Turnaje a orientované grafy

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní vlastností úplných orientovaných grafů (neboli turnajů) a nabízí řadu úloh na turnaje a následně i na orientované grafy vůbec. Zahrnuto je jen nutné minimum definicí. Ke každému příkladu je na konci uveden krátký, ale výstižný návod.

Teorie grafů je široké téma se širokými aplikacemi. Abychom si trochu ulehčili život, budeme se v této přednášce zabývat pouze orientovanými grafy, a po většinu času dokonce jen jednou konkrétní třídou orientovaných grafů – takzvanými *turnaji*. Nemůžeme se ovšem ani začít bavit, dokud si neujasníme alespoň ty nejzákladnější pojmy.

Trocha definic

Definice. Orientovaný graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina a E je množina uspořádaných dvoubodových podmnožin (hran) množiny V. Jinak řečeno V jsou puntíky a E šipky mezi nimi. Je-li $e = (u, v)$ šipka v grafu, píšeme $(u, v) \in E$, kde $u, v \in V$, nebo $u > v$.

Poznámka. Ačkoliv to z definice přímo nevyplývá, my se budeme zabývat pouze takovými orientovanými grafy, ve kterých mezi každou dvojicí $u, v \in V$ vede šipka nejvýše jedním směrem. Také budeme předpokládat, že šipky nespojují vrchol se sebou samým (tj. netvoří *smyčky*).

Definice. Kladným okolím bodu u nazveme množinu těch bodů v, pro které existuje šipka (u, v). Značíme $N^+(u) = \{v; (u, v) \in E\}$. Analogicky definujeme záporné okolí bodu u jako $N^-(u) = \{v; (v, u) \in E\}$.

Vstupní stupeň $\deg^-(u)$ nebo též $\mathrm{in}(u)$ vrcholu u definujeme jako $\deg^-(u) = |N^-(u)|$. Číslo $\mathrm{in}(u)$ tedy počítá šipky, které vedou do u. Analogicky $\deg^+(u) = \mathrm{out}(u) = |N^+(u)|$ značí výstupní stupeň vrcholu u a počítá šipky z u vycházející. Vrcholu v, pro který platí $\mathrm{in}(v) = 0$, budeme říkat *hrubák*. Vrcholu w, pro který platí $\mathrm{out}(w) = 0$, budeme říkat *lama*.

Definice. Cesta je posloupnost po dvou různých vrcholů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ pro kterou $(u_i, u_{i+1}) \in E, \forall i = 1, 2, \ldots, n-1$. Cyklus je cesta sjednocená s hranou (u_n, u_1).

Definice. Řekneme, že graf G je *turnaj*, pokud pro každou dvojici $u, v \in V, u \neq v$ je buď $(u, v) \in E$, nebo $(v, u) \in E$. Graf G je tedy turnaj, pokud mezi každými dvěma jeho různými vrcholy vede šipka.

Klíčová slova. teorie grafů, orientované grafy, turnaje

Turnaje

Úplným orientovaným grafům se říká turnaje, protože si je můžeme představit jako znázornění výsledku soutěže, ve které hrál každý hráč s každým právě jednou a žádná hra neskončila remízou. O turnajích můžeme z fleku pronést řadu zajímavých tvrzení. Při důkazech těchto tvrzení budeme s výhodou používat matematickou indukci, extremální princip (podíváme se na *nejdelší* cestu v grafu, *nejkratší* kružnici, …) či počítání dvěma způsoby a samozřejmě budeme celou dobu bezostyšně využívat také toho, že každé dva vrcholy jsou spojeny šipkou v nějakém směru.

Tvrzení 1. *Pokud turnaj neobsahuje lamu, pak v něm existuje trojcyklus.*

Příklad 2. Řekneme, že hráč v je *polohrubák* v grafu $G = (V, E)$, pokud se z něj ke každému dalšímu hráči dá dostat pomocí nejvýše dvou šipek (píšeme $N^{++}(v) = V \setminus \{v\}$). Ukažte, že pokud v turnaji T neexistuje hrubák, pak v něm existují alespoň dva polohrubáci. Musí nutně existovat tři?

