Úvod do kombinatoriky

Bára Kociánová

Abstrakt. Příspěvek vysvětluje základní kombinatorické pojmy a obsahuje mnoho lehčích příkladů i s výsledky, spíše mimochodem také zmiňuje, co je to pravděpodobnost. Neobsahuje žádnou hlubší teorii.

Kolik různých pořadí může mít závod s pěti účastníky? Kolika způsoby si můžeme ze skříně vybrat oblečení pro dnešní den? Jaká je pravděpodobnost, že v kostkách hodíme samé jedničky? A že správně tipneme čísla, která si někdo myslí?

Na tyto a další otázky spolu budeme hledat odpovědi.

Jak různě můžeme vybírat

Máme-li vybrat jednoho dobrovolníka ze skupiny pěti lidí, máme zjevně pět možností, koho zvolit. Pokud máme vybrat dva, dělí se nám příklad na různé případy, podle toho, jestli nám záleží na jejich pořadí, nebo ne.

Pokud dostanou oba dobrovolníci stejný úkol ve stejný čas, nezajímá nás, koho jsme zvolili prvního a koho druhého. Hledáme tedy počet dvojic mezi pěti lidmi, přičemž dvojice Žibřida a Zdislavy je stejná jako dvojice Zdislavy a Žibřida. To zvládneme spočítat třeba výčtem všech možností: k Žibřidovi můžeme přidat postupně Zdislavu, Yvonnu, Xaveria a Waldemara, ke Zdislavě už jen Yvonnu, Xaveria a Waldemara, Yvonna pak s Xaveriem a Waldemarem vytvoří dvě dvojice a Xaverius s Waldemarem nakonec jednu. Dohromady máme $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ možných dvojic. Ke stejnému výsledku dojdeme, pokud uvažujeme, že každý má čtyři různé kamarády, s nimiž může utvořit dvojici. To by bylo $5 \cdot 4 = 20$. Jenže, jak již bylo řečeno, je dvojice Žibřida a Zdislavy totožná s dvojicí Zdislavy a Žibřida, a tak jsme tuto (a každou další také) dvojici započítali dvakrát. Vydělením dvěma dostaneme $20/2 = 10$. Můžeme říct, že jsme právě spočítali počet dvoučlenných *kombinací* z pěti prvků.

Pokud začneme dobrovolníky mezi sebou rozlišovat, situace se výrazně změní. Nejprve předpokládejme, že prvnímu dobrovolníkovi zavážeme oči a druhý ho pak povede po předem vyznačené trase. Kolik máme možností provedení? Pro vybrání prvního pět, pro druhého zbývají jen čtyři, neboť ten vybraný už má zavázané oči a nemůže dělat obojí. Jenže co s těmi čísly teď, sečíst, vynásobit, umocnit? Pokud náš slepý dobrovolník bude Žibřid a povede ho Zdislava, je to úplně jiný příběh, než pokud Zdislavě bude ukazovat cestu Žibřid. Tedy pro každého prvního dobrovolníka existují čtyři druzí dobrovolníci. Máme proto $5 \cdot 4$ různých dvojic slepec – vodič, což je počet dvoučlenných *variací* z pěti prvků.

Ještě jiný výpočet použijeme, představíme-li si, že vybraný dobrovolník skupince zatančí čardáš a vrátí se mezi ostatní. Následně vybereme dalšího dobrovolníka, který bude chvíli stepovat. Kolika způsoby se tohle mohlo stát? Jako prvního tanečníka můžeme vybrat pět různých lidí. A jako druhého také pět, protože po Žibřidovi můžeme tentokrát vybrat znovu Žibřida. A poučeni z předchozího případu tato čísla vynásobíme, protože pro každého z pěti prvních dobrovolníků existuje pět možných následovníků. Dostaneme $5 \cdot 5 = 25$, neboli počet dvoučlenných *variací s opakováním* z pěti prvků.

Několik matematických pojmů

Ujasníme si názvosloví a pravidlo součtu a součinu mimochodem zmíněné v předchozím odstavci, definujeme si faktoriál a kombinační číslo, řekneme si něco málo o pravděpodobnosti a zjistíme, k čemu je to dobré.

