Turnaje

MARTIN „E.T.“ SÝKORA

ABSTRAKT. Kdo by neměl rád puntíky a čárky? A právě jimi se v příspěvku budeme zabývat. Navíc si ukážeme, že ač to tak na první pohled nevypadá, jejich studium nám může být i k něčemu dobré.

Většina matematických oborů je poměrně rozsáhlá a jejich studium se nedá stihnout ani za pár let, natož na jedné přednášce. Proto si situaci ulehčíme a při studiu „puntíků a čárek“, kterým se odborně říká *grafy*, se zaměříme jen na poměrně úzkou skupinu objektů, tzv. *turnaje*. Že nevíte, o čem to mluvím a jak souvisí puntíky a čárky s turnaji? Na přednášce si ukážeme nejen, že spojitost tam skutečně je, ale dozvíme se o turnajích i spoustu zajímavých věcí, na které bychom bez matematického aparátu nikdy nepřišli.

Abychom si rozuměli

Definice. Konečný orientovaný graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je libovolná neprázdná konečná množina a E libovolná množina uspořádaných dvouprvkových podmnožin množiny V. Prvkům množiny V říkáme *vrcholy* a prvkům množiny E *(orientované) hrany* nebo také *šipky*.

Graf G si můžeme představovat jako množinu puntíků a množinu šipek mezi nimi, přičemž šipku z vrcholu u do v kreslíme právě tehdy, když $(u, v) \in E$.

Poznámka. Definice orientovaného grafu nezakazuje, aby pro nějaká $u, v \in V$ vedla šipka oběma směry. Dokonce může šipka spojovat jeden vrchol se sebou samým (a tak tvořit tzv. *smyčku*). My ale budeme předpokládat, že tyto situace nenastanou.

Představme si, že si v grafu G vybereme vrchol v. Pak mezi zbylými vrcholy existují dvě skupiny, které jsou vzhledem k v „zajímavé“. Zaprvé je to množina vrcholů, do kterých z v vedou hrany. Těmto vrcholům budeme říkat *potomci vrcholu* v a jejich množinu budeme značit $A(v)$. Analogicky budeme množinu všech vrcholů, ze kterých jdou hrany do v, značit symbolem $B(v)$ a budeme jí říkat *rodiče vrcholu* v.

Dále můžeme definovat vstupní stupeň $\mathrm{in}(v)$ vrcholu v jako počet rodičů vrcholu v, tedy $\mathrm{in}(v) = |B(v)|$. Obdobně definujeme výstupní stupeň $\mathrm{out}(v)$ vrcholu v jako počet jeho potomků. Tedy $\mathrm{out}(v) = |A(v)|$.

Definice. *Cesta délky* n v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost n po dvou různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a hran (v_i, v_{i+1}), $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Definice. *Cyklus délky* n, nebo také n-cyklus v grafu $G = (V, E)$, je cesta délky n v grafu G sjednocená s hranou (v_n, v_1).

Definice. Řekneme, že graf G je *turnaj*, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vede šipka. Formálněji řečeno, graf G je turnaj, pokud pro všechny $u, v \in V, u \neq v$, platí, že buď $(u, v) \in E$, nebo $(v, u) \in E$.

Definice. O vrcholu v v turnaji V řekneme, že je *hrubák*, pokud $\mathrm{in}(v) = 0$. Dále o vrcholu $v \in V$ řekneme, že je *šupák*, pokud $\mathrm{out}(v) = 0$. Nakonec o vrcholu řekneme, že je *polohrubák*, pokud $v \cup A(v) \cup \left(\bigcup_{u \in A(v)} A(u)\right) = V$. Hrubákem je tedy vrchol, ze kterého vedou hrany do všech ostatních vrcholů, a tak se z něj dá dostat do všech vrcholů grafu po nejvýše jedné hraně. Do šupáka naopak všechny hrany vedou. Polohrubák je pak vrchol, z nějž se dá dostat do všech vrcholů po nejvýše dvou hranách.

Na zahřátí

Příklad 1. *Neorientovaný graf* definujeme stejně jako graf orientovaný, jen jeho hrany nejsou dvojice uspořádané, ale neuspořádané. Uspořádejte následující množiny podle velikosti: množina všech neorientovaných grafů na daných n vrcholech, množina všech orientovaných grafů na daných n vrcholech, množina všech turnajů na daných n vrcholech.

Příklad 2. Ukažte, že v každém turnaji na $2k$ vrcholech, kde k je nějaké přirozené číslo, je dvojice vrcholů u, v taková, že $\mathrm{in}(u) > \mathrm{in}(v)$.

Příklad 3. Ukažte, že v turnajích (a orientovaných grafech obecně) platí

$$\sum_{v \in V} \mathrm{in}(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{out}(v).$$

Příklad 4. Na planetě DL-27H je nenulový sudý počet portálů, přičemž mezi každými dvěma portály vede teleport právě jedním směrem. Lze se teleportovat tak, že každým teleportem „proletíme“ právě jednou a skončíme u portálu, kde jsme začali?