Příklad 3. Anglické království dříve sestávalo z 1001 měst spojených jednosměrnými cestami. Z každého města vedlo přesně 500 cest a v každém městě přesně 500 cest končilo. Loni se z království vyčlenila nezávislá republika, která obsahuje 668 měst. Ukažte, že se dá dostat z každého města republiky do každého města republiky, aniž by člověk musel republiku opustit. (ARO 2004 10.6)

Příklad 4. Ukažte, že v každém turnaji existuje cesta, která prochází všemi vrcholy.

Příklad 5. Ukažte, že v turnaji n hráčů nastane právě jeden z následujících dvou případů: Buď existuje n-cyklus, nebo můžeme hráče rozdělit do dvou neprázdných skupin tak, že každý hráč z první skupiny porazil každého hráče z druhé skupiny. (KMS 11 2008)

Příklad 6. Dáno $N \geq m \geq 3$ a turnaj N hráčů, ve kterém neexistuje m-cyklus. Ukažte, že můžeme hráče ohodnotit čísly $1, 2, \ldots, N$ tak, že kdykoliv $a \geq b+m-2$, pak hráč ohodnocený číslem a porazil hráče s číslem b. (USA TST 2009)

Příklad 7. Uvědomte si, že v každém orientovaném grafu platí

$$\sum_{v\in V} \mathrm{in}(v) = \sum_{v\in V} \mathrm{out}(v).$$

Ukažte, že v turnajích platí dokonce i

$$\sum_{v\in V} (\mathrm{in}(v))^2 = \sum_{v\in V} (\mathrm{out}(v))^2.$$

(Putnam 1965)

Jak jsme poznali na příkladu s polohrubáky, vyplatí se často vybrat si jednoho účastníka turnaje a zbylé rozdělit podle toho, zda našeho vyvoleného porazili, nebo s ním prohráli. Díky definici turnaje totiž víme, že každý další účastník padne do právě jedné z těchto skupin. Drobné obměny této myšlenky využijeme v následujících dvou příkladech. První z nich je trikový, druhý je těžký.

Příklad 8. Dáno je $N \geq 3$ bodů očíslovaných $1, 2, \ldots N$. Z bodu s menším číslem vede vždy šipka do bodu s větším číslem. Obarvení šipek červenou a modrou barvou nazveme *jednobarevné*, pokud pro libovolnou dvojici různých vrcholů A, B neexistuje zároveň modrá a červená cesta z A do B. V závislosti na N určete počet jednobarevných obarvení. (ARO 2005 11.3)

Příklad 9. Turnaje se účastní 10 rytířů. Víme, že kdykoliv rytíř A porazil rytíře B, pak počet rytířů, kteří porazili A, sečtený s počtem rytířů, které porazil B, dá alespoň 8 (čili $\mathrm{in}(A) + \mathrm{out}(B) \geq 8$, kdykoliv $A > B$). Ukažte, že v celém turnaji existuje právě 40 trojcyklů. (Hong Kong 1994)

Orientované grafy

Turnaj je jen speciální případ orientovaného grafu. Mohli bychom tedy očekávat, že tvrzení, která jsme dokázali pro turnaje, budou (případně v nějaké lehce pozměněné podobě) platit i pro všechny orientované grafy. Tak je tomu bohužel jen velmi zřídka. Uvědomme si totiž, že orientovaných grafů je ve srovnání s turnaji „fakt hodně“. Speciálně mohou být takové grafy nepříjemně „řídké“ (například na každou permutaci se můžeme dívat jako na orientovaný graf). Spíš než přejímání tvrzení proto bude fungovat přejímání metod. Pomocí fint, které jsme si osvojili na úlohách s turnaji, teď budeme zkoušet řešit úlohy na orientované grafy.

