Úlohy z planimetrie

Háňa Bendová

Obsahem této přednášky jsou zajímavé příkládky z planimetrie (tj. rovinné geometrie), zejména na použití shodných, případně podobných zobrazení a středových a obvodových úhlů. Tedy ta nejzákladnější geometrie, kterou vám servírují v PraSátku i v olympiádách. U takových příkladů si člověk vždycky chvíli kreslí, sem tam někde přidá nějakou čáru, otočí nějaký trojúhelník, označí všechny možné i nemožné úhly všemi možnými i nemožnými značkami a sedí a kouká do toho a kouká a kouká ... a ještě přikreslí čáru ... a ejhle, řešení je na světě! A jak se takové úlohy naučit řešit? Chce to jen trochu cviku. ;)

Věta. (O středovém a obvodovém úhlu) *Nechť k je kružnice se středem S a AB její tětiva. Pak velikost úhlu AOB se nemění, probíhá-li O některý z oblouků kružnice k určených tětivou AB. Navíc $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle ASB|/2$, kde úhlem ASB rozumíme vnější úhel čtyřúhelníku $AOBS$.*

Příklady

Příklad 1. Mějme čtverec $ABCD$. Označme M střed strany AB, N střed strany BC a P průsečík úseček MC a ND. Dokažte, že platí $|AP| = |AB|$.

Příklad 2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, v jehož vnější oblasti uvnitř úhlu BAC je zvolen bod M tak, že úhly AMB a AMC mají velikosti 40° a 30°. Určete velikost úhlu ACM.

Příklad 3. Je dán čtverec $ABCD$ a uvnitř něho bod P takový, že $|PA| = 2, |PB| = 3, |PD| = 1$. Určete velikost úhlu APD.

Příklad 4. V rovině máme dány body A, B, C, které neleží na přímce. Najděte bod X této roviny takový, aby součet $|AX| + |AY| + |AZ|$ byl minimální.

Příklad 5. Ve čtverci $ABCD$ jsou na stranách BC a CD zvoleny body L a M tak, že úhel LAM má velikost 45°. Úhlopříčka BD protíná přímku AL v bodě K a přímku AM v bodě N. Dokažte, že body K, L, C, M a N leží na kružnici.

Příklad 6. Na straně CD čtverce $ABCD$ je zvolen libovolný bod E a dále jsou sestrojeny body F, G tak, že $DEFG$ je čtverec sousedící se čtvercem $ABCD$ pouze hranou DE. Dokažte, že pro jakoukoli polohu bodu E na úsečce CD je odchylka přímek AE a BF rovna 45° a poměr $|BF| : |AE| = \sqrt{2} : 1$.

Příklad 7. Obdélník $ABCD$ je rozložen na tři shodné čtverce $AEHD$, $EFGH$ a $FBCG$. Určete součet $|\sphericalangle EAH| + |\sphericalangle FAG| + |\sphericalangle BAC|$.

Příklad 8. Jsou dány rovnoběžky a, b a přímka p, která je na ně kolmá a protíná je v bodech A a B. Na přímce p vně úsečky AB je dán bod P. Sestrojte přímku procházející bodem P tak, aby její průsečíky X s přímkou a a Y s přímkou b spolu se středem S úsečky AB určovaly pravý úhel XSY.

Příklad 9. Zkonstruuj čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho stran a délka úsečky XY, kde X je střed strany AB a Y střed strany CD.

Literatura

Jako zdroj vědění a hlavně příkladů mi posloužila zejména kniha *Středoškolská matematika pod mikroskopem*, jejímž autorem je jeden z mých nejoblíbenějších pedagogů na matfyzu – Emil Calda, dále sborníčkový příspěvek *Geometrické úlohy* od Filipa Jaroše (Rapotín, 2003) a v neposlední řadě známá kniha Arthura Engela *Problem-Solving Strategies*.