Tvrzení 1. (Pravidlo součtu) *Mějme konečné množiny $A_1, A_2, \ldots A_n$, které jsou po dvou disjunktní. Potom počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ je roven součtu počtů prvků množin $A_1, A_2, \ldots A_n$.*

Toto pravidlo používáme zcela intuitivně, jak je vidět v následujícím příkladu:

Příklad 2. Na soustředění jelo jedním vlakem pět účastníků z Prahy, dva z Liberce, čtyři z Karlových Varů a jeden z Plzně. Kolik jich jelo celkem?

Tvrzení 3. (Pravidlo součinu) *Počet všech uspořádaných n-tic takových, že první složku můžeme vybrat k_1 způsoby, druhou k_2 způsoby, … až n-tou k_n způsoby, je roven $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.*

Toto pravidlo jsme už využili při vybírání slepého a vodiče v předchozím textu. Slepého jsme mohli vybrat pěti způsoby, vodiče čtyřmi, dohromady tedy $5 \cdot 4$ způsoby.

Příklad 4. Kolik je čtyřciferných čísel dělitelných pěti?

Řešení. Na místo tisíců můžeme vybrat devět cifer (nulu ne), na místo stovek deset, na místo desítek také deset a na místo jednotek jen dvě, nulu nebo pětku. Dohromady máme $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Definice 5. Pojem *k-členná kombinace z n prvků* vyjadřuje počet možností, kterými můžeme vybrat k prvků z n-prvkové množiny, aniž by nám záleželo na pořadí výběru.

Pojem *k-členná variace z n prvků* značí také počet možností, kterými můžeme vybrat k prvků z n-prvkové množiny, ale pokud pořadí výběru zohledníme.

Pojem *permutace na n prvcích* značí počet možných uspořádání n prvků.

Definice 6. Faktoriál n definujeme jako $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$. Speciálně definujeme $0! = 1$.

Tvrzení 7. *Počet permutací na n prvcích se rovná $n!$.*

Definice 8. Kombinační číslo [en nad ká] definujeme jako $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tvrzení 9. *Počet k-členných kombinací z n prvků vyjadřuje kombinační číslo $\binom{n}{k}$.*

Tvrzení 10. (Binomická věta) *Platí*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{(n-1)}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{(n-k)}b^k + \cdots + \binom{n}{1}ab^{(n-1)} + \binom{n}{0}b^n.$$

Definice 11. Množinu všech možných výsledků náhodného pokusu označme Ω, přičemž předpokládejme, že všechny její prvky ω nastanou se stejnou pravděpodobností. Podmnožinu A množiny Ω nazveme *jevem*, pro $A = \Omega$ *jistým jevem*, pro $A = \emptyset$ *nemožným jevem*. Pravděpodobnost, že nastane daný jev A, vyjádříme jako $P(A) = |A|/|\Omega|$.

Příklad 12. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne jednička nebo šestka?

Řešení. Možné výsledky hodu kostkou tvoří množinu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jev „padne jednička nebo šestka“ je množina $A = \{1, 6\}$, čili pravděpodobnost, že padne jednička nebo šestka, je $2/6 = 1/3$.

Tvrzení 13. *Ω je množina možných výsledků náhodného pokusu, $A, B \subset \Omega$.*

(1) $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$
(2) $0 \leq P(A) \leq 1$
(3) $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$
(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Nejtypičtější příklady

Na konci příspěvku jsou k příkladům uvedeny návody, které mnohdy přímo prozrazují výsledek.

Příklad 14. Kolik existuje sudých čtyřciferných čísel, která nejsou dělitelná pěti? Kolik je pěticiferných čísel, která jsou dělitelná čtyřmi? Kolik je trojciferných čísel, v jejichž desítkovém zápise je každá číslice nejvýš jednou? Kolik je čtyřciferných čísel, v nichž se sudé a liché číslice střídají?

Příklad 15. Kolik úhlopříček má n-úhelník?

