

Vieta Jumping

ALČA SKÁLOVÁ

Vieta jumping nebo též *root flipping* je metoda řešení kvadratických Diofantických rovnic. Tuto poměrně těžkou fintu se naučíme na následujících příkladech.

Pro samostudium doporučuji článek [1], kde jsou podrobně vyřešeny první tři příklady.

Příklady

Příklad 1. Pro přirozená čísla a, b platí, že $a^2 + b^2$ je dělitelné $ab + 1$. Dokaž, že

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

je čtverec.

(IMO 1988, př. 6)

Příklad 2. Přirozená čísla x, y, z splňují

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = z.$$

Dokaž, že $z = 3$.

Příklad 3. Buďte a, b přirozená čísla. Ukaž, že pokud $(4a^2 - 1)^2$ je dělitelné $4ab - 1$, pak $a = b$.
(IMO 2007, př. 5)

Příklad 4. Najdi všechny dvojice přirozených čísel m, n splňující

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \in \mathbb{N}.$$

Příklad 5. Ukaž, že ke každému přirozenému číslu m lze najít nekonečně mnoho dvojic celých čísel (x, y) takových, že

- (i) x, y jsou nesoudělná,
- (ii) $x \mid y^2 + m$,
- (iii) $y \mid x^2 + m$.

(IMO shortlist 1992)

KLÍČOVÁ SLOVA. Diofantické rovnice, Vietovy vztahy, root flipping, nekonečný sestup

Příklad 6. Přirozená čísla a, b, c splňují

$$0 < a^2 + b^2 - abc \leq c.$$

Dokaž, že $a^2 + b^2 - abc$ je čtverec.

(CRUX)

Příklad 7. Zjisti, pro která $n \in \mathbb{N}$ má rovnice

$$w + x + y + z = n\sqrt{wxyz}$$

celočíslné řešení.

(Vietnam 2002)

Literatura a zdroje

- [1] Yimin Ge: *The Method of Vieta-Jumping*,
www.yimin-ge.com/doc/VietaJumping.pdf
- [2] www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=2192633#p2192633