Tropická geometrie

PEPA SVOBODA

ABSTRAKT. Příspěvek seznamuje s netradiční a poměrně novou oblastí matematiky – tropickou geometrií. Obsahuje základní tropické pojmy a techniky a naznačuje jejich využití v klasické algebraické geometrii. Kromě toho obsahuje řadu cvičení k lepšímu pochopení látky.

Tropické počítání

Tropickými čísly nazýváme obvyklá reálná čísla, ke kterým z formálních důvodů přidáme $-\infty$. Na těchto číslech zavedeme dvě operace: tropické sčítání "$+$" a tropické násobení "$\cdot$", za kterými se neskrývá nic jiného než obvyklé maximum a sčítání: "$x + y$" $= \max\{x, y\}$, "$x \cdot y$" $= x + y$.

Příklad. Platí "$1 + 1$" $= 1$, "$1 + 2$" $= 2$, "$1 \cdot 1$" $= 2$, "$0 \cdot 1$" $= 1$, "$-\infty + 5$" $= 5$.

Poznámka. Tropické operace se v jistém smyslu dohromady chovají podobně jako obvyklé sčítání s násobením. Platí například, že "$a + (b + c)$" $=$ "$(a + b) + c$" nebo "$a(b + c)$" $=$ "$ab + ac$". Prvek $-\infty$ hraje obvyklou roli nuly, zatímco nula hraje obvyklou roli jedničky. Základní odlišnost ale spočívá ve faktu, že v tropickém světě není žádné odčítání – pro žádné číslo $a \neq -\infty$ neexistuje číslo b tak, aby "$a + b$" $= -\infty$. Proto se tropickým číslům obvykle říká „semitěleso“[1].

Cvičení. (Školákův sen) "$(x + y)^n$" $=$ "$x^n + y^n$".

Tropické polynomy

Funkcím tvaru $f(x) =$ "$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$" říkáme tropické polynomy[2]. Pokud přepíšeme tropické operace podle definice, dostaneme $f(x) = \max\{a_i + n \cdot x\}$, což je maximum z několika lineárních funkcí – tedy konvexní, po částech lineární funkce.

Příklad. "$0 \cdot x$" $=$ "x" $= x$, "$1 \cdot x$" $= x + 1$, "$3x^3 - 2x^2 + x + 3$" $= \max\{3x + 3, 2x - 2, x, 3\}$.

[1] Zatímco reálná čísla tvoří tzv. těleso.

[2] Formálně správnější je říkat „tropické funkce“, neboť dva polynomy mohou odpovídat jedné funkci, např "$x^2 + x + 0$" $= \max\{2x, x, 0\} = \max\{2x, 0\} =$ "$x^2 + 0$".

Definice. Kořen tropického polynomu $f = \sum_0^n a_i x^i$ je takové číslo x_0, ve kterém se láme graf polynomu. Jinými slovy to je číslo, pro které platí $a_i + ix_0 = a_j + jx_0$ pro nějaká $0 \leq i, j \leq n$. Maximum výrazu $|i - j|$ pro taková i a j nazýváme násobnost kořene x_0. Násobnost kořenu tedy vyjadřuje, jak moc se graf zlomí.

Cvičení. Nakresli grafy polynomů "$x^3 + 2x^2 + 3x + (-1)$" a "$x^3 + (-2)x^2 + 2x + (-1)$" a urči jejich kořeny.

Cvičení. Tropické číslo x_0 je kořenem polynomu $p(x)$ s násobností aspoň k, právě když existuje polynom $q(x)$ tak, že "$p(x) = (x + x_0)^k q(x)$".

Cvičení. Tropický polynom stupně n má přesně n kořenů, pokud je počítáme s násobností.

Každý tropický polynom stupně n se tedy dá zapsat jako součin n lineárních polynomů, podobně jako komplexní polynomy. Naopak reálné polynomy tuto silnou vlastnost nemají.

Tropické křivky

Zajímavá situace nastane, pokud vezmeme tropické polynomy dvou proměnných x a y a díváme se na kořeny těchto polynomů (tím opět myslíme místa, kde se láme graf polynomu). Dostaneme tak „tropické křivky“, podobně jako v klasické geometrii dostaneme obvyklé rovinné křivky.

Příklad. Křivka zadaná polynomem $x+y+0$ je složena z tří polopřímek vedoucích z počátku soustavy souřadné v západním, jižním a severovýchodním směru.

