Úvod do výrokové a predikátové logiky

Eva Ondráčková

Na této přednášce se seznámíte se základy výrokové a predikátové logiky. Zjistíte, že podstatou logiky není vyplňování pravdivostních tabulek ani negování výroků typu „Na stole je právě jedna hruška, nebo aspoň tři jablka a ne více než sto dvacet devět kuliček rybízu.“ Uvidíte, co jsou formální systémy a k čemu by mohly být dobré; formalizujeme si pojmy jako „věta“, „důkaz“, „pravdivost“, „splnitelnost“ atd. Nebudeme se tím ale zabývat příliš zevrubně – tato přednáška nám bude sloužit především jako přípravný kurz na mou další přednášku o Gödelových větách o neúplnosti.
Nelekejte se množství definic, které uvidíte níže; píšu je sem především proto, abyste je měli přehledně před sebou a mohli se soustředit spíš na jejich pochopení než na opisování tabule.

Výroková logika

Definice. (Úvodní pojmy)

- *Neprázdnou množinu symbolů L nazveme jazykem.*
- *Posloupnost symbolů z množiny L nazveme slovo jazyka L.*
- *Prázdnou posloupnost (posloupnost délky 0) nazveme prázdné slovo a budeme ji značit λ.*
- *Množinu všech slov jazyka L budeme značit L^*.*
- *Definujeme operaci zřetězení jako $\cdot : L^* \times L^* \to L^*$. Slovům a a b přiřadí slovo c vzniklé napsáním slova b za slovo a. Píšeme $a \cdot b = c$, případně $ab = c$.*
- *Nechť $a, b \in L$. Řekneme, že a je podslovo slova b, pokud b je tvaru uav pro nějaká $u, v \in L^*$. Je-li aspoň jedno ze slov u, v neprázdné, řekneme, že a je vlastním podslovem slova b.*

Definice. (Prvotní formule) *Nechť P je neprázdná množina, jejímiž prvky jsou slova nějakého jazyka, případně jen písmena p, q, r, p_1, p_2, … Prvky této množiny budeme nazývat prvotní formule.*

Definice. (Jazyk výrokové logiky) *Jazyk L_P výrokové logiky nad množinou P obsahuje prvky množiny P a dále symboly pro logické spojky: $\neg$ (negace), & (konjunkce),*

$\vee$ *(disjunkce),* $\rightarrow$ *(implikace),* $\leftrightarrow$ *(ekvivalence). Obsahuje také pomocné symboly pro závorky. Říkáme, že* P *je množina prvotních formulí jazyka* L_P.

Definice. (Výrokové formule)

- *Každá prvotní formule je výroková formule.*
- *Jsou-li* A, B *výrokové formule, potom výrazy* $\neg A$, $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ *jsou výrokové formule.*
- *Každá výroková formule vznikne konečným počtem užití předchozích dvou pravidel.*

Definice. *Funkci* $v : P \rightarrow \{0,1\}$, *kde* P *je množina prvotních formulí, nazveme pravdivostní ohodnocení, případně valuace. Definujeme rozšíření pravdivostního ohodnocení jako funkci* $\overline{v} : F \rightarrow \{0,1\}$, *kde* F *značí množinu formulí jazyka* L_P, *takto:*

$$\overline{v}(A) = v(A) \qquad \text{je-li } A \text{ prvotní formule}$$
$$\overline{v}(\neg A) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \overline{v}(A) = 1 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$\overline{v}(A\&B) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } \overline{v}(A) = \overline{v}(B) = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$\overline{v}(A \vee B) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \overline{v}(A) = \overline{v}(B) = 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$\overline{v}(A \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \overline{v}(A) = 1 \text{ a } \overline{v}(B) = 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$\overline{v}(A \leftrightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } \overline{v}(A) = \overline{v}(B) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Říkáme, že $\overline{v}(A)$ *je pravdivostní hodnota formule* A *při ohodnocení* v. *Formule* A *je pravdivá při ohodnocení* v, *je-li* $\overline{v}(A) = 1$, *jinak je nepravdivá.*

Definice.

- *Říkáme, že formule* A *je tautologie, je-li pravdivá při každém ohodnocení prvotních formulí.*
- *Formule* A *je splnitelná, jestliže existuje ohodnocení* v *takové, že* $\overline{v}(A) = 1$, *ohodnocení* v *nazveme modelem formule* A.
- *Množina formulí* T *je splnitelná, jestliže existuje ohodnocení* v *takové, že každá formule z* T *je pravdivá při ohodnocení* v, *které v takovém případě nazveme modelem množiny formulí* T.
- *Říkáme, že formule* A *je tautologickým důsledkem množiny formulí* T, *a píšeme* $T \models A$, *je-li formule* A *pravdivá při každém ohodnocení, které je modelem množiny* T. *Je-li* T *prázdná, píšeme* $\models A$.

