Velká přirozená čísla

Mirek Olšák

Abstrakt. Příspěvek se zamýšlí nad otázkou, jak definovat „co největší“ přirozené číslo. Začíná s několika pohledy na Ackermannovu funkci a dostává se do míst, na která konečná kombinatorika nestačí.

Motto: Vesmír je prťavý… oproti většině přirozených čísel.

Definice. Mějme dvě rostoucí posloupnosti přirozených čísel a_n, b_n. Řekneme, že posloupnost *a roste stejně rychle jako* posloupnost b, pokud najdeme k takové, že pro všechna n platí

$$a_n < b_{n+k} < a_{n+2k}.$$

Definice. Při mocnění a^{b^c} provádíme s vyšší prioritou mocnění výše a více vpravo, tedy $a^{(b^c)}$. Mocninnou věží o délce $n \in \mathbb{N}$ a základu $x \in \mathbb{N}$ rozumíme výraz

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}},$$

ve kterém se vyskytuje x právě n-krát.

Cvičení. Pro $x \geq 2$ označme $v_x(n)$ posloupnost mocninných věží délky $n = 1, 2, \ldots$ Ukažte, že pro všechna možná x rostou posloupnosti v_x stejně rychle.

Definice. Pro $m, n \in \mathbb{N}_0$ definujeme m-tou Ackermannovu funkci $A_m(n)$ rekurentním předpisem

$$A_m(n) = \begin{cases} n+1 & \text{pro } m = 0, \\ A_{m-1}(1) & \text{pro } m > 0 \text{ a } n = 0, \\ A_{m-1}(A_m(n-1)) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dále definujeme Ackermannovu funkci (bez pořadového čísla) jako $A(n) = A_n(n)$.

Cvičení. Ukažte, že čtvrtá Ackermannova funkce roste stejně rychle jako mocninná věž.

Cvičení. Ukažte, že $A(n)$ roste stejně rychle jako $A_n(1)$.

Úloha. (IMO 2010) V každé ze šesti schránek B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 a B_6 je na počátku jedna mince. Se schránkami můžeme provádět následující dvě operace:

(i) Vybrat neprázdnou schránku B_j , kde $1 \leq j \leq 5$, odebrat z ní jednu minci a přidat dvě mince do schránky $B_j + 1$.

(ii) Vybrat neprázdnou schránku B_k, kde $1 \leq k \leq 4$, odebrat z ní jednu minci a navzájem vyměnit obsahy (případně prázdných) schránek B_{k+1} a B_{k+2}.

Rozhodněte, zda je možné pomocí konečného počtu těchto operací dosáhnout toho, aby schránky B_1, B_2, B_3, B_4 a B_5 byly prázdné a schránka B6 obsahovala právě $2010^{2010^{2010}}$ mincí.

Návod. Ukažte, že maximální dosažitelný počet mincí roste v závislosti na počtu schránek stejně rychle jako Ackermannova funkce.

Definice. Je dáno přirozené číslo n. Pan Goodstein si toto číslo rozepíše na součet bodle binární soustavy, dále exponenty, exponenty exponentů, … Například číslo 35 rozepíše jako

$$2^{2^2+1} + 2 + 1.$$

Nyní všechny dvojky nahradí trojkami a následně odečte jedničku. Rozepíše toto číslo v trojkové soustavě, všechny trojky změní na čtyřky a opět odečte jedničku. Takto postupně zvyšuje soustavu a odečítá jedničku, až nakonec odbourá všechny členy tohoto čísla a získá nulu. Definujeme Goodsteinovu funkci $G(n)$, která vrátí číslo pozice, na níž se v Goodsteinově postupu jako první objevila nula.

Tvrzení. *Goodsteinův postup vždy skončí, tedy Goodsteinova funkce je dobře definovaná.*

Definice. Goodsteinův postup je možné vnímat formálně jako „odbourávání“ z jistého výrazu obsahujícího proměnnou x (základ soustavy). Při každém odbourání se přitom některá x promění na číslo kroku, ve kterém k tomu došlo. Představme si tedy, že Goodstein začíná s výrazem $V(x)$, kde x je na začátku rovno n a v každém kroku vzroste o 1. Definujeme pseudo-Goodsteinovo číslo $g_{V(x)}(n)$ jako první nulu v takovém postupu.

Cvičení. Ukažte, že g_{x^x} roste rychle jako Ackermannova funkce.

Návod. Dokažte $A_{k+1}(n) < g_{x^k}(n+2) < A_{k+1}(2n+2)$.

Definovatelnost

Všechna doposud jmenovaná čísla jsme definovali pomocí vcelku krátkého českého textu. Když je chceme přebít, co takhle si vzít největší číslo definovatelné tisíci nebo méně českými slovy.

Toto má jistý zádrhel, pokud bychom vzali „největší číslo definovatelné tisíci nebo méně českými slovy plus jedna“, získali bychom číslo, které se méně než tisíci českými slovy definovat nedá. Přesto jsme ho tak definovali. Dostáváme spor, jenže s čím?

Problém je v tom, že čeština (stejně jako jiné přirozené jazyky) je málo exaktní na to, aby se o ni opírala matematická definice (například může mluvit sama o sobě). Můžeme však vytvořit jiný jazyk, u kterého bude vždy jasné, které číslo definuje. Ukážeme si dva příklady.

Definice. Turingův stroj je automat, který stojí na jednom políčku nekonečné (na obě strany) pásky. Na začátku je na všech políčkách nula. Stroj může v průběhu měnit číslo, na kterém stojí, a posouvat se po pásce. Současně je tento stroj v každém okamžiku v jednom z k stavů. Kód Turingova stroje spočívá v popsané instrukci pro každou dvojici (stav, číslo pod strojem). Instrukce má tři části: 1) změň nebo ponechej číslo pod sebou, 2) posuň se doprava, doleva, nebo zůstaň stát, 3) přepni se do jiného stavu nebo se vypni.

Číslo definované Turingovým strojem, který se někdy vypne, se dá chápat například jako počet kroků, které do té doby udělal.

Tvrzení. *Turingův stroj umí provést všechno, co umí provést počítač.*

Definice. (číslo definovatelné v aritmetice $\mathbb{N}_0$) Mějme formuli, tedy „syntakticky správnou“ konečnou posloupnost kvantifikátorů, znamének (plus, krát, mocnění), logických spojek, rovnítek, jedniček, nul, neznámých a závorek. Předpokládáme, že v této formuli je pouze proměnná x nekvantifikovaná. Pak určíme číslo definované touto formulí jako nejmenší takové x (existuje-li), pro které daná formule platí. Například formule

$$\exists a\, \exists b\, (x = a \cdot a \cdot a \wedge x = b \cdot b + 1 + 1)$$

definuje číslo 27.

Tvrzení. *Pomocí aritmetiky v $\mathbb{N}_0$ je možné definovat Turingův stroj.*

Pokud přijmeme teorii množin za základ matematiky, umožní nám to popsat ještě mnohem větší (stále však přirozené) číslo. Bohužel však vysvětlovat všechny pojmy jeho definice by bylo příliš zdlouhavé, takže je zde neuvádím.

Definice. Uvažujme všechny sentence φ v jazyce teorie množin, pro které je třída všech množin tvaru V_α (pro α ordinál), ve kterých φ platí, množinou. Označme S sjednocení všech těchto množin. Jako TeMné číslo označíme největší přirozené číslo definovatelné v S v jazyce teorie množin pomocí formule délky nejvýše $A(4)$.