# Úhlení

Verča Hladíková

Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní metody řešení geometrických úloh. Uvádí jejich orientované verze, které nám umožňují vyhnout se rozebírání různých konfigurací bodů v řešení. Dále obsahuje úlohy vhodné k procvičení této techniky.

**Věta.** (Charakterizace tětivových čtyřúhelníků) *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *$ABCD$ je tětivový (má kružnici opsanou),*
(ii) *$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ (shodnost obvodových úhlů),*
(iii) *$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180^\circ$.*

**Věta.** (O středovém a obvodovém úhlu) *Body $A$, $B$, $C$ leží na kružnici se středem $S$. Pak*

$$2|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ASB|.$$

**Příklad.** (Lemma o dvou kružnicích) Jsou dány kružnice $k$, $l$, které se protínají v bodech $A$, $B$. Na kružnici $k$ zvolme bod $X$ a sestrojme $Y$ jako průsečík přímky $XB$ s kružnicí $l$ (pokud $X = B$, pak přímkou $XB$ myslíme tečnu ke kružnici $k$). Ukažte, že nezávisle na volbě bodu $X$ má trojúhelník $AXY$ vždy stejné vnitřní úhly.

**Věta.** (O úsekovém úhlu) *Nechť $ABC$ je trojúhelník vepsaný do kružnice $k$ a $p$ přímka procházející bodem $A$. Na přímce $p$ zvolme bod $X$ tak, aby úhel $XAB$ byl ostrý nebo pravý. Pak platí, že $p$ je tečna kružnice $k$, právě když $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle ACB|$.*

**Definice.** *Obloukový úhel* $|\sphericalangle \overrightarrow{AB}|$ dvou bodů $A$, $B$ ležících na kružnici $k$ je roven $|\sphericalangle AXB|$ pro libovolný bod $X$ ležící na opačném oblouku $\overrightarrow{AB}$.

**Příklad.** Nechť je $ABCD$ obdélník a $P$ bod na jeho opsané kružnici různý od jeho vrcholů. Nechť $W$, $X$, $Y$ a $Z$ jsou kolmé projekce bodu P na strany $AB$, $BC$, $CD$ a $DA$. Ukažte, že jeden z bodů $W$, $X$, $Y$ a $Z$ je ortocentrum trojúhelníka tvořeného zbylými body.

**Věta.** (O obloukových úhlech) *Nechť $k$ je kružnice, $A, B, C, D$ libovolné body na ní a $X$ průsečík $AD$ a $BC$. Pokud*

(i) *$X$ leží uvnitř kružnice $k$, pak $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|$,*
(ii) *$X$ leží na polopřímce $DA$ mimo kružnici $k$, pak $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{CD}| - |\overrightarrow{AB}|$,*

(iii) *$X$ leží na polopřímce $AD$ mimo kružnici $k$, pak* $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{CD}|$.

**Definice.** *Orientovaným úhlem* $\sphericalangle(p, q)$ dvou přímek $p, q$ (v tomto pořadí) nazveme úhel, o který je třeba otočit $p$ (v kladném směru – tedy proti směru hodinových ručiček), aby otočená $p$ byla rovnoběžná s $q$. Dovolujeme přitom také otáčení o nulový úhel (identita) a o záporný úhel (o absolutní hodnotu tohoto úhlu v záporném směru).

**Lemma.** (Základní vlastnosti orientovaných úhlů) *Pro přímky $p$ a $q$ platí*

(i) $\sphericalangle(p, p) = 0$,
(ii) $\sphericalangle(p, q) = -\sphericalangle(q, p)$,
(iii) $\sphericalangle(p, q) + \sphericalangle(q, r) = \sphericalangle(p, r)$,
(iv) $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p, q) + k \cdot 180°$, *kde $k$ je celé číslo,*
(v) *pokud body $A, B$ leží na jedné kružnici se středem $S$, pak* $\sphericalangle(AS, AB) = \sphericalangle(BA, BS)$*( opačná implikace platí za předpokladu, že tento úhel není nulový).*

*Můžeme tedy předpokládat, že* $\sphericalangle(p, q) \in \langle 0°, 180°)$.

**Lemma.** *Pokud $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ jsou vnitřní (neorientované) úhly trojúhelníku $ABC$, potom nastává jedna ze dvou možností:*

(i) $\sphericalangle(CA, AB) = \alpha$, $\sphericalangle(AB, BC) = \beta$, $\sphericalangle(BC, CA) = \gamma$;
(ii) $-\sphericalangle(CA, AB) = \alpha$, $-\sphericalangle(AB, BC) = \beta$, $-\sphericalangle(BC, CA) = \gamma$.

