Velké prostory

Anička Doležalová

Abstrakt. Budeme si hrát s vektorovými prostory, které mají nekonečnou dimenzi. Cílem je si je trochu osahat a získat základní intuici. K tomu nám poslouží hlavně prostory posloupností.

Prerekvizity

Pokud byste rádi přišli na přednášku, ale nemáte potřebné znalosti z vektorových a metrických prostorů, odchyťte si mě v průběhu sousu a probereme to. Porozumění pojmům zde uvedeným je nezbytné[1] pro pochopení přednášky.

Úmluva. Píšeme-li „$\|x\|$ má vlastnost $\|x\| \geq 0$“, máme tím na mysli, že tato nerovnost platí pro všechna x z příslušné množiny X.

Definice. *Vektorovým prostorem nad tělesem* T (zkráceně v. p. nad T) nazveme neprázdnou množinu V spolu s operacemi $+ : V \times V \to V$ a $\cdot : T \times V \to V$, pokud splňuje následující axiomy (kde $x, y, \dots \in V, \lambda, \vartheta \in T$):

(1) $x + y = y + x$, $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(2) existuje x_0 takové, že $x_0 + x = x$ (typicky značíme 0),
(3) pro každé x existuje opačný prvek y: $x + y = 0$ (značíme $-x$),
(4) $\lambda \cdot (\vartheta \cdot x)) = (\lambda\vartheta) \cdot x$, $1 \cdot x = x$,
(5) $(\lambda + \vartheta) \cdot x = \lambda \cdot x + \vartheta \cdot x$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Znak pro násobení často vynecháváme. V přednášce budeme uvažovat pouze v. p. nad $\mathbb{R}$.

Lineárním obalem vektorů z množiny M rozumíme množinu všech (konečných!) lineárních kombinací těchto prvků, tj. $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_i \in T, x_i \in M\}$. Množinu vektorů nazveme lineárně nezávislou, pokud se žádný z nich nedá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních.

Příklad. $\mathbb{R}^n$, kde n je přirozené číslo. Operace se provádějí po složkách, na nich se chovají jako standardní součet a součin. Nulový vektor je vektor $(0, \dots, 0)$.

[1] Ale nikoliv postačující.

Příklad. Prostor všech matic 2×2 nad $\mathbb{R}$. Sčítání i násobení se provádějí po složkách. Nulový vektor je nulová matice (všechny složky jsou nula).

Příklad. Prostor všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacemi prováděnými bodově.

Definice. Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazveme *normovaný vektorový prostor*, pokud X je vektorový prostor a zobrazení $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ splňuje

(1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$,
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Zobrazení $\|\cdot\|$ nazveme norma.

Příklad. $X = \mathbb{R}$ s $\|x\| = |x|$ je normovaný v. p.

Příklad. Pro přirozené číslo n uvažujme $X = \mathbb{R}^n$ (tj. $x \in X$ je tvaru $(x_1, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$) s $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots |x_n|$, $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ nebo $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. V každém z těchto případů se jedná o normovaný v. p. Tyto prostory pro nás budou důležité, neboť z nich budeme v přednášce vycházet. Příslušné normy se nazývají postupně *součtová*, *eukleidovská* a *supremová*.

Příklad. Prostor všech spojitých funkcí $[0, 1] \to \mathbb{R}$ se supremovou normou definovanou jako $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ tvoří normovaný v. p.

Poznámka. Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima, norma je tedy dobře definovaná.

Definice. Mějme dva normované v. p. X, Y (nad $\mathbb{R}$). Zobrazení $L : X \to Y$ nazveme *lineární*, pokud splňuje

(1) $L(x + \tilde{x}) = L(x) + L(\tilde{x})$,
(2) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.

Příklad. Vynásobení konstantou je lineární zobrazení. Přičtení nenulové konstanty ne.

Definice. Dvojici (X, ρ) nazveme *metrický prostor*, pokud X je neprázdná množina a ρ je zobrazení $X \times X \to \mathbb{R}$ splňující

(1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
(3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Zobrazení ρ se nazývá metrika. *Okolím bodu* $x_0 \in X$ *o poloměru* ε nazveme množinu $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$. Množinu nazveme *otevřenou*, pokud pro každý její bod leží v množině i nějaké jeho okolí.

Příklad. Každý normovaný v. p., kde za $\rho(x, y)$ vezmeme $\|x - y\|$. Této metrice říkáme metrika indukovaná normou. Například tedy $\mathbb{R}$ se vzdáleností $|x - y|$.

Dále se nám bude hodit (alespoň) intuitivní představa limity posloupnosti v metrickém prostoru. Pro úplnost tedy uveďme její formální definici:

Definice. Mějme v metrickém prostoru (X, ρ) posloupnost jeho prvků $(x_n)_1^\infty$. Řekneme, že tato posloupnost *konverguje k bodu* $x \in X$ (bod x je její limitou), pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 takový, že všechny prvky posloupnosti $(x_n)_{n_0}^\infty$ už leží v $U(x, \varepsilon)$. Řekneme, že posloupnost je *cauchyovská*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 takový, že pro všechny indexy m, n větší než n_0 už platí $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Tvrzení. *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Opačná implikace neplatí.*

Důkaz. Náznak:

Pokud už jsou všechny členy $(x_n)_{n_0}^\infty$ v $U(x, \varepsilon)$, pak pro členy této posloupnosti platí $\rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$.