Příklad 16. Jakou nejdelší abecedu bychom mohli zakódovat pomocí nejvýše čtyř teček či čárek? A co v Braillově písmu (nejvýše šest vystouplých teček)? Nebo v semaforu (ukazuje se rukama do osmi různých směrů, přičemž ruce nejsou rozlišitelné a nemohou splývat)?

Příklad 17. K pětadvacátým narozeninám dostala princezna bonboniéru ve tvaru čtverce, kde v každém řádku i sloupci bylo pět bonbonů. Chtěla si jich hned pět sníst, ale tak, aby nevyjedla žádný celý řádek ani sloupec. Kolika způsoby si mohla bonbony vybrat? A co kdyby chtěla z každého řádku i sloupce sníst právě jeden?

Příklad 18. V královské radě tradičně zasedá pět lidí. Do voleb se přihlásilo dvanáct lidí, z toho sedm šlechticů a pět šlechtičen. Protože je království moderní a podporuje rovnost mužů a žen, vyžaduje se, aby v radě byli aspoň dva muži a aspoň dvě ženy. Kolika způsoby může volba dopadnout?

Příklad 19. V jiném královském poradním orgánu zasedá předem neurčený nenulový počet lidí. O tuto funkci mají zájem čtyři muži a tři ženy a tentokrát je jedinou podmínkou pro volbu, aby v radě bylo stejně mužů jako žen. Kolik je možných výsledků?

Příklad 20. Kroketového turnaje se účastní šestnáct lidí. Hrají vždy dvě dvojice proti sobě. Kolika způsoby můžeme všechny hráče rozdělit?

Příklad 21. Vrháme obyčejnou šestistěnnou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že ve třech hodech hodíme aspoň jednu jedničku, že v pěti hodech nepadne žádné sudé číslo a že součet čísel po dvou hodech bude pět?

Příklad 22. Elsa každé ráno bezradně kouká do skříně a neví, co si obléct. Vždyť je tak těžké si vybrat! Má patery šaty, troje punčochy, čtyři páry střevíčků, dvě spony do vlasů a dva a půl páru náušnic (jednu ztratila). Z kolika možností každé ráno vybírá, když na sobě podle dvorního protokolu musí mít šaty, punčochy, dva střevíčky, sponu do vlasů a dvě náušnice? S jakou pravděpodobností na sobě bude mít spárované střevíčky a náušnice? (Střevíčky jsou levé a pravé, kdežto dvě náušnice z páru jsou identické.)

Příklad 23. Dvanáct měsíčků se z nudy stavělo do řady podle stáří, teploty, množství uzrálých jahod a podobných vlastností, až je napadlo: kolika různými způsoby se za sebe můžou postavit? Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení (kde jsou všechny možnosti stejně pravděpodobné) budou stát vedle sebe měsíce ročního období (tj. mezi měsíci nějakého ročního období nebude stát žádný měsíc jiného ročního období)? A jak se můžou seřadit, pokud se červen pohádal s prosincem a odmítají stát vedle sebe?

Příklad 24. Zákazník si chce u věštkyně ověřit, že přišel k té pravé, a tak si pětkrát myslí nějakou cifru a nechává věštkyni hádat. Určete postupně pravděpodobnost, že se podvodnice ani jednou netrefí, že právě dvakrát tipne správné číslo a že se aspoň jednou splete.

Další příklady

Příklad 25. Určete počet obarvení šachovnice $1 \times n$ pěti barvami tak, aby žádná dvě sousední políčka neměla stejnou barvu. Pokud máme všechny správně obarvené šachovnice schované v pytli, s jakou pravděpodobností z něj vytáhneme nějakou dvoubarevnou nebo nějakou, na které je aspoň jedno políčko červené?

Příklad 26. Výrobce hodin se rozzlobil na svůj nudný sortiment a rozhodl se vyrábět nové dokonale kulaté ciferníky, na nichž budou čísla od jedné do dvanácti uspořádána v kruhu libovolně a napsaná tak, aby nebylo poznat, kde je nahoře. Kolikery hodiny bude mít nově v nabídce?

Příklad 27. Milion obyvatel země hlasovalo v zemských volbách o tom, které roční období je nejlepší. Výsledky se udávají ve tvaru uspořádané čtveřice získaných počtů hlasů v pořadí [jaro, léto, podzim, zima]. Kolik možných výsledků volby mají?