**Důsledek.** (součet úhlů v trojúhelníku) *Buďte $A$, $B$, $C$ tři různé body v rovině. Pak*

(i) $\sphericalangle(AB, AC) + \sphericalangle(BC, BA) + \sphericalangle(CA, CB) = 180°$,
(ii) $\sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle(BA, BC) + \sphericalangle(CB, CA)$.

**Věta.** (O obvodovém a středovém úhlu pro orientované úhly) *Nechť body $A$, $B$, $C$, $X$ leží na jedné kružnici se středem $X$ pak*

(i) $\sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle(AX, XC)$.
(ii) $2 \cdot \sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle(SA, SC)$.

**Věta.** (O úsekovém úhlu pro orientované úhly) *Přímka $BX$ je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku $ABC$ právě tehdy, když* $\sphericalangle(AC, CB) = \sphericalangle(AB, BC)$.

**Věta.** (o tětivových čtyřúhelnících) *V rovině jsou dány 4 různé body $A$, $B$, $C$, $D$. Tyto body leží na jedné kružnici, právě když platí*

$$\sphericalangle(AC, AD) = \sphericalangle(CB, BD).$$

**Příklad.** (Folklor) Jsou dány kružnice $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ tak, že $k_i$ a $k_{i+1}$ a protínají v bodech $A_i$ a $B_i$ ($k_5 = k_1$). Ukažte, že pokud je $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ leží na jedné kružnici, pak i $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ leží na jedné kružnici.

**Definice.** *Obloukový orientovaný úhel* $|\sphericalangle\overrightarrow{AB}|$ oblouku $AB$ kružnice $k$ v kladném směru je roven $|\sphericalangle(AX, BX)|$ pro libovolný bod $X$ leží na oblouku $\overrightarrow{BA}$.

**Věta.** (O orientovaných obloukových úhlech) *Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník a $X$ průsečík přímek $AD$ a $BC$. Pak* $|\sphericalangle(AX, BX)| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|$.

**Úloha 1.** Přímky $p$, $q$ se protínají v bodě $S$. Dále jsou dány body $A$, $B$ takové, že $\sphericalangle(p, SA) = \sphericalangle(SB, q)$. Paty kolmic z bodů $A$, $B$ na přímku $p$ označme postupně $A_p$, $B_p$ a obdobně paty kolmic na přímku $q$ jako $A_q$, $B_q$. Dokažte, že body $A_p$, $A_q$, $B_p$, $B_q$ leží na jedné kružnici.

**Úloha 2.** (Miquelova věta) Je dán trojúhelník $ABC$. Na přímkách $BC$, $CA$, $AB$ leží postupně body $X$, $Y$, $Z$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $AYZ$, $XBZ$ a $XYC$ prochází jedním bodem.

**Úloha 3.** (Lemma o spirální podobnosti) Kružnice $k_1$ a $k_2$ se protínají v bodech $X$ a $Y$. Přímka procházející $X$ protíná $k_1$ a $k_2$ podruhé v $A$ a $B$. Druhá přímka procházející $X$ protíná $k_1$ a $k_2$ podruhé v $C$ a $D$. Ukažte, že jsou si trojúhelníky $AYC$, $BYD$ podobné.

**Úloha 4.** Je dán rovnoramenný trojúhelník $SAC$ se základnou $AC$. Na přímkách $SA$, $SC$ leží postupně body $X$, $Z$ takové, že přímka $XZ$ je rovnoběžná s přímkou $AC$. Buď $O$ střed kružnice opsané trojúhelníku $AZS$. Ukažte, že přímky $XC$ a $SO$ jsou na sebe kolmé.

**Úloha 5.** (Švrčkův bod) V trojúhelníku $ABC$ označme $\check{S}$ druhý průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu $A$ s kružnicí opsanou $ABC$. Dále označme $\check{S}'$ druhý průsečík osy vnějšího úhlu u vrcholu $A$ s kružnicí opsanou. Nakonec označme středy kružnic připsaných ke stranám $BC$, $CA$, $AB$ postupně $I_a$, $I_b$, $I_c$ a střed kružnice vepsané $I$. Dokažte

(i) $|\check{S}B| = |\check{S}C| = |\check{S}I| = |\check{S}I_a|$,
(ii) $|\check{S}'B| = |\check{S}'C| = |\check{S}'I_c| = |\check{S}'I_b|$.

**Úloha 6.** Buď $H$ průsečík výšek trojúhelníku $ABC$ a $H'$ obraz $H$ v osové souměrnosti podle přímky $AB$. Dokažte, že $H'$ leží na kružnici opsané $ABC$.

**Úloha 7.** Skrz průsečík výšek $H$ trojúhelníku $ABC$ vedeme přímku $p$. Označme $p_a$, $p_b$ osové obrazy přímky $p$ podle přímek $BC$, $CA$. Dokažte, že se přímky $p_a$, $p_b$ protínají na kružnici opsané.