Predikátová logika

Definice. (Jazyk prvního řádu) *Jazyk prvního řádu obsahuje:*

- *neomezeně mnoho symbolů pro proměnné pro individua:* x, y, x_1, ...
- *symboly pro logické spojky:* $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- *symboly pro obecný a existenční kvantifikátor:* $\forall$, $\exists$
- *symboly pro predikáty:* p, q, ... *S každým predikátem je dáno přirozené číslo* ≥ 1 *vyjadřující jeho četnost. Je-li v jazyce i symbol* $=$, *mluvíme o jazyku s rovností.*
- *symboly pro funkce:* f, g, f_1, ... *Ke každému symbolu je dána četnost* ≥ 0.
- *pomocné symboly pro závorky.*

Definice. (Term)

- *Každá proměnná je term.*
- *Jsou-li* $t_1, \ldots, t_n$ *termy a* f n*-ární funkční symbol, pak* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *je term.*
- *Každý term vznikne konečným počtem použití předchozích dvou pravidel.*

Definice. (formule)

- *Je-li* p n*-ární predikátový symbol a* $t_1, \ldots, t_n$ *jsou termy, pak* $p(t_1, \ldots, t_n)$ *je atomická formule.*
- *Jsou-li* A, B *formule, pak také* $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \& B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ *jsou formule.*
- *Je-li* x *proměnná a* A *formule, pak* $(\forall x)A$ *a* $(\exists x)A$ *jsou formule.*
- *Každá formule vznikne konečným počtem použití předchozích dvou pravidel.*

Definice.

- *Říkáme, že proměnná* x *má výskyt* ve formuli A, *je-li znak* x *součástí* A.
- *Říkáme, že daný výskyt proměnné* x *v* A *je vázaný, je-li součástí nějaké podformule* $(\exists x)B$ *nebo* $(\forall x)B$ *formule* A. *Jinak říkáme, že daný výskyt je volný. Říkáme též, že* x *je vázaná (volná) ve formuli* A.
- *Říkáme, že* A *je otevřená, neobsahuje-li žádné vázané proměnné, a uzavřená, neobsahuje-li žádné otevřené proměnné.*

Definice. (Realizace jazyka) *Nechť* L *je jazyk prvního řádu. Relační struktura* $\mathfrak{M}$, *která obsahuje*

- *neprázdnou množinu* M *(univerzum),*
- *zobrazení* $f_{\mathfrak{M}} : M^n \rightarrow M$ *pro libovolný* n*-ární funkční symbol* f *jazyka* L,

• *n-ární relaci $p_{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$ pro libovolný n-ární predikátový symbol p jazyka L kromě symbolu pro rovnost (ten se vždy interpretuje jako test na identitu dvou prvků),*

se nazývá realizace jazyka L. Prvky univerza nazýváme individua, zobrazení $f_{\mathfrak{M}}$ příslušné symbolu f realizace funkčního symbolu f, analogicky pro $p_{\mathfrak{M}}$ a p.

Každého nyní jistě snadno napadne, jak se budou realizovat termy a jak to bude s pravdivostí a splňováním formulí. Do termů nám ohodnocovací funkce za proměnné dosadí individua a funkce, které jsou realizacemi funkčních symbolů, potom vyhodnotí své argumenty, až dostaneme výsledné individuum jako realizaci termu. U formule se napřed vyhodnotí všechny termy, na ně se pak „vypustí“ realizace predikátových symbolů a ty nám dají hodnoty 0 nebo 1. S těmi už můžeme zacházet stejně jako ve výrokové logice, přibyly nám ale kvantifikátory, ty ošetříme v následující definici:

Definice. *Řekneme, že formule B tvaru $(\forall x)A$ je splněna v realizaci $\mathfrak{M}$, je-li pro libovolné individuum $m \in M$ splněna formule A, kde všechny volné výskyty proměnné x ohodnotíme individuem m. Píšeme $\mathfrak{M} \models B$. Je-li B tvaru $(\exists x)B$, řekneme, že je splněna v realizaci $\mathfrak{M}$, existuje-li individuum $m \in M$ takové, že je splněna formule A, kde všechny volné výskyty proměnné x ohodnotíme individuem m.*

