Vietove vzťahy

MARTA KOSSACZKÁ

ABSTRAKT. Príspevok oboznamuje s Vietovými vzťahmi a ukazuje ich použitie v algebraických úlohách.

Zopakujme si nejaké definície

Definícia. *Polynomická funkcia* (polynóm, mnohočlen) premennej x je funkcia tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazývame *koeficienty* polynómu. Výrazy $a_i x^i$ voláme *členy* polynómu. Člen a_0 voláme *absolútny člen.*

Definícia. Polynóm $P(x) = 0$ (t.j. taký, ktorého všetky koeficienty sú nulové) voláme *nulový*. *Stupeň* nenulového polynómu definujeme ako najväčšie n také, že $a_n \neq 0$, a toto a_n je *vedúci koeficient.*

Definícia. Číslo r voláme *koreň* polynómu, ak platí $P(r) = 0$.

Vietove vzťahy v polynómoch stupňa 2

Tvrdenie. *Majme polynóm $P(x) = ax^2 + bx + c$ s koreňmi r_1, r_2. Potom platí*

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a},$$
$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}.$$

Dôkaz. Nie je ťažký. Stačí si uvedomiť, že ak je a vedúci koeficient polynómu $P(x)$ a x_1, x_2 jeho korene, potom platí

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Požadované rovnosti dostávame po roznásobení a porovnaní koeficientov v jednotlivých členoch. $\square$

Úloha. Majme kvadratickú rovnicu $x^2 - 7x + 5 = 0$ s koreňmi α a β. Spočítajte $\alpha^2 + \beta^2$.

Riešenie. Z Vietových vzťahov pre našu rovnicu dostávame $\alpha + \beta = 7$ a $\alpha\beta = 5$, ďalej si upravíme

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta,$$

dosadíme a dostávame hľadaný výsledok $49 - 10 = 39$.

Predchádzajúce tvrdenie sa dá zovšeobecniť pre polynómy ľubovolného stupňa.

Vietove vzťahy

Tvrdenie. *Majme polynóm $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ stupňa n s koreňmi $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Potom platí pre každé $i \in \{0, \ldots n\}$*

$$\frac{a_i}{a_n} = (-1)^{n-i} \cdot \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-i}} r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{j_{n-i}},$$

kde $j_k \in \{0, \ldots n\}$.

Dôkaz je analogický ako pre polynómy druhého stupňa.

Príklad 1. Majme polynóm $x^2 - 3x - 1$ s koreňmi a a b. Nájdite polynóm druhého stupňa, ktorý má korene a^2, b^2. Spočítajte

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}.$$

Príklad 2. Polynóm $x^3 - 3x^2 + 1$ má korene a, b, c. Nájdite polynóm tretieho stupňa, ktorý má korene a^2, b^2, c^2.

Príklad 3. Nájdite všetky možné hodnoty čísel p, q tak, aby $p + q = 198$ a aby polynóm $x^2 + px + q$ mal dva prirodzené korene.

Príklad 4. Polynóm $5x^3 - 11x^2 + 7x + 3$ má korene a, b, c. Spočítajte $a^3 + b^3 + c^3$.

Príklad 5. Tri korene polynómu $x^4 + ax^2 + bx + c$ sú 2, -3, 5. Spočítajte $a + b + c$. (HMMT 1998)

Príklad 6. Nájdite všetky možné hodnoty m tak, aby polynómy $x^2 + mx - 3$ a $x^2 - 4x - m + 1$ mali spoločný koreň.

Príklad 7. Máme tri reálne čísla x, y, z také, že $x = 6 - y$ a $z^2 = xy - 9$. Dokážte, že $x = y$.

Príklad 8. Korene polynómu $x^3+3x^2+4x-11$ sú a, b, c. Korene polynómu x^3+rx^2+sx+t sú $a+b$, $b+c$, $c+a$. Určite r, s, t. (AIME 1996)

Príklad 9. Nájdite súčet všetkých koreňov polynómu $x^{2015}+(\frac{1}{2}-x)^{2015}$.

Príklad 10. Súčin dvoch koreňov polynómu $x^4-18x^3+kx^2+200x-1984$ je -32. Určite k. (USAMO 1984)

Príklad 11. Nájdite všetky polynómy

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

také, že $a_i=\pm1$ pre všetky $0\leq i\leq n-1$, ktoré majú n reálnych koreňov.
(1968 Putnam Exam)

Literatúra a zdroje

[1] *http://www.math.cmu.edu/ mlavrov/arml/13-14/polynomials-02-09-14.pdf*
[2] *http://www.slideshare.net/RongYifei/application-of-vietas-theorem*
[3] *https://brilliant.org/wiki/vietas-formula/*