.

Príklad 5. Ak sú koeficienty a, b, c, d polynómu $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ také celé čísla, že ad je nepárne a bc je párne, tak aspoň jeden koreň tohto polynómu nie je racionálny. Dokážte.

Príklad 6. Dokážte, že ak sa súčet niektorých dvoch koreňov polynómu $P(x) = = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ rovná súčtu zvyšných dvoch, potom platí $a^3 - 4ab + 8c = 0$.