Příklad 5. Ukažte, že v každém turnaji existuje cesta přes všechny vrcholy.

Příklad 6. Ukažte, že pokud v turnaji není hrubák, pak v něm existuje trojcyklus.

Příklad 7. Ukažte, že pokud v turnaji není hrubák, pak jsou v něm alespoň dva polohrubáci. Musí nutně existovat tři?

Příklad 8. V mezigalaktické lize v páce soutěžilo osm siláků. Každý soutěžil s každým právě jednou a žádný zápas neskončil remízou. Ukažte, že z nich lze vybrat čtyři siláky A, B, C a D takové, že A porazil B, C i D, B porazil C i D a C porazil D. (AoPS)

Pro chytré hlavičky

Definice 9. Řekneme, že orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud pro každé dva jeho vrcholy u, v existuje cesta z u do v i z v do u.

Definice 10. Řekneme, že orientovaný graf je *rozložitelný*, pokud lze jeho vrcholy rozdělit do dvou neprázdných podmnožin A a B takových, že pro všechna $u \in A$ a pro všechna $v \in B$ platí, že $(u, v) \in E$.

Příklad 11. Hvězdná říše se sestává z 1001 planet. Každé dvě planety jsou spojeny jednosměrnými červími děrami, a navíc platí, že z každé planety vychází 500 červích děr a 500 jich v ní končí. 668 planet přitom tvoří autonomní republiku. Ukažte, že se z každé planety republiky dá dostat na každou, aniž by bylo nutné republiku opustit. (ARO 2004 10.6)

Příklad 12. Ukažte, že v turnajích platí

$$\sum_{v \in V} (\mathrm{in}(v))^2 = \sum_{v \in V} (\mathrm{out}(v))^2 .$$

Pozor, v orientovaných grafech toto tvrzení obecně neplatí. (Putnam 1965)

Příklad 13. Ukažte, že pro libovolný turnaj G jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) G je silně souvislý.
(ii) G není rozložitelný.
(iii) V G existuje cyklus přes všechny jeho vrcholy.

(Variace na KMS 11 2008)

Příklad 14. Mějme turnaj G, který obsahuje n-cyklus. Dokažte, že v G existuje $(n-1)$-cyklus. Řešte pro případ $n = 2^{2k+1} - 1$, kde k je nějaké přirozené číslo.

Příklad 15. Mějme turnaj G, který obsahuje n-cyklus. Dokažte, že pro každý vrchol v daného n-cyklu a pro každé $m = 3, 4, \ldots, n$ existuje v G m-cyklus, který obsahuje vrchol v.

Příklad 16. Dokažte, že každý rozložitelný turnaj se dá změnou orientace jedné hrany změnit na graf, který není rozložitelný.
(variace na A Beginner's Guide to Graph Theory 10.2.3)

Příklad 17. Turnaj nazveme *tranzitivní*, pokud pro všechna $u, v, w \in V$ taková, že $(u, v) \in E$ a $(v, w) \in E$, platí $(u, w) \in E$. Dokažte, že turnaj je tranzitivní právě tehdy, když neobsahuje žádný cyklus.

(A Beginner's Guide to Graph Theory 10.2.4)

Příklad 18. Řešte příklad 4 pro případ, že na planetě je lichý počet portálů a z každého portálu vede stejný počet teleportů, jako do něj vchází. Jak lze úloha zobecnit pro obecné orientované grafy?

Příklad 19. PraSátko dostalo jako dárek $n \geq 3$ očíslovaných bodů $1, 2, \ldots, n$ a samým nadšením se jalo mezi body kreslit šipky dvou barev. Přitom výsledek jeho snahy splňoval tato pravidla:

(i) Z každého bodu vedla šipka do každého bodu s větším číslem.
(ii) Pokud z bodu A vedla cesta do B po šipkách jedné barvy, pak mezi stejnými vrcholy nevedla cesta druhé barvy. Kolika způsoby mohlo PraSátko přikreslit všechny šipky?

(ARO 2005 11.3)

Příklad 20. Mějme $n \geq m \geq 3$ a turnaj na n vrcholech, ve kterém není m-cyklus. Dokažte, že lze jeho vrcholy ohodnotit čísly $1, 2, \ldots, n$ tak, že kdykoliv $a \geq b+m-2$, pak vede hrana z vrcholu ohodnoceného číslem a do vrcholu ohodnoceného číslem b.

(USA TST 2009)

Zdroje

Ze zdrojů, které nejsou uvedeny výše u konkrétních úloh, bych rád zmínil příspěvek Pepy Tkadlece s názvem *Turnaje a Orientované grafy*. Z něho jsem výrazně čerpal a jeho autorovi bych tímto rád poděkoval. Zbylé příklady jsou variace na známé věty, tvrzení a problémy, které naleznete v každé druhé publikaci zabývající se teorií grafů.