Příklad 10. Hrany konvexního mnohostěnu jsou orientované jednosměrnými šipkami tak, že z každého vrcholu vychází a do každého vrcholu vstupuje alespoň jedna šipka. Dokažte, že existuje stěna, na které tvoří šipky cyklus. (KMS gama, Romania TST)

Příklad 11. Devět měst je nějak pospojováno jednosměrnými cestami, přičemž z každého města vedou právě tři cesty. Také víme, že pokud vede přímá cesta z A do B, pak určitě nevede přímá cesta z B do A. Ukažte, že existuje trojice měst, mezi kterými může Artuš jezdit neustále dokola. (Ukrajina)

Příklad 12. Je dán orientovaný bipartitní graf s partitami X, Y. V jednom kroku vybere Amir vrchol a obrátí orientaci všech hran, které vedou z, resp. do tohoto vrcholu. Ukažte, že lze po konečném počtu kroků dosáhnout stavu, kdy pro všechny vrcholy $u \in X$ platí $\mathrm{in}(u) \geq \mathrm{out}(u)$ a pro všechny vrcholy $v \in Y$ platí $\mathrm{in}(v) \leq \mathrm{out}(v)$. (Írán 2002)

Příklad 13. Kolem kulatého stolu sedí N rytířů. Na povel každý z nich na někoho ukáže (nikdo neukazuje na sebe). Dokažte, že umíme rytířům nasadit na hlavy přilbice tří barev tak, že nikdo neukazuje na kolegu se stejně barevnou přilbicí.

Příklad 14. Z každého náměstí ve městě M vedou přesně dvě jednosměrné uličky. Dokažte, že město může být rozděleno na 1014 čtvrtí tak, že uličky vedou vždy jen ze čtvrti do jiné čtvrti a zároveň pokud vede nějaká ulička ze čtvrti c_1 do čtvrti c_2, pak žádná ulička nevede opačně. (ARO 2002)

Příklad 15. Francouzská výzvědná služba vyslala na Kamelot 16 špehů. Každý z nich sleduje některé své kumpány (pokud špeh A sleduje B, pak B nesleduje špeha A). Kterýchkoliv 10 špehů lze očíslovat tak, že první špehuje na druhého, druhý na třetího atd. až desátý na prvního. Dokažte, že lze podobně očíslovat i každých 11 špehů. (Baltic Way 1994, 19/20)

Literatura a zdroje

Příklady jsem čerpal především z národních olympiád (ARO, čili *All-Russian olympiad*), z výběrových soustředění před IMO (TST, čili *team selection test*), ze slovenského semináře KMS a z matematického folklóru.

[1] Internetové fórum Mathlinks, *http://mathlinks.ro*
[2] PraSečí knihovna, *http://mks.mff.cuni.cz/library*
[3] Archiv KMS, *http://kms.sk/archiv*

Návody

Turnaje

Návod 1. Jděte po šipkách a zkracujte.

Návod 2. Uvažte hráče, který vyhrál nejvíce zápasů. Ten je první. Další kandidáty na polohrubáky hledejte ve vhodných podturnajích.

Návod 3. Sporem. Rozdělte republiku na dosažitelnou a nedosažitelnou část a ukažte, že obě obsahují alespoň 335 měst.

Návod 4. Uvažte nejdelší cestu a připojte do ní vrchol, kterým neprochází.

Návod 5. Uvažte nejdelší kružnici.

Návod 6. Opakovaně aplikujte výsledek předchozí úlohy.

Návod 7. Použijte první vztah, nebo počítejte dvěma způsoby počet trojnecyklů.

Návod 8. Otočte červené hrany, nebo odvoďte rekurenci, kterou splňuje posloupnost N!.

Návod 9. Ekvivalentně dokazujte, že $\forall A : \mathrm{in}(A) \in \{4, 5\}$. Předpokládejte opak a důsledným rozebráním odvoďte spor se zadanou podmínkou pro vhodnou hranu.

Orientované grafy

Návod 10. Uvažte kružnici, „uvnitř které“ už žádná není a ukažte, že to musí být stěna.

Návod 11. Dokažte nejdřív existenci města A, že $\mathrm{in}(A) \geq 3$.

Návod 12. Navrhněte algoritmus, který zvětšuje počet „správně směřujících“ hran.

Návod 13. Ukažte existenci rytíře R, že $\mathrm{in}(R) \leq 1$ a postupujte indukcí.

Návod 14. V prvním kroku obarvěte 2-okolí pomocí 13 barev.

Návod 15. Nejdřív odvoďte $\forall A : 7 \leq \mathrm{in}(A) \leq 8, 7 \leq \mathrm{out}(A) \leq 8$.