Cvičení. Všechny křivky "$ax + by + c$" mají stejný tvar. Říkáme jim tropické přímky.

Cvičení. (Nakresli si koníka) Načrtni graf křivky "$x^2 + 1xy + (-3)y^2 + x + y + 0$".

Cvičení. Jak mohou obecně vypadat grafy polynomů stupně dva, tj. tropické kuželosečky?

Pro každý polynom "$P(x, y)$" vyznačme v rovině body (i, j) pro všechny jednočleny $x^i y^j$, které se vyskytují v polynomu $P(x, y)$, dále spojme hranou ty body, které odpovídají jednočlenům, jejichž oblasti (místa, kde tento jednočlen odpovídá maximu) se v grafu křivky dotýkají. Takto dostaneme duální mnohoúhelník (dále jen duálník) tropické křivky.

Cvičení. Nakresli duálník tropické přímky a koníka.

Cvičení. Jakým objektům v duálníku odpovídají vrcholy tropických křivek? Co platí pro hranu křivky a odpovídající hranu v mnohoúhelníku?

Cvičení. Zkus najít metodu, jak nakreslit tropickou křivku na základě znalosti jejího duálníku.

Věta. (tropická verze Bézoutovy věty) *Nechť C_1 a C_2 jsou křivky stupně d_1 a d_2, které se protínají jen v konečně mnoha bodech a v žádném z vrcholů. Potom je počet průsečíků C_1 a C_2 roven $d_1 \cdot d_2$.*

Důležitým pozorováním je, že sjednocením dvou tropických křivek je tropická křivka. Násobnost průsečíku se poté definuje jako obsah odpovídající oblasti mnohoúhelníka (což musí být rovnoběžník). S tímto uvědoměním se můžeš sám vrhnout na důkaz Bézoutovy věty.

Úloha. Dokaž Bézoutovu větu.

Z reality do tropů a zpět

Standardním semitělesem v matematice nejsou tropická, nýbrž nezáporná reálná čísla. Předvedeme si, jak spolu navzájem souvisejí: Pro každé $t > 1$ vezměme funkci z nezáporných reálných čísel do tropických čísel, která číslu x přiřadí $\log_t(x)$. Jde o bijekci, inverzní zobrazení přiřadí tropickému číslu a nezáporné číslo t^a. Zavedeme na tropických číslech operaci $\cdot_t$ takový, že vezmeme odpovídající nezáporná reálná čísla, ta normálně vynásobíme a podíváme se, kterému tropickému číslu odpovídá výsledek. Tyto funkce převádějí obvyklé násobení na tropické násobení:

$$a \cdot_t b = \log_t(t^a \cdot t^b)) = \log_t(t^a) + \log_t(t^b) = a + b = \text{"}a \cdot b\text{"}.$$

Nic podobného ale neplatí pro sčítání:

$$a +_t b = \log_t(t^a + t^b) \neq \max\{a, b\}.$$

Můžeme se nicméně podívat, co se stane, když pošleme t do nekonečna: BÚNO $a = \max\{a, b\}$. Platí nerovnosti

$$a = \log_t(t^a) \leq \log_t(t^a + t^b) \leq \log_t(2t^a) = a + \log_t(2).$$

Vidíme, že náš výraz je z obou stran sevřen výrazy, které jdou k a, sám proto také jde k $a = \max\{a, b\}$.

Podobnou metodou založenou na funkcích (z reálné roviny do tropických čísel) zadaných jako $(\log_t |x|, \log_t |y|)$ můžeme převádět klasické křivky na tropické. Zajímavé je, že se tento proces dá obrátit – díky tomu můžeme pomocí jednoduchých tropických křivek vytvářet a popisovat „opravdové“ algebraické křivky, což je jinak obtížný problém[3].

Literatura a zdroje:

Při tvorbě příspěvku jsem čerpal z přednášky profesora Iliy Itenberga, kterému bych tímto velmi rád poděkoval.

[1] *http://arxiv.org/pdf/1311.2360v3.pdf*

[3] V podstatě se jedná o šestnáctý Hilbertův problém, jenž zůstává stále otevřený pro křivky stupně osm a víc.

[2] *http://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/TropicalBook23.8.13.pdf*
[3] *http://math.jacobs-university.de/summerschool/2013/videos/index.php*