Příklad 28. Na dostihových závodech běží pět koní. Pokud jejich čas měříme na celé vteřiny (tedy pokud dva koně doběhnou v jednu vteřinu, doběhli na stejném místě), kolika různých pořadí koní se můžeme dočkat?

Pokud si na svého oblíbeného koně vsadíme, že doběhne nejhůř třetí (tj. bude mít nejhůř třetí čas), jakou máme šanci vyhrát? Předpokládejme, že všechny možné výsledky jsou stejně pravděpodobné.

Příklad 29. Čísla $1, 2, \ldots, 2017$ dáme do tří barevných kyblíčků: bílého, modrého a červeného. Kolika způsoby můžeme čísla rozházet, pokud žádný z nich není prázdný a dvě po sobě jdoucí čísla nikdy nejsou v témže kyblíčku? (PraSe 30–4–4)

Příklad 30. Ve vězení je pět mužů a sedm žen. Domluvili se, že každý den vylosují jednoho z nich, kdo se zeptá strážce, jestli je nechce pustit ven. Jaká je pravděpodobnost, že první dva vylosovaní byli muži?

Strážce to po roce omrzelo a slíbil jim, že pokud se ho desetkrát po sobě zeptá žena, opravdu jim celu odemkne. S jakou pravděpodobností bude vězení do dvou týdnů prázdné?

Příklad 31. Na zámku je úschovna zavazadel, v níž je n skříněk, ke kterým patří n různých klíčů. Zlý trpaslík do každé skříňky dal nějaký klíč a pak všechny zavřel. Hodný trpaslík má kouzelnou hůlku, která umí otevřít skříňku vlevo nahoře. Z ní může vyzvednout klíč a odemknout k němu příslušnou skříňku a pokračovat dále. Určete pravděpodobnost, že se mu podaří otevřít všechny skříňky.

(PraSe 26–5–3)

Příklad 32. Kolik vět můžeme vytvořit z šestadvaceti písmen abecedy, pokud každé použijeme právě jednou a za větu považujeme libovolnou posloupnost písmen rozdělenou mezerami (přičemž mezer může být libovolně, ale nikdy ne dvě vedle sebe)?

Příklad 33. Anna dělala zasedací pořádek na svatbu. Pozvala dvacet čtyři hostů, z nichž bylo osmnáct mužů a šest dam. Chtěla vybrat nejlepší posazení hostů tak, aby u každého kulatého stolu pro čtyři lidi seděla jedna dáma. Z kolika takových vybírala? Když zasedání u stolu jen otočíme, považujeme ho za stejné, podobně nezáleží na tom, u jakého přesně stolu kdo sedí.

Jaká je pravděpodobnost, že při náhodně vylosovaném zasedacím pořádku bude Anna vedle svého ženicha?

Příklad 34. Šnek se chce dostat z jednoho rohu krychle do protějšího, avšak plazit se chce pouze po hranách, a to nejvýše po pěti. Kolik takových cest má? Počítáme i ty, během nichž navštíví cíl vícekrát. (PraSe 29–3–4)

Příklad 35. V cukrárně měli n sladkostí, ale každou bohužel jen jednou. Přišli dva mlsouni a nakoupili několik sladkostí, každý aspoň jednu. Kolika způsoby to mohli udělat? (PraSe 25–5–4)

Příklad 36. Mějme čtverečkovaný papír $m \times n$. Kolika způsoby můžeme strany všech čtverečků obarvit pomocí tří barev tak, aby každý čtvereček měl právě dvě strany obarvené jednou barvou a zbývající dvě nějakou jinou jednou barvou? Strany, kterými se sousedící čtverečky dotýkají, považujeme za totožné. (PraSe 33–1–4)

Příklad 37. Kolika způsoby se může posadit deset chlapců a dvanáct děvčat na kolotoč s dvaceti čtyřmi sedadly tak, aby mezi každými dvěma chlapci sedělo aspoň jedno děvče? Posazení, která se liší jen otočením kolotoče, považujeme za totožná. (PraSe 3–6–4)