

Vieta jumping

Michal „Kenny“ Rolínek

Pod podivným názvem této přednášky se skrývá jen pár let stará finta, která nám pomůže při řešení kvadratických Diofantických rovnic. Více už ukáží samotné příklady.

Příklad 1. Kladná celá čísla a, b jsou taková, že číslo $(4a^2 - 1)^2$ je dělitelné číslem $4ab - 1$. Dokažte, že $a = b$. (IMO 2007)

Příklad 2. Budiž a, b, c taková přirozená čísla, že platí

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = c.$$

Ukažte, že pak $c = d^2$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$. (IMO 1988)

Příklad 3. Pro x, y, z platí

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = z.$$

Dokažte, že $z = 3$. (Moldávie 2006)

Příklad 4. Nalezněte všechny dvojice čísel (m, n) takové, že $mn - 1$ dělí $m^2 + n^2$. (USA 2007)

Příklad 5. Přirozená čísla a, b, c splňují

$$0 < a^2 + b^2 - abc \leq c.$$

Ukažte, že $a^2 + b^2 - abc$ je čtverec. (CRUX 1998)

Příklad 6. Ukažte, že ke každému $m \in \mathbb{N}$ lze najít nekonečně mnoho dvojic nesoudělných čísel (x, y) takových, že

- (i) $x \mid y^2 + m$
 - (ii) $y \mid x^2 + m$
- (IMO short 1992)

Příklad 7. Zjistěte, pro která $n \in \mathbb{N}$ má

$$x + y + w + z = n\sqrt{xywz}$$

rovnice celočíselné řešení. (Británie 2002)