Úvod do fraktálů a chaosu

Petr Šimeček

Fraktály jsou „pěkné obrázky", jež plní síně světových galerií. Cílem této přednášky bude ukázat, že fraktály jsou i něco více. Kladen bude důraz pochopitelnost a co nejširší záběr, byť na úkor preciznosti.

Historie

Počátky geometrie sahají až do staré Mezopotámie a Egypta.

- geometrie = *geos* (země) + *metron* (míra) = zeměměřičství
- vyměřování pozemků = vytváření nových umělých tvarů

Ve 2. polovině 19. století se pod vlivem precizace matematiky objevují různé „patogenní" struktury:

(1) Weistrassova funkce – spojitá funkce nemající v žádném bodě derivaci
(2) Cantorovo diskontinuum – množina „délky" 0 obsahující nespočetně mnoho bodů
(3) Kochova vločka – útvar konečného obsahu a nekonečného obvodu

Samopodobnost

Definice. *Útvar nazveme samopodobným, když jej můžeme rozdělit na konečný počet částí „podobajících" se původnímu tvaru (např. trojúhelník, čtverec, Cantorovo diskontinuum, Kochova vločka).*

Definice. *Multi Reduction Copy Machine (MRCM) – stroj, který vstupní obrázek „překreslí" na konečný počet jemu „podobných" a tyto vezme opět jako vstup (např. kamera zaměřená na televizi, která vysílá to, co kamera snímá).*

Poznámka. Rozlišujeme, zda MRCM původní obrázek „maže" nebo „kreslí přes něj".

Poznámka. Pokud MRCM původní obrázek maže, nezávisí u zmenšující se velikosti obrázků vůbec na původní podobě obrázku, ale pouze na způsobu „překreslování".

Příklad. Hádejte, co nakreslí následující algoritmus:

```
x=0, y=0
opakuj do nekonečna
{
```

```
vyděl x dvěma
vyděl y dvěma

zvol náhodně jednu z následujících možností:
1) x = x + 100
2) y = y + 100, x = x + 50
3) nedělej nic

nakresli bod [x,y]
}
```

Příklad. Hádejte, jak bude vypadat Pascalův trojúhelník, když v něm obarvíme všechna lichá čísla.

Dimenze

Definice. *Fraktál je množina bodů s různou topologickou a Hausdorffovskou dimenzí.*

Definice. (Topologická dimenze - různé definice)

(1) *Počet os souřadnic*
(2) *Počet souřadnic nutných k určení polohy bodu*
(3) *Rekurentně:* $\dim_t(bod) = 0$, $\dim_t(M) = 1+$ *minimum dimenzí množin bodů, jež M rozdělují na dvě nesouvislé části*
(4) *Rekurentně:* $\dim_t(bod) = 0$, $(\forall m \in M) f(m, \varepsilon) = \dim_t\{x : |mx| = \varepsilon\}$,

$$\dim_t(M) = \max_{m \in M} \limsup_{\varepsilon \to 0} f(m, \varepsilon).$$

Definice. (Hausdorfovská dimenze - různé definice)

(1) *M samopodobná, N počet částí n-krát menších:* $\dim_h(M) = \log_n N$.
(2) *Rovinu si rozdělíme na čverečky o straně λ; počet čtverců, jež mají s množinou M neprázdný průnik, označíme N. Platí $N = A \cdot \lambda^{-D}$, kde $A \in \mathbb{R}$, $D = \dim_h(M)$.*
(3) *M množina bodů, k-dimenzionální Haufdorffovou mírou M rozumíme*

$$\kappa^k = \sup_{\delta > 0} \inf \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(U_n))^k,$$

kde U_n otevřené, $\mathrm{diam}(U_n) < \delta$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = M$.

Juliánovy množiny

Definice. (Mandelbrotova množina) *Pro každý bod C Gaussovy roviny mějme posloupnost Z_C takovou, že $Z_C(0) = 0, Z_C(n+1) = Z_C(n)^2 + C$. Bod C nepatří do Mandelbrotovy množiny $\Leftrightarrow Z_C \to \infty$.*

Definice. (Julianovy množiny) *Pro každý bod C Gausovy roviny mějme posloupnost Z_C takovou, že $Z_C(0) = K$ $(K \in \mathbb{C})$, $Z_C(n+1) = Z_C(n)^2 + C$. Bod C nepatří do Julianovy množiny $\Leftrightarrow Z_C \to \infty$.*

Dynamické systémy

Příklad. Zkoumáme limitu posloupnosti zadané $p_1 = 0$, $p_{n+1} = r \cdot p_n(1 - p_n)$ v závislosti na parametru r. Libovolně malá odchylka v odhadu r způsobí „libovolně“ velkou změnu výsledku.

Fraktály v praxi

Fraktály rozhodně nejsou nějaký nereálný model! V přírodě je spousta příkladů fraktálů — mořské pobřeží, hranice států, břehy řek, kapradiny, květák, … „Fraktálovité rysy“ mají atmosférické děje, turbulence v kapalinách, biologické systémy, vývoj cen akcií a mnoho dalších jevů.