Definice. (Substituce termu za proměnné) *Jsou-li $x_1, \dots, x_n$ různé proměnné, $t, t_1, \dots, t_n$ termy, pak výrazem $t_{x_1,\dots,x_n}[t_1, \dots, t_n]$ označíme term, který vznikne z termu t nahrazením každého volného výskytu x_i termem t_i, $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Definice. (Substituovatelnost termu do formule) *Říkáme, že term t je substituovatelný za x do formule A, jestliže pro každou proměnnou y obsaženou v t žádná podformule tvaru $(\forall y)B$, $(\exists x)B$ neobsahuje (z hlediska A) volný výskyt formule x.*

Definice. (Formální systém predikátové logiky) *Formální systém predikátové logiky obsahuje:*

• *Jazyk L predikátové logiky*

• *Axiomy: pro libovolné formule A, B, C, proměnnou x a term t jazyka L, kde t je substituovatelný za x do A a x nemá volný výskyt v B, je každá formule tvaru*

$$A \to (B \to A) \tag{A1}$$

$$(A \to (B \to C)) \to [(A \to B) \to (A \to C)] \tag{A2}$$

$$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B) \tag{A3}$$

$$(\forall x)A \to A_x[t] \qquad (\textit{ schéma specifikace })$$

$$(\forall x)(B \to C) \to (B \to (\forall x)C) \qquad (\textit{ schéma přeskoku })$$

axiomem predikátové logiky.

- *Odvozovací pravidlo modus ponens:* z formulí A a $A \to B$ odvoď formuli B.
- *Odvozovací pravidlo generalizace:* pro libovolnou proměnnou x z formule A odvoď formuli $(\forall x)A$.

Definice. (Důkaz) *Říkáme, že konečná posloupnost formulí* $A_1, \ldots, A_n$ *je důkazem* formule A, jestliže A_n je formule A a pro libovolné $i \in \{1,\ldots,n\}$ je formule A_i buď axiom, nebo je odvozena z předchozích formulí pravidlem modus ponens nebo pravidlem generalizace.
Nechť T *je množina formulí. Posloupnost formulí* $A_1, \ldots, A_n$ *je důkaz formule* A *z množiny předpokladů* T, jestliže A_n je formule A a pro libovolné $i \in \{1,\ldots,n\}$ je formule A_i buď axiom, nebo formule z T, nebo je odvozena z předchozích formulí pravidlem modus ponens nebo pravidlem generalizace.

Definice. (Bezespornost formálního systému) *Říkáme, že formální systém je sporný (inkonzistentní), je-li každá jeho formule dokazatelná. V opačném případě říkáme, že je bezesporný (konzistentní).*
Říkáme, že množina formulí T *nějakého formálního systému je sporná, je-li z* T *dokazatelná každá formule tohoto formálního systému. Jinak říkáme, že je bezesporná.*

Definice. *Je-li* L *jazyk prvního řádu a* T *množina formulí jazyka* L*, říkáme, že* T *je teorie prvního řádu s jazykem* L*. Formulím z* T *říkáme speciální axiomy teorie* T*.*
Je-li $\mathfrak{M}$ *realizace jazyka* L *taková, že v ní je splněn každý speciální axiom* T*, říkáme, že* $\mathfrak{M}$ *je modelem teorie* T*, a píšeme* $\mathfrak{M} \models T$*.*
Říkáme, že formule A *je sémantickým důsledkem teorie* T*, je-li* A *splněna v každém modelu* T*. Píšeme* $T \models A$*.*
Říkáme, že teorie T *s jazykem* L *je úplná, jestliže je bezesporná a pro každou uzavřenou formuli* A *jazyka* L *je jedna z formulí* A *a* $\neg A$ *dokazatelná v* T*.*

Věta. (O úplnosti, Gödel) *Nechť* T *je teorie s jazykem* L *a* A *formule* L*. Pak platí:*
(i) $T \vdash A$ *právě když* $T \models A$*,*
(ii) T *je bezesporná, právě když má nějaký model.*

Je zajisté pozoruhodné, že Gödel dokázal větu o úplnosti i věty o neúplnosti (nebojte se, nejsou spolu ve sporu). Zatímco tou první z nich zakončíme naše úvodní povídání o logice, důkaz zbylých dvou bude hlavní náplní pokračování této přednášky.

Literatura

- *Petr Štěpánek*: Predikátová logika, v elektronické podobě k dispozici na `http://ktiml.mff.cuni.cz/downloads/Pl_ps.zip`.