**Úloha 8.** (Simsonova přímka) Buď $P$ bod na kružnici opsané trojúhelníka $ABC$. Dokažte, že paty kolmic z $P$ na strany trojúhelníka (3 body) leží v jedné přímce.

Přímka z předchozí úlohy se nazývá Simsonova přímka trojúhelníku $ABC$ vzhledem k bodu $P$.

**Úloha 9.** Jsou dány body $A, B, C, P$ na jedné kružnici. Kružnice $k$ se dotýká přímky $PA$ v bodě $A$ a prochází bodem $B$. Druhý průsečík této kružnice s přímkou $AC$ označme $X$. Dokažte, že přímka $BX$ je kolmá na Simsonovu přímku trojúhelníku $ABC$ vzhledem k bodu $P$.

**Úloha 10.** Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Nechť $D$, $E$, $F$ paty výšek z vrcholů $A$, $B$, $C$. Jeden z průsečíků $EF$ s kružnicí opsanou troúhelníku $ABC$ označme $P$. Průsečík přímek $BP$ a $DF$ označme $Q$. Ukažte, že $AP = AQ$.
(IMO Shortlist 2010)

**Úloha 11.** Na stranách trojúhelníka $ABC$ leží postupně body $P$, $Q$, $R$. Nechť $k_A$, $k_B$ a $k_C$ jsou kružnice opsané trojúhelníkům $AQR$, $BRP$, $CPQ$. Jsou-li $X$, $Y$ a $Z$ druhé průsečíky AP s $k_A$, $k_B$ a $k_C$, pak ukažte, že $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$. (USAMO 2013)

**Úloha 12.** Nechť $MN$ je přímka rovnoběžná se stranou $BC$ trojúhelníku $ABC$, tak že $M \in AB$ a $N \in AC$. Přímky $BN$ a $CM$ se protínají v $P$. Kružnice opsané trojúhelníkům $BMP$ a $CNP$ se podruhé protínají v $Q$. Ukažte, že $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAP|$.
(Balkán 2009)

**Úloha 13.** Kružnice $k_1$ a $k_2$ se protínají v bodech $P$ a $Q$. Nechť $AC$ a $BD$ jsou takové tětivy kružnic $k_1$ a $k_2$, že přímky $AB$ a $CD$ se protínají v $P$. Přímky $BD$ a $AC$ se protínají v $X$. $Y$ je bod na $k_1$ takový, že $PY \parallel BD$. $Z$ je bod na $k_2$ takový, že $PZ \parallel AC$. Ukažte, že body $Q$, $X$, $Y$, $Z$ leží na jedné přímce. (USA TST 2007)

**Úloha 14.** Je dán trojúhelník $ABC$ s kružnicí opsanou $k$. Nechť $l$ je libovolná přímka v rovině a $l_A$, $l_B$, $l_C$ obrazy $l$ podle úseček $BC$, $CA$,$AB$. Nechť $A'B'C'$ je trojúhelník určený přímkami $l_A$, $l_B$, $l_C$.

(i) Ukažte, že střed kružnice opsaný trojúhelníku $A'B'C'$ leží na $k$.
(Irán 1995)

(ii) Předpokládejme, že $l$ je tečna $k$. Ukažte, že kružnice opsaná $A'B'C'$ se dotýká kružnice $k$. (IMO 2011/6)

## Návody

**1.** Najdi tětivové čtyřúhelníky.

**2.** Najdi obvodové úhly a využij součet úhlů v trojúhelníku.

**3.** Využij velikost vedlejšího úhlu v tětivovým čtyřúhelníku.

**4.** Použij středové a obvodové úhly.

**5.** (i) Osy úhlů jsou na sebe kolmé.
(ii) Využij obvodové úhly.

**6.** Vyúhli.

**7.** Použij obloukové úhly.

**8.** Využij velikost vedlejších úhlů v tětivových čtyřúhelnících.

**9.** Použij větu o úsekových úhlech.

**10.** Ukaž, že APFQ je tětivový čtyřúhelník.

**11.** Použij lemma o spirální podobnosti.

**12.** Najdi tětivové čtyřúhelníky a použij spirální podobnost.

**13.** Ukaž, že XQAC je tětivový čtyřúhelník.

## Literatura a zdroje

[1] Martin Tancer: *Orientované úhly*, Prudka, 2002.
[2] Mirek Olšák: *Orientované úhlení*, Domašov, 2012.
[3] Michal 'Kenny' Rolínek: *Angle chasing*, Dobrá voda, 2010.
[4] Titu Andreescu a Razvan Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2011.
[5] Evan Chan: *http://web.evanchen.cc/handouts/Directed-Angles/Directed-Angles.pdf*