Naopak budeme-li uvažovat jako metrický prostor $\mathbb{Q}$ s absolutní hodnotou, pak (z hustoty racionálních čísel v reálných) umíme najít cauchyovskou posloupnost, která nemá limitu (v $\mathbb{Q}$).

Přednáška!

Definice. Mějme normovaný v. p., na kterém uvažujeme metriku indukovanou normou. Pokud platí, že každá cauchyovská posloupnost je konvergentní (tedy má v daném prostoru limitu), nazveme tento prostor *Banachův*.

Poznámka. Obecně metrický prostor, ve kterém platí, že každá cauchyovská posloupnost je konvergentní, nazveme *úplný*. Budeme brát jako fakt, že reálná čísla s absolutní hodnotou jsou Banachův prostor.

Příklad. Prostor $\mathbb{R}^n$ s libovolnou z výše uvedených tří norem je Banachův.

Příklad. Prostor $\mathbb{R}^n$ s libovolnou p-normou je Banachův, kde

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, p \in [1, \infty).$$

(Pro $p = \infty$ se jedná o supremovou normu.)

Příklad. Prostor všech spojitých funkcí $[0, 1] \to \mathbb{R}$ se supremovou normou je Banachův.

Poznámka. Pojem „supremová norma“ se zdá být nadužívaný, v jistém smyslu se ale jedná o stále tutéž normu – vezme se (v absolutní hodnotě) největší hodnota z nějaké množiny. V případě konečného vektoru je to jeho největší složka, v případě funkce největší funkční hodnota.

Definice. Označme $X = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ (tedy prostor nekonečných – spočetných – posloupností se složkami z $\mathbb{R}$). Jedná se o vektorový prostor. Pro $p \in [1, \infty)$ definujeme

$$\ell^p = \left\{ x \in X : \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Podobně definujeme prostor omezených posloupností

$$\ell^\infty = \{x \in X : \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

a prostor posloupností konvergujících k nule

$$c_0 = \{x \in X : (x_n)_1^\infty \text{ konverguje k } 0\}$$

se supremovou normou (tj. toutéž jako v ℓ^∞).

Posloupnosti, které mají n-tou složku rovnou jedné a všechny ostatní nulové, značíme e_n.

Poznámka. Všechny tyto prostory jsou Banachovy.

Úloha 1. Zkuste si představit c_0 a ℓ^p. :)

Úloha 2. Jak se intuitivně liší c_0, ℓ^p $(p \in [1,\infty))$ a ℓ^∞?

Úloha 3. Jak vypadá $U(0,\varepsilon)$ v c_0, ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞?

Úloha 4. Najděte co největší množinu lineárně nezávislých vektorů v ℓ^p.

Úloha 5. Jak vypadá lineární obal množiny $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ v těchto prostorech?

Úloha 6. Dokažte, že ℓ^1 je separabilní[2] (obecně to platí pro $p \in [1,\infty)$).

Úloha 7. Najděte nějaké lineární zobrazení $\ell^p \to \ell^p$, $\ell^p \to \ell^1$, $\ell^1 \to \mathbb{R}$.

Věta. (Riesz, neformálně) *Nechť $p \in (1,\infty)$. Každé lineární zobrazení $\ell^p \to \mathbb{R}$ se dá jednoznačně ztotožnit s prvkem ℓ^q, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Toto ztotožnění je prosté a na.*

Poznámka. Obecně množina všech lineárních zobrazení z jednoho Banachova prostoru do druhého tvoří také Banachův prostor. Prostoru lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do $\mathbb{R}$ se říká *duální prostor* a značí se X^*. Příslušná norma je odvozená z norem obou prostorů.

Úloha 8. Najděte lineární zobrazení $\ell^1 \to \mathbb{R}$, které není dobře definované jako $\ell^2 \to \mathbb{R}$.

Definice. Na prostoru ℓ^2 definujeme skalární součin jako

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n.$$

Kolmost a ortogonální doplněk definujeme analogicky jako v konečném případě (např. u $\mathbb{R}^2$), tedy dva prvky jsou na sebe kolmé, pokud je jejich skalární součin nula, ortogonální doplněk množiny M jsou všechny prvky, které jsou kolmé na každý prvek M.

[2] Tj. najděte spočetnou hustou podmnožinu.

Úloha 9. Jak vypadá ortogonální doplněk posloupnosti e_1?

Úloha 10. Najděte dva různé podprostory ℓ^2, jejichž ortogonální doplněk je stejný.

Další směry, kterými se můžeme ubírat, jsou Banachovy algebry (můžeme „násobit“ vektory mezi sebou!), duály a slabé topologie (pro silnější nátury, které znají alespoň základy topologie) nebo svět L^p prostorů (kde žijí Lebesgueovsky integrovatelné funkce).

Literatura a zdroje

[1] O. Kalenda: *Úvod do funkcionální analýzy, Funkcionální analýza 1*, MFF.